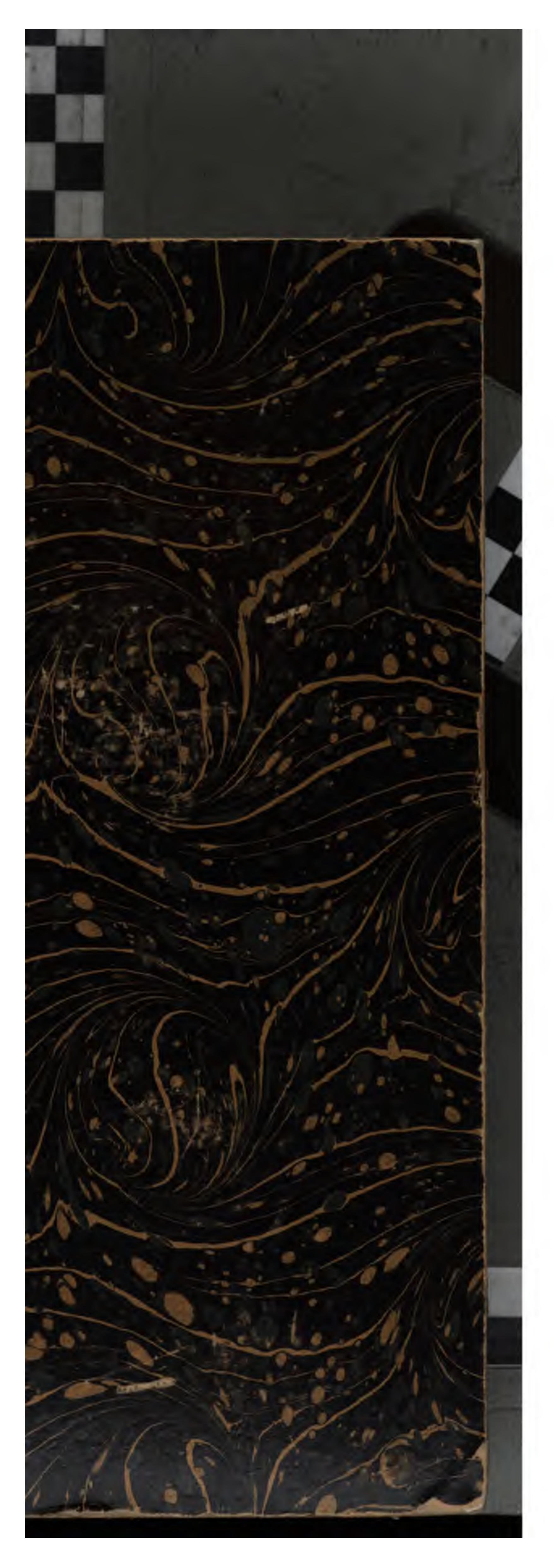












GRUNDZÜGE DER GEOMETRIE

VON MEHREREN DIMENSIONEN

UND MEHREREN ARTEN GRADLINIGER EINHEITEN

IN ELEMENTARER FORM ENTWICKELT.

VON

GIUSEPPE VERONESE,

PROFESSOR AN DER KÖNIGL. UNIVERSITÄT ZU PADUA.

Solche Versuche einer gründlichen Erneuerung der Principien findet man nicht selten in der Geschichte des menschlichen Wissens. Heute sind sie eine natürliche Frucht des kritischen Geistes, welcher mit vollem Recht der stete Berather der wissenschaftlichen Forschungen ist. (*E. Beltrami:* Saggio di interpretazione della Geometria non Euclidea.)

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS
NACH EINER NEUEN BEARBEITUNG DES ORIGINALS

ÜBERSETZT

VON

ADOLF SCHEPP,

PREMIERLIEUTENANT A. D. ZU WIESBADEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

Seitdem die Veröffentlichung von *Riemann's* Abhandlung über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, die Aufmerksamkeit der Mathematiker wieder auf die Axiome der Geometrie speciell die Theorie der Parallellinien gelenkt hat, ist das Interesse an der Frage nicht wieder erloschen. Aus den letzten fünfundzwanzig Jahren liegt eine stattliche Reihe von Arbeiten vor, in denen von verschiedenen Gesichtspunkten aus die Fundamente der Geometrie erörtert und die unter gewissen Annahmen möglichen Systeme von geometrischen Sätzen aufgestellt sind. Man hat sich dabei nicht begnügt, die Frage nach der wissenschaftlichen Stellung des elften Axioms des *Euclid* kritisch zu untersuchen, sondern hat auch seine Aufmerksamkeit dem fünften Axiom des *Archimedes* zugewandt.

Die meisten Arbeiten über die Nicht-*Euclid*'sche Geometrie beschränken sich, soweit sie rein synthetisch verfahren, auf die *Lobatschewsky*'sche Geometrie oder, wenn sie die andern möglichen Systeme auch in Betracht ziehen, leiten sie nach wenigen synthetischen Erörterungen die Eigenschaften der Raumfiguren durch Rechnung ab.

Das Werk des Professors *Veronese*, dessen Uebersetzung wir hier den deutschen Mathematikern darbieten, ist wohl das erste, das streng synthetisch, ohne Rechnung und in voller Allgemeinheit die Geometrie von den ersten Grundlagen an aufbaut und es ist bis jetzt auch, so viel wir wissen, das einzige, in dem das fünfte Axiom des *Archimedes* nicht durchgängig vorausgesetzt ist. In den historisch-kritischen Untersuchungen des Anhangs wird zum erstenmal eine Besprechung *sämmtlicher* Hauptarbeiten dieses Jahrhunderts über die Principien der Geometrie geboten.

Da grade in Deutschland die Frage nach der Begründung der Geometrie besonders lebhaft erörtert wurde und noch wird, so glauben wir, dass die Uebersetzung des *Veronese*'schen Buches, dessen Lectüre für einen Leser, der die italienische Sprache nicht beherrscht, nicht ganz leicht ist, vielen deutschen Mathematikern willkommen sein wird. Indem wir wegen des Zieles, das er sich gesteckt und des Planes, den er verfolgt, auf *Veronese*'s eigene Vorrede verweisen, wollen wir nur bemerken, dass beim Leser keine besonderen Vorkenntnisse vorausgesetzt werden, sondern nur angenommen wird, dass er mathematisch zu denken gelernt habe.

Professor *Veronese* hat die Freundlichkeit gehabt, uns zu unsrer Uebersetzung die Correcturen und Abänderungen zur Verfügung zu stellen, die sich seit dem Erscheinen des Buches als nöthig oder wünschenswerth herausgestellt haben.

Wir haben uns bemüht, den Sinn des Originals getreu wiederzugeben und uns bei den Definitionen, Axiomen u. dergl. dem italienischen Wortlaut möglichst genau angeschlossen. Bei schwierigen Stellen war Herr Prof. *Veronese* so gütig, uns über die Richtigkeit unserer Auffassung Auskunft zu geben. Wir fühlen uns gedrungen, ihm für seine Bemühungen auch an dieser Stelle unsren aufrichtigen Dank auszusprechen.

Schepp.

Vorrede des Verfassers.

Der lebhafte Streit um die Geometrie von mehr als drei Dimensionen zwischen Mathematikern und zwischen Mathematikern und Philosophen, welcher unsrer Ansicht nach hauptsächlich hervorgerufen wurde einerseits durch die rein analytische Methode, mit welcher man die Geometrie behandelte und dann durch die Vertauschung der abstracten oder numerischen Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen mit den eigentlich so genannten geometrischen Räumen; der allgemeine Glaube, in der Betrachtung dieser Räume sei immer ein analytischer Begriff verborgen und man könne diese Räume nur mittelst der Analysis[1]) sicher behandeln; die daraus folgende Verwirrung bezüglich des Begriffes des Raums und mithin auch des Wesens der Geometrie selbst, hatten uns schon 1882 davon überzeugt, dass ein Buch bestimmt auf elementare Art darzuthun, wie die Geometrie der Räume von mehr als drei Dimensionen als reine Wissenschaft vollkommen analog derjenigen der Ebene und des gewöhnlichen Raums entwickelt werden kann, von Nutzen und Bedeutung sein würde, theils um den rein geometrischen Begriff solcher Räume zu wahren und das Studium dieser Geometrie zu erleichtern und zu verbreiten, theils um die Behauptung besser zu begründen, dass die Geometrie von mehr als drei Dimensionen unabhängig von ihren Anwendungen auf den gewöhnlichen Raum ist.[2])

Hätten wir die Geometrie des gewöhnlichen Raums als bekannt voraussetzen können, so hätte die Arbeit weit weniger Schwierigkeit gemacht. Das konnten wir aber nicht aus zwei Gründen: erstens, weil wir auf die ersten Begriffe der Geometrie zurückgehen mussten, um stufenweise den Begriff der

---

1) „Der Begriff von Raumgebilden, die der gewöhnlichen Anschauung nicht entsprechen sollen, kann nur durch die rechnende analytische Geometrie sicher entwickelt werden" (*v. Helmholtz:* Die Thatsachen in der Wahrnehmung. S. 24. Berlin 1879).

„Es gibt Leute, welche glauben es werde gelingen von analytischen Begriffen und der Benutzung der Coordinaten sogar die Definition der Räume von n Dimensionen zu befreien" (*D'Ovidio:* Uno sguardo all' origine e allo sviluppo della matematica pura. S. 58. Turin 1889).

2) Auf diese Arbeit haben wir in einer Anmerkung zu unsrer Abhandlung „La superficie omaloide normale del 4^0 ordine a due dimensioni dello spazio a cinque dimensioni, e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario" (Atti della R. Acc. dei Lincei. 1884) hingewiesen; ebenso auf einen Cursus von Vorlesungen, welche wir an der Universität zu Padua über diesen Gegenstand hielten und welche sich dann in den folgenden Jahren über die Hauptpunkte dieses Buchs verbreiteten. Das Manuscript zu dem vorliegenden Buch wurde der Königl. Acc. dei Lincei 1889 überreicht; wir haben aber besonders im Anhang, welcher zuletzt gedruckt wurde, die Arbeiten, welche nach 1889 über diesen Gegenstand veröffentlicht wurden, noch möglichst berücksichtigt.

Graden, der Ebene und des Raums von drei Dimensionen zu entwickeln und alsdann auf dieselbe Art zu dem Begriff der Räume von mehr als drei Dimensionen überzugehen; dann aber, weil wir durch Annahme der Prämissen und Deductionen der gewöhnlichen Elementargeometrie, wie sie bis heute entwickelt wird, unsern Betrachtungen die Eigenschaft hätten zu Grunde legen müssen, dass die physische Welt in dem Bereich unsrer Beobachtungen drei Dimensionen besitzt, *eine Eigenschaft, welche für die wissenschaftliche Entwicklung der Geometrie durchaus nicht nöthig ist.*

Zum Neuaufbau der Grundprincipien dieser Wissenschaft mittelst der synthetischen Methode schien es uns ferner unerlässlich zu sein, diese Principien von einem allgemeineren Standpunkt aus zu betrachten derart, dass die Geometrie des gewöhnlichen Raums, wie diejenige eines jeden andern Raums von n Dimensionen ihre eigenen Grundlagen und eigenen Gesetze in den Grundlagen und Gesetzen eines allgemeineren Raums fände; auf der andern Seite schien es uns auch, um jedes Vorurtheil aus dem Wege zu räumen, nothwendig zu sein, überhaupt keine mathematischen Kenntnisse sondern nur die Fähigkeit und Gewohnheit mathematisch zu denken bei dem Leser vorauszusetzen.

Weil wir mit den Fundamenten beginnen wollten, so befanden wir uns vor der sehr verwickelten Frage der geometrischen Axiome und mithin auch der Principien der reinen Mathematik, welche beide eng miteinander zusammenhängen und um welche sich nicht Wenige der berühmtesten Mathematiker besonders in unserm Jahrhundert abgemüht haben.

In dieser Vorrede geben wir einen kurzen Rechenschaftsbericht über unsre Methode und stellen Betrachtungen an, mittelst welcher man unter Zuhülfenahme des Anhangs die Ideen, welche in unserm Werk herrschen, besser beurtheilen kann. In diesem Bericht geben wir Erörterungen über die geometrischen Axiome und die eigentlich sogenannte Geometrie, welche man mit Nutzen lesen wird, wenn man sich eine klare Vorstellung von den ernsten Schwierigkeiten bilden will, welche eine solche Frage bietet, und von der Nothwendigkeit, diese Schwierigkeiten aus dem Weg zu räumen. Das Buch selbst aber ist von ihnen unabhängig; wer daher nicht genügend vorbereitet ist oder wem es schwer fällt, gewisse feine Discussionen, zu deren exacter Interpretation die Entwicklung im Text nöthig ist, zu verstehen oder zu beurtheilen, der kann ohne Weiteres zur Lectüre des Textes übergehen und sich vorbehalten später zu diesem Rechenschaftsbericht zurückzukehren.[1])

1) Aus diesem Grund waren wir zuerst im Zweifel, ob es nicht besser wäre die Vorrede ganz zu unterdrücken und uns nur auf wenige Worte zu beschränken, wie es heute meistens geschieht. Die erbitterte Opposition jedoch, welche gewisse nie genau definirte Vorstellungen finden, überzeugten uns, es sei, auch wenn es uns nicht gelänge so kurz zu sein, wie wir wollten, durchaus nöthig darzuthun, dass diese Opposition gegen gewisse von unsern Definitionen oder Hypothesen der Grundlage entbehre. Denn es gibt kein Gebiet der Mathematik, in welchem die Vorurtheile festere Wurzeln geschlagen haben als in dem Gebiet der Principien der Mathematik und speciell der Geometrie und in welchem es leichter wäre, sei es der Unklarheit wegen, in welche unbewusst auch berühmte Autoren verfallen, sei es wegen der wenig aufmerksamen und gewissenhaften Kritik die Begriffe Andrer falsch auszulegen. Diese Vorrede soll kurz zusammengefasst die Zwecke, die Methode und die Hauptresultate des Werks kennen lehren und die Lectüre des Textes denjenigen

Nothwendigerweise haben die gedachten Dinge entweder ein Bild in einem thatsächlich ausserhalb des Gedankens existirenden Gebiet oder nicht; der Punkt der Geometrie gehört z. B. zu den Dingen der ersten Kategorie, weil es äussere Gegenstände gibt, welche uns direct die Vorstellung des Punktes liefern oder sie in uns erwecken und ohne welche es den eigentlich so genannten geometrischen Punkt nicht gibt.[1])

Die Zahl, welche in ihrer ersten Bildung das Resultat der Verrichtung des Zählens von Gegenständen ist, die auch rein abstract sein können[2]), gehört dagegen der zweiten Kategorie an, weil kein Gegenstand ausserhalb des Gedankens nöthig ist, welcher sie darstellen d. h. ihr Bild liefern müsste, damit sie ihre mathematische Bedeutung erhalte.[3])

Die Dinge der zweiten Kategorie heissen *Formen* und die Wissenschaften, welche sich mit den Formen beschäftigen, *formale.* Solche sind die Logik und die reine Mathematik. In diesen Wissenschaften geht die Wahrheit aus der Uebereinstimmung der verschiedenen Acte des Gedankens hervor.

Die Wissenschaften von den thatsächlich ausserhalb des Gedankens existirenden Gegenständen heissen *experimentale.* Die Wahrheit in diesen Wissenschaften beruht dagegen auf der Uebereinstimmung des Gedankens mit dem Gegenstand ausserhalb desselben und wir sind daher gezwungen in ihnen alles Dasjenige für unmöglich zu halten, was mit den Gesetzen des Gedankens und des Gegenstandes oder besser der geistigen Vorstellung des Gegenstandes im Widerspruch steht.

Die formalen Wissenschaften haben ihre Grundlage in den geistigen Principien und Operationen und in Definitionen oder Hypothesen; der Beweis gründet sich bei ihnen auf die Combination der verschiedenen Acte des Gedankens ohne andre Gebiete zu betreten. Da bei den experimentalen Wissenschaften Uebereinstimmung zwischen dem Gegenstand und dem Gedanken herrschen muss, so stützen diese sich auf diejenigen Wahrheiten, welche man mittelst der Wahr-

---

erleichtern, welche nur die Entwicklung in Bezug auf eine gegebene Idee prüfen wollen; denn nicht alle Grundideen sind derart abhängig, dass der Ausschluss einer derselben dazu führen müsste auch die andern zu verwerfen. Sicher ist freilich, dass alle ihren Grund zu bestehen in ihrer Gesammtheit haben und dass das Buch mithin in seinem Ganzen und der Vereinigung seiner verschiedenen Zwecke beurtheilt sein will.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als würde zu spät mit der Behandlung der Geometrie begonnen; es ist dies aber nur scheinbar so, weil die Vorrede eigentlich zum Verständniss des Textes nicht nöthig ist und in der Einleitung die einfachen Theile und die Consequenzen des Axioms II und der Hypothese I des I. Theils entwickelt werden. Lässt man daher die Sätze der Einleitung gelten, so kann man das Studium der Geometrie direct mit Theil I und der Räume von vier und n Dimensionen mit Theil II beginnen.

1) Einl. S. 54 und Theil I S. 225, 226.

2) Einl. S. 30, 31.

3) Damit meinen wir nicht, die Dinge der zweiten Kategorie würden nicht in Folge der Beobachtung von Gegenständen ausserhalb des Gedankens gedacht; das Wesentliche ist sich davon zu überzeugen, ob das gedachte Ding ohne die nöthige Beihülfe der sinnlichen Beobachtung definirt oder mathematisch gegeben werden, d. h. ob es unabhängig von dieser Beobachtung bestehen könne, wie es grade bei der Zahl, nicht aber dem Punkt der Fall ist. Ebenso meinen wir nicht, der Punkt sei nicht ein Product unsres Geistes; er ist ein solches Product aber in der nothwendigen Verbindung mit der äusseren Wahrnehmung.

nehmung dieses Gegenstandes anschaut, welche aber nicht auseinander abgeleitet werden können. Diese Wahrheiten heissen *Axiome* und die aus den Axiomen abgeleiteten Wahrheiten *Theoreme*. Es gibt ferner in der Geometrie als Wissenschaft Axiome, welche man mittelst der Beobachtung äusserer Gegenstände anschaut und dann auf solche Gegenstände ausdehnt, von denen wir die Annahme machen, sie existirten thatsächlich ausserhalb des Gebiets der äussern Beobachtung; es gibt dagegen andre, welche nur solche Gegenstände betreffen, die wir uns thatsächlich ausserhalb dieses Gebiets existirend denken und welche, obwohl sie den ersten in unsrer Vorstellung gleich sind, nur eine abstracte Existenz haben; die Geometrie kann daher, wie wir sie auffassen, eine *gemischte* Wissenschaft genannt werden. Diese letzten Axiome werden als Grundwahrheiten angenommen, obgleich sie durch unsere Erfahrung nicht erprobt sind, unter der Voraussetzung jedoch, dass sie den Gesetzen des Gebiets unsrer Erfahrung nicht widersprechen; sie haben daher nicht die Augenscheinlichkeit der ersten und sind im eigentlichen Sinn *Postulate* oder *Hypothesen*.

Es ist ferner klar, dass man zu den Axiomen einer speciell experimentalen Wissenschaft diejenigen Sätze nicht zählen darf, welche der reinen Logik angehören, zum Verständniss nöthig und Gemeingut aller Wissenschaften sind.

Die formalen Wissenschaften sind für uns exact und die experimentalen sind dies um so mehr, je einfacher und anschaulicher die eigentlich sogenannten Axiome sind, auf welche sie sich stützen, und je schneller sie ihre Gegenstände durch abstracte Formen ersetzen können und sie sich auf deductive Art entwickeln lassen. Die exacteste experimentale Wissenschaft ist die Geometrie, weil die Gegenstände ausserhalb des Gedankens, welche zur Bestimmung der Axiome dienen, in unsrem Geist durch abstracte Formen ersetzt werden und die Wahrheiten der Gegenstände mithin durch die Combination der Formen bewiesen werden, welche man vorher unabhängig von dem, was ausserhalb vorgeht, erhalten hat. Dies ist der Grund, wesshalb die Geometrie nicht ohne jede Berechtigung (wie aus analogen Motiven die rationale Mechanik) zu der reinen Mathematik gerechnet wird, obgleich sie nach dem Boden, in dem sie wurzelt, eine experimentale Wissenschaft ist.[1]) Man betritt schnell das praktische Gebiet, wenn man eine empirische Construction dieser Wahrheiten sucht und mit den ursprünglichen Gegenständen auf analoge Art wie mit den abstracten Formen operirt, welche von ihnen erzeugt werden. Diese Operationen können ausserhalb unsres Gedankens nur mit Gegenständen eines beschränkten Gebiets nämlich des Gebiets unserer thatsächlichen äusseren Beobachtungen ausgeführt werden; die praktische Unmöglichkeit aber, es ebenso mit andern Gegenständen innerhalb oder ausserhalb dieses Gebiets zu machen, nimmt den Wahrheiten,

1) Man kann jetzt wohl sagen, dass alle Mathematiker, welche sich speciell mit der Geometrie befassen, den empirischen Ursprung der Geometrie gelten lassen. *Gauss* spricht in einem Brief an *Bessel* (Göttingen, 27. Febr. 1829. Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Bessel*) die Ueberzeugung aus, die Geometrie lasse sich nicht a priori construiren, und wiederholt dies in einem andern Brief an *Bessel* (9. April 1830). Ebenso drückt sich *Grassmann* (Ausdehnungslehre. Einl. Leipzig 1844) in demselben Sinn aus. Für sie hat aber die Geometrie stets drei Dimensionen (siehe den Anhang).

zu denen man in einem abstract viel ausgedehnteren Gebiet gekommen ist, durchaus nichts von ihrer Geltung.

Wir machen sogar gradezu einen Unterschied zwischen der Geometrie und ihren praktischen Anwendungen und finden Axiome, welche zwar nicht für die wissenschaftliche Entwicklung der Geometrie aber für ihre praktischen Anwendungen nöthig sind.

Die theoretische Geometrie unterscheidet sich desshalb von den übrigen äusseren experimentalen Wissenschaften dadurch: sie hat die äussere Beobachtung nöthig um ihre eigentlich so genannten Axiome festzustellen, macht sich aber schnell von ihr unabhängig, indem sie nicht mehr die Körper selbst sondern den Ort, den sie in dem leeren Anschauungsraum einnehmen, betrachtet und wird damit sofort zu einer rein deductiven Wissenschaft.[1]) Und selbst die theoretische Mechanik kann sich streng genommen nicht von den Körpern absondern, da z. B. das Princip der Bewegung die Körper selbst und nicht den von ihnen eingenommenen Ort betrachtet. Jedenfalls bedarf die theoretische Geometrie in ihren Grundzügen nicht der nöthigen Beihülfe irgend einer andern experimentalen Wissenschaft z. B. der Mechanik und der Physik (wie wir in der Folge noch näher ausführen werden), während dagegen diese Wissenschaften die Geometrie nöthig haben.

Wann ist eine mathematische Hypothese möglich? *In dem mathematischen Gebiet ist die Definition möglich, das Postulat oder die gut bestimmte Hypothese, deren Glieder weder einander, noch den logischen Principien und Operationen, den früheren Hypothesen und den Wahrheiten widersprechen, die aus den letzteren abgeleitet werden.*

Gut bestimmt heisst, was nur einem Begriff entspricht, über dessen Bedeutung kein Zweifel besteht. Eine neue Form oder eine Eigenschaft einer gegebenen Form, welche mittelst einer Hypothese festgestellt wurde, darf nicht einzig von den vorausgehenden Wahrheiten abhängen, weil sie in diesem Fall entweder die unmittelbare Folge dieser Wahrheiten ist oder nicht, in dem letzten Fall aber aus ihnen abgeleitet werden muss.

Eine Hypothese ist *mathematisch falsch* nur dann, wenn sie eine Eigenschaft aufstellt, welche mit den vorhergehenden Wahrheiten oder denjenigen, welche sich aus ihnen ableiten lassen, im Widerspruch steht.

Die Möglichkeit einer Hypothese hängt nicht von ihrer Fruchtbarkeit ab, welche den mathematischen Werth der Hypothese liefert. Eine Hypothese kann möglich sein und zugleich derart, dass sie zu keinem Resultat führt oder das Gebiet unsrer Untersuchungen einschränkt. Es ist dies eine andre gewiss sehr wichtige Frage; denn die Hypothese soll der Deduction und dem Bedürfniss unsres Geistes, sich keine ungerechtfertigten Schranken bei der Erforschung des mathematisch Wahren aufzuerlegen, freies Feld lassen und jede Hypothese soll zur Entdeckung neuer Wahrheiten oder zur bessern Ver-

1) I. Theil S. 225, 226.

bindung schon bekannter Wahrheiten führen. Der geringe Werth einer Hypothese ist aber kein stichhaltiger Grund gegen ihre Möglichkeit.

Jede mittelst einer möglichen Hypothese aufgestellte oder gegebene neue Form muss den Principien und den geistigen Operationen unterworfen werden, welche zur Erforschung der Wahrheit nöthig sind. Es ist dies eine logische Nothwendigkeit. Die Gesetze der mathematischen Operationen jedoch, welche mit ihnen vorgenommen werden, hängen von der Definition oder Construction der neuen gut bestimmten Form ab und es ist a priori nicht ausgeschlossen, dass diese Gesetze von denjenigen, welche für die vorher betrachteten Formen galten, verschieden sind.[1]) Es ist desshalb a priori nicht erlaubt in einem solchen Fall dieselben Gesetze auf die Operationen mit den neuen Dingen anzuwenden.

Eine Hypothese A ist von einer andern Hypothese B unabhängig, wenn A oder sein Gegentheil (Nicht-A) nicht aus B folgt.

Eine von den früheren unabhängige sich selbst nicht widersprechende Hypothese führt nicht nothwendiger Weise zu Widersprüchen. Denn die Mathematik muss, da sie sich mit den Formen beschäftigt, wenigstens eine erste Form betrachten und sie von den andern durch gewisse ihrer Eigenschaften unterscheiden. Wenn eine dieser Eigenschaften A unabhängig von den andern B, C, D, u. s. w. und gut bestimmt ist, so bedeutet das, dass A oder sein Gegentheil keine Folge von B, C, D, u. s. w. ist. Wenn A nothwendiger Weise zu einem Widerspruch führte, so hiesse das, dass sich aus B, C, D, u. s. w. die entgegengesetzte Eigenschaft Nicht-A ableiten liesse.

Zweifellos ist die Unabhängigkeit und Wahl einer neuen Hypothese stets, wie gesagt, durch die früher aufgestellten Hypothesen bedingt. Man kann daher sagen, dass, wenn die Kennzeichen der mathematischen Formen festgesetzt sind, die mathematische Möglichkeit durch das Princip des Widerspruchs, nämlich: „A ist A und ist nicht Nicht-A" geregelt wird. Und die Möglichkeit wird für die Mathematik eine, wenn auch abstracte, Wirklichkeit, weil die Formen des mathematischen Gedankens ebenso wahr sind, wie die Formen der Sinnenthätigkeit, welche eine concrete Wirklichkeit besitzen. Niemand kann in der That an der Existenz unsres Verstandes und seiner logischen Verrichtungen zweifeln, ohne sich zu widersprechen.

Beweist man die Unabhängigkeit der Hypothese von den früheren, so ist damit auch ihre Möglichkeit dargethan und wenn man zuerst ihre Möglichkeit beweist, was in der Mathematik durchaus nöthig ist, so kann damit ihre Unabhängigkeit noch nicht dargethan sein.

Wenn eine Hypothese auch nach einer langen Reihe von Untersuchungen zu keinem Widerspruch geführt hat, so kann man daraus auf die Möglichkeit aber nicht die Gewissheit schliessen, dass sich bei weiteren Entwicklungen kein Widerspruch zeigen werde, weil es sehr wohl möglich sein kann aus einer Unwahrheit eine oder mehrere Wahrheiten abzuleiten. Und in der Mathe-

1) So untersteht z. B. die Summe der transfiniten Zahlen *G. Cantor*'s (Einl. S. 118) nicht dem Commutationsgesetz, wie die Summe der endlichen Zahlen.

matik genügt die subjective Ueberzeugung von der Wahrheit, wie begründet sie sein mag, allein nicht, obgleich auch in den mathematischen Disciplinen eine persönliche Meinung nöthig ist, da von ihr speciell der Fortschritt der Wissenschaft abhängt und eine blosse Combination von Zeichen und Gegenständen ohne eine leitende Idee zu Nichts führen kann.

Der Beweis der Möglichkeit der Hypothesen kann daher nicht umgangen werden. Fehlt ein Beweis zur Rechtfertigung der Hypothese, so genügt es, wenn man sie durch die directe Erfahrung rechtfertigen kann, wie es z. B. bei den geometrischen Axiomen der Fall ist, grade der Uebereinstimmung wegen, welche, wie wir gesagt haben, zwischen der Wahrnehmung der Gegenstände und den logischen Gesetzen des Gedankens herrscht. Man soll sich aber in der That nicht eher zufrieden geben, bis man einen rein logischen Beweis gefunden hat und um dies zu erreichen muss man vor Allem von einfachen Axiomen oder auch von Axiomen ausgehen, deren einfache Theile geprüft werden; kann man den Beweis nicht beibringen, so möge man wenigstens Versuche anstellen, welche Anderen zu weitern Forschungen die Unterlage bieten können.

Es bleibt noch die allgemeine Frage zu behandeln, ob und wann eine Gruppe von Axiomen oder Postulaten für abstract möglich gehalten werden kann. Wir sind der Ansicht, dass man eben die Operationen und Axiome der Logik zu Hülfe nehmen muss, wie wir es bei unsern Operationen und Hypothesen der Einleitung gethan haben. Wenn aber auch aus einer falschen Hypothese Wahrheiten abgeleitet werden können, so sind doch die in dieser Richtung vorliegenden Beispiele so einfach und die Falschheit ist im Uebrigen so offenbar, dass eine mathematische Hypothese, welche ganz oder zum Theil falsch ist, unzweifelhaft sehr schnell zu irgend einem Widerspruch führt. Freilich ist man in der Vergangenheit oft blind genug gewesen und hat die Wirkung der Widersprüche durch andere falsche Hypothesen vermeiden wollen. Solche Hypothesen darf man aber nicht mit denjenigen verwechseln, welche zwar auch ganz oder zum Theil falsch, doch in dem Geist des Studirenden bei dem weitern Verlauf der Untersuchung durch exacte Hypothesen oder solche ersetzt werden, welche die Falschheit der ersten vermeiden.

Wann ist aber eine Hypothese *geometrisch möglich?* Wie wir gesagt haben, dürfen die Hypothesen einer experimentalen Wissenschaft nicht nur den Grundsätzen und Operationen der Logik, sondern auch den Eigenschaften des speciellen Gegenstandes dieser Wissenschaft nicht widersprechen. Nach den Merkmalen, welche die Geometrie charakterisiren, ist eine abstracte Hypothese geometrisch möglich, wenn sie weder den zur theoretischen Entwicklung der Geometrie nöthigen Axiomen, welche wir aus der Erfahrung nehmen, noch den Eigenschaften der Raumanschauung in ihrem begrenzten unsern äusseren Beobachtungen entsprechenden Gebiet zuwider ist.

Die möglichen abstracten Hypothesen, welche das Gebiet der Geometrie erweitern, können zur Erforschung der Wahrheit in dem beschränktesten concreten Gebiet dienen, ohne dass desshalb diese Hypothesen nothwendiger Weise

die concrete Wirklichkeit der von ihnen definirten Formen voraussetzen. Darin unterscheidet sich die Geometrie von den Wissenschaften, die sich beständig mit den Ereignissen der äusseren Welt beschäftigen und bei welchen, wie z. B. bei der Physik, der einzige Zweck der Hypothese die Erklärung und Verknüpfung der Naturerscheinungen ist, wobei diese Hypothesen nicht immer den Thatsachen zu entsprechen brauchen und auch geändert oder durch andre ersetzt werden können. Unser allgemeiner Raum ist geometrisch möglich, er hat desshalb eine *abstracte Wirklichkeit*, womit wir aber nicht meinen, die äussere Welt sei an sich eine vollständige Darstellung dieses Raums. So haben wir bei der Hypothese der verschiedenen gradlinigen Einheiten, welche eine Folge unsrer Hypothesen über das thatsächliche Unendlichgrosse und Unendlichkleine oder mit andern Worten der Unabhängigkeit der Geometrie von dem Axiom V des Archimedes ist, nicht nöthig *an die concrete Wirklichkeit* des thatsächlich Unendlichgrossen und Unendlichkleinen *zu glauben*. Auch wenn z. B. bewiesen würde, dass thatsächlich in der Wirklichkeit unser allgemeiner Raum nicht existirt, so hätten wir desshalb geometrisch nicht nöthig auf diese Hypothese zu verzichten.[1]) Wenn wir z. B. die Figuren von vier Dimensionen nicht so wie die von drei anschauen können, so bedeutet dies durchaus nicht, dass die Hypothese über die vier Dimensionen in geometrischem Sinn den Hypothesen und mithin den geometrischen Eigenschaften des Anschauungsraums von drei Dimensionen widerspricht.[2])

Dagegen sind diejenigen Hypothesen des Gebiets, welches dem Gebiet unsrer äusseren Anschauungen entspricht, auszuschliessen, die der Raumanschauung widersprechen, wie z. B. die Hypothese, der Kreis sei keine geschlossene Linie oder habe reelle Asymptoten.[3])

Hätte man genau festgestellt, wann eine Hypothese mathematisch oder geometrisch möglich ist, so würden sich viele unnütze Streitigkeiten über die Möglichkeit fast aller neuer Hypothesen, welche nach und nach das Besitzthum der Wissenschaft bereichert haben, haben vermeiden lassen. Die reine Mathematik weist nur dasjenige zurück, was falsch ist; um daher eine mathematische Hypothese zu bestreiten, muss man beweisen, dass sie falsch ist; der Beweis muss aber logisch-mathematisch nicht philosophisch in dem strengen Sinn des Worts sein und es muss aus ihm hervorgehen, dass die Hypothese nothwendiger

1) Wir, deren Fach die Geometrie ist, haben daher mit den Spiritisten und der Fähigkeit der *Media* nichts gemein. Auch wenn uns angesehene Männer die Versicherung geben, gewisse spiritistische Erscheinungen fänden in der That statt, so möchten wir dies der geheimnissvollen Art wegen, in welcher die Beobachtungen angestellt werden, bezweifeln. So ist es z. B. mit den Knoten und dem Tisch, die Professor *Zöllner* (Wiss. Abh. Leipzig. 1870) beschreibt und so freundlich gewesen ist uns in Leipzig zu zeigen.
Wenn aber die Hypothese über die vierte Dimension oder den allgemeinen Raum dazu dienen könnte in der Physik neues Licht über die Naturerscheinungen und ihre unbekannten Ursachen zu verbreiten, dann wäre sie wissenschaftlich gerechtfertigt und der Physiker würde in unserm Buch die geometrischen Grundeigenschaften finden, die er nöthig hat. Aber auch hier müssen wir hervorheben, dass der Werth der geometrischen Hypothese von dem Werth, den die physische haben kann, unabhängig ist.

2) Siehe später und den Anhang.

3) Siehe den Anhang.

Weise zu einem Widerspruch führt, wenn sie eine einfache Hypothese ist; denn ist sie zusammengesetzt, so können einzelne Theile auch wahr und fruchtbar sein. Wenn das mathematische Problem über die Fundamente der Mathematik und Geometrie bis an die Schwelle des philosophischen Problems über den Ursprung der mathematischen und geometrischen Ideen vordringt, so geht es doch nicht über diese Schwelle hinaus. Dies ist ohne Zweifel eine grosse Wohlthat für unsre Wissenschaft, weil sie sonst in ihren Principien den vielfachen philosophischen Ansichten anheimgegeben wäre, die sich um die Wahrheit streiten.[1]) Aus Furcht in das Unbestimmte zu gerathen soll man aber auch nicht die Mathematik und Geometrie in ihren Fundamenten auf einen reinen Zeichenconventionalismus reduciren wollen, wohl aber soll man sie auf philosophische Art behandeln, d. h. die Natur der Dinge, mit denen man sich beschäftigt, möglichst klar machen, ohne desshalb die Bedeutung andrer Methoden zu bestreiten, die von einem andern aber beschränkteren Gesichtspunkt ausgehen.

Es ist ja möglich, ohne eine bestimmte Hypothese oder Uebereinkunft z. B. ohne die imaginären Zahlen auszukommen; es hätte dies aber nicht allein eine durchaus ungerechtfertigte Beschränkung des mathematischen Gebiets zur Folge, sondern würde auch Nichts gegen die Hypothese und ihre Consequenzen in dem Gebiet selbst unabhängig von dieser Hypothese beweisen. Es kann vorkommen, dass fruchtbare Hypothesen zu Widersprüchen führen, wie bei der Differenzial- und Integralrechnung der Fall war; man muss dann aber beachten, ob dies die Folge des Princips der Hypothese ist, in welchem Fall sie zu verwerfen wäre, oder ob es daher kommt, dass dieses Princip nicht genau definirt und mithin das Gebiet seiner Gültigkeit nicht genau umschrieben worden ist. Um solche Unzuträglichkeiten zu vermeiden, muss man desshalb die Hypothese in ihre einfachen Theile zerlegen, diese getrennt betrachten und (wie wir später genauer ausführen werden) durch die Principien und Operationen der Logik oder wenigstens durch Thatsachen der Erfahrung rechtfertigen.

Will man uns der hier ausgesprochenen Ideen wegen *Rationalisten* oder *Idealisten* nennen, so nehmen wir den Titel an zum Unterschied von denjenigen,

1) Wer sich eine Vorstellung von dem philosophischen Problem über die Grundbegriffe der Mathematik und Geometrie machen will, mag z. B. *F. Masci*'s: „Sulla natura logica delle conoscenze matematiche" (Rom, 1885) nachlesen, welcher freilich ein Kantianer insofern ist, als er die absolute Wahrheit aller *Euclid*'schen Postulate vertritt und die Möglichkeit einer Geometrie von mehr als drei Dimensionen leugnet. Es scheint übrigens, als ob *Kant* nicht immer ein Gegner dieser Geometrie gewesen wäre, weil er nach dem zu urtheilen, was er in seinen „Gedanken der wahren Schätzung der lebendigen Kraft" sagt, vielmehr an die Existenz verschiedener Räume glaubte. *Kant*'s Werke Bd. V, S. 25. Siehe *B. Erdmann:* „die Axiome der Geometrie". Leipzig, 1871. Ebenso auch *B. Baumann*: „Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neuern Philosophie nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt." Berlin, 1868—1869. In dem ersten Band und einem grossen Theil des zweiten wird eine weitläufige und kritische Auseinandersetzung über die Ideen, welche die Hauptphilosophen von *Suarez* an bis *Hume* über die Grundbegriffe der Mathematik gehabt haben, vom philosophischen Standpunkt des Verfassers aus gegeben. Man kann übrigens behaupten, dass es keinen tüchtigen Philosophen gibt, welcher sich nicht mit vielem Interesse mit den mathematischen Ideen beschäftigt und häufig die Resultate der Mathematik zur Unterstützung seiner eignen Betrachtungen benutzt hätte.

welche dem mathematischen und geometrischen Geist ungerechtfertigter Weise die grösstmögliche logische Freiheit verweigern wollen und sich z. B. bei jedem neuen Resultat und jeder neuen Hypothese fragen, ob sie eine wahrnehmbare Darstellung, z. B. in der Geometrie eine wahrnehmbare rein äussere Darstellung besitze oder nicht. Wir nehmen den Titel aber nur unter der Bedingung an, dass ihm keinerlei eigentlich philosophische Bedeutung beigelegt wird.[1])

Als Mathematiker stützen wir uns auf die Thatsachen des Geistes oder der Wahrnehmung, welche von Niemand bestritten werden können und unser Führer ist das Princip des Widerspruchs. Wir müssen aber natürlich Gegner jener philosophischen Systeme sein, die eben zu Widersprüchen oder unnöthigen Beschränkungen in dem mathematischen oder geometrischen Gebiet führen.[2]) Der Mathematiker mag in so fern ein Philosoph sein, als die Philosophie aus einer neuen Darlegung seiner Principien grossen Nutzen ziehen kann; seine Beihülfe zu dieser Wissenschaft ist aber immer indirect, während auf der andern Seite der Philosoph als solcher die mathematischen oder geometrischen Hypothesen nicht bestreiten kann, sondern suchen muss aus ihnen, wenn sie gut bestimmt sind, einen möglichst grossen Gewinn zu erzielen.

Bei diesem Idealismus haben wir wenigstens vor dem Empiristen voraus, dass wir alle möglichen Hypothesen bei der Erforschung der Wahrheit verwenden und desshalb schneller und besser wie er zu neuen Wahrheiten in eben dem Gebiet, in welches er sich einschliessen will, gelangen können. Wir

---

1) In *Du Bois Reymond*'s „Allgemeiner Functionentheorie. Tübingen, 1882", werden die mathematischen Systeme des reinen Idealisten und Empiristen besprochen (*Wundt*, „Logik. Bd. II. Stuttgart, 1885" bemerkt, dass man in philosophischem Sinn besser Realist und Nominalist sagt). Beide vertheidigen aber ihre Systeme mit philosophischen Argumentationen, die wir nicht acceptiren können (a. a. O. z. B. S. 86, 110—111 und 114—116). Das System des Idealisten ist, wie wir sehen werden, nicht frei von Irrthümern und Unklarheiten.

2) Ist z. B. die geometrische Möglichkeit in Frage, so können wir, wie *F. Klein* darthut (Vergleichende Betrachtungen über neuere geom. Forschungen. Erlangen, 1872), vor dem Problem nicht gleichgültig bleiben, ob z. B. das *Euclid*'sche Postulat über die Parallelen in absolutem Sinn bezüglich unsrer Anschauung wahr ist oder nicht, wie die *Kantianer* behaupten. Wäre es wirklich wahr, so hätten *die Ebenen Lobatschewsky*'s und *Riemann*'s keine Existenzberechtigung und es bliebe nur die Geometrie der Pseudokugel oder der Kugel oder des Sterns in dem *Euclid*'schen Raum oder andrer geometrischer Darstellungen derselben in diesem Raum wahr. Als Mathematiker müssen wir Gegner der Ansicht *Kant*'s sein, weil die Beobachtung, oder die thatsächliche Anschauung uns in dem Theil des Raums, welcher dem Gebiet der äusseren Beobachtungen entspricht, nur *annähernd* bei der Entscheidung der Frage hilft. Dass wir meinen den ganzen Raum anzuschauen, erklärt sich daraus, dass wir uns mit der Einbildungskraft in jeden seiner Punkte versetzen und auf ihn die in einem beschränkten Gebiet ausgeübte Anschauung anwenden. Rein mathematisch berührt uns diese Frage nicht, wohl aber geometrisch. Im Uebrigen, da es unentschieden bleibt, welches das richtige Postulat über die Parallelen ist, warten wir ab, ob die Geometrie nach den Begriffen *Kant*'s entwickelt und die Nothwendigkeit des genannten Axioms anschaulich *a priori* bewiesen wird. *v. Helmholtz* hält den Kantianern entgegen, dass der Raum eine Anschauungsform a priori sein kann, dass es aber die Axiome nicht sind. *Wundt* (Logik. Bd. I) bemerkt, eine solche Ansicht scheine ihm einen Widerspruch zu enthalten. Als Mathematiker müssen wir die Fähigkeit, den Raum anzuschauen, welche in uns wohnt und Niemand leugnen kann, zugeben; die Fähigkeit ist aber nicht die Anschauung selbst und der Entwicklung der Geometrie wegen müssen wir dafür halten, die Raumanschauung sei grade das Resultat dieser Fähigkeit mit der Erfahrung combinirt (siehe S. 281 u. ff.).

machen auch Anspruch auf grössre Gedankenschärfe, weil für uns in absolutem Sinn Nichts zu vernachlässigen ist nicht einmal das Unendlichkleine, wenn es zu dem Endlichen hinzugefügt wird und wenn Etwas im Vergleich mit Anderem vernachlässigt wird, so muss dies aus einem mathematischen Grund und nicht der praktischen Annäherung wegen geschehen. Der Empirist kann uns nicht vorwerfen, wir behielten den praktischen Zweck der Wissenschaft nicht im Auge und unsre geometrischen Hypothesen wurzelten nicht in der Erfahrung und würden nicht durch geistige Thatsachen bestätigt.[1])

Wir erkennen sehr gern die Hülfe, welche die empirische Beobachtung der Mathematik im Allgemeinen leistet, und die Nothwendigkeit an, die geometrischen Axiome durch sie festzustellen; wir können aber andrerseits nicht verkennen, dass der Rohstoff, den uns die sinnlichen Eindrücke liefern, durch unsern Geist verarbeitet wird und dass das subjective Element in der reinen Mathematik, der Geometrie und der rationalen Mechanik den Vorrang vor dem objectiven Element hat und dass wir alle überdies die ersten idealen geometrischen Formen in uns besitzen, noch ehe wir mit dem Studium der Geometrie beginnen und ohne voraussetzen zu müssen, diese Formen seien eben die reellen Gegenstände mit ihren sämmtlichen Ungenauigkeiten. Es gibt nicht wenige empiristische Philosophen, welche die Ansicht vertreten, die geometrischen Formen seien ideale Formen oder doch wenigstens nicht die sinnlichen Eindrücke selbst, welche die Gegenstände in uns hervorrufen.[2]) Sie sind ein Product der Anschauung mit der Abstraction combinirt. *Cayley* bemerkt *Stuart Mill* gegenüber treffend, wenn wir den Begriff der graden Linie nicht hätten, so könnten wir nicht behaupten, die Grade existire nicht in der Natur.[3])

Was für eine mathematisch mögliche Hypothese gilt, muss auch für den Beweis in der reinen Mathematik wie in der Geometrie gültig sein; er muss nämlich in allen einfachen Theilen, aus welchen er besteht, vollständig durch die vorausgehenden Eigenschaften oder Eigenschaften, welche die unmittelbare und augenscheinliche Folge oder verschiedene Formen dieser Eigenschaften sind, bestimmt sein und es darf in der Kette der Eigenschaften, welche ihn zusammensetzen, kein Widerspruch vorhanden sein.

Die Bedingungen, welchen die geometrischen Axiome und die Hypothesen unterworfen werden müssen, wenn man das wissenschaftliche Problem, welches uns vorliegt, in seiner ganzen Allgemeinheit und Einfachheit behandeln will, sind nach dem, was wir gesagt haben und später ausführen werden, die folgenden:

I. Von den geometrischen Axiomen müssen die Wahrheiten, welche sich aus

---

1) Siehe darüber den Anhang, in welchem wir das Buch von *Pasch* „Ueber neuere Geometrie. Leipzig, 1882" einer Besprechung unterziehen.

2) Siehe z. B. *Masci*, *Erdmann*, *Baumann*, *Wundt* a. a. O. *Locke* z. B., welcher ein entschiedener Empirist ist, hält dafür, die Idee des reinen Raums sei von der Idee der Starrheit oder Festigkeit der Körper und diese von der Idee des Raums verschieden und die Theile des Raums seien unbeweglich (*Baumann*, a. a. O. S. 377).

3) Report of the 53d meeting of the Brit. Ass. 1883. London, 1883. Ins Französ. übersetzt in dem Bulletin des sciences mathématiques. Jan. und Febr. 1884.

den Axiomen der Logik mit Hülfe von Operationen der Logik ergeben, getrennt gehalten werden.

II. Die eigentlich so genannten Axiome müssen die einfachsten und anschaulichsten Wahrheiten ausdrücken und dürfen keine Begriffe enthalten, die erst später gegeben oder abgeleitet werden müssen. Aus den Axiomen müssen sich alle andern Eigenschaften herleiten lassen ohne stillschweigend neue Axiome einzuführen und schliesslich sollen die Axiome von Anfang an so gegeben werden, dass für die verschiedenen möglichen geometrischen Systeme freies Feld bleibt.

III. Die für das Studium der Geometrie nothwendigen Axiome sind von denjenigen zu trennen, welche nur für die praktischen Anwendungen der Geometrie nöthig sind.

IV. Die Axiome sollen unabhängig voneinander sein, wobei man jedoch auch auf ihre Ordnung und um so mehr darauf zu achten hat, dass sie einander nicht widersprechen.

V. Die Behandlungsart sei elementar und auf das Constructionsverfahren der Raumanschauung gegründet.

VI. Die Axiome, Sätze und Beweise sollen von Anfang an kein nicht definirtes Anschauungselement enthalten derart nämlich, dass bei Abstraction von der Anschauung von dem geometrischen System nur ein System rein abstracter Wahrheiten übrig bleibt, in welchem die Axiome die Stelle von gut bestimmten Definitionen oder abstracten Hypothesen einnehmen.

An erster Stelle darf man, was durch die Erfahrung oder Anschauung gegeben ist, nicht mit den Erfordernissen oder Definitionen der Logik (oder umgekehrt) verwechseln. So wird z. B. die Definition, zwei Figuren seien gleich, wenn man die eine ohne Deformation auf die andre legen könne, gewöhnlich für eine geometrische gehalten, während sie wie die Definition der Gleichheit zweier beliebiger Dinge aus dem Axiom der Logik über die Identität hervorgeht.[1]) Dasselbe gilt von der Eigenschaft, dass zwei einer dritten gleiche Grössen einander gleich sind. Aus diesem Grund haben wir die Bedingung VI gegeben; mit ihrer Hülfe ist es leicht, die Principien und Definitionen der Logik und die Eigenschaften zu erkennen, welche sich nothwendiger Weise aus ihnen ergeben und die verlangte Gedankenschärfe einzuhalten, ohne dabei den wesentlichen Theil, welchen die Raumanschauung in der Geometrie einnimmt, zu übersehen. Man braucht nur ein beliebiges Buch über Elementargeometrie zu öffnen, wenn man sich überzeugen will, dass diese Bedingung durchaus nicht eingehalten wird. *Euclid* z. B. spricht in seinen ersten Definitionen von Länge, Breite, Grösse, ohne je gesagt zu haben, was das ist. So ist die Grade für *Euclid* diejenige Linie, welche ebenmässig zwischen ihren Endpunkten liegt; der Winkel zweier Graden, welche sich schneiden, ist ihre Neigung, wenn sie nicht dieselbe Richtung haben u. s. w. In seinen gewöhnlichen Begriffen spricht er von Addition und Subtraction der Grössen, ohne anzugeben, was man unter diesen Operationen zu verstehen hat.

1) Siehe später.

So ist auch in den besseren modernen Abhandlungen gewöhnlich von Raum, Fläche und Linien die Rede, ohne dass man ihre gut bestimmte Definition oder mathematische Construction gegeben hätte, so dass von allem Diesem, wenn man von der Anschauung abstrahirt, kein bestimmter Gegenstand übrig bleibt. Man benutzt auch das Axiom über die Bewegung der Körper ohne zu sagen, was ihr in abstractem Sinn entspricht und was abstract der Bewegung ohne Deformation entspricht u. s. w.

Man behauptet, einige Begriffe, z B. derjenige des Raums, könnten überhaupt nicht definirt werden. Auch hier muss man unterscheiden. Der Raum als Anschauung wird nicht definirt, als Begriff dagegen kann man ihn geometrisch wie wir es z. B. thun, definiren.[1]) Und wenn die Anschauung für das Bestehen der Geometrie nöthig ist, so muss sie desshalb, wie nützlich sie auch sein mag, kein nöthiges Element bei der logischen Entwicklung der Geometrie sein.[2]) Der Unterschied, den wir zwischen eigentlich sogenannten Axiomen, Postulaten oder Hypothesen gemacht haben, verschwindet und muss verschwinden, wenn man von der Anschauung abstrahirt.

Die Axiome müssen Eigenschaften der Anschauung zum Ausdruck bringen grade weil die Grundbedingung der Geometrie die Raumanschauung ist; d. h. sie müssen ein klares Bild der Dinge, welche sie definiren, geben.[3]) Zu diesem Zweck haben wir jedem Axiom empirische Betrachtungen vorausgehen lassen, welche jedoch der Bedingung VI entsprechend als nöthige Elemente in der Abfassung der Axiome und ihren Folgerungen nicht auftreten. Die Axiome sollen einfach sein, damit man ihre Nothwendigkeit und Unabhängigkeit besser ersieht. Ein Axiom kann auch aus mehreren Theilen zusammengesetzt sein, um mit ihm sofort die Eigenschaften, welche einen gegebenen Gegenstand von den andern unterscheiden, bezeichnen zu können, wie unser Axiom II über die grade Linie; das Axiom muss aber in seinen einzelnen einfachen Theilen geprüft werden.

Offenbar dürfen stillschweigend keine wenn auch augenscheinliche Eigenschaften eingeführt werden, welche entweder von den Axiomen nicht abhängen oder deren Beweis zu viel Vorbereitung erfordert, um sie als unmittelbare Folge der vorhergehenden Dinge betrachten zu können. So muss man es, um petitiones principii zu vermeiden, auch so einrichten, dass die Axiome und Sätze nicht aus Wahrheiten und Begriffen hervorgehen, deren Beweis oder Erklärung später gegeben wird. *Euclid* z. B. benutzt bei der ersten Proposition seines Buchs I der Elemente zur Construction des gleichseitigen Dreiecks, wenn die Seite gegeben ist, zwei Kreise, welche sich in zwei Punkten der Ebene schnei-

1) Siehe Theil I, Buch III.

2) Die Philosophen, welche bestreiten, der Raum sei ein Begriff und keine Anschauung, haben insofern Recht, als rein abstracte Betrachtungen, um so weniger numerische, niemals zu der Raumanschauung führen können.

3) *Monge* (Séances des écoles normales Bd. I. Paris 1795 und 2. Ausg. 1800) bemerkt z. B., dass die Definition der Graden als einer Linie, deren Punkte fest bleiben, wenn ein Körper um zwei seiner Punkte rotirt, nicht allein nicht einfach ist, sondern grade den Fehler hat, dass sie kein Bild gibt.

den, ohne vorher diese Eigenschaft bewiesen oder als Axiom gegeben zu haben. So kann die Prop. V, Buch XI nicht als bewiesen angesehen werden ohne das Axiom, dass der Anschauungsraum drei Dimensionen hat u. s. w.

Die Unabhängigkeit der Axiome ferner ist für die Einfachheit der Wissenschaft nothwendig. Und in der That, könnte man auch nur eine wenn auch intuitive Eigenschaft, die aber von den früheren abhängt, als Axiom geben, so würde es erlaubt sein, die Theoreme als augenscheinlich wie Axiome zu betrachten.

Wenn zwei Axiome oder Theile eines Axioms zwei Eigenschaften einer gegebenen Figur feststellen, von welchen sich die eine aus der andern ableiten lässt, so hat man Grund anzunehmen, dass in abstractem Sinn Figuren existiren, für welche nur eine dieser Eigenschaften gilt. Ein solcher Fehler ist z. B. in dem Axiom, mit welchem gewöhnlich die Ebene definirt wird, verborgen, dass nämlich eine Grade, welche zwei Punkte mit der Ebene gemein hat, in derselben liegt. Mittelst dieser Eigenschaft lässt sich die Ebene entweder ganz oder zum Theil *construiren* dadurch, dass man alle Punkte einer Graden mit einem Punkt ausserhalb derselben verbindet; die ebene Fläche ist damit vollständig bestimmt und ihre Eigenschaften müssen sämmtlich aus ihrer Construction hervorgehen, wenn die Elemente dieser Construction genau definirt sind. Das Axiom über die Ebene sagt uns dagegen, dass jede andre Grade ausser den bereits betrachteten, welche zwei Punkte mit ihr gemein hat, vollständig in ihr liegt. Dies ist aber eine Eigenschaft, welche nach den vorhergehenden Betrachtungen aus der Construction selbst abgeleitet werden muss. Ist dies nicht möglich, so bedeutet dies, dass die Axiome über die Grade oder über das Paar von Graden, welche sich schneiden, die Ebene in abstractem Sinn nicht ausreichend bestimmen.

Wir sind zu dem Beweis dieser Eigenschaft in dem *Euclid*'schen System durch die Nothwendigkeit veranlasst worden, die Eigenschaft für die Räume von mehr als drei Dimensionen beweisen zu müssen, von welchen wir nur die Construction haben und bei denen wir die äussere Anschauung nicht zu Hülfe nehmen können.[1])

---

1) Diese Bemerkung über die Unvollkommenheit des Axioms über die Ebene ist nicht neu. In einem Brief an *Bessel* (Göttingen 27. 1. 1829) schreibt *Gauss:*

„Seltsam ist es aber, dass ausser der bekannten Lücke in *Euclid*'s Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat und nie ausfüllen wird, es noch einen andern Mangel in derselben gibt, den meines Wissens Niemand bisher gerügt hat und dem abzuhelfen keineswegs leicht (obwohl möglich) ist. Dies ist die Definition des Planums als einer Fläche, in der die irgend zwei Punkte verbindende gerade Linie ganz liegt. Diese Definition enthält mehr, als zur Bestimmung der Fläche nöthig ist und involvirt tacite ein Theorem, welches erst bewiesen werden muss."

Grassmann (a. a. O. S. 32) erkennt an, dass der Geometrie eine wissenschaftliche Basis fehlt, und stellt analoge Betrachtungen über das Axiom bezüglich der Ebene an. Auf S. 34 sagt er dann sehr richtig: „Wenn ein Grundsatz vermieden werden kann, ohne dass ein neuer eingeführt zu werden braucht, so muss dies geschehen und wenn es eine gänzliche Umgestaltung der ganzen Wissenschaft herbeiführen sollte, weil durch ein solches Vermeiden die Wissenschaft nothwendig ihrem Wesen nach an Einfachheit gewinnt."

Genocchi (Dei principi della meccanica e della geometria. Mem. della Società italiana dei XL. Bd. II. Serie III. 1869, S. 178) bemerkt, die Erzeugung der Ebene mittelst der Graden, welche die Punkte einer Graden mit einem Punkt ausserhalb derselben verbinden,

Die Unabhängigkeit der Axiome ist sicherlich von Nutzen; es ist aber nicht zu verkennen, dass es sehr schwierig ist dieselbe zu beweisen. Wir haben Axiome gegeben, welche einfache Eigenschaften (wie die Axiome IV und V) aber für alle Figuren, die sich in gegebenen Bedingungen befinden, ausdrücken, während man die Frage aufwerfen kann, ob man diese Eigenschaften für alle solche Figuren oder nur für einen Theil geben muss. In diesem Sinn weisen wir nach, dass die Annahme genügt, eine Grade werde durch ein einziges Paar ihrer Punkte bestimmt. Man muss ferner prüfen, ob nicht dadurch, dass man die Ordnung eines gegebenen Systems von Axiomen ändert, irgend ein Axiom die Folge eines andern wird.[1])

Welche Methode ist für die Geometrie und speciell für die Behandlung ihrer Principien die geeignetste?

Nach Bedingung V diejenige, welche aus dem Constructionsverfahren der Raumanschauung hervorgeht, d. h. die reine oder synthetische geometrische Methode. Und in der That, da die erste und wesentlichste Bedingung der Geometrie die Raumanschauung ist, welche uns die ersten geometrischen Gegenstände und ihre unbeweisbaren Eigenschaften liefert, so ist diejenige Methode die geeignetste, welche stets die Figuren als Figuren behandelt, direct mit den Elementen der Figuren arbeitet und sie derart trennt und vereinigt, dass jede Wahrheit und jeder Schritt des Beweises möglichst von der Anschauung begleitet sind. Die Einfachheit und Eleganz der Geometrie bestehen grade in der Leichtigkeit ihrer Constructionen. Die synthetische Methode macht dann der Bedingung VI entsprechend der abstracten synthetischen Methode Platz, wie in unserer Einleitung entwickelt wird.

Eine Methode, welche für das Studium der Fundamente einen Theil der geometrischen Eigenschaften oder eine grosse Anzahl von Theorien, welche der Geometrie selbst nicht angehören, als bekannt voraussetzt, ist mindestens künstlich und indirect und wird, wenn sie vielleicht auch dazu beitragen kann die Genauigkeit eines Systems von Axiomen zu prüfen oder diese Axiome mit andern Theorien in Verbindung zu setzen, doch niemals zu einer besseren Lösung der Frage dienen können. Eine solche Methode ist z. B. im Allgemeinen die numerische oder analytische. Ein Beweis dafür ist, dass die tiefgedachten Schriften berühmter Autoren über die Hypothesen der Geometrie, welche sich dieser Methode bedienen, die eigentlich elementare Geometrie nicht viel vorwärts gebracht haben und dass, während die moderne Geometrie in diesem Jahrhundert einen so grossen Reichthum an neuen fruchtbaren Gesichtspunkten erworben hat, jene erstere man kann sagen stationär geblieben ist und aus

---

enthalte das *Euclid*'sche Postulat über die Parallelen. Sagt man, die *ganze* Ebene werde auf diese Art erzeugt, so wird das System *Lobatschewsky*'s, aber nicht das *Riemann*'sche ausgeschlossen; im andern Fall nicht einmal die *Lobatschewsky*'sche Ebene.

1) Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man von Anfang an die Stetigkeit der Graden definirt, mit deren Hülfe sich nicht wenige Eigenschaften beweisen lassen, welche in den Elementarbüchern als Axiome aufgestellt werden, während die Definition des Continuums doch auch gebraucht wird (siehe z. B. *de Paolis,* Elementi di Geometria. Post. XI).

ihnen fast keinen Nutzen gezogen hat.[1]) Wie kann man z. B. als Grundaxiom der Geometrie die Hypothese annehmen, das Linienelement des Raums sei die Quadratwurzel aus einem quadratischen und positiven Differenzialausdruck der Coordinaten oder die Curvatur des Raums sei constant oder auch die von einem Punkt bei seiner Bewegung beschriebenen Linien seien Functionen einer reellen Variabelen, welche eine Derivirte besitzen; unter den Coordinaten zweier Punkte gebe es eine und nur eine Function, welche bei einer gewissen stetigen Gruppe von Transformationen unverändert bleibe, oder auch der Raum sei eine dem Zahlencontinuum (x, y, z) entsprechende Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen und andre ähnliche Hypothesen? Wo bleiben da die anschaulichen und einfachen Thatsachen, welche sie erklären und rechtfertigen? Setzen sie nicht vielmehr die Kenntniss der Analysis mit Einschluss eines guten Theils der elementaren Geometrie voraus?

So ist nach dieser Methode der Abstand zweier Punkte eine Zahl. Wenn aber der Abstand durch eine Zahl *darstellbar* ist, so sagt uns die analytische Methode nicht, was der Abstand ist, denn geometrisch ist er nicht eine Zahl, wie die Grade, die Ebene, die Räume von drei u. s. w. n Dimensionen geometrisch nicht die Gleichungen oder die analytischen Hülfsformeln sind, welche sie darstellen.

Das wissenschaftliche Problem ist von dem didaktischen verschieden, weil es z. B. aus Unterrichtszwecken rathsam sein kann einige Axiome mehr zu geben, um namentlich im Anfang verwickelte Beweise zu vermeiden; damit aber das erste dem zweiten behülflich sein kann, müssen beide Probleme auf dieselbe Art behandelt werden. Es ist aber unmöglich bei Schülern vorauszusetzen, dass sie mindestens einen guten Theil der Analysis kennen.

Bei den Arbeiten, in welchen die analytische Methode benutzt wird und die auch einen geometrischen Ursprung haben, fällt der Eifer auf, mit welchem man möglichst schnell zu der Analysis zu kommen sucht; es gibt sogar unter ihnen solche, welche die Axiome zu dem Zweck aussuchen, um diesen oder jenen analytischen Theil anwenden zu können. Wenn wir auch die grosse Bedeutung solcher Arbeiten in Bezug auf die Verbindung der geometrischen

---

1) Man darf übrigens nicht glauben, man müsse dem Material der *Elemente* hie und da wenn auch einfache Theorien der modernen z. B. der projectiven Geometrie aufpfropfen oder ihren Inhalt ändern oder die auf reine Vernunftschlüsse basirte Anschauungsmethode verlassen. Es heisst vielmehr, dass man suchen muss auch in der elementaren Geometrie mit Hülfe dieser neuen Theorien oder auf anderm Weg jene allgemeinen Gesichtspunkte zu gewinnen, die das ganze Gebäude der *Elemente* beherrschen sollen und diese Elemente in einer wissenschaftlichen und zugleich harmonischen Form so darstellen, dass man selbst in einem Schulbuch, aus dem kritische Erörterungen verbannt sind, nicht mehr *aufs Geradewohl* gegebene Axiome findet, bei denen man den inneren wissenschaftlichen Grund ihrer Nothwendigkeit und Unabhängigkeit nicht kennt. Es ist desshalb im Allgemeinen nicht nöthig den *Elementen* neue Theorien hinzuzufügen; dagegen ist das Material der griechischen Geometrie von weiteren und strengeren Gesichtspunkten aus zu sichten und neu zu ordnen. Ueberdies dient dieses Material nicht nur den einfacheren praktischen Zwecken dieser Wissenschaft, sondern bildet ebenso die Basis eines jeden Theils der Geometrie; bei dem Problem ihrer Fundamente muss man daher nicht die einen Eigenschaften mehr berücksichtigen, wie die andern, weil man sonst seine Lösung den einen oder den andern unterordnet.

Principien mit fruchtbaren Theorien der Analysis anerkennen, so können wir uns doch der Thatsache nicht verschliessen, dass man auf solche Art die Behandlung des Problems von einem speciellen Gesichtspunkt abhängig macht, den man a priori vorwiegen lassen will, während man doch zusehen muss, welche Methode sich für die Natur des Problems am besten eignet. Prüft man nun die Frage ihrem wahren Aussehen nach, so verdient die reine Methode den Vorzug, weil ein von Allen anerkannter Fehler der analytischen Methode gerade darin besteht, dass sie uns sehr oft von den Prämissen zu dem Endresultat führt ohne uns die verschiedenen Ringe in der Kette der geometrischen Eigenschaften, die man bei dem Uebergang von der ersten zur letzten nöthig hat, kennen zu lehren. So einfach und elegant auch der Beweis sein mag, bei den Principien ist es vor Allem nöthig, sich von jeder Einzelnheit genaue Rechenschaft zu geben und sich von der Art, auf welche eine Eigenschaft aus den früheren abgeleitet wird, ein durchaus klares geometrisches Bild zu machen. Ein andrer Fehler besteht darin, dass manchmal ein grosser Apparat von Symbolen und Rechnungen nöthig ist, um zu den einfachsten geometrischen Eigenschaften zu kommen. *Newton* selbst bemerkte, dass arithmetisch am einfachsten ist, was durch einfache Gleichungen bestimmt wird; geometrisch dagegen, was man durch einfaches Ziehen von Linien erhält, und dass in der Geometrie vorangestellt und vorgezogen werden muss, was nach dem geometrischen Begriff am einfachsten ist.[1]) Wir verwerfen daher die analytische Methode nicht aus dem Grund, weil sie den umgekehrten Weg, wie die historische Methode, nach welcher sich die Geometrie entwickelt hat, einschlägt und folgen der letzteren nicht desshalb, weil sie dem Geist der griechischen Geometrie entspricht, sondern weil sich die griechische Methode am besten für die Natur des Problems eignet.

1) Arithm. univ. Amsterdam. 1761. Bd. II. De constructione lineari. S. 237 u. ff. Er fügt hinzu: „Die Einfachheit der Figuren hängt von der Einfachheit der Genesis der Ideen ab; die Gleichung ist es nicht, wohl aber die (geometrische wie mechanische) Beschreibung, mittelst welcher die Figur erzeugt und leicht dargestellt wird.“ Er betrachtet aber den Kreis als einfach, wie die Grade, während der Kreis wenigstens der Ebene bedarf, wie die Kugel zum mindesten des gewöhnlichen Raums. Die Grade hat, um mittelst ihrer Eigenschaften abstract definirt zu werden, keine andern Figuren nöthig.

Wenn man auch andern Betrachtungen *Newton*'s bei dem gegenwärtigen Stand der Geometrie nicht mehr zustimmen kann, so bleiben doch die Ideen eines der grossen Erfinder der Differenzial- und Integralrechnung über den Grundcharakter der Geometrie in ihrer ganzen Allgemeinheit stets wahr. Und wir verschliessen uns diesen Ideen auch in unseren Arbeiten über die Geometrie von mehreren Dimensionen nicht; so wird z. B. unser Satz, dass alle rationalen Curven der Ebene von der Ordnung n aus der normalen rationalen Curve des Raums von n Dimensionen durch Projection abgeleitet werden können, auf die Einfachheit der Construction der normalen Curve selbst gegründet.

Wiewohl *Leibniz* die Analysis sehr bevorzugt hat, so erkannte er doch die Mängel der analytischen Methode besonders bei der Behandlung der Principien der Geometrie und versuchte sie desshalb durch seine geometrische Analysis zu ersetzen (siehe den Anhang).

Und *Gauss* (Gött. Gelehrte Anzeigen. 1816. S. 619) drückt sich so aus: „Die logischen Hilfsmittel zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie können für sich Nichts leisten und nur taube Blüthen treiben, wenn die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes nicht überall waltet.“

W. Killing theilt in seiner „Erweiterung des Raumbegriffs. Braunsberg. 1884“ mit, dass *Weierstrass* einige Vorlesungen an dem mathematischen Seminar zu Berlin über die Principien der Geometrie 1872 gehalten hat und obwohl er von der Function des Abstandes ausging, doch die Ansicht vertrat: dass es vor Allem nöthig sei, eine rein geometrische Behandlung zu versuchen.

Die Analysis gibt uns in ihrer Anwendung auf die Geometrie auch bei dem Studium der Principien Anleitungen; *a priori* weiss man von rein geometrischem Standpunkt aus aber nicht, ob sie verwendbar sind.

Die analytische Methode führt uns ferner wegen ihrer Allgemeinheit, wenn man die Anschauung nicht berücksichtigt, zu Hypothesen über den Raum von drei Dimensionen, welche der Erfahrung widersprechen. Denn von analytischem Standpunkt aus hat jede Zahlenmannigfaltigkeit von drei Dimensionen dieselbe Existenzberechtigung wie der Anschauungsraum; geometrisch aber ist dies, wie gesagt, nicht dasselbe. Aus diesem Grund hat die analytische Methode nicht nur die Frage der Grundlagen der Geometrie auf ein andres Gebiet verpflanzt, sondern auch die oft in Schutz genommene Vermuthung aufkommen lassen, ihre Resultate in der Nicht-*Euclid*'schen Geometrie und mehr noch in der Geometrie von n Dimensionen seien geometrisch unmöglich.

Es ist ferner zu beachten, dass das erste uns in die Augen fallende Unterscheidungszeichen der Figuren die Verschiedenheit des Orts ist und dass die constructive Methode aus dieser Verschiedenheit entsteht und sich entwickelt.

Man darf bei der hier behandelten Frage auch nicht vergessen, dass das letzte Wort über die Fundamente der Analysis, wie neuere Arbeiten hervorragender Mathematiker und unsere Einleitung beweisen, noch nicht gesprochen ist; denn die Principien der Analysis sind nicht alle logisch nothwendig und nicht wenige enthalten, wenn man die Analysis direct zum Studium der Geometrie verwendet, wahre geometrische Axiome wie z. B. das Princip der Continuität in seinen verschiedenen analytischen Formen, welches nicht immer seine Rechtfertigung in der Raumanschauung findet.

Wir bemerken noch, dass der Raum von n Dimensionen geometrisch wie analytisch bei seiner Erzeugung aus Räumen von weniger Dimensionen abgeleitet wird. Es ist daher am einfachsten die Axiome für die Räume von weniger Dimensionen aufzustellen. Die Axiome, welche man direct für Figuren z. B. des Raums von n Dimensionen gibt, sind natürlich complicirter als für diejenigen der Mannigfaltigkeiten von einer niedrigeren Anzahl von Dimensionen. Mit andern Worten muss man der Bedingung II entsprechend von dem Einfachen zu dem Complicirten vorschreiten.

Man könnte uns vorhalten, wir führten sofort den Begriff des allgemeinen Raums ein. Aber erstlich ist dies ein allgemeiner Begriff, in welchem weder die Construction noch das Mass der Dimensionen auftritt, und dann bedienen wir uns seiner nur, um grössere Freiheit in unseren Constructionen zu haben, so dass die Betrachtungen, welche wir in dem ersten Theil über den allgemeinen Raum anstellen, später ohne Weiteres in einem Raum von einer beliebigen gegebenen Anzahl von Dimensionen gelten. Ueberdies würde mit Ausnahme einiger Eigenschaften der Text auch ohne die Definition dieses Raums derselbe bleiben.

Die Entwicklung nach der synthetischen Methode erfolgt direct in dem allgemeinen Raum, welcher eine thatsächlich unendlich grosse Anzahl von Dimensionen hat, während die analytische Geometrie direct in einem solchen

Raum noch zu behandeln bleibt. So ist es bisher auch noch nicht gelungen die rein analytische Geometrie unseren Hypothesen über das Unendlichgrosse und Unendlichkleine gemäss zu behandeln.

Aus allem Diesem darf man jedoch nicht den Schluss ziehen, wir seien Gegner der analytischen Methode. Im Gegentheil; die Analysis leistet ohne Zweifel der Geometrie grosse Dienste, wie diese der Analysis. Wenn der Analytiker die Geometrie zu Hülfe nimmt, so macht er von einer Fähigkeit, der Raumanschauung, Gebrauch, welche in der Analysis an sich nicht zur Anwendung kommt und mit deren Hülfe er sich durch einen Blick von vielen Eigenschaften der ihm vorliegenden Gegenstände überzeugt; der Geometriebeflissene dagegen kommt durch richtig angebrachte analytische Formeln heute oft mit grösserer Sicherheit zu seinem Endresultat. Damit aber ein analytisches Resultat eine wirkliche geometrische Bedeutung habe, muss es sich auf ein geometrisch existirendes Ding beziehen; jedenfalls kann sich die Geometrie nicht damit begnügen zu wissen, dass z. B. eine gegebene Fläche existirt, sie will auch die Gesetze kennen lernen, nach welchen diese Fläche construirt wird.

Man behauptet mit Recht, dass man bei den geometrischen wie den analytischen wissenschaftlichen Untersuchungen alle Methoden benutzen müsse, welche zu neuen Resultaten führen können.[1]) Man muss aber auch anerkennen, dass besonders ausserhalb Italiens heute eine starke Tendenz besteht, die rein geometrische Methode zu vernachlässigen, eine Methode, mit deren Hülfe noch in diesem Jahrhundert *Poncelet*, *Steiner*, *Staudt*, *Chasles*, *Cremona* und so viele Andre die Geometrie mit einer so grossen Anzahl fruchtbarer Theorien bereicherten und wir wissen wirklich nicht, von wie grossem Nutzen diese Tendenz sein kann. Und da die beiden Methoden auch bei der Erforschung der Wahrheit eigenthümliche Vorzüge und Schönheiten besitzen, welche sie bei einer gemischten Methode vielleicht nicht immer behalten, so halten auch wir aus den angegebenen Gründen auch bei den höheren Untersuchungen der Geometrie die Versuche für mehr als gerechtfertigt, welche sich darauf richten, jede geometrische Frage auf synthetische Art zu behandeln. Dem Vorwurf, den man dieser Methode macht, sie sei bei gewissen Untersuchungen nicht ganz sicher, kann man entgegenhalten, es sei dies kein der Methode anhaftender Fehler, sondern eine Folge davon, dass ihr die nöthige Entwicklung fehle. Uebrigens sind wir der Ansicht, dass man im Allgemeinen strenge Regeln nicht aufstellen kann und dass man wie in der Kunst allen Kundgebungen des wissenschaftlichen Gedankens je nach den individuellen Anlagen freien Spielraum lassen muss. Man darf überdies nicht vergessen, dass die Mathematik auch ihre Philosophie hat und dass in dieser die Art, wie man zur Wahrheit kommt, von nicht geringer Bedeutung ist.

---

1) Der grosse italienische Mathematiker *Lagrange* sagte: „Solange die Algebra und die Geometrie getrennt waren, blieben ihre Fortschritte unbedeutend und ihre Anwendungen beschränkt; sobald aber diese beiden Wissenschaften sich vereinigten, halfen sie sich gegenseitig und schritten zusammen rasch der Vollendung zu." *Genocchi* (a. a. O.), *Klein* (a. a. O. S. 14) und *Segre:* „Su alcuni indirizzi delle ricerche geometriche", Rivista di matematica, Febr. u. März 1891 u. s. w.

Bezüglich der Aufeinanderfolge der Axiome und Definitionen ist von wissenschaftlichem wie didaktischem Standpunkt zu empfehlen, sie nach und nach, wie sich das Bedürfniss einstellt, zu bringen; nur muss man, um nicht eine allgemeine Definition, welche bei vielen Figuren Anwendung findet, wiederholen zu müssen, sich nicht scheuen manchmal von dieser Regel abzuweichen. Auf keine Weise aber lässt sich die Methode *Euclid's* rechtfertigen, welcher den grössten Theil der Definitionen im Anfang des Textes vereinigt ohne die Existenz der Figuren, auf welche diese Definitionen sich beziehen, zu beweisen oder ohne dass diese Existenz vorher oder gleich nachher gegeben wäre.

Aus den Bedingungen, denen wir die geometrischen Axiome unterworfen haben, speciell aus den unter I und VI aufgeführten, müssen wir ersehen, auf welche gewöhnlichen Begriffe und Operationen der Logik sich die reine Mathematik oder die Theorie der abstracten und concreten mathematischen Formen und mithin auch die Geometrie gründet. Grade darauf beruht die Einleitung. Die reine Mathematik stellt sich so als eine Wissenschaft von Begriffen und nicht von reinen, conventionellen Regeln unterworfenen, Zeichen dar, wie möglich die letzteren auch sein mögen.

Wir gehen von den Begriffen der *Einheit* und *Mehrheit* aus, von den logischen Axiomen, aus welchen wir einige wichtige Folgen ableiten. Aus dem ebenfalls ursprünglichen Begriff von *zuerst* und *nachher* folgern wir den Begriff der Reihe oder Aufeinanderfolge und der Ordnung mehrerer gegebener oder gedachter Gegenstände. Aus der Operation des Stellens und Wegnehmens und des Zusammenbetrachtens oder Vereinigens entnehmen wir den Begriff der Gruppe und der geordneten Gruppe. Und durch den Begriff der Gruppe erhalten wir dann den abstracten Begriff von *ausserhalb*.

Es gibt begrenzte und unbegrenzte Reihen. Die begrenzte Reihe erster Art oder die natürliche Reihe ist die einfachste; sie hat einen ersten und letzten Gegenstand und enthält keine unbegrenzte Reihe; dann folgt die unbegrenzte Reihe erster Art, deren begrenzte Reihen alle von der ersten Art sind. Wir geben die Principien, welche die Operationen des Vereinigens und Wegnehmens regeln, und heben die Merkmale der abstracten und concreten mathematischen Formen hervor.

Ein Grundprincip ist das Princip über den eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhang zwischen den Reihen oder Gruppen mehrerer Elemente, mit dessen Hülfe wir verschiedene Sätze über die Reihen oder geordneten Gruppen im Allgemeinen und speciell über die begrenzten und unbegrenzten Reihen erster Art ableiten.

Während wir bis dahin nur den Begriff der Einheit und Mehrheit benutzt haben, entsteht nun aus den geordneten Gruppen der Begriff der Zahl in seiner ersten Bildung und aus dem Zusammenhang zwischen den Elementen der Gruppe, welche gezählt werden, und den Einheiten der Zahl werden die Grundsätze über die den natürlichen Gruppen entsprechenden Zahlen abgeleitet. Zu diesen Sätzen gehört auch, dass die durch eine natürliche Gruppe dargestellte Zahl,

wenn man die Ordnung der Elemente dieser Gruppe ändert, dieselbe bleibt. Der genannte Zusammenhang gibt uns das Mittel an die Hand, auf natürliche Weise den Begriff der grösseren und kleineren Zahl, die ersten Operationen mit den natürlichen Zahlen und die bezüglichen Gesetze festzustellen. Wir betrachten also zuerst die Anzahl der Gegenstände einer Gruppe und leiten daraus dann die Eigenschaften der Zahl als Zeichen ab.

Indem wir uns der Führung des gradlinigen Anschauungscontinuums überlassen, welches wir in seinen verschiedenen Theilen prüfen, definiren wir das Grundelement, unterscheiden die Elemente in relativem und absolutem Sinn und behandeln alsdann das System von Elementen einer Dimension, das homogene und in der Position seiner Theile identische System.

Aus der Prüfung der Consequenzen des Princips der Identität ergibt sich, dass der Identitätszusammenhang zwischen zwei Formen auf der Identität zweier andrer Formen beruht, und daraus die Nothwendigkeit, wenn man diesen Zusammenhang nutzbar machen will, von einer ersten Grundform auszugehen, für deren Theile wir ohne Weiteres die Identität in Uebereinstimmung mit dem Princip dieses Namens in § 8 annehmen.

Unsre Grundform ist ein System einer Dimension, welches in der Position seiner Theile identisch und stetig ist und durch die kleinste Anzahl von Elementen bezüglich der andern Formen bestimmt wird. Unabhängig von diesen beiden letzten Eigenschaften, welche wir später feststellen, construiren wir auf der Grundform die Scala mit einem gegebenen Segment als Einheit und finden, nachdem ihr Gebiet definirt ist, die Bedingungen der Gleichheit zweier Scalen.

Wir führen dann den Begriff von endlichen, thatsächlich unendlich grossen und unendlich kleinen von zwei Elementen begrenzten Segmenten ein, stellen die einfachen Hypothesen über ihre Existenz und Construction auf, die mit der Definition des homogenen (und auch des in der Position seiner Theile identischen) Systems vereinbar sind und bestimmen dann durch sie die Beziehungen zwischen den genannten Segmenten. Aus diesen Hypothesen wird eben der Begriff mehrerer Arten von Masseinheiten, der Grundeinheit, auf welche sich die Unendlichkleinen und die Unendlichgrossen beziehen, und der absoluten Einheit abgeleitet, welche ein begrenztes beliebiges Segment der Grundform ist und welches wir auch absolut endlich nennen. Wir beweisen mit voller Strenge, dass das Unendlichkleine von beliebiger Ordnung bezüglich eines Unendlichkleinen von geringerer Ordnung zu vernachlässigen ist, obgleich es bezüglich der absoluten Einheit oder in absolutem Sinn nicht vernachlässigt werden darf.

Aus den unendlich grossen und unendlich kleinen Segmenten leiten wir neue ganze unendlich grosse Zahlen ab, welche bei der Addition wie bei der Multiplication den gewöhnlichen Gesetzen unterliegen und sich mithin von den transfiniten Zahlen *G. Cantor*'s unterscheiden, die sich zur Construction der unendlich grossen Segmente unsrer Grundform nicht verwenden lassen.[1])

1) Als schon ein grosser Theil unsrer Einleitung gedruckt war, erschien die klare Darlegung der Theorie der Grössen von Prof. *Bettazzi* (Pisa 1890), in welcher der Verfasser

Wir wissen sehr wohl, welche Abneigung heutigen Tages gegen das thatsächliche Unendlichgrosse und Unendlichkleine besonders gegen das Letztere besteht; die Gründe aber, welche gegen diese Formen, wie sie früher gegeben wurden, angeführt werden, lassen sich gegen die unsrigen, deren Möglichkeit wir übrigens logisch nachgewiesen haben, wie gegen die Formen des thatsächlichen Unendlichgrossen und Unendlichkleinen von *Stolz* und *Du Bois Reymond* nicht geltend machen. Was die Darstellung angeht, so können wir uns das begrenzte unendlich grosse oder unendlich kleine Segment der Grundform als ein wahrnehmbares gradliniges Segment vorstellen, wie man aus den Anwendungen, die wir auf die Geometrie machen, besser ersehen wird.[1])

Wir treten für das thatsächliche Unendlichkleine ein, weil wir nicht nur seine Möglichkeit sondern auch seine Nützlichkeit in dem geometrischen Gebiet bewiesen haben; wir hätten, so interessant eine solche Theorie an sich sein kann, sie hier vielleicht nicht behandelt ohne die geometrischen Anwendungen, die wir von ihr gemacht haben. Die analytische Behandlung der Geometrie unabhängig von dem Axiom des *Archimedes* müsste, so scheint uns, interessant auch für die Analysis ausfallen.[2])

Wir stellen dann die Hypothesen über die auf eine Einheit bezügliche Stetigkeit (oder gewöhnliche Stetigkeit) und dann über die auf die absolute Einheit bezügliche (die absolute Stetigkeit) auf. Aus der absoluten Stetigkeit lässt sich die erstere bezüglich jeder Einheit ableiten, aber nicht umgekehrt. Für das Gebiet einer relativen Einheit wie bezüglich der absoluten Einheit wird bewiesen, dass jedes begrenzte Segment der Form in n (oder η) gleiche Theile zerlegbar ist, dass $(AB) + (BC) \equiv (BC) + (CB'')$, wobei (CB'') mit (AB) identisch ist und dieselbe Richtung wie (AB) hat, dass das Segment (AB) in einer Richtung durchlaufen demselben Segment in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen gleich ist und andre Eigenschaften, die sich auf die begrenzten Elemente einer Elementengruppe auf der Grundform beziehen. Aus diesem Grund ist auch unabhängig von dem Unendlichgrossen und Unendlichkleinen unsre Definition des gewöhnlichen Continuums den andern vorzuziehen, welche dieselben Principien zulassen aber z. B. auch das Commutationsgesetz der Summe oder

gewisse Classen einer Dimension zweiter Art untersucht, welche in n Hauptunterclassen (unter n eine ganze endliche Zahl verstanden) erster Art zerfallen, die einzeln betrachtet im gewöhnlichen Sinn stetig sind. Obgleich *Betazzi* nicht direct die Möglichkeit dieser Classen beweist und ebenso die Principien wie die Art der Beweisführung von den unsrigen verschieden sind, so haben wir doch in diesem Theil einige Ideen gemeinsam gehabt. Er bleibt bei der genannten Classe zweiter Art stehen, während die Classe, welche aus unsrer Grundform hervorgeht, eine derjenigen ist, die *Betazzi* absolut nennt und nicht untersucht und aus der der besonderen Principien wegen, denen sie genügt, auch ein Mass hervorgeht.

Unsre unendlich grossen und unendlich kleinen Zahlen sind im Grunde specielle complexe Zahlen mit unendlich vielen Einheiten jedoch derart, dass das Product zweier derselben sich durch die andern linear nicht ausdrücken lässt und für sie mithin, wie für die gewöhnlichen complexen Zahlen und die Quaternionen *Hamilton*'s, der Satz gilt, dass wenn das Product zweier von diesen Zahlen Null ist, einer der Factoren Null sein muss.

1) Siehe die Anmerkungen S. 98—100, 184. Wir verweisen den Leser auf unsre Betrachtungen über die Beweise gegen das thatsächliche Unendlichgrosse am Schluss des Anhangs. Selbstverständlich ist der Text unabhängig von ihnen.

2) Siehe Anm. S. 138, 139 und die Betrachtungen über die absolute projective Geometrie.

auch die Eigenschaft $(AB) \equiv (BA)$ voraussetzen. Wendet man die Principien unsrer Definition auf die Grade an, so geben sie einfachen und anschaulichen Eigenschaften der Graden Ausdruck.

Aus der Definition des Proportionalitätszusammenhangs zwischen den Segmenten der Grundform leiten wir die Haupteigenschaften der Verhältnisse der Segmente und insbesondere ihrer Gleichheit ab.

Nachdem wir die Formen von mehreren Dimensionen und ihr Gebiet definirt haben, ohne hier den Begriff der Stetigkeit im Allgemeinen zu geben, beschäftigen wir uns mit der extensiven und intensiven Grösse der Grundform. Dieser Entwicklungen wie des Kapitels bezüglich der reellen absoluten und relativen Zahlen bedienen wir uns bei der Erörterung der Principien der Geometrie nicht. Die Betrachtungen über das relative und absolute Zahlencontinuum erlauben uns aber die Gründe der Auswahl unsrer Grundform zu erklären. Aus den früheren Hypothesen geht nicht hervor, dass diese Grundform durch zwei und nicht durch mehr als zwei verschiedene Elemente bestimmt werde.

Es leuchtet somit ein, dass wir bei der Construction der mathematischen Begriffe überall von dem Einfachen zu dem Complicirten vorschreiten.[1])

Es könnte uns der Vorwurf bezüglich der Begriffe der rationalen und irrationalen Zahlen gemacht werden, wir gingen von Hypothesen aus, während die Analysis sich mittelst des Conventionalismus entwickelt und sich dabei nur auf die ganzen Zahlen stützt. Vor Allem haben wir in der Einleitung nicht die Principien der Analysis allein, sondern der reinen Mathematik im Allgemeinen, welche auch die Wissenschaft der abstracten Ausdehnung[2]) in sich fasst, behandeln wollen; ferner kommt der Begriff dieser Zahlen für uns erst in zweiter Linie, da es der Hauptzweck der Einleitung ist, dem geometrischen Theil als Unterlage zu dienen. Ueberdies gibt es berühmte Vertreter der Analysis, welche, wie wir, der Ansicht sind, auch die Analysis müsse in ihren Fundamenten auf philosophische Art in dem oben von uns erklärten Sinn[3]) statt in gekünstelter Weise entwickelt werden.

Die Einleitung soll uns nicht nur die Grundmerkmale liefern, die wir in dem geometrischen Theil nöthig haben, sondern kann auch als ein in sich abgeschlossenes Ganze betrachtet werden; aus diesem Grund haben wir einige ihrer Theile, welche auf die Geometrie keine Anwendung finden und auf die wir oben hinwiesen, eingehender ausgeführt.

Nachdem mit Hülfe der Erfahrung erklärt worden ist, was man unter leerem Anschauungsraum und unter Punkt, welcher das Grundelement der Geometrie ist, zu verstehen hat, wird durch Ax. I festgestellt, dass es verschiedene

1) Siehe z. B. Anm. S. 1 und S. 18.

2) Ausdehnungslehre nach *H. Grassmann*.

3) *Du Bois Reymond* ist der Ansicht, wenn man bei den Operationen mit den Zeichen nicht mehr auf ihre Bedeutung achte, bei der Erörterung der Grundbegriffe der Mathematik der Ursprung der Zeichen nicht vergessen werden dürfe (a. a. O. S. 50 u. ff.). Siehe Einl. Anm. S. 78.

und gleiche Punkte gibt. Dann wird die Definition der Figuren und hierauf diejenige des allgemeinen Raums gegeben.

Die Geometrie ist die Wissenschaft des allgemeinen Raums und mithin auch der in ihm enthaltenen Figuren. Die Betrachtungen aber, welche wir anstellen, gelten mit Ausnahme weniger auch unabhängig von diesem Raum, obwohl wir immer in ihm arbeiten.[1]) Der Begriff ausserhalb in abstractem Sinn findet hinreichende Rechtfertigung in dem ersten Kapitel der Einleitung.

Die einfachen Theile des ersten Theils des Axioms II über die Grade sind schon in der Einleitung erörtert worden. Da eine Hauptaufgabe dieser Studien auch ist, möglichst viele Axiome zu ersparen, so haben wir nur nöthig anzunehmen, die Grade werde durch *ein einziges* Paar ihrer Punkte bestimmt; wir vervollständigen dann dieses Axiom durch den zweiten Theil, welcher feststellt, dass jeder Punkt ausserhalb einer Graden und ein beliebiger Punkt derselben eine andre Grade bestimmen. Dadurch wird es uns möglich gemacht, die allgemeinen gemeinschaftlichen Eigenschaften aller bekannten möglichen geometrischen Systeme zu entwickeln.

Die andern drei Axiome sind einfache Eigenschaften, welche die Identität zweier Graden, die einen Punkt gemein haben, die Differenz der zwei Seiten eines Dreiecks, wenn die dritte unbegrenzt klein wird und die Identität zweier Paare von Graden, die einen Punkt gemein haben, betreffen.

Den Hypothesen über das thatsächliche Unendlichgrosse und Unendlichkleine der Einleitung gemäss geben wir einige Hypothesen, die uns erlauben eine absolute Geometrie unabhängig von dem Axiom V des *Archimedes* aufzustellen und aus ihr zwei allgemeine Systeme herzuleiten, in welchen die speciellen Systeme *Euclid*'s und *Riemann*'s enthalten sind. In dem System der absoluten geschlossenen Graden, welches wir uns zu eigen machen, erhalten wir eben das System *Euclid*'s und *Riemann*'s derart, dass die vorhergehenden Hypothesen dazu dienen diese beiden Systeme in einem einzigen allgemeinen System durch die Anwendung des Begriffs der verschiedenen Masseinheiten zu verbinden.

Die Einheit, durch welche wir das *Riemann*'sche System erhalten, ist unendlich gross bezüglich derjenigen, auf welcher das *Euclid*'sche System beruht. Die Leichtigkeit, mit welcher der Uebergang von der *Euclid*'schen Ebene zu der vollständigen oder *Riemann*'schen Ebene stattfindet ohne jemals aus der Ebene herauszukommen und die Leichtigkeit, mit welcher durch die unendlich ferne Ebene des *Euclid*'schen Raums von drei Dimensionen, welche eine vollständige Ebene ist, viele der Grundeigenschaften dieses Raums bewiesen werden und ebenso analog bei den andern Räumen von gegebenen Dimensionen scheint uns bemerkenswerth zu sein. Man könnte uns einen Vorwurf daraus machen, dass wir abstracte Hypothesen benutzen, während wir uns doch vorgenommen haben die Anzahl der Axiome möglichst zu reduciren. Der Vorwurf hat von einem gewissen Gesichtspunkt aus seine Berechtigung; aber auch auf ihn findet

1) Siehe Bem. III, § 1 und Bem. IX, § 4 in Theil I.

sich in unserm Buch eine Antwort. Denn die genannten Hypothesen führen vor Allem, wie wir in den mit römischen Ziffern bezeichneten Anmerkungen nachweisen, mit Ausnahme des Postulats über die Parallelen keine weiteren Axiome ausser den schon gegebenen in dem endlichen Gebiet ein, wenn man in diesem Gebiet allein bleiben will. In diesen Anmerkungen behandeln wir in der That die Geometrie mit Hülfe des Textes unabhängig von diesen Hypothesen; verfolgen dabei jedoch auch den Zweck, zu zeigen, wie wichtig diese Hypothesen für die Entwicklung und Anordnung der Grundeigenschaften auch des endlichen Gebiets sind. Da wir, wie gesagt, das wissenschaftliche Problem in seiner ganzen Allgemeinheit behandeln wollen, so haben wir ferner diese Hypothesen gegeben, um eine Geometrie unabhängig von dem Axiom V des *Archimedes* aufbauen und die verschiedenen bekannten geometrischen Systeme besser behandeln und untereinander ordnen zu können.

Ehe wir die genannten Hypothesen aufstellen, leiten wir aus dem Identitätszusammenhang zwischen zwei Formen, bei welchen die Grade die Grundform darstellt, die Sätze über die Gleichheit der Figuren ab, für welche wir das Axiom V nöthig haben, obgleich aus unsern zu diesem Zweck angestellten Betrachtungen ein sichrer Beweis für die Unabhängigkeit dieses Axioms von den früheren nicht hervorgeht.

Am Schluss des ersten Kapitels des ersten Buches behandeln wir die stetigen Systeme unveränderlicher Figuren im allgemeinen Raum und insbesondre stetige Systeme unveränderlicher Segmente auf der Graden, ohne auf die Bewegung ohne Deformation zurückzukommen; mit der letzteren beschäftigen wir uns in dem folgenden Kapitel als mit einem Princip, dessen man nur zur praktischen Ausführung der geometrischen Constructionen bedarf. Bei den stetigen Systemen unveränderlicher Figuren braucht man abstract alle Eigenschaften der Anschauungslinien, d. h. dass sie in jedem Punkt eine Tangente besitzen, nicht zu berücksichtigen; dies vereinfacht unsre Auseinandersetzung sehr.

In Buch II des ersten Theils studiren wir zunächst die ersten Eigenschaften der Strahlenbüschel, ihrer Winkelsectoren und Winkel.[1]) Wir beschäftigen uns dann mit den Eigenschaften des Parallelogramms und beweisen den Grundsatz, dass, wenn von einem beliebigen Punkt einer Seite des Dreiecks eine Parallele zu einer andern Seite gezogen wird, diese die übrigbleibende schneidet und derart, dass die Segmente auf der ersten und dritten Seite in Proportionalitätszusammenhang stehen. Nachdem die Ebene als Figur definirt worden ist, welche man aus dem Büschel erhält, wenn man in ihm den Punkt statt des Strahls als Element betrachtet, erlauben uns der vorhergehende Satz und die Sätze über das Parallelogramm die ersten Eigenschaften der Ebene streng und leicht zu beweisen. Unter diesen ist die Eigenschaft zu bemerken, dass jedes Strahlenbüschel (Rr) im Unendlichgrossen ein absolutes Grenzsystem bezüglich seines Centrums hat, von welchem man nicht behaupten kann, dass es

---

1) Ueber die bis jetzt gegebenen Definitionen des Winkels siehe den Anhang. Das Merkmal, dem wir bei der Definition des Winkels in seinen verschiedenen Formen folgen, scheint uns beachtenswerth zu sein. Siehe S. 307 u. ff., 442 u. ff., 532 u. ff.

eine Grade sei, obwohl es viele charakteristische Eigenschaften mit der Graden gemein hat, wie z. B. diejenige, dass es durch zwei Punkte bestimmt wird und stetig ist. Es hat bezüglich aller Punkte des endlichen Gebiets der Ebene in Bezug auf die *Euclid*'sche Grundeinheit und auf die unendlich grosse oder *Riemann*'sche aber nicht in Bezug auf die absolute Einheit dieselben Eigenschaften.

Aus diesen ersten Eigenschaften geht die Identität der Büschel und die Eigenschaft hervor, dass ein Büschel in der Position seiner Theile identisch ist und dass mithin jeder Winkelsector (ab) in einer Richtung demselben Sector in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen gleich ist. Daraus folgt auch, dass die Ebene durch eine ihrer Graden in identische Theile zerlegt wird und dass jede Grade der Ebene zur Hälfte in jedem dieser Theile liegt. Es wird die Definition von innerem und äusserem Theil eines Dreiecks gegeben und dann werden die Sätze bewiesen, die sich auf die Durchschnittspunkte einer Graden mit den Seiten des Dreiecks beziehen. So werden ohne besondre ausdrücklich ausgesprochene oder stillschweigend in den Sätzen enthaltene Axiome die Eigenschaften bezüglich der Durchschnitte einer Graden mit einer Kreislinie und zweier Kreislinien untereinander bewiesen.

Wir definiren die Richtungen oder den Sinn der ebenen Figuren und der Ebene, ohne auf äussere Gegenstände oder Beobachter und auf den Begriff der Bewegung zurückzukommen; es würde dies empirische Elemente in unsre Betrachtungen einführen. Wir geben die Bedingungen der Identität zweier Figuren in der Ebene und unterscheiden die identischen Figuren von derselben Richtung oder demselben Sinn (congruente) von denjenigen von entgegengesetztem Sinn (symmetrischen); es folgen die Haupteigenschaften der stetigen ebenen Systeme unveränderlicher Figuren und wir wenden dann diese Theorie auf die Ableitung der Haupteigenschaften der Bewegung einer Figur der Ebene an, wie bei der Graden.

In Kapitel II des zweiten Buchs erhalten wir dadurch, dass wir eine bezüglich der *Euclid*'schen Grundeinheit unendlich grosse oder bezüglich der ganzen Graden endliche Einheit als Masseinheit nehmen, die vollständige Ebene. Für den grössten Theil ihrer Eigenschaften gelten die früher für die *Euclid*'sche Ebene gegebenen Beweise. In Kapitel III behandeln wir speciell die *Lobatschewsky*'sche Ebene und vergleichen die drei Systeme miteinander.

Mit dem *Lobatschewsky*'schen System beschäftigen wir uns nicht weiter, weil es uns bei der Anordnung der Eigenschaften der *Euclid*'schen geometrischen Räume nicht, wie das *Riemann*'sche System, von Nutzen ist.

Nachdem wir in dem dritten Buch den Stern zweiter Art und den Raum von drei Dimensionen definirt haben, beweisen wir ihre ersten Eigenschaften und zeigen, dass man annehmen kann, der Raum habe im Unendlichgrossen bezüglich der *Euclid*'schen Einheit eine Ebene, welche eine vollständige Ebene ist und leiten dann aus ihren Eigenschaften diejenigen des Sterns ab, gehen von diesen zu den Eigenschaften der andern einfachen Figuren dieses Raums

über und finden stets andre Figuren und andre complicirtere Systeme, die immer neue Eigenschaften darbieten.

Der vollständige Raum von drei Dimensionen ergibt sich aus dem *Euclid*'schen Raum mit einer unendlich grossen Einheit.

Am Schluss des ersten Theils wird das dritte praktische Axiom gegeben, welches die Dimensionen des Anschauungsraums auf drei festsetzt. Wir haben unsre Constructionen immer mit der Raumanschauung begleitet; weil diese aber nach Bedingung VI für die logische Entwicklung der Geometrie nicht nöthig ist und nicht nöthig sein darf, so haben wir diese Eigenschaft nicht früher zu geben brauchen und auch in der Folge nicht nöthig.

Nachdem wir soweit gekommen, gibt es der in Kapitel I, Buch I direct in dem allgemeinen Raum (oder wenn man will auch unabhängig von den Dimensionen des Raums) behandelten Principien und Eigenschaften wegen keinen Grund, der es rechtfertigen würde nur den Raum von drei Dimensionen für möglich zu halten desshalb, weil er die dem Anschauungsraum entsprechende Form ist[1]), da das genannte praktische Axiom nur für die praktischen Anwendungen nöthig ist, die wir streng von der eigentlich sogenannten theoretischen Geometrie getrennt gehalten haben.

Nach dem bisher befolgten Verfahren ergibt sich die Construction des Sterns zweiter Art und des Raums von vier Dimensionen S_4 mittelst eines Raums von drei Dimensionen S_3 und eines Punktes S_0 ausserhalb desselben in dem allgemeinen Raum. Die Existenz eines Punktes ausserhalb S_3 schliesst noch nicht diejenige des Raums S_4 in sich, weil man abstract nur die Punktgruppe $(S_3 S_0)$ hat. Auf Grund dieser Construction behandeln wir in derselben Art die Grundfiguren des Raums S_4.

Wir gehen dann zu dem Raum von n Dimensionen S_n über, in welchem die Beweise selbstverständlich, weil es sich um eine gegebene wie immer grosse so doch endliche Anzahl von Dimensionen handelt, einen allgemeinen Charakter annehmen und die Beweismethode sozusagen sprungweise ist, weil z. B. die Eigenschaften des vollständigen Raums S_{n-1} nur abwechselnd mit denjenigen des Raums S_n in dem *Euclid*'schen Gebiet behandelt werden können. So muss man auch viele Beweise mittelst der sogenanten Methode der vollständigen gleichzeitig auf mehrere Sätze angewandten Induction geben.[2]) In diesem Theil behandeln wir die allgemeinen stetigen Systeme geometrischer Dinge in dem allgemeinen Raum wie in dem Raum von n Dimensionen. Ehe aber diese Theorie behandelt wird, welche auch bezüglich andrer *schon construirter* geometrischer Dinge, welche keine Punkte sind, Geometrie von mehreren Dimensionen genannt werden kann, müssen vor Allem, will man in dem geometrischen Gebiet bleiben, die Eigenschaften der Räume festgesetzt werden, in welchen diese Dinge gegeben oder construirt worden sind, ebenso wie die

1) Siehe die emp. Bem. I, § 1, Anm. II und das prakt. Ax. III.
2) Siehe Einl. S. 22.

Theorie der ebenen Curven n^{ter} Ordnung Geometrie von $\frac{n(n+3)}{2}$ Dimensionen genannt werden kann.

Aus den Entwicklungen dieses Theils geht klar hervor, dass unser constructives Verfahren bei der Geometrie von mehr als drei Dimensionen ein Process ist, bei welchem die Anschauung mit der reinen Abstraction verschmolzen ist; es geht aus ihnen aber auch hervor, dass wir durchaus nicht der Meinung sind, die Figuren von n Dimensionen oder des allgemeinen Raums, wie die von drei Dimensionen, welche den Gegenständen unsres Beobachtungsgebiets entsprechen, *vollständig* anschauen zu wollen.

Aus der Beilage, in welcher wir ausgeführt haben, auf welche Weise sich die Principien der analytischen Geometrie von n Dimensionen aufstellen lassen, ersieht man, dass wie der gewöhnliche Raum durch eine unsren Axiomen genügende Zahlenmannigfaltigkeit (x, y, z), so der Raum von n Dimensionen durch eine denselben Axiomen genügende Zahlenmannigfaltigkeit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dargestellt wird. Wie aber die erste Mannigfaltigkeit nicht der gewöhnliche Raum, so ist die zweite nicht unser Raum von n Dimensionen. Wir haben daher Recht, wenn wir darauf bestehen diesen Grundcharakter unsrer Untersuchungen hervortreten zu lassen; denn wenn es auch bezüglich des Substrats einer geometrischen Wahrheit gleichgültig ist, ob sie in Zahlen oder mittelst der entsprechenden geometrischen Dinge ausgesprochen wird, so hat dagegen in den Fundamenten die wenn auch abstracte Existenz des geometrischen Gegenstandes eine wesentliche Bedeutung.[1])

Wir haben hier speciell im Auge gehabt, die Principien der Geometrie von mehreren Dimensionen zu entwickeln und jede Eigenschaft, deren wir bedürfen, zu beweisen. Davon ausgenommen sind nur zwei am Schluss gegebene Eigenschaften, welche aber anderswo bewiesen wurden und bei welchen man bereits die Sicherheit hat, dass in ihnen kein andres Axiom enthalten ist. Sind die Eigenschaften dieses Abschnittes zum grossen Theil bekannt, so sind die Beweise dagegen meistens neu. Ueberdies erleichtert eine systematische Darlegung der elementaren Geometrie von mehreren Dimensionen nach unsrem Gesichtspunkt, welche bisher nicht versucht wurde, die Forschungen in den höheren Gebieten.

Am Ende des II. Theils haben wir den projectiven Zusammenhang zwischen zwei Punktreihen festgestellt, welche dem Axiom des *Archimedes* nicht unterliegen. Dieser Zusammenhang ist auch stetig.[2]) Wir lehren ferner die Operationen des Projicirens und Schneidens kennen und leiten einige wichtige mit dem Zweck und der Natur dieses Werks vereinbare Consequenzen aus ihnen ab.[3]) Der Vortheil dieser Methode bezüglich des gewöhnlichen Raums

1) Man sehe die Untersuchung, welche wir im Anhang über die Definitionen des Raums und der Geometrie von n Dimensionen anstellen.

2) Die Autoren, welche sich mit der Unabhängigkeit der projectiven Geometrie von dem Postulat über die Parallelen beschäftigten, haben dagegen unter der einen oder der andern Form das Axiom des *Archimedes* vorausgesetzt.

3) Der Leser wird mit Nutzen die Arbeiten zu Rath ziehen können, die dieses Verfahren einschlagen und nach unsrer in den Math. Ann. Bd. XIX publicirten Abhandlung erschienen

besteht grade darin, dass aus allgemeinen oder auch speciellen Dingen Classen von Dingen in der Ebene und dem Raum von drei Dimensionen oder in einem Raum von geringeren Dimensionen abgeleitet werden und umgekehrt und dass dadurch neue oder schon bekannte Eigenschaften oder Dinge leichter bewiesen und nach einem allgemeinen Gesichtspunkt geordnet werden.

Es ist dies die Verallgemeinerung des oft benutzten Princips, mittelst der Geometrie des gewöhnlichen Raums Eigenschaften der ebenen Figuren leichter zu beweisen oder neue Eigenschaften dieser Figuren aufzustellen; ich möchte sogar behaupten, dass das Princip seine eigentliche Berechtigung in dem Raum von n Dimensionen erlangt, denn in ihm gelten allgemeine Sätze zwischen den projicirten Dingen und den Dingen, welche man durch die Projection erhält. Die Existenz der Figuren und die Wahrheit ihrer Eigenschaften, welche man mittelst dieser Methode, z. B. in der Ebene erhält, kann man natürlich auch mit den Postulaten der Ebene allein (selbstverständlich ohne eines derselben auszulassen) beweisen; dieses bestätigt aber vielmehr den Vortheil der Methode.[1]) Die Geometrie von n Dimensionen ist ferner auch in andrer Hinsicht vortheilhaft, insofern viele Dinge der Ebene und des gewöhnlichen Raums sich durch einfachere Dinge z. B. durch Punkte eines höheren Raums darstellen lassen und ihre Eigenschaften somit oft leichter zu untersuchen sind.

Gewiss ist, dass man nicht behaupten kann, eine solche Methode könne bei jeder geometrischen Untersuchung angewendet werden. So lässt sie sich z. B. mit mehr Erfolg bei der projectiven, als bei der metrischen Geometrie benutzen. Jede Methode hat ihre Vorzüge und ihre Mängel; vor Allem muss man ihrer vollständig Herr sein, um den Nutzen aus ihr zu ziehen, den sie zu geben im Stande ist; es genügt natürlich, wenn sie wenigstens in einer Kategorie von wichtigen Untersuchungen wahrhaft fruchtbar ist. Wenn wir hier weniger auf die Neuheit der Eigenschaften als auf die Principien eingegangen sind, nach welchen sie entwickelt werden müssen, so darf man desshalb nicht glauben, wir wollten Untersuchungen ermuthigen, welche nur leichte Verallgemeinerungen sind und weder für die Geometrie von drei, noch für diejenige von n Dimensionen etwas Bedeutendes enthalten. So darf man auch nicht übertreiben und sich der n Dimensionen bei Fragen bedienen wollen, bei welchen man angemessener und leichter die gewöhnlichen Dimensionen benutzt.

Aus der Trennung der theoretischen Geometrie von ihren praktischen Anwendungen; daraus, dass nicht alle Axiome, welche für diese nöthig sind, es auch für jene sind; daraus ferner, dass die Geometrie die der Mechanik und Physik entnommenen Principien nicht nöthig hat und schliesslich aus dem,

sind, sowie auch diejenigen, welche vorher und nachher auf rein analytische Art verfahren sind und die in diesem Buch ihre wahre geometrische Basis finden.

1) Mit den Methoden der darstellenden Geometrie kann man in der That diese Figuren in der Ebene und dem gewöhnlichen Raum construiren. Siehe des Autors Geometria descrittiva a quattro dimensioni. R. Istituto Veneto. Apr. 1882. Ueber diesen Gegenstand haben wir in dem mathematischen Seminar unter Prof. *Klein* im Sommer 1881 einen Vortrag gehalten. Siehe Note I im Anhang.

was wir über die Gleichheit der Figuren, über die Unterscheidung identischer Figuren in congruente und symmetrische in jedem Raum von einer gegebenen Anzahl von Dimensionen und über die stetigen Systeme unveränderlicher Figuren gesagt haben, geht klar hervor, dass wir von der Bewegung der Körper oder der starren Systeme bei der Behandlung der Grundbegriffe keinen Gebrauch machen.

Heute nach den berühmten Arbeiten von *Helmholtz*, welcher behauptet „von Congruenz könne keine Rede sein, wenn sich die starren Körper oder Punktsysteme nicht gegeneinander bewegen lassen", erklärt ein Theil der Autoren dieses Anschauungsprincip für unentbehrlich zur Entwicklung der Geometrie und macht ausdrücklich in den Elementarbüchern der Geometrie Gebrauch davon, während es nicht allein nicht unentbehrlich ist, sondern auch ohne Einbusse an der nöthigen Strenge nicht zur Verwendung kommen kann. Dieses Princip hängt vielmehr von den Eigenschaften des besonderen geometrischen Dings ab, in welchem nach der Voraussetzung die Bewegung vor sich geht; auf die Definition der Gleichheit der Figuren in einem Raum von n Dimensionen ($n > 1$) angewendet, schränkt es diesen Begriff auf die Congruenz allein ein und macht ihn von den Dimensionen dieses Raums abhängig; ja es beschränkt auch die Congruenz, indem es sie von allen Merkmalen der Anschauungslinien abhängen lässt; es setzt nicht nur in dem Raum die Existenz von Figuren voraus, welche jeder andern gegebenen Figur identisch sind, sondern sogar stetige Systeme unveränderlicher Figuren, während sich doch alle diese Eigenschaften aus der Construction des Raums ableiten lassen. Um erklärt zu werden, muss es sich selbst auf das Princip der Identität stützen. Es kann daher nicht dazu dienen das geometrische Continuum abstract zu definiren und ist, wie schon gesagt, nur für die praktischen Anwendungen nöthig.

Mit diesem Allen wollen wir nicht sagen, dass man bei der Aufstellung der geometrischen Axiome nicht von der Bewegung, welche eine ursprüngliche Idee ist, Gebrauch machen solle, wie auch nicht, dass die Bewegung zur Bildung der geometrischen Vorstellungen nicht nöthig sei; es ist dies ein psychologisches Problem, welches uns nichts angeht; wohl aber behaupten wir, dass die Bewegung als nothwendiges Princip aus den Fundamenten der theoretischen Geometrie ausgeschlossen werden muss.[1])

Bisher haben wir immer von dem wissenschaftlichen Problem in seiner ganzen Allgemeinheit gesprochen. Die Erörterung der Grundbegriffe der Mathematik kann aber die didaktische Seite der Frage, wie wir schon angedeutet haben, nicht ausser Acht lassen.

1) Siehe darüber die §§ 9, 22 u. 23 des Buches I mit den bezüglichen Betrachtungen der Einleitung, die §§ 18, 19, 20 des Buches II des I. Theils und die entsprechenden Paragraphen der andern Bücher. Weil wir in dieser Beziehung von *Helmholtz* wie auch von *Newton* abweichen, nach welchem die Geometrie nur ein Theil der Mechanik ist (Phil. nat. Principia math. 2. Ausg. Cambridge. S. 273) und es sich um so angesehene Autoritäten handelt, so haben wir geglaubt noch andre Gründe zur Unterstützung unsrer These angeben zu sollen; es wird dies im Anhang geschehen.

Schon gleich im Anfang haben wir bemerkt, dass die elementare Geometrie seit *Euclid* bis auf den heutigen Tag sehr geringe Fortschritte gemacht hat, insofern auch in den besseren modernen Abhandlungen die Mängel der Principien, welche man bei *Euclid* findet, nicht systematisch entfernt worden sind. In einigen sind allerdings hie und da Verbesserungen angebracht worden, während man nicht leugnen kann, dass andre hinter dem grossen Griechen an Klarheit wie an Präcision der Begriffe zurückgeblieben sind. Das wissenschaftliche und das didaktische Problem werden von verschiedenen Gesichtspunkten aus behandelt; die beste Lösung des zweiten hängt aber von derjenigen des ersten ab; denn, wenn auch die didaktischen Anforderungen ihren gebührenden Einfluss haben müssen, so will es doch in einer wissenschaftlich vorher festgestellten Anordnung gelöst werden; während das wissenschaftliche Problem derart bearbeitet werden muss, dass es bei der Lösung des andern möglichst behülflich ist. Wir sprechen speciell von den Büchern, die für die Schulen bestimmt sind, in denen die Mathematik den Schülern weniger als ein praktisch zusammengestelltes Ganze nützlicher Wahrheiten, denn als ein Modell logischer Schärfe vorgeführt wird, ohne dass man dabei ihren praktischen Zweck aus dem Auge verliert. Um dieses Ziel zu erreichen, kann, wenn es nöthig ist, der Strenge der Principien eine weitergehende Entwicklung des Stoffs geopfert werden.

Zu diesem Zweck haben wir die auf die Grade und die Ebene sich beziehenden Kapitel mit durch lateinische Ziffern bezeichneten Anmerkungen begleitet und haben, uns auf das endliche *Euclid*'sche Gebiet beschränkend, gezeigt, dass es möglich ist, sich an die Principien zu halten, welche unserm Buch seine Gestalt geben, dass nämlich

1) die Grade als Grundelement zur Construction der Figuren und zur Bezugnahme auf die geometrischen Grössen angenommen werden kann;

2) dass man von Anfang an weder ausdrücklich noch stillschweigend das Axiom über die drei Dimensionen des Anschauungsraums oder die Definition von Fläche und Linie bei der logischen Exposition nöthig hat, jedoch immer von der Anschauung und empirischen Betrachtungen Gebrauch macht, wenn man sie zur Unterstützung abstracter Erörterungen heranziehen muss.

3) Dass man das Axiom über die Bewegung nur als praktisches Mittel nöthig hat und dass ohne dasselbe die Beweise über die Gleichheit der Figuren nicht complicirter werden.

4) Dass alle Grundeigenschaften der Ebene und des Raums von drei Dimensionen mit Hülfe der von uns gegebenen Axiome und des Axioms über die parallelen Graden bewiesen werden.

Wir haben zu diesem Zweck unser Axiom II in der Anm. IV aus didaktischen Gründen durch das Axiom II′ ersetzt und haben die Geometrie in dem endlichen Gebiet allein sowohl mit Axiom II des Textes, als mit Axiom II′ entwickelt, bis man in Anm. XLIV und den folgenden den Unterschied zwischen den beiden Axiomen nicht länger zu berücksichtigen braucht.

Weil wir ferner das Postulat über die Parallelen unabhängig von der Ebene nöthig haben, so haben wir in Anm. XVI eine neue Definition des Parallelismus zweier Graden gegeben.

Unsre Axiome drücken Eigenschaften aus, die auch in den Axiomen der Elementarbücher über Geometrie gewöhnlich gegeben werden mit Ausnahme von Axiom IV und V, welche durch bei weitem complicirtere Eigenschaften ersetzt werden.

Wir haben uns in diesen Anmerkungen auf die Grade und die Ebene beschränkt vor Allem, weil man aus der Construction des Raums S_3 leicht sieht, wie man bei Modificationen zu verfahren hat. Jedenfalls kann man, ohne aus dem endlichen Gebiet herauszutreten, mit Vortheil die Ausdrücke: Unendlich ferner Punkt zweier Graden oder unendlich ferne Grade zweier Ebenen gebrauchen, um anzugeben, dass die Graden resp. Ebenen parallel sind.

Wir hoffen diese Principien in einem besondern Elementarbuch über Geometrie entwickeln zu können.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob ein Theil des Textes hätte weggelassen oder abgekürzt werden können. Das ist ja möglich; aber nicht nur finden Theorien, welche im Anfang überflüssig erscheinen, in der Folge ihre Anwendung, sondern es geht auch aus unsrer vorhergehenden Erörterung der geometrischen Eigenschaften und Beweise hervor, dass bei diesen Argumenten Nichts übergangen werden darf und dass die Kürze, wenn sie die Unbestimmtheit der Begriffe zur Folge hat, ein schwerer Fehler ist. In einer einzigen Verschweigung können Eigenschaften verborgen sein, deren Beweis eine gründliche Umänderung der Principien selbst erfordert. Solange man beim Beweisen von der Evidenz Gebrauch macht, hat man niemals die absolute Sicherheit, keinen Irrthum begangen zu haben. Es gibt zwei Mittel, um einen Fehler möglichst zu vermeiden. Je mehr die Untersuchung ins Einzelne geht, um so unbedeutender wird der begangene Fehler sein und mehr Formfragen als Wesentliches betreffen und je öfter man die streitigen Punkte überlegt, mit um so grösserer Sicherheit wird man einen Fehler vermeiden können.

Aus diesem Grund haben wir besonders in der Einleitung und in den beiden ersten Büchern des ersten Theils oder wo wir es für angebracht hielten, die Eigenschaften in so einfache Theile zerlegt, wie uns nur möglich gewesen ist und haben in den Beweisen an sehr vielen Stellen die Eigenschaften angegeben, auf welche sie sich stützen; diese Angaben vermindern sich nach und nach bei weiterm Fortschreiten, weil es nicht nöthig ist den Hinweis auf eine Eigenschaft, von welcher man beständig Gebrauch gemacht hat, zu wiederholen. Auf diese Art treten auch die schwachen Punkte, wenn solche vorhanden sind, mehr hervor und erlauben Andern sie zu corrigiren und jene Vollkommenheit zu erreichen, welche wir Alle im Interresse der Wissenschaft wünschen müssen. Man muss sich freilich auch hüten pedantisch zu werden und Dingen eine grosse Bedeutung beizulegen, welche sie nicht haben und darüber wichtigere Fragen aus dem Auge zu verlieren.

Was nun den Gebrauch der in den Text eingeschalteten Figuren angeht, so haben wir sie in dem ersten Theil an das Ende der Beweise gesetzt um zu zeigen, dass man mehr auf die logische Schlussweise als auf die Anschauung zu achten hat; während wir sie im zweiten Theil gleich zu Anfang bringen, damit der Leser sofort von ihnen Gebrauch mache und so seine Raumanschauung soviel als möglich in Thätigkeit setze und sie auch da anwende, wo die Figuren fehlen; wir vergeben damit aber der Strenge der Beweise nichts.

Diese ins Einzelne gehende Methode ist gewiss bei höheren Untersuchungen nicht anzurathen, weil die Deduction auf dem Gebiet dieser Untersuchungen leichter und sicherer ist und die Methode desshalb zu unnöthigen Längen führen würde.

Die Wissenschaft entwickelt sich nunmehr in zwei Richtungen, die Höhe und die Tiefe und man kann noch nicht sagen ob man in der zweiten Richtung an das Ende kommen wird, weil dadurch, dass man die Principien unter neuen Gesichtspunkten betrachtet oder neue Principien einführt, sich immer neue Fragen bieten, deren Behandlung dann den Ursprung der Wissenschaft immer mehr vertieft.

Wer keine Zeit hat, das ganze Buch zu studiren, kann viele Theile auch getrennt für sich lesen; er muss nur das Vorhergehende gelten lassen und bestimmte vorher gegebene Definitionen und Sätze berücksichtigen. So kann man z. B. die Sätze der Geometrie des *Euclid*'schen endlichen Gebiets allein prüfen, wenn man den mit Lateinischen Zahlen bezeichneten Anmerkungen folgt. Dasselbe gilt für die Sätze über die Grade an sich oder als Element andrer Figuren, über die Ebene, den gewöhnlichen Raum und die Räume von mehr als drei Dimensionen, für die Unendlichkleinen und die Unendlichgrossen, die Bewegung, für die Sätze, welche die Systeme *Euclid*'s, *Lobatschewsky*'s und *Riemann*'s charakterisiren u. s. w.

Will man bei dem Studium der Geometrie von mehr als drei Dimensionen das thatsächliche Unendlichgrosse und Unendlichkleine nicht benutzen, so muss man die uneigentlichen Elemente im Unendlichgrossen als Definition einführen. Man definirt nämlich den Punkt im Unendlichgrossen mit Hülfe zweier parallelen Graden (Anm. XLIV), zeigt dann, dass der Ort im Unendlichgrossen eines Gradenbüschels (und mithin der Ebene) mit jedem Punkt des endlichen Gebiets ein andres Büschel und mithin eine andre Ebene bestimmt und dass desshalb dieser Ort *unendlich ferne Grade* heisst.

Aus der Geometrie des Sterns in S_3 erhält man durch passende Definitionen die Geometrie des unendlich fernen Orts von S_3, den man *Ebene* nennen kann, weil sich bezüglich der Positionsverhältnisse die unendlich fernen Elemente mit den Elementen des endlichen Gebiets vertauschen lassen.

Betrachtet man den Strahlen- statt des Gradensterns, so gibt es wie bei der Graden zwei entgegengesetzte Strahlen und im Unendlichgrossen Paare entgegengesetzter Punkte, welche die Grade nicht bestimmen. Nachdem der *Euclid*'sche Raum S_4 construirt ist, zeigt man nach § 122, dass eine unendlich

ferne Ebene von S_4 mit jedem Punkt des endlichen Gebiets von S_4 einen Raum S_3 bestimmt. Der unendlich ferne Ort von S_4 besitzt daher dieselben Eigenschaften, wie der früher untersuchte *Riemann*'sche Raum von drei Dimensionen. Hat man Dies festgesetzt, so kann man ohne Weiteres dem Text folgen.

Vergleicht man diese Methode mit der im Text befolgten, so tritt der Unterschied zwischen den uneigentlichen und den actualen Unendlichgrossen klar hervor. Die actualen dienen vor Allem zur Construction der Geometrie unabhängig vom Axiom V des Archimedes, welche unendlich viele diesem Axiom unterworfene Systeme enthält. Benutzt man sie zum Studium der *Euclid*'schen Räume, so dienen sie z. B. zur Definition des Parallelismus, während die uneigentlichen Unendlichgrossen mittelst der parallelen Elemente definirt werden.

Der Anhang soll schliesslich eine Anleitung zum Studium der wichtigsten besonders in diesem Jahrhundert entwickelten Ideen über die Principien der Geometrie sein. Um einen möglichst grossen Nutzen aus ihm zu ziehen, muss man sich jedoch vorher mit den Grundideen unsers Buches bekannt machen.

Unser Buch wird auch den Philosophen willkommen sein, die sich mit diesen Gegenständen gern befassen, obwohl wir bei der systematischen Exposition dieser Untersuchungen aus den früher angegebenen Gründen a priori jede Betrachtung von eigentlich philosophischem Charakter ausgeschlossen haben.

Auch die berühmtesten Mathematiker, welche sich mit diesen Fragen beschäftigt haben, sind nicht ohne gerechtfertigten Tadel davongekommen, auch wenn ihre Arbeiten ohne Zweifel zum Fortschritt der Wissenschaft beigetragen haben. Es würde daher unbescheiden sein, wollten wir uns besonders bei einer so umfassenden Arbeit über jede Kritik erhaben dünken, obwohl wir andrerseits das Bewusstsein haben, diese Arbeit speciell bei mehr streitigen Punkten, wiederholt überdacht zu haben. Wir haben aber mit Rücksicht auf die Resultate die Gewissheit, ohne welche wir dieses Buch nicht veröffentlicht hätten, einen der einfachsten Wege eingeschlagen zu haben und sind überdies überzeugt, dass jeder Fehler, den man vielleicht bemerken könnte, sich unter Befolgung derselben Grundideen entfernen lässt.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Fundamentalsätze über die abstracten mathematischen Formen.

I. Kapitel.

Die gewöhnlichen Begriffe und Operationen.

II. Kapitel.

Erste Eigenschaften der abstracten mathematischen Formen.

III. Kapitel.

Die Zahl in ihrer ersten Bildung. — Natürliche Zahlen.

Seite

IV. Kapitel.

Von den Elementensystemen und insbesondre von denjenigen von einer Dimension.

V. Kapitel.

Von der Grundform.

VI. Kapitel.

Endliche, unendlich grosse, unendlich kleine, unbegrenzt kleine und unbegrenzt grosse Segmente. — Unendlich grosse Zahlen.

VII. Kapitel.

Formen von mehreren Dimensionen. — Das Gebiet aller Formen. — Extensive und intensive Grösse einer Form und insbesondere der Grundform.

VIII. Kapitel.[1])

Reelle, relative und absolute, positive und negative Zahlen.

1) Von diesem Kapitel machen wir wie von andern in dem Text angegebenen Theilen der Einleitung in den Grundzügen der Geometrie keinen Gebrauch.

Seite

IX. Kapitel.

Letzte Betrachtungen über die Grundform.

Erster Theil.

Die Grade, die Ebene und der Raum von drei Dimensionen im allgemeinen Raum.

Buch I.

Die Grade und die gradlinigen Figuren im Allgemeinen.

I. Kapitel.

Die Grade und die gradlinigen Figuren im Allgemeinen. — Axiome und Hypothesen.

Buch II.

Die Ebene.

I. Kapitel.

Das Strahlenbüschel und die Euclid'sche Ebene.

II. Kapitel.

Die vollständige (oder Riemann'sche) Ebene.

Seite

III. Kapitel.

Weitere Betrachtungen über die Systeme Euclid's, Lobatschewsky's und Riemann's.

Buch III.

Der Raum von drei Dimensionen.

I. Kapitel.

Der Euclid'sche Raum von drei Dimensionen.

II. Kapitel.

Der vollständige Raum von drei Dimensionen.

Zweiter Theil.

Der Raum von vier und von n Dimensionen in dem allgemeinen Raum.

Buch I.

Der Raum von vier Dimensionen.

I. Kapitel.

Der Euclid'sche Raum von vier Dimensionen.

II. Kapitel.

Der vollständige Raum von vier Dimensionen.

Buch II.

Der Euclid'sche Raum von n Dimensionen.

I. Kapitel.

Der Euclid'sche Raum von n Dimensionen.

II. Kapitel.

Die Operationen des Projicirens und des Schneidens in S_n. — Ihre Anwendung auf das Studium der Configurationen einer endlichen Anzahl Räume in jedem Raum S_r $(r \gtrless n)$.

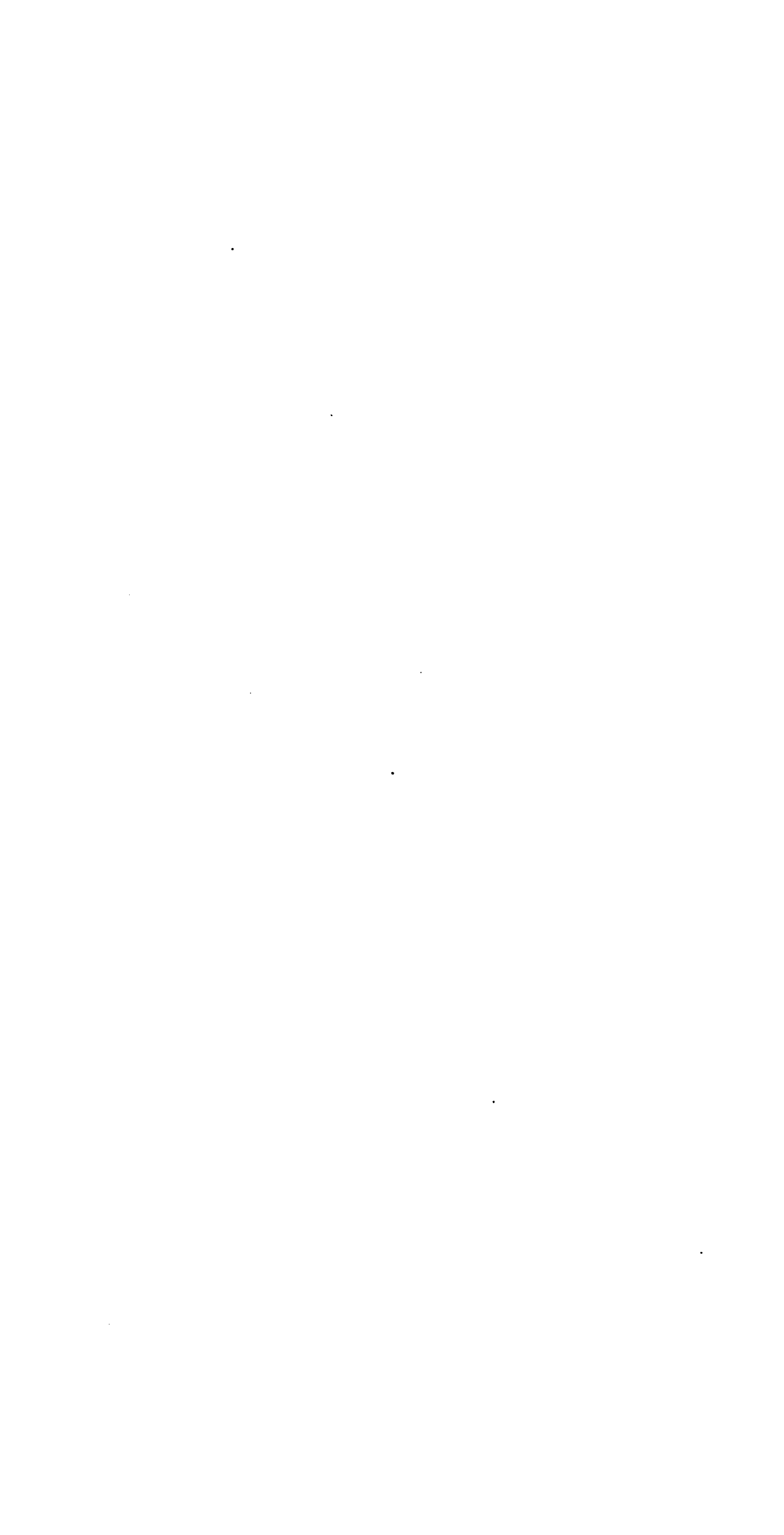
Anhang.

GRUNDZÜGE DER GEOMETRIE

VON MEHREREN DIMENSIONEN

UND MEHREREN ARTEN GRADLINIGER EINHEITEN

IN ELEMENTARER FORM ENTWICKELT.



Einleitung.

Fundamentalsätze über die abstracten mathematischen Formen.

I. Kapitel.

Die gewöhnlichen Begriffe und Operationen.

1.

Einheit und Mehrheit. — Zuerst und nachher. — Begriffe und Bezeichnungen der Dinge. — Die Operationen des Setzens und des Abstrahirens oder Wegnehmens.

§ 1. Ich denke.[1])

§ 2. Ich denke **ein Ding** oder **mehrere** Dinge.[2])

Beisp. Mein Ich ist *ein* Ding; die Handlungen des Denkens, ein Urtheil, ein Schluss, die Thiere und die Pflanzen sind *mehrere* Dinge.

§ 3. Ich denke **zuerst** ein Ding, **nachher** ein Ding.

Def. Das zuerst gedachte Ding heisst *erstes* Ding, das nachher (später) gedachte Ding heifst *zweites* Ding.

§ 4. *Def.* Das, was in dem Gedanken einem Ding **entspricht**, wird *Vorstellung, Begriff* oder *geistige Darstellung* des Dinges genannt.[3])

1) Damit drücken wir die Fähigkeit zu denken und die Handlung des Denkens aus und leiten daraus die Principien der abstracten mathematischen Formen ab, ohne dass jedoch das Denken ein besonderer Gegenstand der mathematischen Forschung wäre.

2) Siehe Bem. § 8. Wenn man denkt, denkt man irgend ein Ding. Ich denke kein Ding, bedeutet: Ich denke nicht.

3) Wir haben nicht vor jeden neuen Ausdruck zu erklären, dessen wir uns im weiteren Verlauf bedienen, noch weniger wollen wir jeden Ausdruck mittelst der vorhergehenden definiren, sondern werden nur diejenigen Begriffe und Operationen durch den Druck besonders hervorheben oder definiren, die zur Aufstellung der Grundsätze über die abstracten, mathematischen Formen dienen. Wir erklären ferner ein für alle Mal, dass wir uns statt der nach und nach in den Definitionen und im sonstigen Text benutzten Wörter auch anderer bedienen werden, die dieselben Begriffe ausdrücken, ohne darauf noch besonders aufmerksam zu machen. Zweideutigkeiten sollen jedoch vermieden und auch nicht heimlich Begriffe eingeführt werden, die erläutert und definirt werden müssen.

Die Definitionen der Namen, die Begriffe und die Operationen, die wir nacheinander erklären oder definiren werden, haben ferner nur in den Fällen Gültigkeit, in denen sie betrachtet werden. Wenn der Analogie wegen dieselben Benennungen dann auch in andern Fällen gebraucht werden, so folgt daraus nicht, dass für die neuen Dinge dieselben Gesetze gelten und dass sie denselben Bedingungen unterliegen müssen, wie die zuerst definirten

§ 5. *Bez.* Ein oder mehrere Dinge oder Begriffe werden mit Zeichen, z. B. mit Buchstaben des Alphabets, bezeichnet werden.

Def. Man sagt: Diese Zeichen *stellen* diese Dinge *dar* und diese Dinge *entsprechen* ihren Zeichen und werden durch ihre Zeichen dargestellt.[1])

Bem. Wenn A und B *einen* Begriff darstellen oder, wie wir auch sagen werden, *einen einzigen* Begriff, so meinen wir, dass A und B nicht mehrere Begriffe darstellen (§ 2).

§ 6. *Def.* Wenn ich ein Ding denke, so sagt man: Das Ding ist von dem Gedanken *gegeben* oder *gesetzt*; wenn ich an ein Ding denke, so sagt man: Das Ding ist *dem* Gedanken *gegeben.*

Beisp. Der Aufbau eines Urtheils ist ein von dem Gedanken gesetztes Ding; der Mensch Carl ist ein dem Gedanken gegebenes Ding. (Siehe § 18.)

§ 7. *Def. I.* Wenn *zuerst* mehrere Dinge (§ 3), z. B. A, B, C, D gegeben oder gesetzt sind und ich *nachher* (§ 3) an die Dinge A, B, C denke, so sagt man: *Ich abstrahire* oder *sehe von D ab* oder auch *ich nehme D* von den gegebenen Dingen *weg.* A, B, C heissen die *übrig bleibenden* Dinge.

Def. II. Alle gegebenen Dinge, oder auch *jedes* gegebene Ding denken bedeutet, von keinem von ihnen abstrahiren.

2.

Die Operation des Vergleichens. — Die dazu nöthigen Sätze.

§ 8. Die Dinge A und B miteinander *vergleichen* heisst die folgenden Sätze anwenden:

I. **Der Begriff A ist der Begriff A** (Identitätssatz).

Def. I. Wenn A und B einen einzigen Begriff c darstellen, so ist der von A dargestellte Begriff c der von B dargestellte Begriff c (Def., Bem. § 5 und I). Wir sagen: *Der Begriff A ist der Begriff B oder ist derselbe Begriff wie B.*[2])

a. *Wenn der Begriff A der Begriff B ist, so* **folgt**: *Der Begriff B ist der Begriff A.*

Da nach der Voraussetzung A und B einen einzigen Begriff darstellen (Def. I), so stellen B und A einen einzigen Begriff dar (Def. § 5), woraus a. folgt (Def. I).[3])

b. *Wenn der Begriff A der Begriff B und der Begriff B der Begriff C ist, so folgt: Der Begriff A ist der Begriff C.*

Der von A und von B dargestellte Begriff ist der von B und von C dargestellte Begriff, weil nach der Voraussetzung B einen einzigen Begriff darstellt;

Dinge. Solange diese neuen Dinge nicht in Betracht kommen, braucht man sie sich nicht einmal gegenwärtig zu halten.

1) Diese Definition ist offenbar von der Reihenfolge unabhängig, in welcher die Zeichen, welche ein Ding darstellen, betrachtet werden können.

2) Man beachte wohl, dass nicht das Zeichen A dem Zeichen B gleich ist, sondern dass der von A dargestellte Begriff der von B dargestellte Begriff ist. In Zeichen drückt die Def. I nichts Anderes aus als: $Ar.c$, $Br.c$, (A repräsentirt c), wobei wir unter c den gegebenen Begriff selbst verstehen.

3) In Zeichen: Aus $Ar.c$, $Br.c$ folgt $Br.c$, $Ar.c$ (Def. § 5); daraus folgt a. (Def. I).

er ist es daher von A, von B, von C (Def. § 5) und also auch von A und von C (Def. § 5), woraus b. folgt (Def. I).[1])

II. **Der Begriff A ist nicht der Begriff B** (das Princip der Verschiedenheit).

Def. II. Man sagt: Der Begriff A ist *verschieden* von dem Begriff B, wenn der Begriff A nicht der Begriff B ist.

Bem. Der Begriff „ein Ding" ist verschieden von dem Begriff „mehrere Dinge" (§ 2).

III. **Der Begriff A ist A und ist nicht nicht-A** (Princip des Widerspruchs).

Def. III. Wir sagen: „A ist und ist nicht A" oder einfacher „A ist nicht A" ist *sinnlos*.

IV. **Der Begriff A ist oder ist nicht der Begriff B** (Princip des zwischen sich Widersprechendem ausgeschlossenen Dritten).

c. *Wenn der Begriff A nicht der Begriff B ist, so ist der Begriff B nicht der Begriff A.*

B ist A oder nicht-A (IV). Wenn B A ist, während A nach der Annahme nicht B ist, so ergiebt sich: B ist und ist nicht B (b), was sinnlos ist (III, Def. III).

Def. IV. Das bei der Operation des Vergleichens der Dinge A und B sich ergebende Resultat (das Ergebniss der Operation) heisst *das Verhältniss* zwischen A und B.

Def. V. Der Ausdruck: „Mehrere *zusammenfallende* oder *sich deckende* Dinge" bedeutet ein Ding (ein einziges Ding).

Mehrere Dinge, welche nicht (im Sinn des § 2) ein einziges Ding sind, heissen *von einander verschieden.*

Bem. I. Wenn wir ohne Weiteres von mehreren Dingen sprechen, so meinen wir damit, dass sie verschieden sind.

Def. VI. Der Satz: Das Ding A ist dem Ding B *gleich* bedeutet: Der Begriff des Dinges A ist der Begriff des Dinges B (§ 4). Man sagt: Die Dinge A und B haben bei dieser Vergleichung ein Verhältniss der *Gleichheit* (Def. IV).

Daraus, aus (a) und aus Def. I folgt:

d. *Wenn A gleich B ist, so ist B gleich A.*

Def. VII. Wenn A und B gleich sind, so haben sie dieselbe geistige Darstellung in dem Verhältniss der Gleichheit (Def. VI; § 4). An A denken ist also an das Ding B denken, wir sagen daher, dass man ihrem Begriff oder ihrer Bestimmung nach *das eine dem andern substituiren* oder dass man sie *untereinander vertauschen* kann.

e. *Wenn A gleich B und B gleich C ist, so folgt: A ist gleich C* (Def. VI und b).

Def. VIII. Wenn der Begriff des Dinges A nicht der Begriff des Dinges B ist (II), so heissen die Dinge A und B *verschiedene* Dinge; ihr Verhältniss heisst *Verhältniss der Verschiedenheit.*

f. *„A ist gleich B und ist nicht gleich B" ist sinnlos.*

---

1) In Zeichen: $Ar.c$, $Br.c$; $Br.c$, $Cr.c$; es folgt $Ar.c$, $Br.c$, $Cr.c$ (Def. § 5); es folgt: $Ar.c$, $Cr.c$ (Def. § 5); und daraus b. (Def. I).

Denn es bedeutet: Der Begriff B, welcher derjenige von A ist (b und Def. VI), ist und ist nicht derselbe Begriff B (a und c), was sinnlos ist (III, Def. III).

g. *Wenn A nicht gleich B ist, so ist B nicht gleich A.*

Denn, wenn B gleich A wäre, so würde A gleich B sein (d), was sinnlos ist (f). Daraus folgt g (IV und Def. VI).

h. *Wenn A gleich B und A nicht gleich C ist, so ist B nicht gleich C.*

Denn, wenn B gleich C wäre, so wäre A gleich C (e), was gegen die Voraussetzung ist (IV und Def. VI).

§ 9. *Def. I.* Das *Merkmal* (contrassegno) eines Dinges ist dasjenige, mittelst dessen wir es mit anderen Dingen vergleichen können.

Wenn wir von den Dingen A und B ein einziges Merkmal M betrachten, so sind sie gleich, weil sie dem einzigen Begriff M entsprechen (Def. I und VI, § 8). Wir sagen, A und B sind *in Bezug* auf das Merkmal M gleich.

Def. II. Wenn die Dinge A und B in Bezug auf einige ihrer Merkmale gleich sind, in Bezug auf andere aber nicht, so sagt man, dass sie diejenigen Merkmale, in Bezug auf welche sie gleich sind, *gemeinschaftlich* haben.

Beisp. Cajus ist dem Titius als Mensch gleich, aber Cajus und Titius können in Bezug auf andere ihrer Merkmale verschieden sein.

Def. III. Wenn die von einander verschiedenen (Def. V, § 8) Dinge A und B, jedes nach seinem Begriff (§ 4) betrachtet, in Bezug auf ihre sämmtlichen in Betracht gezogenen Merkmale gleich sind, das heisst, demselben Begriff in Bezug auf sie entsprechen, so heissen sie *gleich in absolutem Sinn* oder einfach *gleich* oder auch *identisch* (siehe Bem. III).

Wir schreiben $A \equiv B$, woraus $B \equiv A$ (d, § 8).

Def. IV. Wenn sie nur in Bezug auf einige Merkmale gleich sind, so heissen sie *gleich in relativem Sinn oder gleichwerthig*. Wir schreiben $A = B$, woraus $B = A$ (d, § 8).

Bem. I. Wenn man nur eine einzige Gleichheit in Betracht zieht, so kann man im ersten Fall $A = B$ und im zweiten $A \quad B$ schreiben.

Def. V. Sowohl in dem einen, wie in dem andern Fall heissen A und B *Glieder* (Termen) der Gleichheit.

Bem. II. Im ersten Fall können wir die Dinge A und B einander in Bezug auf ihre sämmtlichen Merkmale substituiren; im zweiten Fall dagegen können sie nur in Bezug auf ihre gemeinschaftlichen Merkmale vertauscht werden (Def. VII, § 8).

Aus Def. III und IV folgt:

a. Die Dinge A und B können nur auf eine einzige Art identisch sein, während sie auf verschiedene Art gleichwerthig sein können je nach den Merkmalen, in Bezug auf welche sie als gleich betrachtet werden können.

Bem. III. Wenn die identischen Dinge A und B verschieden sind (Def. V, § 8), so sind sie doch nur in dem Sinn verschieden, dass sie nicht ein einziges Ding sind; in ihrem Verhältniss der Identität darf man aber entweder dieser Verschiedenheit nicht Rechnung tragen oder man muss sie betrachten, als ob sie ein einziges Ding wären oder zusammenfielen (Def. V, § 8). Wenn man auch ihre Verschiedenheit in Betracht zöge, so könnte man einem Ding A kein anderes von A verschiedenes Ding substituiren. Es ist aber nöthig,

dass die Identität $A \equiv A$ (I, § 8) unwidersprochen bleibt, das heisst, man darf nicht zu dem Resultat kommen: A ist und ist nicht A (III, § 8).

Def. VI. Wenn die Dinge A und B verschieden sind, so können wir, auch wenn sie identisch sind, von ihnen sagen, sie hätten eine *verschiedene Position.*

Bem. IV. So können eigentlich auch mehrere Dinge nicht verschieden sein, wenn sie nicht in Bezug auf irgend eines ihrer Merkmale und wäre es auch nur in Bezug darauf, dass jedes von ihnen ein Ding ist, einander gleich sind. Wenn wir sie jedoch identisch nennen, so sehen wir von ihrer verschiedenen Position, und wenn wir sie verschieden nennen, so sehen wir von den gemeinschaftlichen Merkmalen (Def. II) ab.[1]

b. *Wenn A und B Bezeichnungen eines und desselben Dinges oder des nämlichen Merkmals eines Dinges sind, so ist*

$$A \equiv B \quad \text{oder auch} \quad A = B.$$

Denn der Begriff von A ist der Begriff von B, weil A und B dasselbe Ding oder das Merkmal eines Dinges und daher auch den Begriff dieses Dinges oder dieses Merkmals darstellen: Der Begriff des Zeichens A ist also der Begriff des Zeichens B (Def. I, § 8), woraus b folgt (Def. VI, § 8).

Bem. V. Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt, dass A in Bezug auf einige Merkmale B ist, während in Bezug auf andere schon desshalb, weil A und B nicht ein einziges Ding sind, A nicht B ist. Man beachte, dass hier die Behauptung „A ist und ist nicht B", nicht sinnlos ist (Def. III, § 8), weil sie nicht das Ergebniss desselben Vergleichs ist; eine Gleichung wäre jedoch sinnlos, aus welcher bei demselben Vergleich auch nur in einem einzigen Fall sich ergäbe: „A ist und ist nicht B".

3.

Bedingung für die Bestimmung eines Dings. — Eindeutige und umgekehrte Operationen.

§ 10. *Def. I.* Man sagt: A ist *Bedingung* von B, wenn B ohne A nicht sein kann. Man sagt auch: A ist Bedingung einer Operation, wenn diese Operation ohne A nicht möglich ist. Hat diese Operation B zum Resultat, so ist A Bedingung von B.

Def. II. Wenn wir sagen, A, B, C, D *bestimmen* den Gegenstand X, so meinen wir, dass A, B, C, D Bedingungen einer Operation sind, durch welche man den Gegenstand X erhält; oder dass, wenn die Bedingungen gegeben sind, der Gegenstand selbst gegeben ist.

Im ersten Fall sagt man, A, B, C, D dienen dazu den Gegenstand X zu *construiren*, in jedem Fall aber, dass X von den Bedingungen, welche es bestimmen, *abhängt.* Wenn X nicht durch Y bestimmt wird, so ist X von Y *unabhängig.*

Beisp. Weil wir ein Ding mittelst seiner Merkmale von den andern Dingen unterscheiden (Def. I, § 9), so sind die Merkmale die Bedingungen der Bestimmung eines Dings.

---

1) Wenn mittelst schon erforschter Dinge neue Dinge definirt oder construirt werden, ist es ein logischer Fehler, ihre Gleichheit zu definiren, wenn dieses Wort seinen ursprünglichen und allgemeinen, hier erklärten Sinn behalten soll und wenn die neuen Dinge für sich durch die Definition *vollständig* bestimmt sind.

§ 11. *Def. I.* Ein Ding nennt man *eindeutig* durch gegebene Bedingungen bestimmt, wenn dieses und nur dieses Ding durch diese Bedingungen gegeben ist. Wenn wir sagen, ein Ding sei durch gegebene Bedingungen bestimmt, so meinen wir damit, dass es eindeutig bestimmt sei. In Ausnahmefällen wird besonders darauf aufmerksam gemacht.

Def. II. Analog nennt man eine Operation, die ein einziges Resultat liefert, eine *eindeutige* Operation.

a. *Ein Ding zu setzen und wegzunehmen sind eindeutige Operationen.*

Das heisst, wird ein Ding A gesetzt (§ 6), so wird nur A gesetzt, und sieht man von A ab (§ 7), so wird nur von A abgesehen.

Denn wenn man damit, dass man A setzte, ein anderes Ding B setzte, so würde man mehrere Dinge setzen und nicht eines (Bem. § 8). Gleiches gilt für die Operation des Wegnehmens.

§ 12. *Def.* Wenn man mit einer Operation φ aus A das Ding B erhält, so heisst die Operation, durch welche man aus B das Ding A ableitet, die *umgekehrte* Operation von φ.

a. *Das Setzen und das Wegnehmen sind umgekehrte Operationen.*

Denn A setzen bedeutet, das Ding A betrachten, A wegnehmen bedeutet, das zuerst gedachte Ding A nicht betrachten (§§ 6, 7).

4.

Gruppe von Dingen. — Begriff des „ausserhalb".

§ 13. *Def. I.* **Ich denke** mehrere gegebene Dinge **zusammen**, welche sich nicht gegenseitig widersprechen und so beschaffen sind, dass, wenn ich ein beliebiges von ihnen wegnehme (§ 7), ich nicht irgend ein anderes der gegebenen Dinge wegnehme. Das Resultat dieser Operation heisst *Gruppe* (Aggregat, Vielheit oder System) der gegebenen Dinge [1].

Beisp. 1. Ich habe z. B. die Vorstellung A, dann die Vorstellung B; ich habe also mehrere Vorstellungen, d. i. A und B gehabt (§ 2). Betrachte ich dann diese Vorstellungen zusammen, so habe ich die Gruppe von Vorstellungen A und B.

Beisp. 2. Es sind mehrere Gegenstände gegeben z. B. die Feder, das Tintenfass, das Buch u. s. w. Denkt man diese Gegenstände zusammen, so erhält man ihre Gruppe.

Def. II. Man sagt: Die gegebenen Dinge *sind in der Gruppe*, *setzen* die Gruppe *zusammen* oder *bilden* sie oder *gehören* ihr *an* und die Gruppe ist aus ihnen *zusammengesetzt*.

Def. III. Um unnütze und schädliche Unterscheidungen zu vermeiden, werden wir manchmal auch statt: „ein Gegenstand" sagen: „*eine Gruppe mit einem einzigen Gegenstand*".

Bem. Von den gegebenen Dingen kann nicht das eine in dem andern enthalten sein und noch weniger kann die Gruppe eines der gegebenen Dinge sein. Wenn dies der Fall

1) Wir stützen uns hier auf die Operation des Zusammen-Denkens oder -Betrachtens in ihrer einfachsten Gestalt. (Siehe § 29, in welchem die Sätze für diese Operation aufgestellt sind.)

wäre, so würde man dadurch, dass man von einem (§ 7) absieht, auch von einem andern gegebenen Ding oder von den andern gegebenen Dingen absehen.

Bez. Die Gegenstände einer Gruppe, die nicht Gruppen mehrerer Gegenstände sind, werden wir im Allgemeinen mit den Buchstaben A, B, C, u. s. w. und die Gruppen mit den Symbolen (A), (B), (C), u. s. w. bezeichnen.

Def. IV. Wenn jeder Gegenstand einer Gruppe (A) (Def. II, § 7) ein Gegenstand einer Gruppe (B) ist, so sagt man: (A) *gehört* der Gruppe (B) *an.*

Def. V. Wenn (A) der Gruppe (B) angehört, aber nicht sämmtliche Gegenstände von (B) Gegenstände von (A) sind, so sagen wir: (A) ist ein *Theil* oder eine *Untergruppe* von (B). Eine Gruppe heisst auch *vollständig* in Bezug auf ihre Theile.

a. *Wenn (A) eine Untergruppe von (B) ist und (B) eine Untergruppe von (C), so ist (A) eine Untergruppe von (C).*

Denn jeder Gegenstand von (A) ist ein Gegenstand von (B), welcher ein Gegenstand von (C) ist; jeder Gegenstand von (A) ist desshalb Gegenstand von (C) (e, § 8; Def. V). Es gibt aber Gegenstände von (C), die nicht Gegenstände von (B) sind (Def. V) und welche nicht (A) angehören können, weil jeder Gegenstand von (A) Gegenstand von (B) ist (Def. V; IV, § 8). Daraus folgt a.[1])

Def. VI. Eine Gruppe (A) ist, sagt man, *ausserhalb* einer Gruppe (B), wenn (A), oder ein Theil von (A), (B) nicht angehört.[2])

Def. VII. Eine Gruppe (X) heisst mehreren Gruppen (A), (B), (C) *gemeinschaftlich*, wenn jeder Gegenstand von (X) Gegenstand der Gruppen (A), (B), (C) ist.

Def. VIII. Ein beliebiges Ding der Gruppe oder *ein willkürlich* aus der Gruppe *ausgewähltes* Ding bedeutet ein solches, welches der Gruppe angehört, ohne nothwendiger Weise ein bestimmtes Ding dieser Gruppe zu sein.

5.

Ordnung von Dingen. — Aufeinanderfolge oder Reihe von Dingen.

§ 14. *Def.* Die Behauptung: Die Dinge A und B in der *Ordnung* AB denken, bedeutet zuerst A und dann B denken (§ 3). Betrachtet man A und B als in dieser Ordnung gegeben (Def. § 6), so sagt man, *sie folgen sich* in der Ordnung AB.

Bezüglich dieser Ordnung haben wir gesagt, dass A das erste und B das zweite Ding ist (§ 3); man sagt auch A *geht* B *voran* und B *folgt* auf A.

§ 15. *Def.* Den Begriff A *wiederholen* bedeutet zuerst den Begriff A setzen und alsdann wieder den Begriff A setzen (§§ 6 und 3).

a. *Die Wiederholung eines Begriffes A ist eine eindeutige Operation.*

1) Andere analoge Sätze lassen sich *unmittelbar* aus den Def. IV und V durch directe Anwendung von e, § 8 ableiten. Z. B.: Wenn (A) (B) angehört und (B) gehört (C) an, so gehört (A) (C) an; ferner: Wenn (A) eine Untergruppe von (B) ist und (B) gehört (C) an, so ist (A) eine Untergruppe von (C) u. s. w.

2) Der Begriff *ausserhalb* schliesst hier nicht nothwendiger Weise denjenigen des Raumes ein, weil es sich um rein abstracte Gegenstände handelt.

Denn wiederholt man den Begriff A (Def.), so erhält man nur den Begriff A und sonst Nichts (Def.; a, § 11 und § 3).

§ 16. *Def.* Wenn man sagt: Mehrere Dinge A, B, C, ..., N, ... (die Punkte ersetzen Buchstaben oder andere Zeichen) *der Ordnung nach* denken, heisst, mehrere Dinge A, B, C, ..., N, ... das eine nach dem anderen oder *successiv* denken (Def. § 14).

Die Ordnung wird mit einem Symbol bezeichnet, das alle Zeichen enthält, welche die gegebenen Dinge in der Ordnung, in welcher sie gedacht werden, darstellen oder auch mit einem Symbol, aus welchem man, wenn das Zeichen eines beliebigen der gedachten Gegenstände gegeben ist, dasjenige des successiven Gegenstandes, falls er gegeben ist, erhält.

§ 17. *Def.* Wenn $ABC \ldots N \ldots$ das Symbol der Ordnung ist, in welcher sie gedacht wurden, so heisst A *das erste*, B *das zweite*, C *das dritte* Ding u. s. w., indem man für jedes betrachtete Ding ein neues Wort derart gebraucht, dass verschiedenen Wiederholungen verschiedene Worte oder verschiedene Zeichen entsprechen.[1])

§ 18. *Bem.* Wenn wir ein Urtheil aufstellen, so können wir nachher beurtheilen, ob dieses Urtheil richtig ist oder nicht; in einem solchen Fall wird das Urtheil als ein dem Gedanken gegebenes Ding betrachtet. Auf gleiche Weise können mehrere Dinge, die zuerst von dem Gedanken gesetzt sind, nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und zwar entweder in der Ordnung, in der wir sie betrachtet haben, oder unabhängig von dieser Ordnung, das heisst indem wir von derselben absehen (§ 7).

Und umgekehrt: Da einem dem Gedanken gegebenen Ding ein Begriff (§ 4) entspricht, mittelst dessen wir es mit andern Dingen vergleichen (§ 8), so können wir es mittelst dieses Begriffs als von dem Gedanken gesetzt auffassen. Es gilt desshalb der folgende Satz:

Ein von dem Gedanken gesetztes Ding kann nachher als dem Gedanken gegeben betrachtet werden und umgekehrt.

Beisp. Durch die Wiederholung derselben geistigen Handlung construiren wir z. B. die Zahl zwei (siehe § 46); dann aber können wir diese Zahl als ein dem Gedanken gegebenes Ding ansehen.

§ 19. *Def.* Die *Aufeinanderfolge* oder *Reihe* der Dinge A, B, C, D, ..., N, ... betrachten bedeutet, die Dinge A, B, C, D, ..., N, ... in der Ordnung $ABCD \ldots N \ldots$ betrachten. Die Ordnung $ABCD \ldots N \ldots$ heisst die *Ordnung* der Aufeinanderfolge.[2])

§ 20. *Def. I.* Man sagt auch, A ist in *der ersten Stelle der Aufeinanderfolge* oder auch es *nimmt die erste Stelle* in der Aufeinanderfolge *ein*, B die zweite, C die dritte, D die vierte, u. s. w. (§ 16) gerade desshalb, weil ihre Position

1) Siehe Def. III, § 47.

2) Die Aufeinanderfolge unserer Vorstellungen oder das Vermögen mehrere Dinge das eine nach dem andern betrachten zu können gibt uns die *Anschauung* von einem gewissen Ding, ohne welches wir unseren Gedanken nicht entwickeln können. Dieses gewisse Ding ist die *Zeit*. Wir abstrahiren jedoch von der Zeit als Element unserer Betrachtungen. (Siehe Bem., § 32.)

verschieden ist, da sie nicht dasselbe Ding sind, auch wenn sie identisch sind (Bem. § 8; Def. III, Bem. III, Def. VI, § 9).

Def. II. Wenn wir mit A', B', C', D', ... die von A, B, C, D, ... eingenommenen Stellen der Aufeinanderfolge bezeichnen, das heisst mit denselben mit einem Strich versehenen Buchstaben, so sagt man, die Dinge $A, B, C, D, \ldots$ sind in der Aufeinanderfolge $A'B'C'D'$ u. s. w. und auch in der Aufeinanderfolge $ABCD$ u. s. w. enthalten.

Beisp. Ich habe die Vorstellung A, nachher die Vorstellung B, dann die Vorstellung C; A, B, C bilden eine Aufeinanderfolge von Vorstellungen in der Ordnung ABC. In meinem Geist nimmt A die erste, B die zweite und C die dritte Stelle ein.[1])

a. *Verschiedene Dinge der Reihe nehmen verschiedene Stellen in der Reihe ein.*

Denn für verschiedene Dinge gebrauchen wir verschiedene Wörter, da ihnen verschiedene Wiederholungen entsprechen (Def. I und § 16).

§ 21. *Bez.* Unter X, Y, Z verstehen wir beliebige Dinge der Reihe (Def. VIII, § 13, die auch für die Reihe gilt).

Def. Ist ein beliebiges Ding X der beliebigen Reihe $ABC\ldots X\ldots Y\ldots$ gegeben (§ 16, § 19, Det. VIII, § 13), so sagt man, die Dinge $ABC\ldots X$ *gehen*, abgesehen von X (§ 7), in der Ordnung der Reihe X *voraus* oder *stehen vor* X und die übrigen Dinge der Reihe (§ 7) *folgen auf* X oder *stehen hinter* X.

a. *Das erste Ding der Reihe hat keine Dinge, die ihm vorausgehen* (Def.).

b. *Jedes Ding X einer Reihe $ABC\ldots Y\ldots$, das von einem andern beliebigen Ding Y der Reihe verschieden ist, steht dem Ding Y voraus oder folgt ihm nach* (Def. und a, § 20).

§ 22. *Def.* Wenn auf das Ding X in einer Reihe keine Dinge folgen oder hinter ihm stehen, so heisst X das *letzte* Ding der Reihe.

§ 23. *Def.* Wenn in einer gegebenen Reihe X vor Y steht und Z auf Y folgt, so sagt man, Y ist *zwischen X und Z enthalten* und X und Z werden durch Y *getrennt.* Die Dinge einer Reihe, die auf ein Ding X folgen und einem Ding Z vorangehen, heissen auch *mittlere* Dinge zwischen X und Z.

§ 24. *Def.* Wenn Y das erste Ding ist, welches auf ein beliebiges Ding X in der Reihe folgt, so heisst Y das *consecutive auf X folgende* und X das *consecutive Y vorhergehende* Ding.

§ 25. *Bez.* Wir bezeichnen eine Reihe von Gegenständen auch mit einem einzigen Zeichen z. B. mit einem griechischen Buchstaben.

Def. I. Von einer Reihe β sagt man, sie sei in einer Reihe α *enthalten* oder sie *gehöre* derselben *an,* wenn die Gegenstände von β Gegenstände von α sind und wenn die Gegenstände, welche jedem Gegenstand X in β vorangehen oder folgen, dem Gegenstand X in α vorangehen oder folgen.

Def. II. β wird im vorstehenden Fall ein *Theil* von α genannt, wenn in α Gegenstände sind, die nicht zu β gehören. Stets verstehen wir, wenn nicht

---

1) Auch der Begriff der Stelle oder der abstracten Position schliesst nicht nothwendiger Weise denjenigen des Raumes ein. (Siehe Note 3, § 13.)

Anderes bestimmt wird, unter *einem Theil β einer Reihe α* eine in α enthaltene Reihe, deren consecutive Gegenstände auch in α consecutiv sind (§ 24).

6.

Geordnete Gruppe. — Operation des Vereinigens.

§ 26. *Def. I.* Wenn die Dinge A und B in der Ordnung AB gegeben sind, so betrachte man B mit A zusammen oder, wie man auch sagt, man *vereinige* B mit A und allgemeiner, wenn eine beliebige Reihe von Dingen unter der Bedingung in Def. I, § 13 (§§ 19, 18)[1]) gegeben ist, so wende man diese Operation auf die successiven Dinge der Reihe an oder denke sie sich vollzogen (§§ 16, 19); das Resultat dieser Operation heisst *geordnete Gruppe oder geordnetes Ganze.*

Bem. Bei der Gruppe nach Def. I, § 13 fehlt als Merkmal dieser Operation die Ordnung, in welcher sie ausgeführt wird.

Beisp. Ich habe *zuerst* die Vorstellung A gehabt und *dann* die Vorstellung B (§ 3). Bei der Operation des Zusammenbetrachtens von B mit A beachte ich genau die Ordnung, in welcher ich die Vorstellungen A und B gehabt habe, während ich bei der Gruppe von Vorstellungen A und B nach der Def., § 13 diese Ordnung ausser Acht lasse.

Bez. Dieses Ganze bezeichnen wir mit AB, worin die Buchstaben A und B sich in der Ordnung der entsprechenden Dinge in dem Ganzen folgen. Wenn mit dem Ding AB das gegebene Ding C vereinigt wird, so erhält man ein geordnetes Ganze, welches mit dem Symbol $(AB)C$ bezeichnet wird. Wenn mit diesem das gegebene Ding D vereinigt wird, so wird das so erhaltene Ganze mit $((AB)C)D$ bezeichnet und so weiter. Im Allgemeinen geben wir einer geordneten Gruppe ein Zeichen von der Form (A).

Def. II. Man sagt, die gegebenen Gegenstände *bilden* oder *setzen* die Gruppe in der gegebenen Ordnung *zusammen* und die Gruppe wird von den gegebenen Gegenständen in der festgesetzten Ordnung *gebildet* oder ist die *Gesammtheit* dieser Gegenstände.

§ 27. *Def. I.* Eine geordnete Gruppe (A) *gehört* der geordneten Gruppe (B) *an*, wenn die Gegenstände von (A) Gegenstände der Gruppe (B) sind und wenn die Reihe (A) der Reihe (B) angehört (Def. I, § 25).

Def. II. Man sagt auch, (A) ist *ein Theil oder eine Untergruppe* von (B), wenn Gegenstände von (B) in (A) nicht enthalten sind und wenn nicht Anderes bestimmt wird, so meinen wir damit auch, dass die Reihe (A) ein Theil der Reihe (B) in dem in der Def. II, § 25 angegebenen Sinn sei.

a. *Die Gegenstände A, B, C, ..., N, ... einer geordneten Gruppe, welche die Gruppe zusammensetzen (Def. I), sind Theile der Gruppe.*

Denn sie sind Gruppen mit einem einzigen Gegenstand, von welchen jeder durch eine Reihe mit einem einzigen Gegenstand gegeben ist, wenn man voraussetzt, dass die Def. III, § 13 auch auf den Fall der Reihe ausgedehnt wird.

b. *Wenn die geordnete Gruppe (A) der geordneten Gruppe (B) und (B) der geordneten Gruppe (C) angehört, so gehört (A) der geordneten Gruppe (C) an.*

1) Siehe auch die Def. I, II, § 32 und Def. II, § 33.

Jeder Gegenstand von (A) ist Gegenstand von (B), welcher Gegenstand von (C) ist (e, § 8). Die Gegenstände, welche jedem Gegenstand X von (A) vorangehen oder folgen, gehen überdiess dem Gegenstand X in (B) und mithin auch in (C) voran oder folgen ihm (Def. I, § 25). Daraus folgt b (Def. I, § 25).

c. *Wenn (A) Untergruppe einer geordneten Gruppe (B) und (B) Untergruppe einer geordneten Gruppe (C) ist, so ist (A) Untergruppe von (C).*

Die geordnete Gruppe (A) gehört (C) an, weil sie (B) angehört (b). Wie in dem Satz a, § 13 lässt sich zeigen, dass nicht alle Gegenstände von (C) Gegenstände von (A) sind.[1])

d. *Eine nicht geordnete Gruppe bestimmt mehrere geordnete Gruppen.*

Denn jeder Gegenstand der gegebenen Gruppe kann als erster Gegenstand betrachtet werden, jeder andre als zweiter und so weiter.

Bez. Die Gruppe, die man durch Vereinigung einer geordneten oder nicht geordneten Gruppe (B) mit einer geordneten oder nicht geordneten Gruppe (A) erhält, bezeichnen wir mit dem Symbol $[(A)\ (B)]$.

§ 28. *Die Reihe ist nicht eine geordnete Gruppe.*

Denn in dem Begriff der Reihe (§ 19) fehlt die Operation des Vereinigens, wie im § 26 erklärt wurde. Dieser Begriff sagt nur aus, dass die Dinge der Reihe in der festgesetzten Ordnung gegeben sind oder gedacht werden (Beisp. § 26).

Bem. Die Reihe liefert ein geordnetes Ganze, wenn die Dinge der Reihe $ABCD \ldots N$ in derselben Ordnung miteinander vereinigt werden. Würden wir die Reihe als Gruppe betrachten, so würden wir eine geordnete Gruppe unter ihr verstehen. Wenn man also von der Operation des Vereinigens absicht, so entsprechen die Worte Reihe und geordnete Gruppe demselben Begriff und können miteinander vertauscht werden.

7.

Sätze zur Operation des Vereinigens.

§ 29. I. **Der einfache Act des Zusammenbetrachtens mehrerer gegebenen Dinge in einer gegebenen Ordnung oder unabhängig von ihrer Ordnung, ist eindeutig** (Def. II, § 11).

II. **Denkt man mehrere Dinge in einer gegebenen Ordnung oder unabhängig von dieser Ordnung entweder zusammen oder nicht zusammen, so denkt man kein Ding, welches nicht den gegebenen Dingen oder ihrer Gruppe angehört.**[2])

III. **Den Gegenstand C mit dem mit dem Gegenstand A vereinigten Gegenstand B vereinigen bedeutet den Gegenstand C mit dem aus der Vereinigung von B mit A erhaltenen Ganzen vereinigen oder es bedeutet das durch die Vereinigung von C mit B gegebene Ganze mit dem Gegenstand A vereinigen** (das Princip der Association)

1) Siehe die Note 2 zu § 13.

2) Auf diese Weise wird vermieden, dass in der geordneten oder nicht geordneten Gruppe oder in der Reihe von gegebenen Dingen auch Dinge in Betracht kommen, welche in Folge gewisser Sätze aus den ersteren folgen.

(1) $$ABC = (AB)C$$
(2) $$ABC = A(BC).$$

a. *Den Gegenstand C mit dem aus der Vereinigung von B mit A erhaltenen Ganzen vereinigen ist gleichwerthig damit, das durch die Vereinigung von C mit B gegebene Ganze mit dem Gegenstand A zu vereinigen.*

Denn aus (1) und (2) erhält man:

$$(AB)C = A(BC). \qquad \text{(b, § 9 und III)}$$

Bem. I. Solange nicht Anderes bestimmt wird, soll die Operation des Vereinigens in diesem Sinn aufgefasst werden.[1]

b. *Wenn die beliebigen geordneten oder nicht geordneten Gruppen (A) und (B) eine jede alle Gegenstände der andern, jedoch nicht verschieden gruppirt, enthält, so ist* $(A) = (B)$.

Denn, sind die Gegenstände von (A) gegeben, so erhält man durch die Operation des Vereinigens eine einzige Gruppe (I; Def. II, § 11). Wenn daher (B) von (A) verschieden wäre (Def. VIII, § 8), so würde man im Widerspruch mit dem Satz I aus denselben Gegenständen mehrere Gruppen und nicht eine einzige (Bem., § 8) erhalten.

c. *Die Untergruppen einer geordneten Gruppe (A) sind Untergruppen der aus den Gegenständen von (A) unabhängig von ihrer Ordnung gebildeten Gruppe.*

Die Gegenstände von (A) sind Gegenstände der Gruppe (A'), die man aus ihnen bildet, indem man sie unabhängig von ihrer Ordnung betrachtet; denn, indem man dieses thut, sieht man von keinem von den Gegenständen ab; sonst würde man, wenn man sie von Neuem in der gegebenen Ordnung betrachtet, einen andern Gegenstand denken, was gegen II verstösst.

Wenn (T) eine beliebige Untergruppe der geordneten Gruppe (A) ist (Def. VIII, § 13), so liefert sie eine Gruppe (T'), welche der Gruppe (A') angehört, und da es in (A) Gegenstände gibt, welche ausserhalb (T) sind (Def. II, § 27) wie z. B. den Gegenstand X, so gehört X der Gruppe (T') von (A') nicht an (II).

Bem. II. Wenn die Gegenstände von (A) und (B) in verschiedener Art aber in derselben Ordnung gruppirt werden, so ergibt sich die Gleichheit aus dem Satz III. (Siehe a. § 40.)

---

1) Siehe die Anmerkung zu § 4. Einige Autoren bezeichnen mit Vereinigen eine allgemeine Operation, während sie hier für uns einen besonderen genau abgegrenzten Sinn hat. So versteht *Stolz* (Vorles. üb. Allg. Arithm. Leipzig, 1885. Bd. I. Seite 2) unter *eindeutiger Verknüpfung* der Grössen *a, b, c* . . . eines gegebenen Systems eine *Regel*, nach welcher jeder oder auch einigen Gruppen *ab* nur eine Grösse *c* dieses oder eines andern Systems entspricht. Um die Verknüpfung zu bezeichnen, gebraucht er die Zeichen *o*, *O*, u.s.w. Er schreibt $a o b = c$ und liest *a* mit *b* ist *c*. Die Verknüpfung wird in diesem Fall allgemein aufgefasst. Auch die Operation $\frac{1}{2}(A + B)$ ist eine Verknüpfung, die commutativ aber nicht associativ ist (an demselben Ort. Anm. 2 zu Kap. III. Seite 380. Siehe auch *Hankel* Vorl. üb. compl. Zahlen, 1867 Seite 21). Dass man $A o B = \frac{1}{2}(A + B)$ wenn man will: *A* mit *B* ist *C*, wobei $C = \frac{1}{2}(A + B)$ ist, lesen kann, ist zweifellos; in diesem Fall hat aber das *mit* nicht mehr seinen ursprünglichen und gewöhnlichen Sinn und entspricht nicht mehr der einfacheren Vereinigung des *B* mit *A*.

8.

Die Operation des Zerlegens. — Die Gruppe Null. — Ausdehnung der Operation des Wegnehmens.

§ 30. *Def. Ein gegebenes Ding* X *in Theile zerlegen* ist die Operation, mittelst welcher die Theile $A, B, C, D, \ldots, N$ bestimmt werden, welche zusammen vereinigt das Ganze X geben.

a. *Das Zerlegen ist die umgekehrte Operation des Vereinigens.*

Denn aus der Vereinigung der gegebenen Theile $ABCD \ldots N \ldots$ erhält man das Ganze und aus dem Ganzen durch Zerlegung die Theile $ABCD \ldots N \ldots$ (Def., § 12).

§ 31. *Bem. I.* Wenn ich von den Theilen $ABCD \ldots N \ldots$ einer Gruppe einen oder mehrere Theile wegnehme, jedoch nicht alle, so sind die nicht weggenommenen die übrig bleibenden Theile (§ 7).

Def. I. Um auszudrücken, dass nicht irgend ein Theil übrig bleibt, wenn alle Theile vom Ganzen weggenommen werden, sagen wir: Es bleibt *Nichts* übrig. Um unnütze Unterscheidungen und die dadurch entstehenden Verwicklungen zu vermeiden, sagen wir auch: In einem solchen Fall erhält man *eine Gruppe Null.*[1])

Uebereinkunft. In die Operation des Wegnehmens eines oder mehrerer Theile vom Ganzen wollen wir uns für die Zukunft die Operation des Zerlegens des Ganzen in Theile, wenn die Zerlegung nicht schon ausgeführt ist, eingeschlossen vorstellen.

Bem. II. In diesem Sinn können die Operationen des Vereinigens und des Wegnehmens als umgekehrte betrachtet werden, weil die erste Operation aus den Theilen das Ganze liefert, während uns die zweite nach Ausführung der Zerlegung aus dem Ganzen jeden Theil dadurch, dass man von den andern Theilen absieht, kennen lehrt (§ 7).

Bem. III. Wenn es sich um eine geordnete Gruppe handelt, so erfolgt die Operation des Wegnehmens, da sie die Umkehrung derjenigen des Vereinigens ist, in der umgekehrten Ordnung wie die Operation des Vereinigens.

9.

Begrenzte und unbegrenzte Reihe und geordnete Gruppe. — Begrenzte Reihe der ersten Art. — Reihe von Reihen.

§ 32. *Def. I.* Wenn eine Reihe einen ersten und einen letzten Gegenstand (§ 22) hat, heisst sie *begrenzt.*

Beisp. Die Reihe meiner Vorstellungen ABC ist begrenzt.

Def. II. Wenn die Reihe *kein* letztes Ding hat, wird sie *unbegrenzt* oder *ohne Ende* genannt, woraus folgt, dass, wenn jeder Gegenstand der gegebenen Reihe ein consecutives auf ihn folgendes Ding hat (§ 24), die in Betracht gezogene Reihe unbegrenzt ist.

---

1) Auf diese Weise wird der Uebereinkunft gemäss Nichts als Etwas betrachtet, das heisst als *eine Gruppe* mit keinem Ding.

Bem. Mittelst des Satzes § 18 wird die Reihe unabhängig von dem Gedanken betrachtet, indem man nur berücksichtigt, ob ein Ding einem andern Ding voransteht und folgt, wenn es nicht das erste oder letzte ist. In diesem Fall ist es möglich, dass eine Reihe von gegebenen Dingen kein letztes Ding hat.

Ist a das Zeichen eines beliebigen Dings der Reihe, $a+1$ dasjenige des successiven und z. B. 1 das Zeichen des ersten Dings, so stellt das Symbol $a+1$ eine Reihe dar, welche kein letztes Ding hat.

Wir können überdiess von den Beziehungen des Gedankens zu den wahrnehmbaren Dingen abstrahiren. Auf diese Art wird die Betrachtung einer unbegrenzten Reihe von Dingen ermöglicht und mittelst des Princips § 18 diejenige einer gegebenen unbegrenzten Reihe, auch wenn sie für die Verhältnisse eines Individuums nicht realisirbar ist. Denkt man sich, die Operation, durch welche mehrere Gegenstände einer nach dem andern bis zu einem Gegenstand B gesetzt werden, sei vollendet und der erste Gegenstand in dem Moment A gesetzt, so kann man auch sagen, man beziehe die so erhaltene Reihe von Dingen, die man als dem Gedanken gegeben ansieht (§ 18), auf den Moment A, d. h. von der von A bis B verflossenen Zeit absehen.

So erklären sich die oft gebrauchten Ausdrücke: *unbegrenzt, ins Unendliche oder ohne Ende* fortfahren.

§ 33. *Def. I.* Wenn die Dinge $A, B, C, D, \ldots, N, \ldots$ einer Reihe derart in einer neuen Ordnung betrachtet werden, dass die Dinge, welche einem gegebenen Ding vorausgingen und folgten, in der neuen Ordnung ihm folgen bezüglich vorausgehen, so heisst die neue Reihe und die neue Ordnung die *umgekehrte* oder *entgegengesetzte* zu der gegebenen Reihe und Ordnung.

a. *Die umgekehrte Reihe zu der umgekehrten einer gegebenen Reihe ist die gegebene Reihe selbst.*

Mit andern Worten: in der umgekehrten Ordnung der umgekehrten folgen sich die Dinge in derselben Ordnung wie in der ersten Reihe. Denn die Dinge, welche einem beliebigen Ding X in der gegebenen Reihe vorangehen und folgen, folgen ihm in der umgekehrten Ordnung (Def. I) bezüglich gehen ihm voraus und in der umgekehrten der umgekehrten Ordnung gehen sie ihm voraus bezüglich folgen sie ihm (Def. I).

b. *Der letzte Gegenstand einer Reihe ist der erste Gegenstand der umgekehrten Reihe.*

Denn alle Dinge, welche einem Gegenstand in der ersten Reihe voranstehen, folgen ihm in der umgekehrten Ordnung (Def. I) und alle Dinge, welche dem letzten in der ersten vorangehen (§ 22), folgen ihm daher in der zweiten.

Beisp. In der Ordnung AB der Dinge AB ist A das erste und B das zweite, in der umgekehrten Ordnung BA ist B das erste und A das zweite Ding.

b'. *Wenn in einer Reihe ein Ding zwischen zwei andern enthalten ist, so ist es dieses auch in der umgekehrten Reihe.*

Denn wenn das Ding B in der gegebenen Reihe nach A und früher als C kommt, so folgen sich die gegebenen Dinge in der Ordnung ABC (§ 16) und in der umgekehrten Reihe ist C das erste und A das letzte, daher ist B wieder zwischen A und C enthalten. (Def., § 23.)

b''. *Wenn eine Reihe keinen letzten Gegenstand hat, so hat die umgekehrte Reihe keinen ersten Gegenstand.*

Denn, wenn sie ihn hätte, so hätte die gegebene Reihe einen letzten Gegenstand (b).

Bem. I. Die umgekehrte Reihe hat also im Fall b″ einen letzten Gegenstand (Def., § 19).

Def. II. In einem solchen Fall sagen wir von der umgekehrten Reihe, *sie habe keinen Anfang und sei* ebenfalls *unbegrenzt*. Das Ding, welches man erhält, wenn man nach einer Reihe mit dem letzten Gegenstand und ohne den ersten eine Reihe mit dem ersten und ohne den letzten Gegenstand betrachtet, heisst auch *Reihe*. Diese Reihe wird ebenfalls *unbegrenzt* genannt.

Bem. II Auf diese neuen Begriffe von Reihen sind die schon gegebenen Definitionen anzuwenden, welche unabhängig von der Existenz des ersten oder des letzten Gegenstandes sind.

Bem. III. Wir können nicht allein den Fall in Betracht ziehen, dass mehrere Dinge $A, B, C, D, \ldots, N, \ldots$ dem Gedanken gegeben sind, sondern können auch, ohne uns zu widersprechen, daran festhalten, dass die Ordnung ein wesentliches Merkmal der gegebenen Dinge sei (§ 18).

§ 34. *Def. I.* Die gegebene begrenzte oder unbegrenzte Reihe kann als geordnete Gruppe betrachtet werden (Bem., § 28). Die daraus hervorgehende Gruppe heisst *begrenzt* oder *unbegrenzt*.

Def. II. Betrachtet man die Dinge $ABCD \ldots N \ldots$ einer begrenzten oder unbegrenzten Reihe in Bezug darauf, dass sie eine Gruppe zusammensetzen § 13, so heisst diese Gruppe im ersten Fall (Def. I) begrenzt in der Ordnung $ABCD \ldots N \ldots$ der Reihe, im zweiten Fall unbegrenzt in derselben Ordnung.

§ 35. *Bem.* Da die einfache begrenzte Wiederholung desselben geistigen Acts (§ 15) die einfachste Art ist eine Reihe zu bilden und die so erhaltene Reihe ein erstes und ein letztes Ding hat, so geben wir die folgende

Def. Eine begrenzte Reihe, welche keine unbegrenzte Reihe als Theil enthält (Def. II, § 32; Def. I, II, § 25; Def. II, § 33), wird eine *natürliche Reihe* oder *eine begrenzte Reihe erster Art* genannt.

a. *Jedes Ding X einer begrenzten Reihe erster Art hat ein consecutives ihm folgendes und ein consecutives ihm vorangehendes Ding.*

Wenn X kein consecutives ihm vorangehendes Ding hat und nicht das erste Ding ist, so bedeutet dies, dass es in der Reihe Dinge gibt, die ihm vorausgehen (Def., § 21). Zwischen einem beliebigen Y von diesen Dingen und X gibt es daher ein andres Ding der Reihe, sonst wäre Y das consecutive X vorangehende Ding (§ 24), was gegen die Voraussetzung ist. Die gegebene Reihe würde also als Theil eine unbegrenzte X vorangehende Reihe enthalten, was sinnlos ist (Def.). X kann nicht mehrere consecutive ihm vorangehende Dinge haben, z. B. Y und Z, weil entweder Y dem Z oder Z dem Y vorangeht (b, § 21), also im ersten Fall Y das consecutive, Z vorangehende, und Z das consecutive, X vorangehende, Ding ist. Analog ist es im zweiten Fall; X kann daher nicht mehrere consecutive ihm vorangehende Dinge haben.

Aehnlich wird bewiesen, dass X ein consecutives ihm folgendes Ding haben muss.

§ 36. *Def.* Wenn kein Ding in der Reihe wiederholt wird (§ 15), heisst die Reihe *einfach*.

a. *Jede Reihe kann als eine einfache Reihe angesehen werden.*

Da die von demselben Ding in der Reihe eingenommenen Stellen verschieden sind (§ 20), so können wir das wiederholte Ding bei jeder Wiederholung mit einem von den vorhergehenden verschiedenen Zeichen belegen. Setzt man demnach voraus, dass das wiederholte Ding mehrere verschiedene Dinge vorstelle, so gilt die Eigenschaft der Definition für alle Dinge der Reihe.

Bem. II. Wenn nicht Anderes bestimmt wird, so meinen wir, die Reihe sei einfach.

b. *Sind in einer einfachen Reihe die beliebigen Dinge ABC gegeben, so ist entweder 1) A zwischen B und C oder 2) B zwischen A und C oder 3) C zwischen A und B enthalten.*

Denn ist das Ding A gegeben, so gehen die andern Dinge ihm in der Reihe entweder voraus oder sie folgen ihm (b, § 21). B und C folgen also entweder auf A oder sie gehen voraus, oder auch B steht vor A und C nach A oder endlich C geht A voraus und B folgt ihm. Wenn B und C auf A in der Ordnung der Reihe folgen, so ist in dieser Ordnung entweder B das erste Ding oder C. Wenn B zuerst kommt, so ist B zwischen A und C enthalten, weil B auf A folgt und C vorausgeht (§ 23); analog liegt C, wenn es zuerst kommt, zwischen A und B, womit man die Fälle 2 und 3 erhält. Gehen B und C dem A voraus, so genügt es die umgekehrte zu der gegebenen Reihe zu betrachten, für welche die vorstehenden Schlüsse Geltung haben. Wenn aber ein Ding in einer Reihe zwischen andern enthalten ist, so ist es dies auch in der umgekehrten Reihe (b', § 33); es treten also dieselben Fälle 2 und 3 ein. In den andern Fällen endlich liegt A zwischen B und C.

§ 37. a. *Wenn ein bestimmtes Ding A gegeben ist (jedes Ding in seinem Begriff (§ 4) betrachtet) und wenn sich nicht ableiten lässt, dass A die Gruppe aller der möglichen Dinge sei, die wir betrachten wollen, so können wir ein andres nicht in A enthaltenes (das heisst ausserhalb A liegendes) und von A unabhängiges Ding denken.*

Wenn aus den früheren Sätzen und Operationen hervorginge, dass es Gegenstände B ausserhalb A gibt, so wäre der Beweis nicht nöthig. Andernfalls gilt der folgende Beweis: Indem wir das gegebene Ding A betrachten, lassen wir es einem Act a des Gedankens entsprechen (§ 4). Wiederholen wir z. B. ein Ding B von A, welches keine Gruppe ist (Def. I, § 13; Def. I, § 26), wenn A selbst eine geordnete oder nicht geordnete Gruppe ist, und betrachten wir als Merkmal der Vorstellungen (§§ 9 und 4) die Ordnung, in welcher sie sich folgen (§ 16), so ist die zweite Vorstellung von B (§ 3) von den den Dingen der ersten Vorstellung entsprechenden Vorstellungen verschieden (Def. V, § 8). Bezeichnet man diese zweite Vorstellung von B mit B', so ist das Ding B' dem B gleich (Bem. III, § 9) fällt aber mit B nicht zusammen, da es von ihm verschieden ist (IV, Def. V, § 8).

Wenn z. B. die zweite Vorstellung dem ganzen Ding A entspricht und man betrachtet die Ordnung als Merkmal der gedachten Dinge, so erhält man eine von A verschiedene Vorstellung A', die A gleich ist, aber nicht mit A zusammenfällt, weil sonst A und A' nicht verschieden wären (Def. V, IV, § 8 und § 18).



Weil wir ferner den geistigen Act, dem A' entspricht unabhängig von dem Act, dem A entspricht, festhalten können, so ist A' unabhängig von A, d. h. die Existenz von A' geht nicht aus A ohne einen willkürlichen Act hervor.

Wenn man dagegen sagt, A enthalte alle möglichen Dinge, welche wir denken wollen, so werden damit *im Voraus* die nicht in A enthaltenen Dinge ausgeschlossen.

Bem. I. Wir werden jedoch jedesmal, wenn wir dieses Gesetz auf dem beschränkten Gebiet unsrer möglichen Formen benutzen, noch andre Gründe zu seiner Unterstützung hinzufügen.[1])

Beisp. Wenn man bei gegebenem Anschauungsraum S die Vorstellung des Punktes von derjenigen des Raumes trennt (siehe die emp. Bem. am Anfang des ersten Theils) und man bestimmt nicht, dass der Anschauungsraum alle möglichen Punkte enthalten soll, so können wir einen andern Punkt ausserhalb S denken, der den andern Punkten gleich aber von ihnen verschieden ist oder auch einen andern S gleichen aber von S verschiedenen Anschauungsraum S'. Unter Anschauungsraum verstehen wir hier die Vorstellung von der äusseren Welt (§ 4) und nicht etwa diese selbst.

b. *Eine begrenzte oder unbegrenzte Reihe kann als Theil eine andre unbegrenzte Reihe enthalten.*

Denn zu sagen, eine Reihe sei begrenzt, bedeutet nicht, dass sie nicht eine andre unbegrenzte Reihe als Theil (Def. II, § 25) enthalten könne, da sie nur dadurch begrenzt ist, dass sie einen ersten und letzten Gegenstand hat (Def. I, § 32). Damit ist aber keine Eigenschaft für die mittleren Gegenstände (§ 23) gegeben. Eine begrenzte oder unbegrenzte Reihe kann nach den bisher gegebenen Definitionen (Def. I, II, § 32 und Def. II, § 33) als ein einziger Gegenstand (§ 18) und dieser Gegenstand als einer andern begrenzten oder unbegrenzten Reihe angehörig betrachtet werden.

Wenn in dem Ganzen MN das M durch eine unbegrenzte Reihe gegeben ist, so ist MN eine begrenzte Reihe und in dieser zweiten Reihe ist M das erste Ding. Oder wenn die Reihe M zum ersten Gegenstand A hat, so hat die Reihe MN zum ersten Gegenstand A und zum letzten N.

Def. Wenn in den begrenzten oder unbegrenzten Aufeinanderfolgen $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $C \equiv C'$, $D \equiv D'$ u. s. w. ist, so heissen die Dinge der Reihen *der Reihe nach oder bezüglich gleich.*

II. Kapitel.

Erste Eigenschaften der abstracten mathematischen Formen.

1.

Merkmale der abstracten und concreten mathematischen Formen oder Grössen.

§ 38. *Bem. I.* Die Dinge, welche wir von nun an betrachten wollen, haben ausser den Merkmalen des Ganzen und der Theile, der Ordnung oder der Reihe zum Merkmal

1) Siehe § 59.

(1) $$ABC = (AB)C$$
(2) $$ABC = A(BC).$$

a. *Den Gegenstand C mit dem aus der Vereinigung von B mit A erhaltenen Ganzen vereinigen ist gleichwerthig damit, das durch die Vereinigung von C mit B gegebene Ganze mit dem Gegenstand A zu vereinigen.*

Denn aus (1) und (2) erhält man:

$$(AB)C = A(BC).$$ (b, § 9 und III)

Bem. I. Solange nicht Anderes bestimmt wird, soll die Operation des Vereinigens in diesem Sinn aufgefasst werden.[1]

b. *Wenn die beliebigen geordneten oder nicht geordneten Gruppen (A) und (B) eine jede alle Gegenstände der andern, jedoch nicht verschieden gruppirt, enthält, so ist $(A) = (B)$.*

Denn, sind die Gegenstände von (A) gegeben, so erhält man durch die Operation des Vereinigens eine einzige Gruppe (I; Def. II, § 11). Wenn daher (B) von (A) verschieden wäre (Def. VIII, § 8), so würde man im Widerspruch mit dem Satz I aus denselben Gegenständen mehrere Gruppen und nicht eine einzige (Bem., § 8) erhalten.

c. *Die Untergruppen einer geordneten Gruppe (A) sind Untergruppen der aus den Gegenständen von (A) unabhängig von ihrer Ordnung gebildeten Gruppe.*

Die Gegenstände von (A) sind Gegenstände der Gruppe (A'), die man aus ihnen bildet, indem man sie unabhängig von ihrer Ordnung betrachtet; denn, indem man dieses thut, sieht man von keinem von den Gegenständen ab; sonst würde man, wenn man sie von Neuem in der gegebenen Ordnung betrachtet, einen andern Gegenstand denken, was gegen II verstösst.

Wenn (T) eine beliebige Untergruppe der geordneten Gruppe (A) ist (Def. VIII, § 13), so liefert sie eine Gruppe (T'), welche der Gruppe (A') angehört, und da es in (A) Gegenstände gibt, welche ausserhalb (T) sind (Def. II, § 27) wie z. B. den Gegenstand X, so gehört X der Gruppe (T') von (A') nicht an (II).

Bem. II. Wenn die Gegenstände von (A) und (B) in verschiedener Art aber in derselben Ordnung gruppirt werden, so ergibt sich die Gleichheit aus dem Satz III. (Siehe a. § 40.)

---

1) Siehe die Anmerkung zu § 4. Einige Autoren bezeichnen mit Vereinigen eine allgemeine Operation, während sie hier für uns einen besonderen genau abgegrenzten Sinn hat. So versteht *Stolz* (Vorles. üb. Allg. Arithm. Leipzig, 1885. Bd. I. Seite 2) unter *eindeutiger Verknüpfung* der Grössen *a, b, c* . . . eines gegebenen Systems eine *Regel*, nach welcher jeder oder auch einigen Gruppen *ab* nur eine Grösse *c* dieses oder eines andern Systems entspricht. Um die Verknüpfung zu bezeichnen, gebraucht er die Zeichen *o, O*, u.s.w. Er schreibt $a\, o\, b = c$ und liest *a* mit *b* ist *c*. Die Verknüpfung wird in diesem Fall allgemein aufgefasst. Auch die Operation $\frac{1}{2}(A + B)$ ist eine Verknüpfung, die commutativ aber nicht associativ ist (an demselben Ort. Anm. 2 zu Kap. III. Seite 380. Siehe auch *Hankel* Vorl. üb. compl. Zahlen, 1867 Seite 21). Dass man $A\, o\, B = \frac{1}{2}(A + B)$ wenn man will: *A* mit *B* ist *C*, wobei $C = \frac{1}{2}(A + B)$ ist, lesen kann, ist zweifellos; in diesem Fall hat aber das *mit* nicht mehr seinen ursprünglichen und gewöhnlichen Sinn und entspricht nicht mehr der einfacheren Vereinigung des *B* mit *A*.

8.

Die Operation des Zerlegens. — Die Gruppe Null. — Ausdehnung der Operation des Wegnehmens.

§ 30. *Def. Ein gegebenes Ding X in Theile zerlegen* ist die Operation, mittelst welcher die Theile $A, B, C, D, \ldots, N$ bestimmt werden, welche zusammen vereinigt das Ganze X geben.

a. *Das Zerlegen ist die umgekehrte Operation des Vereinigens.*

Denn aus der Vereinigung der gegebenen Theile $ABCD \ldots N \ldots$ erhält man das Ganze und aus dem Ganzen durch Zerlegung die Theile $ABCD \ldots N \ldots$ (Def., § 12).

§ 31. *Bem. I.* Wenn ich von den Theilen $ABCD \ldots N \ldots$ einer Gruppe einen oder mehrere Theile wegnehme, jedoch nicht alle, so sind die nicht weggenommenen die übrig bleibenden Theile (§ 7).

Def. I. Um auszudrücken, dass nicht irgend ein Theil übrig bleibt, wenn alle Theile vom Ganzen weggenommen werden, sagen wir: Es bleibt *Nichts* übrig. Um unnütze Unterscheidungen und die dadurch entstehenden Verwicklungen zu vermeiden, sagen wir auch: In einem solchen Fall erhält man *eine Gruppe Null.*[1])

Uebereinkunft. In die Operation des Wegnehmens eines oder mehrerer Theile vom Ganzen wollen wir uns für die Zukunft die Operation des Zerlegens des Ganzen in Theile, wenn die Zerlegung nicht schon ausgeführt ist, eingeschlossen vorstellen.

Bem. II. In diesem Sinn können die Operationen des Vereinigens und des Wegnehmens als umgekehrte betrachtet werden, weil die erste Operation aus den Theilen das Ganze liefert, während uns die zweite nach Ausführung der Zerlegung aus dem Ganzen jeden Theil dadurch, dass man von den andern Theilen absieht, kennen lehrt (§ 7).

Bem. III. Wenn es sich um eine geordnete Gruppe handelt, so erfolgt die Operation des Wegnehmens, da sie die Umkehrung derjenigen des Vereinigens ist, in der umgekehrten Ordnung wie die Operation des Vereinigens.

9.

Begrenzte und unbegrenzte Reihe und geordnete Gruppe. — Begrenzte Reihe der ersten Art. — Reihe von Reihen.

§ 32. *Def. I.* Wenn eine Reihe einen ersten und einen letzten Gegenstand (§ 22) hat, heisst sie *begrenzt.*

Beisp. Die Reihe meiner Vorstellungen ABC ist begrenzt.

Def. II. Wenn die Reihe *kein* letztes Ding hat, wird sie *unbegrenzt* oder *ohne Ende* genannt, woraus folgt, dass, wenn jeder Gegenstand der gegebenen Reihe ein consecutives auf ihn folgendes Ding hat (§ 24), die in Betracht gezogene Reihe unbegrenzt ist.

---

1) Auf diese Weise wird der Uebereinkunft gemäss Nichts als Etwas betrachtet, das heisst als *eine Gruppe* mit keinem Ding.

ein Element von β, aber in β gibt es ein Element, welches auf dasselbe folgt und welches in derselben Ordnung auch γ angehört (Def. II, § 33). Es ist desshalb widersinnig, dass γ ein letztes Element habe (IV, § 8).

a″. *In einer begrenzten Reihe ist die Reihe mit erstem Element, welche auf eine begrenzte Reihe, einen Theil der gegebenen Reihe, folgt, ebenfalls begrenzt.*

Denn wäre sie unbegrenzt, so wäre die gegebene Reihe unbegrenzt (a′).

a‴. *Die Reihe, welche auf eine begrenzte Reihe in einer unbegrenzten Reihe ohne letztes Element folgt, ist ebenfalls unbegrenzt.*

Denn wäre sie begrenzt, so würde sie mit der ersten eine begrenzte Reihe bilden (a).

Def. III. Eine unbegrenzte Reihe, welche ein erstes Element hat, nennen wir *unbegrenzt von der ersten Art*, wenn ihre begrenzten Theile, die zum ersten Element dasjenige der gegebenen Reihe haben, von der ersten Art sind (Def. II, § 32; Def. II, § 25 und § 35).

b. *Jede begrenzte Reihe einer unbegrenzten Reihe erster Art ist erster Art.*

Wenn die begrenzte Reihe β ihr erstes Element in dem ersten Element der unbegrenzten Reihe hat, so muss sie diese Eigenschaft haben (Def. III). Wenn sie nicht dasselbe erste Element hat, so heisst das, dass in der unbegrenzten Reihe eine Reihe α existirt, die ihr vorausgeht (Def. II). Wenn β nicht begrenzt von der ersten Art (§ 35) ist, so heisst das, dass sie als einen Theil eine unbegrenzte Reihe enthalten muss (§ 35); aber die Reihe $\alpha\beta$ ist begrenzt (a) und hat dasselbe erste Element, wie die unbegrenzte Reihe erster Art; die letztere würde also eine unbegrenzte Reihe als Theil enthalten (c, § 26; Bem., § 28), was widersinnig ist (Def. III und § 35).

c. *Die umgekehrte Reihe einer begrenzten Reihe der ersten Art ist ebenfalls begrenzt von der ersten Art.*

Denn es sei $ABCD\ldots LM$ die gegebene Reihe, die A zum ersten und M zum letzten Element hat (§ 16 und Def. I, § 32). Die umgekehrte Reihe $ML\ldots DCBA$ ist begrenzt, weil M das erste und A das letzte Glied derselben ist (Def. I, § 33). Wenn nun die zweite Reihe eine unbegrenzte Reihe z. B. $ML\ldots X\ldots$ enthielte, die der Reihe $DCBA$ (Def. II) vorausgeht, so wäre in der Reihe $ML\ldots X\ldots$ kein letztes Element (Def. II, § 32) und desshalb hätte D in der gegebenen Reihe kein auf es folgendes consecutives Element (§ 24). Denn hätte es ein solches, so wäre es das letzte Element der Reihe $ML\ldots X\ldots$, die $DCBA$ in der umgekehrten Reihe vorausgeht (b′, § 33). Die gegebene Reihe wäre folglich nicht begrenzt von der ersten Art (§ 35).

d. *Die Reihe, welche in einer unbegrenzten Reihe erster Art α auf eine begrenzte Reihe folgt, ist ebenfalls unbegrenzt von der ersten Art.*

Denn sie ist unbegrenzt nach a″ und wenn sie nicht unbegrenzt von der ersten Art wäre, so müsste sie wenigstens *eine* unbegrenzte Reihe enthalten und Elemente ausserhalb dieser Reihe (§ 35 und Def. III). Da aber die Elemente und Ordnung derselben nach der Voraussetzung Elemente und Ordnung von α sind, so wäre α nicht unbegrenzt von der ersten Art (Def. I, II, § 25 und Def. III).

e. *Eine unbegrenzte, in einer unbegrenzten Reihe erster Art enthaltene, Reihe ist ebenfalls von der ersten Art.*

Der Beweis ist dem vorhergehenden analog (Def. I, § 25).

f. *Jede Untergruppe einer geordneten natürlichen Gruppe ist ebenfalls eine geordnete natürliche Gruppe.*

Denn wäre sie es nicht, so wäre die Reihe ihrer Elemente wenigstens unbegrenzt von der ersten Art (§ 25; Bem., § 28; § 35; Def. III) und es enthielte daher die Reihe der gegebenen Gruppe der Voraussetzung zuwider eine unbegrenzte Reihe (§ 35 und Bem., § 28; Def. II, § 25).

g. *Jede natürliche Gruppe (A), welche als Theil eine Gruppe (B) enthält, deren erstes Element in dem ersten Element von (A) liegt, erhält man aus (B) durch einfache successive Vereinigung andrer Elemente.*

Oder in andern Worten: Die Reihe der Elemente von (A), welche auf (B) folgt, ist begrenzt von der ersten Art (Def. II; § 35; Def. I, § 26; Bem., § 28; Def. II, § 25). Wenn sie es nicht wäre, müsste sie wenigstens eine unbegrenzte Reihe enthalten und (A) könnte daher keine natürliche Gruppe sein (c, § 26; § 35).

h. *Wenn (A) und (B) beliebige Untergruppen einer geordneten Gruppe (C) sind und das erste Element von (C) auch dasjenige von (A) und (B) ist und nicht alle Elemente von (B) Elemente von (A) sind, so ist (A) eine Untergruppe von (B).*

Es bedeutet dies, dass (B) Elemente hat, welche auf diejenigen von (A) folgen, weil jedes Element, welches in (C) einem beliebigen Element von (A) vorausgeht, (A) angehört (Def., § 21; Def. II, § 27; Bem., § 28). Jedes Element von (A) geht daher jedem Element von (B) voran (Def., § 21 und Bem., § 28), (A) ist demnach ein Theil von (B) (Def. II, § 27).

i. *Die Untergruppen einer geordneten unbegrenzten Gruppe der ersten Art (A), die man aus dem ersten Element erhält, indem man nacheinander die Elemente der Gruppe mit der vorhergehenden Untergruppe vereinigt, bilden eine unbegrenzte Reihe der ersten Art.*

Alle diese Untergruppen haben nach dem Gegebenen dasselbe erste Element (§ 16; Def. II, § 27). Eine jede muss eine geordnete natürliche Gruppe sein (Def. III; §§ 26 und 35). Wenn die sämmtlichen genannten Untergruppen eine begrenzte Reihe bildeten, so gäbe es eine letzte Untergruppe (B) von (A), deren letztes Element X auch das letzte Element von (A) wäre; denn wäre in (A) ein auf X folgendes consecutives Element Y, so wäre die Untergruppe (B) nicht die letzte, sondern $(B)\,Y$ (§ 22). Die Gruppe (A) wäre daher der Voraussetzung zuwider begrenzt. Die Reihe muss unbegrenzt von der ersten Art sein, weil sie sonst eine begrenzte Untergruppe enthielte, welche nicht von der ersten Art und nach dem Gegebenen ein Theil von (A) wäre, was widersinnig ist (b).

l. *Ist eine begrenzte oder unbegrenzte Reihe der ersten Art $ABCD \ldots LM \ldots$ gegeben, so reicht es, um zu beweisen, dass eine Eigenschaft P für alle Formen der Reihe gilt, hin, zu beweisen:*

1. dass P für die erste Form A der Reihe gilt;

2. *dass sie, vorausgesetzt sie gelte für eine beliebig aus der Reihe ausgewählte Form X, auch für die consecutive auf sie folgende Form gilt.*

Nehmen wir an, die Formen der gegebenen Reihe, welche die Eigenschaft P haben, bildeten eine Reihe δ'. Diese wird wegen (1) und (2) ein Theil der gegebenen Reihe δ sein (Def. II, § 25). Die Reihe δ' kann nicht begrenzt sein, weil die Eigenschaft P, die für jede gegebene Form von ihr gilt, auch für die consecutive auf sie in δ folgende Form gilt, welche mithin der Reihe δ' angehört (2). Wenn es aber in δ andere nicht in δ' enthaltene Formen gäbe, so wäre δ nicht unbegrenzt von der ersten Art, weil es als Theil eine unbegrenzte Reihe enthielte (Def., § 35 und Def. III); folglich u. s. w.

1'. *Wenn eine Eigenschaft P für jede gegebene Form einer unbegrenzten Reihe erster Art gilt, so gilt sie für alle Formen der Reihe.*

Denn, wenn sie für jede gegebene Form X gilt, so gilt sie auch für die consecutive auf sie folgende, welche die erste Form nach X ist, womit der Satz bewiesen ist (1).[1]

3.

Associationsgesetz einer geordneten Gruppe. — Wie die Operation des Vereinigens keine eindeutige Operation sein kann.

§ 40. a. *Wenn mehrere Untergruppen einer geordneten Gruppe gegeben sind, die kein gemeinsames Element haben aber alle Elemente der Gruppe enthalten, so kann man die Gruppe so ansehen, als ob sie durch die successive Vereinigung der Untergruppen in der Reihenfolge, in welcher sie sich in der gegebenen Gruppe folgen, entstanden wäre.* (Associationsgesetz des Vereinigens.)

Denn es ist:

$$(ABC)D \equiv ((AB)C)D \equiv (AB)CD \equiv (A(BC))D \equiv A(BC)D \equiv$$
$$\equiv A((BC)D) \equiv A(B(CD)) \equiv (AB)(CD) \equiv ABCD \quad \text{(a, § 29).}$$

Nehmen wir an, wir hätten diesen Beweis successiv wiederholt und es gelte die obige Eigenschaft für die natürliche durch die Reihe $ABCD\ldots A_1B_1$ gegebene geordnete Gruppe. Man hat dann:

$$(ABCD\ldots A_1)B_1 \equiv ABCD\ldots A_1B_1,$$

wobei mit dem Symbol $(ABCD\ldots A_1)B_1$ gemeint ist, dass B_1 mit dem Ganzen $(ABCD\ldots A_1)$, welches nach der Voraussetzung die obige Eigenschaft hat,

1) Der dem mathematischen Publicum durch seine Arbeit. „Die Axiome der Geometrie 1887" bekannte *B. Erdmann* bemerkt in seiner Schrift: „Zur Theorie des Syllogismus und der Induction. Phil. Aufsätze. Eduard Zeller . . . gewidmet. 1887, Seite 197—238", dass es unrichtig sei, den Beweis nach den beiden Vorschriften von 1 einen Beweis mittelst *vollkommener Induction* zu nennen, weil die Induction immer eine Hypothese enthalte, nämlich die, dass eine Wahrheit, die in einigen Fällen einer Reihe stattfinde, auch in den andern Fällen der Reihe gelte. Er meint, der Beweis sei vollständig deductiv, obgleich das leitende Merkmal inductiv wäre. Man muss daher, wie wir gethan haben, beweisen, dass, wie die Reihe δ' in δ, so auch δ in der Reihe δ' enthalten ist. Wie man aber sieht, ist 1 eine unmittelbare Folge der Definitionen der begrenzten und unbegrenzten Reihe erster Art. Bei unserm Gedankengang, der uns bei der Construction der ersten begrenzten und unbegrenzten Reihen (§§ 3, 14, 15, 16, Bem. § 35, Def. III) der natürlichste scheint, folgt der obige Satz aus dieser Construction als specielle Eigenschaft dieser Reihen.

vereinigt worden ist, während unter dem Symbol $ABCD\ldots A_1B_1$ verstanden ist, dass B_1 mit A_1 vereinigt ist, welches schon u. s. w., welches schon mit D, welches schon mit C, welches schon mit B, welches schon mit A vorher vereinigt worden war. Man hat also:

$$((ABCD\ldots A_1)B_1)C_1 \equiv (ABCD\ldots A_1)B_1C_1 \quad \text{(a, § 29)}$$
$$\equiv ABCD\ldots A_1B_1C_1 \quad \text{(b, § 9; I, § 29).}$$

Und wie nach der Voraussetzung z. B.

$$ABCD\ldots MN\ldots A_1B_1 \equiv (ABCD\ldots M)(N\ldots A_1B_1)$$

ist, so ist auch:

$$ABCD\ldots A_1B_1C_1 \equiv (ABCD\ldots M)(N\ldots A_1B_1)C_1$$
$$\equiv (ABCD\ldots M)(N\ldots A_1B_1C_1).$$

Das heisst, man kann die Klammern in der natürlichen Gruppe, die durch die geordnete Reihe $ABCD..A_1B_1C_1$ gegeben ist, weglassen, wenn man sie in der durch die Reihe $ABCD\ldots A_1B_1$ gegebenen Gruppe weglassen kann. Diese Gruppe erhält man aber aus der vorhergehenden consecutiven Gruppe durch die Vereinigung mit einem andern Element (Def. I, § 26; Bem., § 28) und wie diese Eigenschaft (III, § 29) für die durch die Reihe ABC gegebene Gruppe gilt, so gilt sie auch für jede begrenzte Gruppe einer unbegrenzten Gruppe erster Art (Def. III, i, 1, § 39). Man sieht leicht, dass die Eigenschaft für die ganze Gruppe gilt (1', § 39).

Der Satz behält auch in dem Fall seine Gültigkeit, wenn die Reihe der Formen, welche die geordnete Gruppe zusammensetzen, nicht erster Art ist. Denn das Ganze, das sich aus einer unbegrenzten Reihe erster Art (Bem., § 28) ergibt, welches wir mit T bezeichnen wollen und welches die genannte Eigenschaft hat, lässt sich als eine einzige Form betrachten, mit welcher andre Formen vereinigt werden. Wenn man mit T eine andre Form A' vereinigt, so erhält man das Ganze TA'. Aber T ist auch $T'T''$, wenn T' eine begrenzte Untergruppe von T ist, deren Elementenreihe dasselbe erste Element hat, und wenn T'' die übrig bleibende Untergruppe ist. Wir erhalten also:

$$TA' \equiv (T'T'')A' \equiv T'(T''A').$$

Mit andern Worten: eine unbegrenzte Gruppe in Vereinigung mit andern Formen wird in eine begrenzte Reihe von Untergruppen zerlegt, welche alle Elemente der gegebenen Gruppe enthalten, ohne ein gemeinschaftliches Element zu haben, und auf diese Reihe in Vereinigung mit der ersten der gegebenen Formen ist das Associationsprincip anwendbar. Hätte die Reihe der andern gegebenen Formen keine erste Form, so lässt sich auch sie in eine begrenzte Reihe von Untergruppen zerlegen, deren successive Vereinigung sie vorstellt (§ 26). Der Satz ist so für jeden Fall bewiesen.

Bem. Es versteht sich, dass sich hier das Vereinigen auf Dinge bezieht, die ihrer Position nach schon gegeben sind, und dass es den Sinn des einfachen Zusammendenkens hat.

§ 41. *Bem.* Wenn bei der Operation des Vereinigens die Art der Position der Theile unter sich und die Ordnung derselben (Bem. und Def. I, § 38) als Bedingungen der Operation

(Def. I, § 10) angesehen werden, alsdann hängt das Ganze offenbar von der Art und der Ordnung ab, in welcher seine Theile vereinigt werden, und die Vereinigung ist nicht länger eindeutig, da die Ordnung und die Art der Vereinigung der Theile verschieden sein kann. Daraus folgt, dass, wenn die Theile A, B, C, D eines Ganzen der Reihe nach (Def., § 37) den Theilen eines andern Ganzen gleich sind, das erste Ganze dem zweiten nicht gleich zu sein braucht; dazu ist nöthig, dass auch die Ordnung und die Art der Position der Theile im Ganzen dieselbe sei (Def. III, § 9). Es ist auch möglich, dass das Ganze $ABCD$ mit dem Ganzen $A'B'C''D'$ identisch ist, aber nicht identisch mit dem aus der Umkehrung des vorigen erhaltenen Ganzen $D'C'B'A'$ ist. Wenn wir desshalb Formen gleich nennen, so fassen wir sie als gleich in der gegebenen Ordnung auf, in der sie gleich sind, und müssen von Anfang an und im Allgemeinen voraussetzen, dass sie in andrer Ordnung nicht gleich sind.

Beisp. 1. Mit denselben Mosaiksteinen von verschiedener Farbe, die in Bezug auf ihre übrigen Merkmale als gleich vorausgesetzt werden, kann man verschiedenes Mosaikpflaster bilden. Sie können in derselben Ordnung in Bezug auf ihre Aufeinanderfolge und in verschiedener Art (so dass sie verschiedene Zeichnungen bilden) zusammengesetzt werden; oder in derselben Art (so dass sie dieselbe Zeichnung bilden) und in verschiedener Ordnung. Der Unterschied in der Ordnung ist in diesem Fall durch den Unterschied der Farbe gegeben.

Beisp. 2. Setzt man die Stücke eines zerbrochenen Weinglases in einer gegebenen Ordnung und auf eine gegebene Art zusammen, so erhält man (abgesehen von den Gesetzen der Physik) wieder das ursprüngliche Glas, setzt man sie dagegen anders zusammen, so erhält man im Allgemeinen ein andres dem gegebenen Weinglas nicht identisches Ganze.

4.

Eindeutiger Zusammenhang in derselben Reihenfolge zwischen verschiedenen Gruppen.

§ 42. *Def. I.* Wenn zwischen den Elementen A und X, B und Y, C und Z u. s. w., welche bezüglich den Gruppen (A) und (A') angehören, ein beliebiges gemeinschaftliches Verhältniss (Def. IV, § 8) existirt oder aufgestellt wird der Art, dass, wenn ein beliebiges Element (Def. VIII, § 13) der ersten Gruppe gegeben wird, dieses Verhältniss in Bezug auf eines oder mehrere der Elemente der zweiten Gruppe besteht, so sagt man, die Gruppen *entsprächen* sich in Bezug auf das genannte Verhältniss.

Die Elemente A und X, B und Y, C und Z u. s. w. heissen die *entsprechenden* Elemente der gegebenen Gruppen.

Def. II. Wenn jedem Element A der ersten ein einziges Element A' der zweiten Gruppe entspricht und jedem Element A' der letzteren dasselbe Element A der ersten und nur dieses Element entspricht, so sagt man, die Elemente der gegebenen Gruppen entsprächen sich eindeutig, und der Zusammenhang heisst *eindeutig und gegenseitig* oder bloss *eindeutig.*[1])

Bem. I. Kein Element einer Gruppe bedeutet, dass man von jedem Element der Gruppe abstrahirt (§§ 7 und 29); desshalb ist kein Element nicht Element der Gruppe (IV, § 8); es ist daher nicht möglich, dass bei eindeutigem Zusammenhang einem Element der Gruppe kein Element der andern Gruppe entspreche.

1) Wir beschäftigen uns nur mit diesem eindeutigen Zusammenhang; wenn wir also von eindeutigem Zusammenhang sprechen, so ist damit gemeint, dass er auch gegenseitig sei. Das Verhältniss des Zusammenhangs ist beliebig.

Beisp. 1. So besteht zwischen den Formen und ihren Zeichen ein eindeutiger Zusammenhang, wenn jedem Zeichen ein Ding entspricht und einem Ding ein Zeichen (§ 5).

Bem. II. Wenn die Gruppen (A) und (B) geordnet sind und sich eindeutig in der Art entsprechen, dass

1) entsprechende Elemente zwischen entsprechenden Elementen enthalten sind und man, wenn die Gruppen begrenzt sind, das erste Element als zwischen dem letzten und dem zweiten und das letzte als zwischen dem ersten und dem dem letzten consecutiv vorangehenden (§ 24) (dem vorletzten) Element liegend ansieht und

2) dass den Elementen, welche einem gegebenen Element vorausgehen, Elemente entsprechen, welche dem dem gegebenen entsprechenden Element vorausgehen,

so ist es gerechtfertigt zu sagen, die Gruppen (A) und (B) entsprächen sich in derselben Reihenfolge. In der That ist die relative Stellung der entsprechenden Elemente in den Gruppen nach der Definition in § 21 (§§ 14, 16, Def. VII, § 8) dieselbe.[1]

Def. III. Von den Gruppen (A) und (B), die den Bedingungen der vorstehenden Bem. genügen, sagt man, sie entsprächen sich *eindeutig und in derselben Reihenfolge.*

Wenn *nur* die erste Bedingung der Bemerkung II und nicht die zweite erfüllt ist, so sagt man, (A) und (B) entsprächen sich *eindeutig in umgekehrter Ordnung.*

Beisp. 2. Eine Reihe von Dingen und die Reihe der entsprechenden Begriffe (§ 4) entsprechen sich eindeutig und in derselben Ordnung.

Beisp. 3. Wenn man in den gegebenen Gruppen $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ sich C' und A, D' und B, E' und C, A' und D, B' und E entsprechen lässt und umgekehrt, so entsprechen sich die Gruppen eindeutig und in derselben Ordnung.

Beisp. 4. Wenn sich dagegen im vorigen Fall A und B', B und D', C und A', D und E', E und C' entsprechen, so entsprechen sich die Gruppen eindeutig aber nicht in derselben Ordnung.

a. *In geordneten Gruppen (A) und (B), die sich eindeutig und in derselben oder der umgekehrten Ordnung entsprechen, entsprechen consecutiven Elementen in der einen consecutive Elemente in der andern.*

Und umgekehrt: *Wenn sich die consecutiven Elemente eindeutig entsprechen, so entsprechen sich die Gruppen eindeutig und in derselben oder der umgekehrten Ordnung.*

Denn wenn den beliebigen consecutiven Elementen AB der einen (Def. VIII, § 13)[2] nicht consecutive Elemente der andern entsprächen, so würde das Element X, welches einem zwischen den Elementen A' und B' (§§ 23 und 24) liegenden Element X' entspricht, nach der Voraussetzung nicht zwischen A und B enthalten sein und die Gruppen entsprächen sich nicht in derselben oder in umgekehrter Ordnung (Def. III und Bem. II).

Wenn sich ferner die consecutiven Elemente eindeutig entsprechen, so entspricht jedem zwischen den beliebigen Elementen A und B in der ersten Gruppe liegenden Element X ein zwischen den entsprechenden Elementen A' und B' liegendes Element X' und damit ist auch die umgekehrte Eigenschaft bewiesen (Def. III und Bem. II).

---

1) Siehe die Anm. zu § 9.
2) Diese Definition gilt sowohl für die Reihe, wie für die geordnete Gruppe.

b. *Wenn die begrenzten geordneten Gruppen (oder Reihen) erster Art $ABCD\ldots LM$. $A'B'C'D'\ldots L'M'$ sich eindeutig in derselben oder in umgekehrter Ordnung der Art entsprechen, dass dem ersten und zweiten Element der ersten Gruppe der Reihe nach das erste und zweite Element der zweiten Gruppe entspricht, so entsprechen sich die letzten Elemente.*

Denn dem letzten Element M der Reihe der ersten Gruppe muss des eindeutigen Zusammenhangs wegen ein einziges Element der Reihe der zweiten Gruppe entsprechen. Wenn dem M ein dem letzten Element M' der zweiten Gruppe (§§ 21 und 22) vorausgehendes Element X' entspricht, so muss das consecutive auf M folgende Element, das heisst A (Bem. II) einem consecutiven Element von X' entsprechen (a). Aber das A entsprechende Element ist A'. Wenn nun A' das consecutive auf X' folgende Element ist, so ist X' das M' selbst (Bem. II) und der Satz ist bewiesen. Ist dagegen A' das consecutive X' vorangehende (§ 24) Element, so ist X' das zweite Element der Gruppe $A'B'C'D'\ldots M'$. M ist aber nicht das zweite Element B der ersten, welches dem zweiten Element B' der zweiten Gruppe nach dem im Satz Gegebenen entspricht; wenn X' daher B' wäre, so würden dem Element B' die verschiedenen Elemente B und M der ersten Gruppe entsprechen, was dem eindeutigen Zusammenhang widerspricht (Def. II).

c. *In sich eindeutig entsprechenden Gruppen (A), (A') entsprechen die Untergruppen der einen eindeutig den Untergruppen der andern.*

(T) sei ein Theil der Gruppe (A). Jedem Element von (T) entspricht als Element von (A) (Def. V, § 13) ein Element von (A') und alle Elemente in (A'), die denjenigen von (T) entsprechen, bilden eine Gruppe (T'), die ein Theil von (A') ist (Def. V, § 13). Denn einem Element X von (A), welches (T) nicht angehört, kann in (A') kein Element von (T') entsprechen, weil diesem dem eindeutigen Zusammenhang zuwider (Def. II) in (T) ein andres von X verschiedenes Element, da X ausserhalb (T) liegt (Def. VI, § 13), entsprechen würde. Nehmen wir nun an, dem (T) entsprächen verschiedene Gruppen (T'), (T'') von (A'). Weil sie verschieden sind, so muss die eine wenigstens ein Element X' ausserhalb der andern enthalten, sonst wäre (T') und (T'') dieselbe Gruppe (b, § 29). X' sei in (T') enthalten und ausserhalb (T''). Dem dem X' entsprechenden Element X in (T) entsprächen sowohl das Element X' in (T') als ein anderes von X' verschiedenes Element in (T''), was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist.

d. *In geordneten sich eindeutig in derselben oder in umgekehrter Ordnung entsprechenden Gruppen (A) und (A') entspricht einer Untergruppe der einen eine einzige Untergruppe der andern.*

In Gruppen, die sich eindeutig entsprechen, entspricht einer Untergruppe (T) von (A) eine einzige Untergruppe (T') von (A') (c). Aber die Gruppen (A) und (A') entsprechen sich auch in derselben oder in umgekehrter Ordnung und daher entsprechen consecutiven Elementen der einen consecutive Elemente der andern (a). Wenn A und B consecutive Elemente von (T) und daher von (A) sind (Def. II, § 27), so gehören die entsprechenden Elemente A' und B' in

(A') der (T') an (c). (T') ist desshalb aus consecutiven Elementen von (A') gebildet und mithin eine Untergruppe von (A') (Def. II, § 27).

e. *Man kann Gruppen, die eindeutig einer andern Gruppe entsprechen, sich eindeutig einander entsprechen lassen.*

(A), (A') seien die Gruppen, die der Gruppe (A'') eindeutig entsprechen. Jedem Element X der ersten entspricht ein Element X'' in der dritten und diesem Element X'' entspricht ein Element X' der zweiten. Auf diese Weise mittelst der dritten Gruppe (A'') sieht man, dass das Element X dem Element X' und umgekehrt dem Element X' das Element X entspricht. Denn X und X'' können, wenn der Begriff des eindeutigen Zusammenhangs allein in Betracht gezogen wird, als einander gleich angesehen werden, da ihre Verschiedenheit nicht in Betracht kommt, ebenso X' und X'' und daher auch X und X' (e, § 8), während andre sich entsprechende Elemente Y, Y', Y'' als X, X', X'' nicht gleich angesehen werden können, da sie bezüglich von ihnen verschieden sind (Def. I, § 13; Def. V, § 8; Bem. III, § 9).

f. *Geordnete Gruppen, die eindeutig und in derselben Ordnung einer andern Gruppe entsprechen, entsprechen einander eindeutig und in derselben Ordnung.*

Der Beweis wird dem vorigen analog unter Berücksichtigung der Def. III geführt.

Bem. Bei dem eindeutigen Zusammenhang in derselben oder in umgekehrter Ordnung können wir der geordneten Gruppe ihre Reihe und umgekehrt substituiren, weil bei diesem Zusammenhang dasjenige, was die Gruppe von der Reihe unterscheidet, nicht in Betracht kommt (Bem., § 28).

§ 43. a. *Jede geordnete natürliche Gruppe kann man eindeutig und in derselben Ordnung einer einzigen Untergruppe einer beliebigen geordneten unbegrenzten Gruppe der ersten Art entsprechen lassen, indem man dem ersten Element der ersten ein beliebiges gegebenes Element der zweiten entsprechen lässt.*

Denn es sei $(A) \equiv ABCD \ldots M$ die geordnete natürliche Gruppe (§ 35) und $(A') \equiv A'B'C'D' \ldots M'N' \ldots$ die geordnete unbegrenzte Gruppe der ersten Art. Wir können dem ersten, zweiten, dritten, ... Element von (A) das erste, zweite, dritte, ... Element von (A') entsprechen lassen; das heisst, dem consecutiven auf ein beliebiges Element X von (A) folgenden Element können wir das consecutive auf das entsprechende Element X' folgende Element entsprechen lassen. Wenn bei diesem Zusammenhang dem letzten Element M von (A) ein bestimmtes Element M' von (A') entspricht, so ist der Satz bewiesen, weil bei gegebenem M' die Gruppe $A'B'C'D' \ldots M'$ eine begrenzte Gruppe und desshalb von der ersten Art ist (Def. III, § 39). Wenn dagegen dem M kein gegebenes Element von (A') entspricht, so muss es doch ein letztes Element X von (A) geben, dem ein bestimmtes Element X' von (A') entspricht; denn X ist mindestens A, dem A' entspricht. Aber in (A') hat X' ein consecutives auf es folgendes Element (§ 24), da die Gruppe (A') unbegrenzt von der ersten Art ist (Def. III, § 39), und diesem Element entspricht das consecutive auf X folgende Element in (A), welches nach der Voraussetzung zwischen X und M liegt. X kann daher nicht das letzte Element von (A) sein, dem ein bestimmtes

Element von (A') entspricht, es müsste denn X das letzte Element von (A) selbst sein. Es ist nicht möglich, dass der Gruppe (A) verschiedene Untergruppen (B) und (B') von (A') entsprechen, von denen eine wenigstens ein Element ausserhalb der andern (b, § 29) enthalten müsste. Es würde sonst einem Element von (A) nicht ein einziges Element von (B) und (B') oder von (A') entsprechen, sondern mehrere. Der Satz ist mithin bewiesen.

Es ist klar, dass der Beweis gleichermassen gilt, wenn man, statt das Element A dem Element A' von (A') entsprechen zu lassen, es einem beliebigen andern gegebenen Element X' von (A') entsprechen lässt.

b. *Eine geordnete unbegrenzte Gruppe der ersten Art kann man eindeutig und in derselben Ordnung einer andern geordneten unbegrenzten Gruppe der ersten Art entsprechen lassen.*

Es seien $ABCD..N...$, $A'B'C'D'...N'...$ die Reihen der gegebenen Gruppen mit den ersten Elementen A und A'. Jeder begrenzten Reihe $ABCD...N$ der ersten kann man eindeutig und in derselben Ordnung eine begrenzte Reihe $A'B'C'D'...N'$ der zweiten entsprechen lassen und zwar eine einzige, indem man die ersten Elemente und die consecutiven Elemente einander entsprechen lässt (a). Es entspricht somit jedem gegebenen Element N der ersten Gruppe auf diese Art ein einziges Element N' der zweiten und umgekehrt, weil jedes Element $N(N')$ eine einzige Gruppe bestimmt, die aus den Elementen, die ihm vorhergehen, und aus $N(N')$ gebildet ist (Def., b, § 21). Dieses gilt für alle Elemente der gegebenen Gruppen (i, 1, § 39); und des Zusammenhangs ihrer Reihen wegen entsprechen consecutiven Elementen der einen consecutive Elemente derselben Art bei der andern (§ 24) und daher entsprechen sich die gegebenen Gruppen eindeutig und in derselben Ordnung (a, § 42).

b'. *Eine geordnete unbegrenzte Gruppe der ersten Art kann man eindeutig und in derselben Ordnung jeder geordneten unbegrenzten in der ersten enthaltenen Gruppe entsprechen lassen.*

Denn jede geordnete unbegrenzte Gruppe, die in einer unbegrenzten Gruppe der ersten Art enthalten ist, ist ebenfalls von der ersten Art (e, 39), womit der Satz bewiesen ist (b).

c. *Wenn die geordneten Gruppen (A) und (A') sich eindeutig und in derselben oder der umgekehrten Ordnung entsprechen, so ist (A') begrenzt oder unbegrenzt, je nachdem (A) begrenzt oder unbegrenzt ist.*

Es sei $(A) \equiv ABCD...M$, $(A') \equiv A'B'C'D'...M'...$ Dem ersten Element A von (A) (§ 16) entspricht ein und nur ein einziges Element z. B. A' von (A') (Def. III, § 42) und dem consecutiven auf A folgenden B in (A) entspricht ein consecutives Element von A' in (A') (a, § 42) z. B. das consecutive ihm folgende B'. Wenn X und X' beliebige sich entsprechende Elemente sind (Def. VIII, § 13 und Def. I, § 26), so muss dem consecutiven auf X folgenden Y, wenn es existirt, das consecutive auf X' folgende Y' entsprechen, weil ihm nicht das consecutive vorausgehende entsprechen kann, da X zwischen A und Y enthalten ist (Def. III, § 42). Dem letzten Element M von (A) entspricht ein Element M' von (A') und da M zum consecutiven folgenden Element A

hat (Bem. II, § 42), so muss dem A das consecutive auf M' folgende Element entsprechen. Wenn aber (A') kein letztes Element (§ 22) hat, so ist das consecutive auf M' folgende nicht A' und desshalb würde dem A kein einziges Element von (A') entsprechen, was gegen die Annahme ist (Def. III, § 42). Derselbe Fall würde eintreten, wenn (A') kein erstes und ein letztes z. B. M' hätte; den Elementen, die A' in (A') vorangehen (§ 21), entsprächen keine Elemente von (A) und viel mehr noch wenn (A') kein erstes und kein letztes Element hätte. Dies widerspricht der Voraussetzung (Def. III, § 42). Wenn also dem Element B in (A) das consecutive auf A' folgende Element B' in (A') entspricht, so ist die Gruppe (A') begrenzt (Def. I, § 32; Bem., § 28).

Wenn dagegen dem Element B das consecutive dem A' in (A') vorausgehende Element entspricht (§ 24), so reicht es hin, die umgekehrte Gruppe zu betrachten (Def. I, § 33; Def. I, § 26). Man beweist auf dieselbe Art, dass sie begrenzt ist, und daher ist es auch (A') (b, § 33).

Wenn (A) unbegrenzt ist, so kann (A') nicht begrenzt sein, weil es sonst auch (A) wäre. Der Satz ist somit für jeden Fall bewiesen.

c'. *Jede geordnete Gruppe (A), die eindeutig in derselben oder der umgekehrten Ordnung einer natürlichen Gruppe (A') entspricht, ist eine natürliche Gruppe.*

Denn jede Untergruppe von (A) entspricht einer Untergruppe von (A') (d, § 42), die begrenzt ist und keine unbegrenzte Untergruppe enthält (Def., § 35 und Bem., § 42). Jede Untergruppe von (A) ist daher begrenzt und enthält keine unbegrenzte Untergruppe (c), woraus c' folgt (Def., § 35 und Bem., § 42).

c''. *Jede geordnete Gruppe (A), welche ein erstes Element hat und eindeutig und in derselben Ordnung einer unbegrenzten Gruppe (A') der ersten Art entspricht, ist unbegrenzt von der ersten Art.*

Denn jede begrenzte Untergruppe von (A) ist eine begrenzte Gruppe der ersten Art (d, § 42; c und c'); jede begrenzte Untergruppe von (A) mit dem ersten Element in dem ersten Element von (A) ist daher begrenzt von der ersten Art, womit der Satz bewiesen ist (Def. III, § 39).

§ 44. *Def. I.* Wenn die Elemente einer Gruppe den Elementen derselben Gruppe entsprechen, so sagt man, die Gruppe werde *in sich selbst transformirt* und die *Transformation sei eindeutig*, wenn jedem Element der Gruppe ein und nur ein Element derselben Gruppe und diesem das erstere Element und dieses allein entspricht.

Man sagt, die Transformation sei *eindeutig und in derselben Ordnung*, wenn die Gruppe geordnet ist und die entsprechenden Elemente zwischen entsprechenden Elementen enthalten sind und jedem Element X, das einem beliebigen Element Y vorausgeht, ein Element X' entspricht, das dem entsprechenden Element Y' vorausgeht.

Def. II. Der einfachste Fall einer eindeutigen Transformation ist derjenige, in welchem jedes Element der Gruppe sich selbst entspricht. In einem

solchen Fall heisst die Transformation *Zusammenhang oder Transformation der Coincidenz.*

Bem. Bei dem hier besprochenen Zusammenhang kommt offenbar die Art, wie die Elemente der entsprechenden Gruppen gegeben sind, nicht in Betracht (Bem. I, § 38).

III. Kapitel.

Die Zahl in ihrer ersten Bildung. — Natürliche Zahlen.

1.

Erster Begriff der Zahl.

§ 45. *Def. I.* Einheit heisst ein beliebiges gegebenes (§ 6) Ding X, wenn man in Betracht zieht, dass es ein und nicht mehrere Dinge ist (§ 2, Bem. § 8), und von seinen übrigen Merkmalen abstrahirt (§ 9, § 7).

a. *Verschiedene Dinge als Einheiten betrachtet sind gleich.*

Sie werden in der That nur in Bezug auf das Merkmal Eines betrachtet (Def. I; Bem. III, § 9); daher ist der Begriff Eines des einen der Begriff Eines des andern, woraus a folgt (Def. VI, § 8).

Def. II. Wenn eine beliebige geordnete Gruppe von Gegenständen $ABCDE\ldots$ (§ 26; b, § 37) gegeben ist und man jeden dieser Gegenstände als Einheit (Def. I) betrachtet und von der Art, in welcher sie gegeben sind, aber nicht von ihrer Ordnung absieht (§ 7; Def. I, § 38), so dass verschiedene Gegenstände verschiedene Einheiten liefern, so heisst die geordnete Gruppe von Einheiten, die sich so ergiebt, *Anzahl oder Zahl* der gegebenen Gruppe.[1])

b. *Die Elemente der geordneten Gruppe* (A) *und die Einheiten der Zahl, welche aus ihr entsteht, entsprechen sich eindeutig und in derselben Ordnung.*

Die Elemente der Gruppe und die Einheiten der Zahl entsprechen sich eindeutig, weil jedem Element A der Gruppe eine einzige Einheit der Zahl entspricht und dieser Einheit ebenso das einzige Element A entspricht, da sie durch dieses einzige Element der Gruppe gegeben ist (Def. II). Ueberdiess entspricht einem Element C, welches auf A folgt und B vorausgeht, eine Einheit, welche der A entsprechenden Einheit folgt und der B entsprechenden vorausgeht (Def. II; Def. III, § 42).

1) Dies bedeutet nicht, dass jede Form, die wir Zahl nennen werden, sich auf diese Weise ableiten lassen muss (siehe Anmerkung zu § 4), und heisst auch nicht, dass wir uns auf ganze, endliche Zahlen beschränken (siehe 2 und 3, VI. Kap.). Wählt man die folgende Definition: „Man sagt, die beliebigen geordneten Gruppen (A) und (B) hätten *dieselbe Zahl,* wenn man sie sich eindeutig und in derselben Ordnung (Def. II, § 42) entsprechen lassen kann", als Definition der Zahl, so stösst man auf den schon früher bemerkten Uebelstand, dass man den Begriff der Identität (Def. VI, § 8) einführt, ohne zu wissen, ob er in diesem Fall anwendbar ist. Das liesse sich zwar leicht rechtfertigen, man würde aber so die *Zahl* als eine Art einführen, den Begriff des eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhanges sprachlich auszudrücken, und dieses ist noch nicht der von uns definirte Begriff der Zahl (Def. II, § 42; Def. II, Bem. I). Es ist ferner klar, dass bei unserer Ableitung die ganze Zahl im Allgemeinen und im Besondern die natürliche (§ 46) aus den Operationen und den bestimmten und allgemeinen Begriffen des I. Kap. hervorgeht.

b′. *Den Untergruppen einer geordneten Gruppe entsprechen Zahlen, die Theile der der Gruppe entsprechenden Zahl sind* (Def. II; d, § 42; Def. II, § 25).

Bem. I. Die Einheit ist Theil aller Zahlen (b′; Def. I) und ist die einer Gruppe mit einem einzigen Element entsprechende Zahl (Def. III, § 13; §§ 19 und 26).

c. *Zahlen, deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen und von denen die eine nicht ein Theil der andern oder einem Theil der andern gleich ist, sind gleich.*

Wenn (A) und (B) gegebene geordnete Gruppen von Elementen sind und (A') und (B') ihre geistigen Darstellungen (§ 4), so entsprechen sich (A) und (A'), (B) und (B') eindeutig und in derselben Ordnung (Beisp. 2, § 42). Wenn man nur diesen Zusammenhang als Merkmal der Vergleichung zwischen den Gruppen (A) und (B) (Def. I, § 9) in Betracht zieht und wenn die Gruppen (A) und (B) sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen, so entsprechen sie (A') eindeutig und in derselben Ordnung und sind daher in Bezug auf das genannte Merkmal gleich (Def. I, § 9).

Wenn man aber auch, wie es im Allgemeinen geschehen muss (Def. I, 38), die Verschiedenheit der Elemente in Betracht zieht, sowohl die Verschiedenheit der Art der Position der Elemente unter sich, als diejenige, welche sich daraus ergibt, dass eine Gruppe ein Theil der andern oder einem Theil der andern gleich ist (Def. II, § 27), alsdann sind die Gruppen (A) und (B) im Allgemeinen bei nur eindeutigem und in derselben Ordnung stattfindendem Zusammenhang nicht mehr gleich. In den Zahlen von (A) und (B), als gegebene Gruppen von Einheiten (Def. I und Def. II) betrachtet, sind die Elemente gleich (a) und die Art der Position der Elemente unter sich (Def. II) ist ausgeschlossen, während das dritte Merkmal des Vergleichens nicht ausgeschlossen ist. Ist diese letztere Verschiedenheit nicht vorhanden und findet der Zusammenhang eindeutig und in derselben Ordnung statt, wie unser Satz annimmt, so sind die Zahlen von (A) und (B) gleich (Def. III, § 9).

Bem. II. Wenn man dagegen die Zahl nur von dem eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden oder auch nur von dem eindeutigen Zusammenhang abhängen lässt, so sind die Zahlen von (A) und (B) gleich, wenn im ersten Fall eindeutiger Zusammenhang in derselben Ordnung, im zweiten Fall nur eindeutiger Zusammenhang stattfindet.

2.

Operation des Zählens. — Natürliche Gruppen und Zahlen. — Addition.

§ 46. *Def. I.* Die Operation, mittelst welcher die Zahl einer geordneten Gruppe bestimmt wird (Def. II, § 45), heisst die Operation des *Zählens.*

Def. II. Den geordneten natürlichen Gruppen (§ 35; Bem., § 28) entsprechen Zahlen, die wir *natürliche Zahlen* nennen (Def. II, § 45).

Bem. 1. Die Zahl in ihrer ersten Bildung oder die natürliche Zahl ist die successive Wiederholung mehrerer Einheiten, die man durch die einfache begrenzte Wiederholung der Einheit erhält (Def. I; Bem., § 35 und Def., § 15).

a. *Jeder Theil einer natürlichen Zahl ist ebenfalls eine natürliche Zahl* (f, § 39 und Def. II).

b. *Die natürlichen Zahlen kann man eindeutig und in derselben Ordnung den Untergruppen einer geordneten unbegrenzten Gruppe der ersten Art, mit welcher sie das erste Element gemeinschaftlich haben, entsprechen lassen.*

Es sei (A) die natürliche einer gegebenen Zahl entsprechende Gruppe und (B) die geordnete unbegrenzte Gruppe der ersten Art. Der Gruppe (A) kann man eindeutig und in derselben Ordnung eine Untergruppe (A') von (B) mit demselben ersten Element (a, § 43) entsprechen lassen und folglich kann man die Einheiten der Zahl eindeutig und in derselben Ordnung der Gruppe (A') entsprechen lassen (f, § 42 und Def. III, § 39).

c. *Alle natürlichen Zahlen bilden auf die im Satz b angegebene Weise eine unbegrenzte Reihe der ersten Art.*

Dies folgt unmittelbar aus Def. II, und i, § 39.

Def. III. Wir nennen diese Reihe, dem allgemeinen Gebrauch folgend, *die natürliche Reihe* der natürlichen Zahlen und bezeichnen sie mit (I).

c'. Jede natürliche Zahl erhält man durch die einfache successive begrenzte Vereinigung der Einheit mit einer in der Reihe (I) vorhergehenden Zahl[1]) (c; Def. II, h, g, 39).

§ 47. a. *Die Operation des Vereinigens der Einheit (und daher der successiven Vereinigung der Einheiten einer Zahl) oder einer Zahl mit der Einheit oder einer Zahl, ist eindeutig.*

Die einfache Vereinigung ist eine eindeutige Operation (I, § 29; Def. II, § 11). Die daraus hervorgehende geordnete Gruppe von Einheiten kann von der Ordnung und von der Art, wie ihre Elemente gegeben sind, abhängen (Def. I, § 38). Die Ordnung aber ist in solchem Fall schon festgestellt, weil man z. B. mit dem Ganzen $(ABCD)$ das Element E vereinigt, und die Zahl hängt nicht von der Art ab, wie die Elemente der ihr entsprechenden Gruppe gegeben sind (Def. II, § 45), womit der Satz bewiesen ist.

Def. I. Die Vereinigung einer Zahl mit einer andern Zahl (Def. II, § 45 und Def. I, § 26) heisst *Addition* und das Resultat *Summe* der zweiten und ersten Zahl. Die gegebenen Zahlen heissen *Summanden.*

Bez. I. Für diese Operation gebrauchen wir das Zeichen $+$.

Bem. I. (Wenn (A) und (B) die Zahlen a und b darstellen, so stellt die geordnete Gruppe $[(A)(B)]$ die Summe $a+b$ dar (Bez. § 27).

Bez. II. Wir bezeichnen die Einheit mit dem Zeichen 1.

---

1) Unsre geordnete unbegrenzte beliebige Reihe, welche ein erstes Element hat (§ 26) und in welcher jedes gegebene Element ein einziges consecutives auf es folgendes und ihm vorangehendes (§ 24) hat, genügt den ersten 8 von den 9 Eigenschaften, die *Peano* in seinen Arith. Principia (1889) als Characteristicum des Zeichens N (Zahl) gibt. Einige von ihnen sind freilich allgemeine logische Eigenschaften, wie $a=a$; wenn $a=b$, folgt $b=a$; wenn $a=b$, $b=c$, folgt $a=c$, welche den Eigenschaften I, Def. VI, d, e in § 8 entsprechen. Die Eigenschaft 5 (§ 1) *Peano's* sagt, dass die Gleichheit nur bezüglich des Begriffs der Zahl statt hat (siehe Bem. IV, § 47). Die Eigenschaft 9 (§ 1) gibt genau unsre Eigenschaft 1 in § 39 wieder. Als weitere charakteristische Eigenschaft der unbegrenzten geordneten Gruppe, welche ein erstes Element hat, haben wir dagegen die Definition der Reihe und damit der unbegrenzten Gruppe erster Art (siehe Anmerk. zu §§ 39 und 50).

Bez. III. Die erste Zahl nach der Einheit erhält man durch die Vereinigung der wiederholten Einheit mit der Einheit, das heisst:

$$1 + 1.$$

Wir belegen sie mit dem Zeichen 2 (zwei); es ist also

$$1 + 1 = 2. \qquad (b, § 9)$$

Die erste Zahl nach 2 ist $2 + 1$, die wir mit 3 (drei) bezeichnen, so dass also

$$2 + 1 = 3.$$

So ist die erste Zahl nach drei $3 + 1$, die das Zeichen 4 (vier) erhält, so dass

$$3 + 1 = 4$$

und so weiter. Ist im Allgemeinen eine mit m bezeichnete Zahl gegeben, so bezeichnet man die folgende Zahl der Reihe (I) mit $m + 1$.

Die aus der begrenzten Wiederholung der Einheit abgeleiteten Zahlen, welche in der Ordnung der Reihe (I) aufeinander folgen, werden, wie folgt, bezeichnet

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots 20, 21 \ldots 100 \ldots 101 \ldots 200 \ldots \qquad (1)$$

und heissen nacheinander eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, eilf . . . zwanzig, einundzwanzig . . . hundert, hundertundeins . . . zweihundert . . . [1])

Def. II. Die Ziffern, die zur Bezeichnung der Zahlen dienen, heissen auch Zahlen.

Bem. II. Die Punkte in (1) stehen an Stelle der andern Zahlen der Reihe.

Bem. III. Man gebraucht auch Buchstaben z. B. a, b, u. s. w., um die Zahlen der Reihe (I) anzugeben; während aber z. B. 9 eine an einer bestimmten Stelle der Reihe (I) stehende Zahl bedeutet, bezeichnet a eine beliebige Zahl (Def. VIII, § 13; § 19) derselben. a wird ebenfalls eine Zahl genannt.

Wenn man jedoch sagt, eine Zahl a von (I) sei gegeben, so versteht man im Allgemeinen darunter eine beliebige Zahl von (I) (Def. VIII, § 13; § 19), welche aber bei jeder Operation dieselbe Zahl von (I) darstellt.

b. *Wenn a und b dieselbe Zahl von (I) darstellen, so sind a und b, als zwei Zahlen betrachtet, einander gleich.*

Denn man kann die eine der andern substituiren, wir schreiben also:

$$a = b \quad \text{woraus} \quad b = a. \qquad (b, § 9; d, § 8)$$

Bem. IV. Für die Zahlen allein reicht das Zeichen = aus, da man keine andre Gleichheit zwischen ihnen in Betracht zieht (Bem I, § 9).[2])

1) Wir hätten hier, wenn wir die bisher ausgeschlossenen Begriffe zwei, drei, u. s. w. nicht nöthig gehabt hätten und wenn es nicht von Vortheil wäre, sie von nun an im Text zu verwenden, die Frage über das System des Zählens offen lassen können. Bei einer vollständigen Abhandlung der Theorie der ganzen Zahlen, hätte dieser Punkt ausführlicher behandelt werden müssen, während andre von den vorstehenden Betrachtungen, die sich mit dieser Theorie ausschliesslich beschäftigen, hätten ausgelassen oder vereinfacht werden können.

2) Diese verschiedene Bezeichnung einer und derselben Zahl kommt bei den numerischen Operationen häufig vor, wenn man vor oder während einer Operation eine Zahl betrachtet, die zwar der Reihe (I) angehört und immer dieselbe bleibt, aber unbestimmt ist. Wenn dann noch eine andre unbestimmte Zahl auftritt, so kann es so kommen, dass

c. *Zwei Zahlen, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.*

Dass heisst, wenn $a = b$, $b = c$ so ist $a = c$.

Sind a, b, c Bezeichnungen einer und derselben Gruppe von Einheiten, so ist diese Eigenschaft eine Folge von b, § 9. Sind dagegen a, b, c verschiedene Gruppen von Einheiten, alsdann folgt die Eigenschaft aus dem Satz e, § 8.

Bem. V. Wenn der eindeutige und in derselben Ordnung stattfindende Zusammenhang allein für die Gleichheit der Zahlen a und b genügte (Bem. II, § 45), so würden sich im zweiten Fall b und c eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen und daher auch a und c (f, § 42) und daraus würde folgen $a = c$.

Ebenso ist es, wenn der eindeutige Zusammenhang allein ausreichen sollte (Bem. II, § 45).

d. *Wenn* $a = a'$, $b = b'$, *so ist* $a + b = a' + b' = a' + b = a + b'$.

Oder auch: Wenn man zu gleichen Zahlen gleiche Zahlen addirt, so erhält man gleiche Zahlen.

Denn es seien (A) und (A'), (B) und (B') die den Zahlen a und a', b und b' entsprechenden Gruppen. Die Gruppe, die man aus der Vereinigung der Gruppe (B) mit der Gruppe (A) erhält, das ist $[(A)(B)]$, stellt die Anzahl $a + b$ (Bem. I) dar; die Gruppe $[(A')(B')]$ stellt die Anzahl $a' + b'$ dar. Weil aber $a = a'$, $b = b'$, so ist $a + b = a' + b'$, da die Addition eindeutig ist (a) und andrerseits die Verschiedenheit der Position zwischen den Einheiten der Zahlen und daher der Gruppen nicht in Betracht gezogen wird (Def. II, § 45 und § 41).

Bem. VI. Wenn der eindeutige und in derselben Ordnung stattfindende Zusammenhang für die Gleichheit der Zahlen genügt (Bem. II, § 45), so entsprechen sich die Gruppen a und a', b und b' eindeutig und in derselben Ordnung und folglich auch die Gruppen $a + a'$, $b + b'$, weil sie keine Elemente enthalten, die nicht in a und a', b und b' enthalten sind (II, § 29). Es ist desshalb auch in diesem Fall $a + a' = b + b'$.

Aehnlich ist es, wenn der eindeutige Zusammenhang allein genügt (Bem. II, § 45).

Def. III. Die Elemente einer geordneten natürlichen Gruppe, welche der Zahl n entspricht, entsprechen successiv den Zahlen $1, 2, \ldots, n - 1, n$ der der Reihe (I) (a, § 43; i, § 39; c, § 46; b, § 43). Das letzte Element nennen wir daher das n^{te} Element der Gruppe.

Def. IV. Eine Operation (oder eine Zahl) *bmal* wiederholen, bedeutet, dass, wenn man jede Wiederholung (§ 15) als einen die Einheit darstellenden Gegenstand betrachtet, die aus diesen Wiederholungen hervorgehende Zahl b ist.[1])

---

man für die eine, wie für die andre, nach der Ausführung der Operationen dieselbe Zahl von (I) findet. So ist es z. B. auch bei den indirecten Beweisen, wenn man dadurch, dass man annimmt, die Resultate zweier numerischer Operationen stellten nicht dieselbe Zahl von (I) dar und sie desshalb während des Beweises mit verschiedenen Zeichen versieht, beweisen will, dass diese Resultate gleich sind.

1) Dies beweist, dass die Bemerkung *G. Cantor's* (Zeitschrift für Philosophie von Fichte Bd. 91. Seite 252): „Die Addition von Einsen kann nicht zur Definition der Zahl benutzt werden, weil man nicht sagen kann, wie oft sie addirt werden müssen ohne die Zahl selbst, die man definiren will", mindestens unklar ist. Nach unsrer Definit. II, § 45 erhält man die Zahl im Allgemeinen als eine geordnete Gruppe aus der Operation der successiven Vereinigung eines Gegenstandes mit dem andern, ohne dass man sagen muss, wie oft diese Operation zu wiederholen ist. Wenn es sich dann um eine bestimmte Zahl handelt, so kann man diese aus der Addition der Einheit erhalten. Die Zahl 2 erhält man, indem man die Einheit *ein*mal wiederholt, die Zahl 3, indem man die Einheit *zwei*mal

e. *Die Summe $a + b$ ist eine Zahl, die man erhält, indem man successive die Einheiten von b zu a und den so erhaltenen Zahlen addirt.*

Es seien (A) und (B) die den Zahlen a und b entsprechenden Gruppen, $[(A)(B)]$ stellt dann die Zahl $a + b$ dar (Bem. I).

Die Zahl $a + 1$ erhält man, indem man mit (A) das erste Element von (B) vereinigt (Def. II, § 45 und Bez. III), die Zahl $(a + 1) + 1$, indem man mit der so erhaltenen Gruppe das zweite Element von (B) vereinigt. Wiederholt man die Operation b mal, so kommen alle Elemente von (B) zur Verwendung. Die so erhaltene Gruppe ist aber $[(A)(B)]$ (a, § 40), woraus e folgt (Def. II, § 45).

Bem. VII. Man muss sich gegenwärtig halten, dass:

$$(A)(B) \equiv (A_1 A_2 \dots A_a)(B_1 B_2 \dots B_b) \equiv (A_1 A_2 \dots A_a B_1)(B_2 B_3 B_4 \dots B_b) \text{ u. s. w.} \equiv$$
$$\equiv A_1 A_2 A_3 \dots A_a B_1 B_2 \dots B_b \text{ ist (a, § 40 und Def. II, § 45).}$$

f. *Sind drei Zahlen a, b, c gegeben, so ist $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ (Associationsgesetz). Dies gilt auch für eine beliebige Anzahl von Summanden* (Def. II, § 45 und a, § 40; c, § 46).[1]

Bem. VIII. Von jetzt an werden wir in diesem und in den folgenden Kapiteln, so lange wir nichts Anderes bestimmen, nur die natürlichen Zahlen betrachten und sie desshalb auch kurzweg Zahlen nennen.

§ 48. a. *In einer gegebenen geordneten natürlichen Gruppe kann jedes Element an Stelle eines jeden andern mittelst des Stellenwechsels consecutiver Elemente betrachtet werden.*

Die Eigenschaft ist klar für die geordnete Gruppe AB, die der Zahl 2 entspricht (Def. II, § 46; Bez. III, § 47). Es reicht aus zuerst B und dann A zu betrachten (§§ 3 und 20) oder in unserm Geist die Stelle von B mit derjenigen von A zu vertauschen (Def. I, § 33). Setzen wir voraus, der Satz gelte für die geordnete Gruppe von Elementen

$$ABCD \dots MN, \tag{1}$$

welche einer Zahl n entspricht und betrachten wir die Gruppe

$$ABCD \dots MNN' \equiv (ABCD \dots M)(NN') \tag{2}$$

(a, § 40), welche der Zahl $n + 1$ entspricht (Bez. III, § 47).

Lassen wir in dieser Gruppe die Elemente, die NN' vorangehen, an ihrer Stelle, so können wir, wie oben gezeigt, N und N' untereinander vertauschen und erhalten die Gruppe:

$$(ABCD \dots M)(NN') \equiv (ABCD \dots MN')N \equiv ABCD \dots MN'N \quad \text{(a, § 40).}$$

Da wir nach der Voraussetzung die Stelle von N in der Gruppe (1) mit der Stelle eines jeden beliebigen Elementes, das ihm vorangeht, vertauschen

wiederholt, und so weiter. Ist auf diese Art, wie wir annehmen, eine beliebige Zahl, die wir mit $n - 1$ bezeichnen, bestimmt, so erhalten wir die Zahl n aus 1, indem wir die Einheit $n - 1$ mal wiederholen.

1) *H. Grassmann* lässt das Associationsgesetz der Zahlen, als Zeichen, für den folgenden Fall zu: $(a + b) + 1 = a + b + 1$ und auch für: $(a + b) + c = a + b + c$ (Lehrbuch d. Arithm. 1861, Seite 2 u. 4). Siehe auch *Hankel* (a. a. O.) und *Helmholtz* (das Zählen und Messen. Phil. Aufs. Eduard Zeller gewidmet).

können, so können wir auch N' in $ABCD\ldots MN'$ mit der Stelle jedes andern Elements der Gruppe $ABCD\ldots M$ vertauschen. Betrachtet man dann ein Element an der Stelle von N' in $ABCD\ldots MN'N$, so können wir es mit N vertauschen, welches die Stelle von N' in der gegebenen Gruppe (2) einnimmt. Da die Eigenschaft aber für AB besteht, so ist sie folglich auch für jede natürliche Gruppe gültig (a, § 43; i und l, § 39).

b. *Verändert man die Ordnung der Elemente einer geordneten Gruppe*[1], *so erhält man eine Gruppe, die eindeutig der ersten entspricht, wenn man jedes Element sich selbst entsprechen lässt.*

Denn jedes Element der einen ist Element der andern (II, § 29) oder es gibt kein Element der einen, welches nicht Element der andern wäre. Es entspricht also jedes Element der einen, da es sich selbst entspricht, einem Element der andern, das heisst es besteht zwischen den beiden Gruppen ein eindeutiger Zusammenhang (Def. II, § 42).

c. *Ist eine geordnete natürliche Gruppe gegeben und man vertauscht die Stellen consecutiver Elemente, so erhält man alle geordneten Gruppen, die aus den Elementen der ersten gebildet sind.*

Zuerst sei die geordnete Gruppe $AB \equiv (A)$ gegeben, welche nur die Elemente A und B enthält. (A') sei eine andre geordnete Gruppe mit denselben Elementen. Wenn A' das erste Element von (A') A ist, so ist, weil (A') auch das Element B enthalten muss, $(A') \equiv (A)$ (II, b, § 29). Ist A' dagegen B, so ist das zweite Element, B' von (A'), A, weil sie keine andern Elemente ausser A und B enthält (II, § 29). Eine dritte Gruppe ist ausgeschlossen; denn, vorausgesetzt, sie existire, so kann sie nur (A) oder (A') sein, weil A oder B das erste Element und folglich B oder A das zweite Element einer dritten Gruppe mit den Elementen A, B sein muss, weil sie keine andern Elemente haben kann (II, § 29).

Nehmen wir nun an, der Satz gelte für eine natürliche Gruppe

$$(A) \equiv ABCD\ldots N$$

und es wäre unabhängig von der Zahl, welche sie darstellt, die Gruppe

$$(B) \equiv ABCD\ldots NP \equiv (A)P \qquad \text{(a, § 40)}$$

gegeben und betrachten wir eine andre, aus den Elementen von (B) gebildete geordnete Gruppe:

$$(B') \equiv A'B'C'D'\ldots N'P'.$$

In (B') nimmt das Element P eine gegebene Stelle ein und kann mit P' mittelst Vertauschungen consecutiver Elemente vertauscht werden (a). Man erhält so die geordnete Gruppe:

$$(B'') \equiv A''B''C''\ldots N''P,$$

worin $A''B''C''\ldots N''$ die Elemente von (A), unabhängig von ihrer Ordnung, sind (II, § 29). Nimmt man die zu (B'') umgekehrten Vertauschungen vor

[1] Die Ordnung u. s. w. verändern bedeutet, die gegebenen Elemente in einer verschiedenen Ordnung betrachten.

(Def. I, § 33), so erhält man (B'). Es genügt, wenn wir P successive an den Stellen z. B. der Elemente, die in (B') auf es folgen, betrachten (§ 24; a, § 35). Wenn dann P' die Stelle seines consecutiven ihm vorangehenden Elements einnimmt, so denkt man sich jedes Element, welches auf P folgte, an der Stelle seines consecutiven, ihm vorangehenden, Elementes. Alsdann betrachtet man um (B') aus (B'') zu erhalten P successive an der Stelle der ihm vorangehenden Elemente (§ 21), bis es die Stelle von P' einnimmt. Nach diesen Vertauschungen nimmt jedes Element, welches im Anfang auf P folgte, die Stelle des consecutiven in der gegebenen Ordnung auf es folgenden Elementes ein; das heisst also: jedes andre Element, das nicht P oder P' ist, nimmt nach der Operation dieselbe Stelle ein (a, § 33). Die umgekehrte Operation liefert mithin die ursprüngliche Gruppe (B'). Man erhält also (B') aus (B'') durch eine Vertauschung consecutiver Elemente, (B'') aber erhält man nach der Voraussetzung durch dieselbe Operation aus (B), man erhält folglich (B') aus (B) durch Vertauschungen consecutiver Elemente. Wenn also der Satz für die Gruppe (A) gilt, gilt er für die Gruppe $(A)P$, er gilt aber für die Gruppe AB, folglich gilt er für alle geordneten natürlichen Gruppen (a, § 43; i und 1, § 39).

d. *Wenn sich zwei geordnete Gruppen eindeutig entsprechen, so kann man jedem Element der einen ein nach Belieben ausgewähltes Element der andern entsprechen lassen, wenn man den eindeutigen Zusammenhang unter den übrigen Elementen aufrecht erhält.*

Nehmen wir an, X und Y seien beliebige Elemente der ersten Gruppe (Def. VIII, § 13) [welche stets verschieden sind, wenn nichts Anderes bestimmt wird (Bem. I, § 8)] und ihnen entsprächen die Elemente X' und Y' der zweiten Gruppe. Da wir die Stellen von Y und X vertauschen können (a), so wird bei diesem Tausch dem Element X das Element Y' in der zweiten Gruppe entsprechen, da die Elemente X und Y, X' und Y' getrennt von den andern, die sich wie vorher entsprechen, betrachtet werden (§ 7). Lässt man daher dem X das Element Y' entsprechen, so entsprechen sich die übrigen Elemente (§ 7) eindeutig. Damit ist der Satz bewiesen.

d'. *Wenn man in zwei geordneten natürlichen Gruppen, die sich eindeutig entsprechen, b beliebigen Elementen der einen b Elemente der andern entsprechen lässt, so entsprechen sich die übrig bleibenden Elemente eindeutig.*

Es seien $A_1 A_2 \ldots A_b \ldots A_m$, $A_1' A_2' \ldots A_b' \ldots A_m'$ die gegebenen Gruppen.

Einem Element der ersten z. B. A_1 kann man ein beliebiges gegebenes Element X der zweiten entsprechen lassen; die übrig bleibenden Elemente werden sich eindeutig entsprechen (d). Abstrahirt man von den Elementen A_1 und X und wiederholt man die Operation b mal für die gegebenen Gruppen der übrig bleibenden Elemente (Def. IV, § 47), so entsprechen sich die Gruppen übrig bleibender Elemente nach jeder dieser Wiederholungen eindeutig (d) und daher auch nach der b^{ten} Wiederholung (Def. III, § 47; 1, § 39).

e. *Wenn die Elemente zweier geordneten natürlichen Gruppen sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen und man verändert die Ordnung einer be-*

liebigen derselben, so kann man die so erhaltenen Gruppen sich eindeutig entsprechen lassen.

Es seien $ABC \ldots M$, $A'B'C' \ldots M'$ die gegebenen Gruppen und $A''B''C'' \ldots M''$ eine andre geordnete Gruppe, die man aus den Elementen der ersten erhalten hat. Da man die Gruppe $A''B''C'' \ldots M''$ eindeutig der Gruppe $ABC \ldots M$ entsprechen lassen kann (b) und $A'B'C' \ldots M'$, wie gegeben, der Gruppe $ABC \ldots M$ eindeutig entspricht, so entsprechen sich die Gruppen $A''B''C'' \ldots M''$, $A'B'C' \ldots M'$ eindeutig (e, § 42).

f. *Eine natürliche Gruppe kann nicht eindeutig einer ihrer Untergruppen entsprechen.*

Für die Gruppe AB ist dieses einleuchtend; denn sie kann nicht eindeutig einem einzigen Element A oder B entsprechen, weil sonst A oder B in der gegebenen Untergruppe, die in diesem Fall aus einem einzigen Element bestände (Def. III, § 13 und Bem. I, § 42), kein entsprechendes Element hätte. Wenn nun eine Gruppe (A) diese Eigenschaft besitzt, so lässt sich leicht beweisen, dass sie auch der Gruppe $(A)B$ zukommt, das heisst, der durch die Vereinigung eines andern Elementes B mit der Gruppe (A) erhaltenen Gruppe. Nehmen wir das Gegentheil an und es sei (A') ein Theil von $(A)B$ der Art, dass man die Elemente von (A') eindeutig denen von $(A)B$ entsprechen lassen kann. Dann sind zwei Fälle möglich: entweder ist B in (A') nicht enthalten oder es ist darin enthalten. Im ersten Fall kann man dem Element B ein beliebiges Element z. B. das letzte von (A') entsprechen lassen (d), vorausgesetzt, dass (A') geordnet ist. Bezeichnet man dieses Element mit B' und den übrigbleibenden Theil von (A') mit (A''), so würde (A'') eindeutig (A) entsprechen (d), was gegen die Voraussetzung ist. Ist dagegen (B) in (A') enthalten, so kann man nach der Feststellung des Zusammenhangs zwischen (A') und $(A)B$ das B sich selbst entsprechen lassen (d), es bleibt dann von (A') ein Theil (A'') übrig, welcher auch in diesem Fall der Gruppe (A) der Voraussetzung zuwider entsprechen würde (d). Wenn der Satz für (A) gilt, gilt er auch für $(A)B$, er gilt aber für die Elementengruppe AB, folglich gilt er für alle natürlichen Gruppen (a, § 43; i und l, § 39).

g. *Wenn zwei natürliche Gruppen sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen, so stellen sie gleiche Zahlen dar.*

Es ist nicht möglich, dass zwei natürliche Gruppen und daher auch zwei Zahlen (Def. II, § 45) sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen und die eine zugleich ein Theil oder einem Theil der andern gleich sei, weil sie sonst eindeutig und in derselben Ordnung und daher auch eindeutig einem ihrer Theile, f zuwider, entsprechen würde; daraus folgt g (c, § 45).

h. *In welcher Ordnung man auch die Elemente einer geordneten natürlichen Gruppe betrachten mag, sie stellt dieselbe Zahl dar.*

A und B seien die Elemente der Gruppe (A), $1_a, 1_b$ die Einheiten der entsprechenden Zahl $1_a + 1_b$ (Def. I, § 46; Bez. III, § 47). Den Elementen B, A können wir eindeutig dieselben Einheiten 1_a, 1_b entsprechen lassen, denn hat man B dem 1_a entsprechen lassen, so kann das Element A nur 1_b

entsprechen (d). Der eindeutige Zusammenhang kann in diesem Fall auch von derselben Ordnung sein (Bem. II, Def. III, § 42).

Nehmen wir nun an, die Eigenschaft gelte für eine beliebige gegebene natürliche Gruppe

$$(M) \equiv ABCD \ldots M$$

und

$$\mu = 1_a 1_b 1_c 1_d \ldots 1_m$$

sei die Reihe der den Elementen von (M) entsprechenden Einheiten. Die entsprechende Zahl sei:

$$m = 1_a + 1_b + 1_c + 1_d + \cdots + 1_m \quad \text{(Def. II, § 45; Bez. I, § 47).}$$

Es sei die Gruppe

$$(M)N \equiv ABCD \ldots MN \qquad \text{(a, § 40)}$$

gegeben, der die Reihe von Einheiten

$$\mu\, 1_n = 1_a 1_b 1_c 1_d \ldots 1_m 1_n$$

und die Zahl

$$m + 1_n = 1_a + 1_b + 1_c + 1_d + \cdots + 1_m + 1_n$$

entspreche. Wenn man die Ordnung von M und N umdreht, das heisst die Stelle von M mit derjenigen von N vertauscht, was möglich ist (a), so erhält man die Gruppe

$$ABCD \ldots NM. \qquad (1)$$

Lässt man dann den Elementen, welche N vorangehen, dieselben Einheiten $1_a 1_b 1_c 1_d \ldots$, welche 1_m vorangehen, wie bei der Gruppe $ABCD \ldots MN$ entsprechen und dem N die Einheit 1_m, so muss dem Element M die Einheit 1_n entsprechen (d). Daher entspricht der Gruppe $ABCD \ldots NM$ dieselbe Zahl $m + 1_n$ (Def. II, § 45; f, § 42 und g). In der Gruppe $ABCD \ldots N$ jedoch kann man die Stelle von N mittelst Vertauschungen consecutiver Elemente mit derjenigen jedes beliebigen andern vorangehenden Elementes vertauschen (a), ohne dass nach der Voraussetzung die entsprechende Zahl sich ändere. Lässt man dann jedes dieser Elemente, wenn es den Platz von N einnimmt, mit M in (1) die Stelle wechseln, so entspricht der Gruppe nach dem eben Gesagten dieselbe Zahl. Auf diese Weise erhält man aber alle geordneten Gruppen, die durch die Elemente der Gruppe $(M)N$ gegeben sind (c). Wenn daher der Satz für die Gruppe (M) gilt, so gilt er auch für die Gruppe $(M)N$; er gilt aber für die Gruppe AB, folglich gilt er für alle geordneten natürlichen Gruppen (a, § 43; i und l, § 39).[1])

1) Gewöhnlich lässt man bei der Anzahl der Gegenstände einer Gruppe die Ordnung dieser Gegenstände ausser Acht und befolgt die Methode nicht, die Eigenschaften der Zahl aus dem Zusammenhang mit den geordneten Gruppen abzuleiten. Wenn man aber die Zahl in ihrer einfachsten Construction aus der logischen Function des Zählens entstehen lässt (§ 45 und Def. I, § 46), so ist sie von der Ordnung, in welcher die Gegenstände der gegebenen Gruppe gezählt werden, abhängig. Die endlichen ganzen Zahlen (welche, wie wir sehen werden, unsern natürlichen Gruppen entsprechen) sind von der Ordnung der Elemente der entsprechenden Gruppen unabhängig (h). Dies muss aber bewiesen werden, denn es gibt Gruppen von Elementen, denen die transfiniten Zahlen *G. Cantor's* entsprechen und für welche diese Eigenschaft nicht mehr gilt (Acta Math. Bd. 2 Seite 385. 1883. — Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 S. 32 u. f. — Zeitschrift für Phil.

Bem. I. Von nun an können wir also die Ordnung der Gruppen, welche den natürlichen Zahlen entsprechen, ausser Acht lassen.

i. *Zwei natürliche Gruppen, welche dieselbe Zahl darstellen, kann man sich eindeutig entsprechen lassen.*

Es seien $A, B, C, D, \ldots M$; $A', B', C', D', \ldots M'$ die gegebenen Gruppen. Die Einheiten der Zahl einer Gruppe entsprechen eindeutig und in derselben Ordnung den Elementen der Gruppe (b, § 45). Die Elemente der ersten Gruppe seien, wenn man sie ordnet:

$$A_1 A_2 A_3 \ldots A_n \equiv (A)$$

und die Einheiten der entsprechenden Zahl

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = (a)$$

denn wir können in einem solchen Fall die Einheiten auch mit von 1 verschiedenen Zeichen belegen. Die Einheiten von (a) entsprechen, das ist gegeben, eindeutig und in derselben Ordnung den Elementen der zweiten Gruppe $A'_1 A'_2 A'_3 \ldots A'_n \equiv (A')$. Da nun die Gruppen (A) und (A') eindeutig und in derselben Ordnung der Gruppe (a) entsprechen, so entsprechen sie einander eindeutig und in derselben Ordnung (f, § 42). Die Anzahl der ersten Gruppe ändert sich aber nicht, wenn sich die Ordnung ihrer Elemente ändert (h) und

v. Fichte Bd. 91, Heft 1 und 2. 1887 u. s. w.). Was *Clifford* von dem Satz h sagt (The common sense of the exact sciences, London 1885) ist eine empirische Auseinandersetzung, aber mathematisch setzt er dieselbe Eigenschaft voraus. So hat *G. Cantor* Recht, wenn er den analogen Fehler in der Schrift *Kronecker's* aufdeckt (Phil. Aufs. Ed. Zeller gew. — Ueber den Zahlbegriff. S. 268). Peano (a. a. O.) beschäftigt sich nicht damit. So viel wir wissen, hat *Schröder* das Verdienst zuerst diese Frage behandelt zu haben (Lehrbuch der Arithm. u. Algebra, Leipzig 1873). Nach dem, was er in dem Satz auf Seite 8 sagt, scheint es zu genügen, dass es *dieselben* Dinge sind, die in verschiedener Ordnung gezählt werden, damit die resultirenden Zahlen gleich seien; dieses setzt aber schon den obigen Satz voraus, denn auch in den beiden Reihen $1\,2\,3\ldots n\ldots$ und $2\,3\ldots n\ldots 1$ hat man dieselben Dinge, aber die Zahlen sind verschieden. So ist das Theorem auf Seite 20 allgemein ausgesprochen; in dem unvollständigen Beweis, den ihm Prof. *Lüroth* mitgetheilt hat, erklärt er aber stillschweigend angenommen zu haben, dass es sich um eine endlich begrenzte Menge handelt, die, wie uns scheint, nicht gut definirt ist Nach uns ist die Eigenschaft, dass einem Element nicht kein Element eindeutig entsprechen kann, analog derjenigen, die *Schröder* als Axiom annimmt, in dem eindeutigen Zusammenhang selbst enthalten (Bem. I, § 42).

G. Cantor unterscheidet zwei Arten von Zahlen: die Cardinalzahl oder Mächtigkeit und die Idealzahl. Die „Cardinalzahl" erhält man nach *Cantor* aus einer Menge von Dingen, wenn man sowohl von den Eigenschaften dieser Dinge als von der Ordnung derselben absieht. Er *nennt* zwei Mengen gleich, wenn sie sich eindeutig entsprechen und ihnen daher dieselbe „Cardinalzahl" entspricht. Die „Idealzahl" dagegen erhält man, wenn man von den Eigenschaften der Dinge, aber nicht von der Ordnung, in welcher sie gegeben sind oder betrachtet werden, absieht. Die so definirte „Cardinalzahl" geht freilich nicht aus der logischen Function des Zählens hervor; denn wenn man zählt, zählt man in einer gegebenen Ordnung und hat dann nachzusehen, ob man bei Aenderung der Ordnung des Zählens dieselbe Zahl erhält.

Statt zu sagen, zwei Mengen *hiessen gleich*, wenn sie sich bei Abstraction von den Eigenschaften der Dinge, welche sie zusammensetzen, und ihrer Ordnung eindeutig und in derselben oder nicht derselben Ordnung entsprechen, kann man beweisen, dass, wenn zwei Mengen identisch sind (Def. VI, § 8 und Def. III, § 9), sie sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen und, wenn eine in der andern enthalten ist, diese in der ersten enthalten ist. Wenn man ferner nur den eindeutigen Zusammenhang allein zwischen einer Menge und ihrer geistigen Darstellung (§ 4) in Betracht zieht, kann man auch beweisen, dass zwei Mengen, wenn sie sich eindeutig entsprechen, gleich sind, ohne in Betracht zu ziehen, dass die eine ein Theil oder nicht ein Theil der andern ist.

ändert man diese Ordnung, so kann man die beiden Gruppen sich eindeutig entsprechen lassen (e). Folglich u. s. w.

i'. *Wenn zwei natürliche Zahlen gleich sind, so entsprechen sich die Einheiten derselben eindeutig* (i und Def. II, § 46).

l. *Zwei natürliche Gruppen, die sich eindeutig entsprechen, stellen dieselbe Zahl dar* (g und h).

l'. *Wenn die Einheiten zweier Zahlen a und b sich eindeutig entsprechen, so sind die beiden Zahlen gleich.*

m. *Die Summe der Zahl b und der Zahl a ändert sich nicht, wenn man die Ordnung der beiden Zahlen vertauscht (Commutationsgesetz).*

Bew. 1. Die Zahl a werde durch die Gruppe $(A) \equiv ABC \dots M$, die Zahl b durch die Gruppe $(A') \equiv A'B'C' \dots N'$ dargestellt; die Summe $a + b$ wird dann durch die Gruppe $[(A)(A')] \equiv ABC \dots MA'B'C' \dots N'$ dargestellt (Bem. I, § 47). Man habe eine andere Gruppe (B), die eindeutig der Gruppe $[(A)(A')]$ entspreche. Wenn man den ersten b Elementen der zweiten die letzten b Elemente der ersten entsprechen lässt, so kann man die übrigbleibenden Elemente sich eindeutig entsprechen lassen (d') und müssen desshalb deren a in beiden Gruppen sein (l). Die beiden Gruppen (B) und $[(A)(A')]$ stellen aber dieselbe Zahl dar (l); daher

$$a + b = b + a .$$

Bew. 2. Die Gruppe $[(A')(A)]$ hat alle Elemente der Gruppe $[(A)(A')]$, wie diese letztere alle Elemente der ersteren enthält, weil jedes Element der ersten oder der zweiten zu (A) oder (A') gehört (II, § 29). Die beiden Gruppen unterscheiden sich also nur durch ihre Ordnung, entsprechen sich daher eindeutig (b) und stellen dieselbe Zahl dar (l).

Bew. 3. Nehmen wir vorerst an, mit einem Element A sei eine Gruppe $A_1 A_2 A_3 \dots A_{m+1}$ von $m + 1$ Elementen vereinigt. Lassen wir das Element A dem Element A_1, A_1 dem Element A_2 u. s. w., das Element A_{m-1} dem Element A_m, A_m dem A_{m+1} entsprechen, das heisst, jedes Element seinem consecutiven auf es in der Reihe $AA_1 A_2 \dots A_{m+1}$ folgenden. Die Gruppen $AA_1 A_2 \dots A_m$, $A_1 A_2 \dots A_{m+1}$ entsprechen sich dann eindeutig und in derselben Ordnung (a, § 42) und entsprechen daher derselben Zahl (l), das heisst

$$1 + m = m + 1 . \tag{1}$$

Nehmen wir an, der Satz sei richtig für m und n

$$m + n = n + m . \tag{2}$$

Man erhält (d, f, § 47)

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 = (n + m) + 1 = n + (m + 1) = (n + 1) + m .$$

Der Satz gilt aber für $n = 1$ (1), daher gilt der Satz allgemein (c', § 46; l, § 39).[1]

---

1) Wie man leicht einsieht, gilt das Commutationsgesetz auch für eine beliebige gegebene Anzahl von Summanden (l, § 39).

3.

Begriff einer Zahl, die grösser oder kleiner als eine andre ist. — Andre Eigenschaften der Zahlen.

§ 49. *Def. I.* Wenn zwei natürliche Gruppen $ABCD\ldots N$, $A'B'C'D'\ldots N'$ nicht dieselbe Anzahl haben, so gibt es bei dem eindeutigen Zusammenhang ihrer consecutiven Elemente, wenn man mit den ersten beginnt, also von A und A', B und B', C und C' u. s. w., Elemente der einen z. B. der ersten, denen keine Elemente der zweiten entsprechen, weil die Gruppen sonst dieselbe Zahl darstellen würden (h, § 48). Man sagt daher, die erste enthalte *mehr* Elemente als die zweite und die zweite *weniger* Elemente als die erste, oder auch die erste sei *grösser* als die zweite und die zweite *kleiner* als die erste.

Def. II. Die Zahlen a und b, die den beiden Gruppen entsprechen, heissen, da sie nicht gleich sind, *ungleich* und die der ersten entsprechende heisst *grösser* als die der zweiten entsprechende und die letzte *kleiner* als die erste. Man schreibt

$$a > b\,,\ b < a\,.$$

a. *Jede natürliche Gruppe und jede natürliche Zahl ist grösser als jeder ihrer Theile* (Def. I, II; f und h, § 48).

§ 50. a. *Wenn man dadurch, dass man zu gegebenen Zahlen gleiche Zahlen addirt, gleiche Zahlen erhält, so sind die gegebenen Zahlen gleich.*

Es seien (A) und (B) die den gegebenen Zahlen a und b entsprechenden Gruppen und man vereinige mit ihnen bezüglich die Gruppen (A') und (B'), welche die beiden gleichen Zahlen a' und b', die zu a und b addirt werden, darstellen. Man erhält die Gruppen $[(A)(A')]$, $[(B)(B')]$, die man, weil sie nach der Voraussetzung gleiche Zahlen darstellen, sich eindeutig einander entsprechen lassen kann (i, § 48). Aus demselben Grund aber entsprechen sich auch die Gruppen (A') und (B') eindeutig; es entsprechen sich daher auch die übrig bleibenden Gruppen (A) und (B) eindeutig (d, § 48). Folglich sind ihre entsprechenden Zahlen a und b gleich (h, § 48 und b, § 47).

a'. *Wenn man dadurch, dass man zu gleichen Zahlen gegebene Zahlen addirt, gleiche Zahlen erhält, so sind die gegebenen Zahlen gleich.*

Sind a und a' gleiche Zahlen, b und b' die hinzugefügten Zahlen, c und c' die Resultate, so ist

$$a + b = c\,,\ a' + b' = c'\,,$$

aber es ist auch

$$b + a = c\,,\ b' + a' = c'\,, \qquad \text{(m, § 48)}$$

womit man wieder auf den Satz a zurück kommt.

b. *Wenn* $a = b\,,\ b > c\,,$ *so ist* $a > c$

„ $a = b\,,\ b < c\,,$ „ „ $a < c\,.$

c. *Wenn* $a > b\,,\ b > c\,,$ *so ist* $a > c$

„ $a < b\,,\ b < c\,,$ „ „ $a < c\,.$

d. ***Wenn*** $a > a'$, $b > b'$, *so ist* $a + b > a + b'$

$$> a' + b'$$
$$> a' + b$$

und wenn $a < a'$, $b < b'$, „ „ $a + b < a + b'$

$$< a' + b'$$
$$< a' + b.$$

Um zu beweisen, dass $a + b > a' + b'$ ist, wenn $a > a'$ und $b > b'$ ist, verfährt man auf folgende Art. $(A) \equiv A_1 A_2 \ldots A_a$, $(B) \equiv B_1 B_2 \ldots B_b$ seien die Gruppen, welche die Zahlen a und b darstellen; die Zahl $a + b$ wird durch die Gruppe $[(A)(B)] \equiv A_1 A_2 \ldots A_a B_1 B_2 \ldots B_b$ dargestellt (Bem. I, V, e, § 47). $(A') = A_1' A_2' \ldots A_a'$, $(B') = B_1' B_2' \ldots B_b'$ seien die die Zahlen a' und b' darstellenden Gruppen, die Zahl $a' + b'$ wird dann durch die Gruppe $[(A')(B')] \equiv A_1' A_2' \ldots A_a' B_1' B_2' \ldots B_b'$ dargestellt. Nach der Voraussetzung ist aber $a > a'$, $b > b'$ und wenn wir die ersten a' Elemente der Gruppe (A) und die ersten b' Elemente der Gruppe (B) betrachten, so bleiben in der einen wie in der andern noch andre Elemente übrig (Def. I und II, § 49), welche nicht in eindeutigem Zusammenhang mit entsprechenden Elementen in (A'), (B') stehen und desshalb gibt es in der Gruppe $[(A)(B)]$ Elemente, welche bei eindeutigem Zusammenhang mit $[(A')(B')]$ in dieser Gruppe keine entsprechenden Elemente haben (II, § 29). Daher ist $a + b > a' + b'$ (Def. I und II, § 49).

Analog werden die übrigen Beziehungen b, c, d bewiesen.

e. ***Wenn*** $a = a'$, $b > b'$, *so ist* $a + b > a' + b'$

„ $a > a'$, $b = b'$, „ „ $a + b > a' + b'$

oder:

Wenn man zu gleichen (ungleichen) Zahlen ungleiche (gleiche) Zahlen addirt, so erhält man ungleiche Zahlen.

Dieser Satz wird auf ähnliche Art, wie der vorige bewiesen.

f. *Die Zahlen der Reihe* (I) *sind sämmtlich ungleich. Keine von ihnen ist grösser als die andern.*

Denn betrachtet man eine bestimmte Zahl a der Reihe der natürlichen Zahlen (c, Def. III, § 46), so sind die Zahlen, die a vorausgehen, kleiner als a, weil die diesen Zahlen entsprechenden Gruppen weniger Elemente enthalten als die dem a entsprechende Gruppe (c', § 46; Def. I und II, § 49). Dagegen sind die auf a folgenden Zahlen grösser. Die Zahlen von (I) bilden so zwei Zahlenclassen in Bezug auf a, kleinere und grössere als a, a ausgenommen.

Die letztere Eigenschaft hat ihren Grund in der Unbegrenztheit der Reihe (I) (Def. II, § 32 und Def. I, II, c', § 46).

g. ***Wenn*** $a > a'$ *ist, so gibt es eine einzige Zahl* x *der Art, dass* $a' + x = a$ *ist.*[1])

---

1) Es ist nicht nöthig, die Sätze dieses Paragraphen, besonders e und g sowie a und d, § 47 mit besonderen Axiomen oder Definitionen der Zeichen zu geben. Sie finden ihre Begründung in dem Princip des eindeutigen Zusammenhangs zwischen den darstellenden Gruppen.

Die Zahlen a und a' müssen in (I) zwei bestimmte Stellen einnehmen (Def. I, § 20) und a' muss a vorangehen (f; c, § 46). Die Zahl a erhält man aus a', indem man mit dieser letzteren Zahl andre Einheiten vereinigt, das heisst, die Einheiten einer andern Zahl (c', § 46 und g, § 39). Es kann keine zwei Zahlen x und x' ($x' \gtrless x$) geben, welche diese Eigenschaft besitzen. Denn es muss

$$a' + x' = a\,,\quad a' + x = a$$

sein, oder auch:

$$x' + a' = a\,,\quad x + a' = a \qquad \text{(m, § 48)}$$

und es ist daher

$$x = x'. \qquad \text{(a)}$$

Bem. Wenn wir die Summe $a + b$ mit c bezeichnen, so ist

$$(1) \qquad a + b = c\,,$$

worin c eine gegebene Zahl der Reihe (I) ist. Die Gleichung (1) lässt sich von zwei Gesichtspunkten betrachten: entweder wird c benutzt, um die neue Zahl $a + b$ zu bezeichnen, was bisher noch nicht geschehen ist, wie wir z. B. mit dem Zeichen 2 die Summe $1 + 1$, mit 3 die Summe $1 + 1 + 1$ u. s. w. bezeichnet haben; oder c ist eine schon bekannte als Symbol einer andern Operation z. B. einer andern Summe $a' + b'$ benutzte Zahl und alsdann muss man die Richtigkeit der Gleichung (1) beweisen.

Beisp. In der Gleichung

$$11 + 1 = 12$$

bezeichnet 12 die aus der Addition von 1 zur Zahl 11 sich ergebende Zahl und dabei ist nichts zu beweisen. *Dagegen ist es nöthig, zu beweisen,* dass die Gleichung

$$7 + 5 = 12$$

besteht, die eine unter den Zahlen 7, 5 und 12 bestehende Eigenschaft angibt. Zu dem Zweck genügt es die drei Zahlen in ihre Einheiten zu zerlegen und zu bedenken, dass die Einheiten der Zahl $11 + 1$ eine nach der andern denen der Zahl $7 + 5$ entsprechen (i, § 48). Denn $(A) = ABCDEFG$ sei die der Zahl 7 und $(A') = A'B'C'D'E'$ die der Zahl 5 entsprechende Gruppe. Das erste Element von (A') mit (A) vereinigt, gibt die der Zahl

$$7 + 1 = 8$$

entsprechende Gruppe.

Von (A') bleibt eine Gruppe $(A'') = B'C'D'E'$ übrig, die aus den von (A') übrig bleibenden Elementen gebildet ist. Das erste Element von (A'') mit der Gruppe (A) vereinigt, liefert die Zahl

$$8 + 1 = 9\,.$$

Die von der Gruppe (A'') übrig bleibenden Elemente bilden eine Gruppe

$$(A''') = C'D'E',$$

deren erstes Element C' mit der Gruppe

$$((A)A')B' = (A)(A'B') \quad \text{(a, § 40)}$$

vereinigt, die Zahl

$$9 + 1 = 10$$

gibt.

Vereinigt man dann das vorletzte Element D' von (A') mit der Gruppe $(A)(A'B'C')$, so erhält man die Zahl $10 + 1 = 11$. Indem man endlich das letzte Element E' von (A') mit der Gruppe $(A)(A'B'C'D')$ vereinigt, erhält man die Zahl

$$11 + 1 = 12\,,$$

die der Gruppe $[(A)(A')] = ABCDEFGA'B'C'D'E'$ entspricht, und diese Gruppe stellt auch die Zahl $7 + 5$ dar (Bem. I, e, § 47). Es ist daher

$$12 = 7 + 5\,.$$

Der Beweis dieses Satzes für beliebige gegebene Zahlen von (I) beruht offenbar auf der Regel, welche man bei der Bezeichnung der Zahlen oder der *Numerirung* befolgt. Von den hierzu erfundenen Systemen ist das Decimalsystem das üblichste.

Man schreibt in diesem System z. B.

$$1x = 10 + x,$$

worin x successive die Zeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vertritt. Die auf 19 folgende Zahl bezeichnet man mit 20 und erhält sie aus der Vereinigung zweier Gruppen von 10 Elementen *(Zehner)*.

So ist

$$2x = 20 + x \quad (x = 1, 2, 3, \ldots 9).$$

Analog wird eine Zahl, welche zwischen derjenigen Zahl, die einer aus zehn Gruppen von zehn Elementen (Hunderte) zusammengesetzten Gruppe entspricht und der aus zwei Hunderten gebildeten Zahl liegt, mit

$$1xy = 100 + xy$$

bezeichnet, worin xy eine in der Reihe (I) der 100 vorangehende Zahl ist.

Um zu beweisen, dass

$$41 + 53 = 94$$

ist, beachte man, dass

$$41 = 40 + 1, \; 53 = 50 + 3$$

und daher

$$41 + 53 = 40 + 50 + 4 = 90 + 4 = 94$$

ist. [1])

4.

Subtraction. — Multiplication. — Division. — Die Zahl Null.

§ 51. *Die Subtraction.*

Def. I. Wenn

$$a + b = c \tag{1}$$

ist, so heisst die erste Zahl a die *Differenz* oder der *Unterschied* der zweiten b von der dritten c und die Operation, mittelst welcher die Zahl a aus den Zahlen c und b bestimmt wird, heisst *Subtraction*.

---

1) Bei dieser Herleitung der Zahl weichen wir z. B. von *Helmholtz, Kronecker* und *Dedekind* ab, welche (a. a. O.) zuerst von der Zahl als blossem Zeichen (Zahl) und dann von der Zahl als „Anzahl" das heisst der Anzahl der Gegenstände einer Gruppe handeln. Sie operiren mit diesen Zeichen, deren Gesetze sie mit Hilfe besonderer Definitionen herleiten. Wir erkennen den Scharfsinn und den hohen Werth der Arbeiten dieser drei hervorragenden Mathematiker an, möchten uns aber doch die folgende Bemerkung erlauben. Sie gebrauchen, noch ehe sie von der „Anzahl" sprechen, fortwährend das Wort *ein* (z. B. *ein* Gegenstand A), welches einem bestimmten Grundbegriff entspricht und gerade die Anzahl des Gegenstandes A gibt (Def. I, II, § 45). Die Anzahl *eins* des Gegenstandes A ist nach uns nicht ein Zeichen oder ein beliebig gewählter Name, um die erste Stelle oder den ersten Gegenstand einer Reihe (§ 16, § 20) anzugeben; wir verstehen vielmehr unter dem Wort *eins* den damit verbundenen Begriff. In diesem Begriff liegt nicht die Bezeichnung des Gegenstandes z. B. Mensch, Baum u. s. w., sondern das Urtheil unsres Geistes, dass es nämlich ein Gegenstand ist und nicht mehrere (§ 2). Die Addition verliert bei *Dedekind* ihre Bedeutung der wiederholten successiven Vereinigung der Einheit mit der gegebenen Einheit (a. a. O. S. 44), sie ist eine Art der Bezeichnung, mittelst welcher man aus dem Zeichen eines Elementes einer Reihe (die nach uns unbegrenzt von der ersten Art ist) mit Hilfe eleganter Theoreme die Zeichen der andern folgenden Elemente erhält. Noch mehr weichen wir von *Peano* ab (Arithmetices principia, nova methodo exposita. Turin 1889). Abgesehen von dem System von Zeichen, das er einführt, um die einfachen Theile einer Gruppe mathematischer Eigenschaften oder Beweise trennen und erforschen zu können — während es doch möglich ist diese Eigenschaften und Beweise mit den bis jetzt bekannten Zeichen zu geben — betrachtet er mehr als die Andern die Arithmetik als ein System von, gewissen Definitionen unterworfenen, Zeichen, welche für den, welcher die Arithmetik nicht kennt, beliebig ausgewählt sind (siehe Anhang).

Bem. I. Die Zahl a erhält man offenbar, wenn man die Zahl b von der Zahl c wegnimmt (Def. I, § 7; Def. III, Bem. I und II, § 31).

Def. II. Die Zahl c heisst der Minuend, b der Subtrahend und a heisst auch der Rest der Subtraction.

Man kann auch sagen:

Def. I'. Die Subtraction einer Zahl b von einer andern Zahl c, die grösser als b ist, heisst eine Zahl a von der Art finden, dass sie, zu b addirt, c gibt.

a. *Das Subtrahiren ist die umgekehrte Operation der Addition* (§ 12; Def. I).

Bez. I. Die Subtraction des b von c hat a zum Resultat und wird so bezeichnet:

(2) $$a = c - b,$$

wobei — das Zeichen dieser Operation ist.

b. *Der Subtrahend ist der Rest der Subtraction des ursprünglichen Restes von dem Minuend.*

Denn man erhält aus (2) die Gleichung (1) und (1) gibt $b + a = c$ (m, § 48), woraus sich ergibt:

(3) $$b = c - a.$$

Aus der Definition selbst geht hervor

c. *Für die Subtraction gilt das Commutationsgesetz nicht.*

Es ist nämlich nicht

$$b - c = a,$$

weil $c > b$ ist und man nach dem bisherigen Begriff der Zahl keine grössere Zahl von einer kleineren wegnehmen kann.

d. *Die Subtraction ist eine eindeutige Operation.*

Das heisst die Subtraction einer Zahl b von einer Zahl c geschieht auf eine einzige Art und liefert ein einziges Resultat (Def. II, § 11).

Denn es sei

$$c - b = a, \quad c - b = a',$$

so folgt aus der Definition selbst

$$c = a + b, \quad c = a' + b,$$

das heisst: a' ist gleich a (a, § 50).

e. *Wenn man von gleichen Zahlen gleiche Zahlen wegnimmt, so erhält man gleiche Zahlen.*

Wenn $b = b'$, $c = c'$, $c > b$ ist, so ist

$$c - b = c' - b'.$$

Setzt man nämlich $c - b = a$, $c' - b' = a'$, so erhält man

$$a + b = c, \quad a' + b' = c', \qquad \text{(Def. I und Bez.)}$$

es ist aber $b = b'$, $c = c'$, folglich ist $a = a'$ (a, § 50).

f. *Wenn $a' < a$, so gibt es eine einzige Zahl x der Art, dass $a - x = a'$ ist.*

Das heisst $a' + x = a$. Für eine andre Zahl x' der Art, dass $a - x' = a'$, wäre $a' + x' = a$ und mithin $x' = x$ (a', § 50).

g. *Wenn man von zwei gleichen Zahlen ungleiche Zahlen abzieht, so erhält man ungleiche Zahlen.*

Es sei $a - x = b$, $a - x' = b'$, $x' \lessgtr x$,
man kat $b + x = a$, $b' + x' = a$ (Def. I und Bez.).

Es kann nicht $b = b'$ sein, sonst wäre x dem x' gegen die Voraussetzung gleich. Daher u. s. w.

h. *Von einer Gruppe von a Elementen zuerst b Elemente und dann c von der übrig bleibenden Gruppe wegnehmen* ($b < a$, $c < a - b$) *ist gleichwerthig mit* ($c + b$) *Elemente von der Gruppe a wegnehmen.*

Es seien $C'C''\ldots B'B''$ die letzten $c + b$ Elemente der Gruppe (X) von a Elementen und $A'A''\ldots$ die Elemente, welche ihnen in dieser Gruppe vorangehen. Bezeichnet man die drei Gruppen von (X) mit (A), (B), (C), so ist:

$$[(A)(C)](B) = (A)[(C)(B)] = (X). \qquad \text{(a, § 40)}$$

Daher ist: die letzten b Elemente (B) wegnehmen und von der übrig bleibenden Gruppe $[(A)(C)]$ die letzten c Elemente (C) wegnehmen, gleichbedeutend mit: die letzten $c + b$ Elemente $[(C)(B)]$ von der Gruppe (X) wegnehmen, weil das Resultat bei beiden Operationen die Gruppe (A) ist (d).

h'. $a - (c + b) = (a - b) - c = (a - c) - b$ (h; m, § 48).

Bez. II. Die Zahl $(a - b) - c$ bezeichnen wir auch mit dem Symbol $a - b - c$.

h''. $a - b - c = a - c - b$ (b, § 9; Bez.).

Bem. II. Die Eigenschaft $(a - b) - c = a - (b + c)$ kann man das Associationsgesetz der Subtraction nennen.

i. $(a - b) + (a' - b') = (a + a') - (b + b')$
$(a > b,\ a' > b')$.

Denn wenn man eine aus zwei Untergruppen a und a' zusammengesetzte Gruppe von Elementen hat, so ist es dasselbe, ob man von ihnen bezüglich die Untergruppen b und b' wegnimmt oder ob man die Untergruppe $b + b'$ von der gegebenen Gruppe $a + a'$ wegnimmt, weil man die beiden resultirenden Gruppen sich eindeutig einander entsprechen lassen kann (d', 1, § 48).

§ 52. *Die Multiplication.*

Bem. I. Ist eine Gruppe von a Elementen gegeben, so können wir die Gruppe selbst als neues Element betrachten. Die neue Einheit ist daher die der Gruppe entsprechende Anzahl (Def. I, § 45). Wie wir durch Wiederholung der Einheit und Vereinigung derselben mit der schon gegebenen Einheit die Zahlen der Reihe (*I*) erhalten haben, so erhalten wir durch Wiederholung der neuen Einheit eine andre Reihe von Zahlen. Offenbar ist aber *jede dieser Zahlen eine Zahl der Reihe* (*I*).

Denn betrachten wir die Zahl b in Bezug auf die neue Einheit a, so ist sie nichts Anderes, als die Summe, die aus der b mal wiederholten Zahl a gebildet wird, oder, wie man auch sagt, der *soviel mal* wiederholten Zahl a, *als* Einheiten in b sind.

Def. I. Die Operation, mittelst welcher die Zahl a soviel mal zusammengezählt wird als Einheiten in einer andern Zahl b sind, heisst *Multiplication.*

Bem. II. Die Multiplication ist daher nur eine abgekürzte Addition.

Def. II. Das Resultat der Multiplication heisst *Product* und wird mit $a \times b$ bezeichnet. a und b sind die *Factoren*, a der *Multiplicand*, b der *Multiplicator*, während $\times$ das Zeichen dieser Operation ist. Das Product wird auch mit $a \, . \, b$ oder ab bezeichnet.

a. *Die Multiplication der Zahl a durch die Zahl b ist eine eindeutige Operation.*

b. *Das Product ändert sich nicht, wenn die Ordnung der Factoren vertauscht wird.*

c. *Wenn* $a \times b = c$, *so gibt es keine andre Zahl* $b' \gtrless b$ *derart, dass* $a \times b' = c$ *ist.*

c'. *Wenn die Producte der beiden Zahlen a und b mit einer dritten oder mit gleichen Zahlen gleich sind, so sind a und b gleich.*

d. *Für die Multiplication gilt das Associationsgesetz, das ist* $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Bez. I. Das Product $(a \times b) \times c$ wird desshalb auch mit dem Symbol $a \times b \times c$ bezeichnet.

Diese, wie andre Eigenschaften der Multiplication, beruhen auf den analogen Sätzen der Addition.

e. $(a' \pm a'')b = a'b \pm a''b$ *(Distributionsgesetz).*

Wenn

$$a' + a'' = a,$$

so ist offenbar (m und Anm. zu Bew. 3, § 48)

$$(a' + a'')b = (a' + a'')_1 + (a' + a'')_2 + \cdots + (a' + a'')_b$$
$$= a_1' + a_2' + \cdots a_b' + a_1'' + a_2'' + \cdots a_b''$$

und desshalb

$$= a'b + a''b.$$

Für das Zeichen — reicht es aus, die Beziehung i, § 51 anzuwenden und die Sätze d, f, § 47 zu beachten.

Def. III. Die Zahl $a \, . \, b$ heisst *Vielfaches* von a in Bezug auf die Zahl b und ba, *Vielfaches* von b in Bezug auf die Zahl a; a und b heissen die *Factoren* von ab oder ba.

Bez. II. Das Product von a mit a wird auch a^2 geschrieben, das Product von a^2 mit a wird a^3 und im Allgemeinen wird das Product von a^{n-1} mit a durch a^n bezeichnet.

Def. IV. Die Zahl a^n heisste *die* n^{te} *Potenz von a, n der Exponent der Potenz und a die Basis.*

§ 53. *Die Division.*

Def. I. Die umgekehrte Operation der Bildung einer Gruppe aus mehreren gleichen Gruppen ist diejenige der Zerlegung einer Gruppe in gleiche Untergruppen, das heisst, in Untergruppen von einer gleichen Anzahl von Elementen, vorausgesetzt dass es möglich ist (§§ 12, 31). Sie führt uns zu der umgekehrten Operation der Multiplication und heisst *Division*. Das heisst, wenn das Product $ab = c$ und der Factor b gegeben sind, so ist die Division diejenige Operation, mittelst welcher der andre Factor a bestimmt wird.

Def. II. Das Resultat wird *Quotient* genannt, c der *Divident*, b der *Divisor* und man schreibt

$$c : b = a,$$

wobei : das Zeichen der Division ist.

Def. I'. Man kann auch sagen: Eine Zahl c durch eine andre b dividiren heisst eine Zahl a derart finden, dass das Product derselben durch die Zahl b gleich c ist oder die Zahl, die angibt, wie viel mal b in c enthalten ist.

Daraus geht hervor, dass c ein Vielfaches von b in Bezug auf die Zahl a sein muss.

a. *Die Division ist eine eindeutige Operation.*

Nehmen wir an, es wäre

$$a = c : b, \ a' = c : b,$$

so muss

$$a \times b = c, \ a' \times b = c \qquad \text{(Def. I)}$$

sein oder

$$b \times a = c, \ b \times a' = c, \qquad \text{(b, § 52)}$$

woraus sich ergibt

$$a = a'. \qquad (c, \text{ § 52})$$

b. *Gleiche Zahlen durch gleiche Zahlen dividirt geben gleiche Zahlen.*

Denn wenn $a : b = c$, $a' : b' = c'$, $a = a'$, $b = b'$, so ist $cb = c'b'$, woraus $c = c'$ folgt (c', § 52).

c. *Für die Division gilt das Commutationsgesetz nicht* (Def. I).

d. *Wenn zwei Zahlen durch gleiche Zahlen dividirt gleiche Quotienten geben, so sind die beiden Zahlen gleich.*

Das heisst, wenn $a : b = a' : b'$ und $b = b'$, so ist

$$a = a'.$$

Denn man setze $a : b = c$, $a' : b' = c$ (Def. I), woraus $a = b \cdot c$, $a' = b' \cdot c$; da aber $b = b'$ ist, so ist $a = a'$ (d, § 47 und Def. II, § 52).

e. $a \cdot b : b = a$.

Dann setzt man $a \cdot b : b = c$, so ist $a \cdot b = c \cdot b$ (Def. I), woraus $a = c$ (c', § 52) folgt.

f. $(a \cdot c) : (b \cdot c) = a : b$.

Denn setzt man $(a \cdot c) : (b \cdot c) = d$, so ist $a \cdot c = d \cdot (b \cdot c) = (b \cdot d) \cdot c$ (b, d, § 52), woraus

$$a = d \cdot b \qquad \text{(b, c', § 52)}$$

folgt und daher $a : b = d$ (Def. I), mithin auch $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ (d, § 47 und Def. II, § 52).

g. $(a : c) : (b : c) = a : b$.

Man setze $d \cdot c = a$, $e \cdot c = b$ (Def. I), so hat man $(d \cdot e) : (e \cdot c) = a : b$ (b) und auch $(d \cdot c) : (e \cdot c) = d : e$ (f); es ist aber $d = a : c$, $e = b : c$ (Def. I), also:

$$(a : c) : (b : c) = a : b. \qquad \text{(b)}$$

h. *Für die Division gilt das Associationsgesetz nicht*

Es ist nämlich nicht $a:(b:c)=(a:b):c$, weil $a:(b:c)=a\cdot c:b$ und $(a:b):c=a:(c\cdot b)$ ist (f), im Allgemeinen aber nicht $(a\cdot c):b=a:(c\cdot b)$ ist.

i. *Für die Division gilt das Distributionsgesetz*

$$a:c\pm b:c=(a\pm b):c.$$

Denn es ist $(a:c\pm b:c)c=a\pm b$ (e, § 52; Def. I). Indem man die Glieder der Gleichung durch c dividirt erhält man mithin:

$$(a\pm b):c=a:c\pm b:c. \qquad \text{(h; d, § 8)}$$

Bem. Es wird hier vorausgesetzt, dass a und b durch c theilbar sind (Def. I).

§ 54. *Die Zahl Null.*

a. *Die Zahlen der Reihe (I) kann man durch Subtraction einer Zahl von einer andern erhalten.*

Denn wenn a eine beliebige Zahl von (I) ist und man vereinigt mit a eine andre Zahl b, so ist $a+b=c$, woraus $a=c-b$ folgt.

Bem. I. Hier bietet sich ein besonderer, bemerkenswerther Fall, der uns dazu führt, eine neue Zahl einzuführen. Wenn man von einer Zahl eine andre ihr gleiche Zahl wegnimmt, das heisst wenn man von ihr abstrahirt (§ 7), so erhält man keine der Zahlen der Reihe (I) und die entsprechende Gruppe ist eine Gruppe Null oder eine Gruppe mit keinem Element (Def. I, § 31). Da aber jede Subtraction eine Zahl von (I) liefert und wir in Bezug auf diese Operation, oder auch in Bezug auf den Zusammenhang mit den Gruppen keine Ausnahme machen wollen, *so wollen wir übereinkommen zu sagen, die Subtraction $a-a$ gäbe eine neue Zahl.*

Def. I. Die Zahl $a-a$ (Bem. I) heisst die Zahl Null, sie wird mit 0 bezeichnet, also:

$$a-a=0. \qquad \text{(b, § 9)}$$

b. $a-a=b-b=0$, *worin a und b beliebige Zahlen von (I) sind.*

Denn wenn man zu der Gruppe Null, die man erhält, wenn man b Elemente von einer Gruppe von b Elementen hinwegnimmt, a Elemente hinzufügt, so bekommt man eine Gruppe von a Elementen, weil sonst die Gruppe Null selbst Elemente der Voraussetzung zuwider enthalten müsste (II, § 29). Man erhält daher für die entsprechenden Zahlen

$$b-b+a=a.$$

Nimmt man aber von der resultirenden Gruppe die Gruppe von a Elementen hinweg, so erhält man die ursprüngliche Gruppe, da die Operation des Wegnehmens eindeutig ist (a, § 11); daher ist

$$b-b=a-a.$$

Bem. II. Wir bemerken, dass die Bedeutung des Zeichens 0 durchaus verschieden ist von derjenigen, die 0 hat, wenn es in dem Symbol einer Zahl auftritt, wie z. B. in der Zahl 10. In diesem Fall folgt es auf die Einheit der einfacheren Bezeichnung oder Numerirung wegen.

c. *Die Zahl Null ist kleiner als alle Zahlen der Reihe (I).*

Denn sie wird durch eine Gruppe dargestellt, die keine Elemente hat (Def. I und II, § 49).

Bem. III. Will man alle Zahlen in eine neue Reihe ordnen und dabei die Eigenschaft von (I) bestehen lassen, dass die einer Zahl a voranstehenden Zahlen kleiner sind als a,

die folgenden grösser (c', § 46; f, § 50), so muss die Zahl 0 die erste Stelle einnehmen und man erhält die Reihe (I')

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10,\ \ldots,\ 20,\ \ldots,\ 100,\ \ldots,\ 200,\ \ldots$$

d. $a + 0 = a,\ 0 + a = a.$

Denn man kann die beiden Beziehungen schreiben:

$$a + (a - a) = a,\ (a - a) + a = a.$$

Die linke Seite der ersten Gleichung sagt uns auf Gruppen bezogen, dass man zur Gruppe a kein Element hinzugefügt hat oder dass man von der Gruppe von a Elementen kein Element weggenommen hat; in dem einen wie dem andern Fall ist daher das Ergebniss eine Gruppe von a Elementen.

Die linke Seite der zweiten Gleichung sagt uns dagegen, dass von der Gruppe a dieselbe Gruppe weggenommen wurde, was kein Element zum Resultat hat (Def. I, § 31), und dass man diesem Resultat eine Gruppe von a Elementen zugefügt hat. Auch in diesem Fall ist das Endergebniss eine Gruppe von a Elementen (II, § 29).

e. $0 \times a = 0 \times b = 0.$

Denn wiederholt man eine Gruppe, die keine Elemente hat, so oft, als Einheiten in der Zahl a enthalten sind, so erhält man immer eine Gruppe ohne Elemente (§ 15; Bem. I, § 52; II, § 29).

e'. $a \times 0 = b \times 0 = 0.$

Denn eine Gruppe a kein mal wiederholen oder setzen bedeutet, dass man sie überhaupt nicht in Betracht zieht (§§ 7, 31 und Def. I, § 15).

Bem. IV. Wenn man eine Gruppe Null keinmal betrachtet, was so viel heisst, als dass man sie nicht in Betracht zieht, so erhält man *in diesem Sinn* kein Resultat (Def. I, § 31) und es ist:

$$0 \times 0 = 0.$$

f. $0 : a = 0 : b = 0.$

Es geht dies aus der Definition der Division (§ 53) und aus e hervor.

g. $0 : 0 = a,\ 0 : 0 = b,\ 0 : 0 = 0$ *oder in Worten: Die Division von 0 durch 0 ist keine eindeutige Operation.*[1])

Es geht dies auf ähnliche Art aus e' und der Bemerkung IV hervor.

Der Satz e' genügt zum Beweis des folgenden Theorems:

h. *Wenn man mit gegebenen Formen eine gegebene Operation ausführt und dabei gleiche Resultate erhält, so geht daraus allein noch nicht hervor, dass die beiden Formen gleich sind, wenn man in den Resultaten von den gegebenen Formen absieht.*

Bem. IV. Wir verbreiten uns nicht weiter über die Operationen mit den Zahlen der Reihe (I), weil wir in den Fundamenten der Geometrie, unserm Hauptziel, nur wenig Gebrauch davon machen werden und überdies die hier entwickelten Eigenschaften die Grundeigenschaften dieser Zahlen sind. Mit den Zahlen, die wir in der Folge einführen, werden wir es ebenso machen.

---

1) Man beachte, dass g mit den Eigenschaften b, c, e des § 8 nicht im Widerspruch steht, weil hier $0 : 0$ ein Zeichen ist, das nicht eine einzige Sache darstellt, vielmehr, wie aus e hervorgeht, verschiedene Zahlen und daher auch Begriffe vorstellt (§ 4).

IV. Kapitel.

Von den Elementensystemen und insbesondre von denjenigen von einer Dimension.

1.

Empirische Betrachtungen über das gradlinige Continuum der Anschauung.[1])

§ 55. Was ist das Continuum? Es ist dies ein Wort, dessen Bedeutung Jeder auch ohne irgend eine mathematische Definition kennt, da wir das Continuum in seiner einfachsten Form als das gemeinsame Merkmal vieler concreter Dinge *anschauen*. Solche Dinge sind, um einige der einfachsten anzuführen, z. B. *die Zeit* und der *Ort*, den in der äussern Umgebung der hier gezeichnete Gegenstand oder ein mit einem Blei beschwerter Faden *einnimmt*, wenn man von seinen physischen Eigenschaften und seiner Dicke (im empirischen Sinn) absieht.[2]) Wollen wir die Eigenthümlichkeiten dieses intuitiven Continuums erfassen, so müssen wir uns nach einer abstracten Definition desselben umsehen, in welcher die Anschauung oder die wahrnehmbare Darstellung nicht mehr als nothwendiger Bestandtheil auftritt. Diese Definition muss vielmehr umgekehrt dazu dienen können, andre Eigenschaften desselben intuitiven Continuums abstract mit voller logischer Schärfe aus ihr herleiten zu können. Dass diese Definition mathematisch abstract gegeben werden kann, werden wir später sehen. Wollen wir auf der andern Seite, dass diese Definition nicht eine reine Formsache sei und der obigen Anschauung entspreche, so muss sie offenbar aus der Untersuchung derselben hervorgehen, auch wenn dann später die abstracte, mit mathematisch möglichen Principien übereinstimmende, Definition dieses Continuum als einen besondern Fall enthalten sollte.

a b c d
A B C D E

Fig 1.

a X X' a'

Fig. 2, a.

a X a'
X'

Fig. 2, b.

Der Gegenstand der Figur 1 heisst *gradlinig*. Untersucht man nun das Continuum, so sieht man, dass man es als eine Zusammensetzung aus einer Reihe consecutiver identischer Theile a, b, c, d, u. s. w., die von links nach rechts angeordnet sind, erhalten kann, und dass dieses innerhalb gewisser Grenzen der Beobachtung richtig ist. Die Theile sind durch die auf den Gegenstand eingezeichneten Striche getrennt und sind ebenfalls continuirlich. Lässt man ferner den Blick über den Gegenstand von links nach rechts hingleiten, so sieht man, dass die Theile a, b, c, d wie auch ab, bc, cd, u. s. w. abc, bcd, u. s. w. von links nach rechts identisch sind und dass diese Eigenthümlichkeiten auch von rechts nach links stattfinden.

1) Um die mathematischen Begriffe festzustellen, können wir sehr wohl auf empirisch erworbene Kenntnisse zurückgreifen, ohne desshalb später in den Definitionen selbst und den Beweisen irgend welchen Gebrauch davon machen zu müssen.

2) Siehe emp. Bem. zu § 1, Theil I.

Es befindet sich ferner zwischen zwei consecutiven Theilen a und b und c der Reihe $abcd$ u. s. w. kein andrer Theil, während z. B. zwischen den Theilen a und c der Theil b liegt. Abstrahirt man von dem Theil b, so ist der gradlinige Gegenstand nicht länger continuirlich. Das, was für die Theile a und b gilt, gilt auch, wie wir uns durch die Beobachtung überzeugen, für zwei beliebige consecutive Theile eines beliebigen Theiles derselben oder in andern Worten: Es gibt *kein* andres Ganze mit denselben Eigenschaften, die der gradlinige Gegenstand hat, dessen Theile zwei consecutive Theile dieses Gegenstandes oder besser des von ihm eingenommenen Ortes trennen (§ 23 und Def. II_1 § 25).

Wir sehen weiter, dass wir sowohl experimentell (das heisst mittelst einer begrenzten natürlichen Reihe (§ 35) von Zerlegungen) als auch abstract (das heisst gemäss jeder mathematisch möglichen Voraussetzung oder Operation, die den Resultaten der Erfahrung nicht widerspricht), zu einem Theil gelangen können, der weiter in Theile nicht zerlegbar *(untheilbar)* ist und aus welchem das Continuum zusammengesetzt ist (wie es für die Zeit ein Augenblick ist).

Die Erfahrung selbst drängt uns dann dazu das Untheilbare auf solche Art zu ermitteln, dass wir praktisch nicht zu ihm kommen können. Denn sie zeigt uns, dass ein in Bezug auf eine Beobachtung als unzerlegbar angesehener Theil, es in Bezug auf andre Beobachtungen nicht ist, die mit genaueren Instrumenten oder unter verschiedenen Bedingungen ausgeführt werden. Nehmen wir aber an, der unzerlegbare Theil existire, so sehen wir, dass wir auch experimentell dazu geführt werden, ihn unbestimmt und damit kleiner als einen beliebigen gegebenen Theil des gradlinigen Gegenstandes zu lassen.

Wir müssen ferner einen gegebenen Theil a des Continuums von den andern Theilen desselben unterscheiden, um ihn unabhängig von letzteren betrachten zu können, und wenn wir von ihm abstrahiren, so können wir den übrig bleibenden Theil bcd u. s. w. in der Ordnung bcd u. s. w., den wir für den Augenblick mit α bezeichnen wollen, nicht so ansehen, als habe er einen Theil mit a gemeinsam. Bleibt der Theil a an seiner Stelle im Continuum, so müssen wir uns, um ihn von dem Theil α unterscheiden zu können, irgend Etwas, ein Zeichen *(Punkt)* denken, das dazu dient die Stelle der Vereinigung beider Theile zu bezeichnen, wobei jedoch die schon oben beobachtete Eigenschaft, dass nämlich zwischen a und α kein Theil eines andern Ganzen in dem angegebenen Sinn liegt, unverändert bleibt. Das Zeichen, welches den Theil a von dem Theil α trennt, ist daher ein Product der Function des Abstrahirens unsres Geistes und der Zerlegung des Continuums in Theile und ist nicht ein Theil des gradlinigen Gegenstandes. Folgt ein Theil α' von α auf α von links nach rechts, so können wir dieselbe Betrachtung zwischen a und α' wiederholen. Von diesem Gesichtspunkt aus müssen wir daher annehmen, dass das Zeichen der Trennung oder Vereinigung zwischen a und α, wenn es auch dem Continuum angehört, doch kein Theil desselben ist. Man kann es so ansehen, als gehöre es beiden Theilen an, wenn man den einen unabhängig von dem andern betrachtet. Versieht man die Trennungszeichen der Theile a und b, b und c, c und d u. s. w.

mit den Buchstaben B, C, D u. s. w. (Fig. 1), so können wir den Theil b mit dem Symbol (BC), den Theil c mit dem Symbol (CD) u. s. w. bezeichnen.

Dies Alles wird durch die folgende Betrachtung unterstützt. Nehmen wir an, der Theil a des gradlinigen Gegenstandes sei z. B. roth, der übrige Theil α weiss bemalt und es sei ferner zwischen dem Weiss und dem Roth keine andre Farbe. Dasjenige, welches das Weisse von dem Rothen trennt, kann keine Farbe haben weder weiss noch roth und kann desshalb kein Theil des Gegenstandes sein, weil nach der Voraussetzung jeder seiner Theile entweder weiss oder roth ist. Dieses Zeichen der Trennung oder Vereinigung zwischen dem Weissen und dem Rothen kann auch so angesehen werden, als gehöre es entweder dem weissen oder dem rothen Theil an, wenn man den einen unabhängig von dem andern betrachtet. Abstrahirt man nun von der Farbe, so kann man annehmen, das Trennungszeichen zwischen den Theilen a und α gehöre dem Gegenstand selbst an.

Ein andres Beispiel. Schneiden wir an der mit X bezeichneten Stelle einen sehr feinen Faden mit einem äusserst scharfen Messer durch, trennen die beiden Theile a und a' (Fig. 2, a) und nehmen wir an, man könne den Faden wieder so zusammensetzen, dass man die Stelle nicht bemerkt, an welcher der Schnitt stattfand (Fig. 2, b), mit andern Worten, als ob kein Theilchen des Fadens verloren ginge. Man bewirkt dies scheinbar, wenn man den wieder zusammengesetzten Faden aus einer gewissen Entfernung ansieht. Betrachtet man nun den Theil a von rechts nach links, wie es der Pfeil über a in Fig. 2, a angibt, so ist das, was man von dem Schnitt sieht, sicherlich kein Theil des Fadens, wie das, was man von einem Körper sieht, nicht Theil des Körpers selbst ist. Analog ist es, wenn man den Theil a' von links nach rechts ansieht. Wenn das Trennungszeichen X des Theiles a von a', welches der Annahme nach dem Faden selbst angehört, ein Theil des Fadens wäre, so würde man, wenn man a von rechts nach links hin ansieht, nicht diesen ganzen Theil sehen, während doch das, was den Theil a von a' trennt, nur dasjenige ist, was man auf die oben angegebene Art nach der (als möglich vorausgesetzten) Wiederzusammensetzung des Fadens sieht.[1]

Die Hypothese, der Punkt sei nicht Theil des gradlinigen Continuums (und habe an sich auch keine Theile[2]) bedeutet, dass alle Punkte, die wir uns im Continuum denken können, so viel es auch seien, zusammen vereinigt das Continuum nicht bilden. Und wählen wir einen so kleinen Theil (XX') des

1) Wir sehen mithin, dass die Vorstellung des Punktes, der nicht Theil des Continuums ist, durchaus keine reine Abstraction ist, die ihre Rechtfertigung in der Erfahrung selbst nicht fände. Wir machen ja freilich von unsrer Fähigkeit des Abstrahirens Gebrauch, aber in der Mathematik besonders ist es unmöglich nicht Gebrauch von ihr zu machen. Desshalb ist es zum Mindesten unnütz, wenn *Pasch* sich in der Art mit der Beobachtung abfindet, dass er annimmt, der Punkt sei das kleinste Wahrnehmbare des Empirikers (siehe Vorrede und Anhang).

2) Wir haben also bei der theoretischen Entwicklung der Geometrie nicht nöthig festzustellen, dass der Punkt an sich keine Theile hat. Unter „an sich" verstehen wir nicht, was eine Sache unabhängig von uns ist, sondern was sie in ihrer geistigen Darstellung ist (§ 4).

Gegenstandes, wie man nur will (bei der Zeit einen Augenblick) aus, welcher Theil somit unbestimmt ist (d. h. X und X' sind in unsern Gedanken nicht festliegend), so zeigt uns die Anschauung, *dass derselbe immer continuirlich ist.*

Lässt man nun den Blick von rechts nach links oder umgekehrt über den gradlinigen Gegenstand hingleiten, so sehen wir, dass jeder Punkt eine bestimmte Stelle auf demselben einnimmt und dass man einen gegebenen Punkt, bei dem man anfängt weder von rechts nach links noch von links nach rechts wieder antrifft. Das heisst der gradlinige Gegenstand hat keine Knoten.

Wir sehen ferner, dass ein noch so kleiner Theil, z. B. der durch den Strich X bezeichnete scheinbar untheilbare (Fig. 2, b), rechts und links von Theilen des Continuums und mithin von zwei Punkten begrenzt ist. Da nun ein von zwei Punkten begrenzter constanter Theil, der nach der einen Beobachtung untheilbar ist, es nach einer andern nicht sein kann, so müssen wir auch praktisch die Möglichkeit zugeben, dass jeder Theil, der von zwei Punkten, die in unsern Betrachtungen stets dieselben bleiben, begrenzt wird, ebenfalls in Theile zerlegbar sei.

Betrachten wir dann weiter den gradlinigen Gegenstand von A aus nach rechts hin, so können wir annehmen, dass die Reihe von Theilen $abcd$ u. s. w. in dieser Ordnung unbegrenzt ist (Def. II, § 32), denn die wiederholte Erfahrung führt uns dazu, wenn nicht den gradlinigen Gegenstand, so doch den von ihm in der äusseren Umgebung eingenommenen Ort für einen Theil eines unbegrenzten Ganzen zu halten. So ist es auch von rechts nach links hin.

Ueberdies befindet sich zwischen zwei Punkten X und X', welche ihrer Lage nach auch unbestimmt sein können, die aber nicht zusammenfallen (Def. V, § 8), stets *ein continuirlicher Theil.* Da nun das Continuum mathematisch durch seine Punkte bestimmt wird, so müssen wir annehmen, dass sich zwischen zwei Punkten, auch wenn sie unbestimmt sind, sie mögen so nahe aneinander liegen, als sie wollen, stets wenigstens ein andrer von den Endpunkten verschiedener Punkt befindet (Def. V, § 8). Zu dieser Annahme werden wir auch durch die Betrachtung geführt, dass wir uns einen gegebenen Punkt X auf dem gradlinigen Gegenstand und einen Theil des Gegenstandes (AB) denken können, welcher X enthält und derart ist, dass sich A und B immer mehr dem X nähern, ohne jemals mit X zusammenzufallen und dass wir uns daher noch so kleine Theile mit unbestimmten Endpunkten denken können, welche ausser den Endpunkten wenigstens einen andern Punkt X enthalten.

Schliesslich machen wir die Wahrnehmung, dass in dem gradlinigen Gegenstand (Fig. 1) um einen seiner Punkte B sich zwei Theile (BA) und (BC) befinden, die der Art sind, dass der erste von B nach A hin mit dem zweiten von B nach C hin betrachtet identisch ist und dass der Theil (AB) von B nach A hin durchlaufen mit demselben Theil von A nach B hin durchlaufen identisch ist (Def. III, § 9).

Kann man alle diese Merkmale des gradlinigen Gegenstandes abstract feststellen, ohne auf die Anschauung zurückkommen zu müssen? Und wenn

so, reichen sie aus, um das Continuum als abstracte Form von andern möglichen Formen zu unterscheiden? Oder sind nicht einige von ihnen, obwohl selbstverständlich, nothwendige Folge der andern?

Dies sind die Fragen, die wir in dieser Einleitung zu lösen haben. Wir werden sehen, dass die oben angegebenen Merkmale mehr als ausreichen.[1])

1) *G. Cantor* und *Dedekind* z. B. behaupten in ihren werthvollen Arbeiten, es sei, wenn man von einem Punkt der Graden ausgeht, der eindeutige Zusammenhang zwischen den Punkten dieser Graden und den das numerische Continuum bildenden reellen Zahlen willkürlich. Dieses Continuum erhalten sie freilich mittelst einer Reihe abstracter Zeichendefinitionen, die, obgleich möglich, willkürlich sind. *Dedekind scheint es* auch (a. a. O. Seite XII—XIII), dass, wenn drei nicht in grader Linie gelegene Punkte A, B, C der Art gegeben sind, dass die Verhältnisse ihrer Abstände algebraische Zahlen sind, dass dann die Verhältnisse der Abstände der Punkte des Raumes von den drei Punkten zum Abstand AB nur algebraische Zahlen sein können — womit dann der Raum zu drei Dimensionen und daher auch die Grade discontinuirlich wären. Nach *Dedekind* ist das numerische Continuum nöthig, um die Vorstellung des Continuums des Raumes zu klären. Nach uns dagegen ist es das intuitive gradlinige Continuum, welches mittelst der Vorstellung von dem Punkt ohne Theile dazu dient uns die abstracten Definitionen in Bezug auf das Continuum selbst, von dem das numerische nur ein besondrer Fall ist, zu geben. Auf diese Weise erscheinen die Definitionen nicht wie ein Zwang, den man unserm Geist anthut, sondern finden ihre volle Rechtfertigung in der wahrnehmbaren Darstellung des Continuums. Man muss dieser Darstellung bei der Besprechung der Grundbegriffe gewiss Rechnung tragen, jedoch ohne desshalb aus dem rein mathematischen Gebiet herauszutreten (siehe Vorrede). Es wäre übrigens wunderbar, wenn eine abstracte so verwickelte Form, wie es das numerische Continuum ist, welches man nicht nur ohne Führung des intuitiven, sondern, wie es jetzt vielfach geschieht, aus blossen Zeichendefinitionen erhält, sich dann später mit einer so einfachen und ursprünglichen Vorstellung wie derjenigen von dem gradlinigen Continuum im Einklang befinden sollte.

Das gradlinige intuitive Continuum ist unabhängig von dem Punktsystem, welches wir uns an ihm denken können. Ein Punktsystem kann niemals, wenn der Punkt als Zeichen der Trennung zweier consecutiver Theile der Graden oder als Ende einer dieser Theile gedacht wird, in absolutem Sinn das ganze intuitive Continuum geben, weil der Punkt keine Theile hat. Bei den geometrischen Untersuchungen werden wir sehen, dass ein Punktsystem das Continuum *ausreichend*, aber nur so, darstellen kann. Das gradlinige Continuum ist niemals aus seinen Punkten sondern aus *Strecken* zusammengesetzt, welche die Punkte zu je zweien verbinden und welche selbst ebenfalls continuirlich sind. Auf diese Weise wird *das Geheimniss* der Continuität von einem gegebenen constanten auf einen unbestimmten beliebig kleinen Theil der Graden zurückgedrängt, welcher immer auch continuirlich ist, in welchen es uns aber nicht gestattet ist mit unsrer Vorstellung weiter einzudringen. In diesem Geheimniss ist dann im Grunde der Fundamentalbegriff der *Grenze* verborgen. Mathematisch aber, das ist wohl hervorzuheben, hat dieses Geheimniss durchaus keinen Einfluss, weil uns die Bestimmung des Continuums mittelst eines gut definirten geordneten Systems von Punkten ausreicht. Auf der andern Seite ist aber zu beachten, dass die Bestimmung durch Punkte zufällig ist, weil wir die Anschauung des Continuums ebenso auch ohne diese Bestimmung haben. Denn betrachtet man den Punkt als bestände er aus keinen Theilen, so erhält man wie gesagt das ganze Continuum nicht, auch wenn man die Punkte der Graden von einem Anfang ausgehend allen bekannten reellen Zahlen entsprechen lässt. Wenn man den Punkt aber als beliebig kleinen jedoch constanten Theil betrachtet, so lassen sich nicht einmal alle rationalen Zahlen auf dem gradlinigen Segment, wenn man mit einem seiner Punkte als Anfang beginnt, darstellen und dieses Segment behält trotzdem in der Anschauung seine Continuität. Wenn man schliesslich den Punkt als unbegrenzt kleinen Theil, das heisst, im Zustand unbestimmter Kleinheit betrachtet, dann entspricht jeder reellen Zahl ein Punkt ohne dass man ein besonderes Axiom anzunehmen hat. Wenn (A) die abstracte dem von dem gradlinigen Gegenstand eingenommenen Ort entsprechende Form ist, so gibt es, wie uns die räumliche Anschauung lehrt, im Grund genommen keine andre abstracte Form (B) von derselben Beschaffenheit wie (A), von welcher ein Theil zwei consecutive Theile von (A) trennen könnte (§§ 22, 24). Damit, dass man sagt, die Grade könne discontinuirlich und von allen aus keinen Theilen bestehenden Punkten, welche z. B. von einem gegebenen Anfang ausgehend alle algebraischen Zahlen darstellen, gebildet sein, nimmt man an sich schon Etwas an, was *der Anschauung widerstreitet,* nämlich, dass die abstracte der Graden entsprechende Form einer andern möglichen abstracten Form angehöre, die sämmtliche reellen

2.

Das Grundelement. — Elemente und Formen, die der Position nach verschieden sind und in absolutem oder relativem Sinn sich decken. — Gesetze für die Bestimmung oder auch Existenz oder Construction der Formen.

§ 56. Wir nehmen unsre Betrachtungen über die abstracten Formen wieder auf.

Uebereink. I. Die geordnete Gruppe $abc \equiv a(bc) \equiv (ab)c$ (III und a, § 29) hat a, b, c; ab, bc zu Theilen (Def. II, § 27). Da die Art, in welcher a in Bezug auf bc und daher auch der Theil ab in Bezug auf den Theil bc gegeben ist, Merkmal dieser Gruppe ist (Def. I, § 38), so wollen wir *die Uebereinkunft treffen* von der Gruppe abc zu sagen, man erhielte sie auch durch Vereinigung des Theiles bc mit ab statt zu sagen, man erhielte sie aus der Vereinigung von bc mit a (III, § 29). Bei dieser Operation muss jedoch b nur einmal in Betracht gezogen werden. Wir sagen, in dem Ganzen diene b zur Trennung oder Vereinigung des Theiles ab von oder mit dem Theil bc.

So *wollen wir auch die Uebereinkunft treffen*, von einer geordneten Gruppe, die aus einer unbegrenzten Reihe von Formen $\ldots abcd \ldots mn \ldots x \ldots$ hervorgeht (Def. I, § 26 und Bem. § 28), zu sagen, man erhalte sie aus der Ver-

---

Zahlen in sich fasse und deren Elemente (die Theile der Form sind a, § 27) diejenigen der ersten trennten. Wir sind dieses Princips wegen nicht nur gezwungen anzunehmen, dass von einem Punkt der Graden anfangend alle andern Punkte die reellen Zahlen darstellen, sondern auch anzunehmen, dass es Punkte in der Graden gibt, welche eventuell andern möglichen zwischen den reellen Zahlen liegenden Zahlen entsprechen, wobei die andern charakteristischen Eigenschaften der Graden unberührt bleiben. Wir bemerken noch, dass wir den unbegrenzt kleinen Theil unabhängig von der Unterscheidung der Zahlen in rationale und irrationale betrachten werden und dass die Hypothese, alle diese Theile enthielten nicht wenigstens einen Punkt ausser den Endpunkten, für uns viel zu willkürlich und unsicher wäre. Ferner, wenn ein Geschoss in grader Linie von dem Punkt A nach dem Punkt B fliegt und man theilt seinen Weg in die Reihe von Theilen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}, \ldots,$$

so sehen wir, wenn wir das Geschoss durch die Reihe dieser Theile begleiten, seine Spitze in unserm Gedanken niemals aus dieser Reihe herauskommen. Und doch haben wir die Vorstellung von der Thatsache, dass das Geschoss den Punkt B trifft, welcher die *Grenze* ist, welche die Spitze des Geschosses erreicht. (AB) ist die *Grenze* der obigen Reihe in dem Sinn dass die Spitze X des Geschosses, so lange sie in der Reihe bleibt, sich unbegrenzt dem Punkt B nähert oder dass (XB) so klein wird, wie man will. Ebenso verhält es sich mit einer Reihe consecutiver stets wachsender Theile auf der Graden, wenn diese Reihe von einem Punkt A ausgeht und einen in unserm Beobachtungsfeld liegenden gegebenen Punkt B nicht überschreitet. Um uns diese *ganze* Reihe vorzustellen, müssen wir mit der Vorstellung aus der Reihe *heraustreten* und müssen sie uns von einem andern zwischen A und B aber *ausserhalb* der Reihe liegenden Punkt C begrenzt denken, wenn (AB) selbst nicht die Grenze der Reihe ist. Auch in diesem Fall würde die entgegengesetzte Hypothese der Anschauung widerstreiten. Man bemerke überdies, dass die Anschauung für die Geometrie ohne Zweifel wesentlich ist, dass sie aber als nothwendiger Bestandtheil weder in der Fassung der Sätze oder Definitionen noch in den Beweisen auftreten darf (siehe Vorrede).

Dass es discontinuirliche Punktesysteme gibt, die allen von der Erfahrung gegebenen Eigenschaften des Raums genügten, ist, soviel wir wissen, noch nicht nachgewiesen worden; jedenfalls würde es Nichts gegen die anschauliche Continuität des Raums beweisen.

einigung des unbegrenzten oder begrenzten Theils ($mn\ldots x\ldots$) mit dem begrenzten oder unbegrenzten Theil ($\ldots abcd\ldots m$) (a, § 40), jedoch so, dass die beiden Theilen gemeinschaftliche Form nur ein einziges Mal betrachtet werden darf.

§ 57. *Def. I.* Unter *Grundelement* oder *Element* verstehen wir eine beliebige gegebene erste Form und nennen Grundelemente alle mit ihr identischen Formen (Def. III, § 9).[1])

Def. II. Betrachten wir mehrere verschiedene (Def. V, § 8) gegebene Elemente, so sagen wir auch, sie hätten eine *verschiedene Position* (Bem. III und Def. VI, § 9).

Bem. I. Im Allgemeinen also müssen wir der Art, in welcher die Elemente gegeben werden, Rechnung tragen (Bem. I und Def. I, § 38).

Def. III. Statt zu sagen: ein Element, sagen wir auch: zwei oder mehrere *sich deckende* Elemente.[2]) Von zwei Elementen dagegen, die nicht dasselbe Element sind aber auf eine gewisse Art als ein einziges Element betrachtet werden können, sagen wir, *sie deckten sich in Bezug auf diese gewisse Art.* Wenn wir den einen Fall von dem andern unterscheiden müssen, sagen wir im ersten Fall, *sie deckten sich in absolutem Sinn oder absolut*, im zweiten dagegen, *sie deckten sich in relativem Sinn oder relativ.*

Wenn sie sich in relativem Sinn auf verschiedene Art decken, so muss man angeben, in Bezug auf welche dieser Arten sie sich decken.

Bem. II. Wenn wir jedoch im Allgemeinen von zwei oder mehreren Elementen sprechen, so meinen wir, sie seien nicht dasselbe Element und mithin verschieden. Sagen wir zwei oder mehrere beliebige Elemente, so verstehen wir darunter verschiedene Elemente, mögen ihre Positionsverhältnisse sein, welche sie wollen (Def. VIII, § 13), es sei denn, es werde Anderes bestimmt.

Def. IV. Im Allgemeinen verstehen wir in der Folge unter *Form* ein bestimmtes System von Elementen (Def. I, § 11), obwohl auch das Element eine Form ist (Def. I).

Def. V. Durch verschiedene Elemente bestimmte Formen heissen *von verschiedener Position*, auch wenn sie identisch sind (Bem. III und Def. VI, § 9) und *zusammenfallend oder sich deckend*, wenn sich ihre Elemente decken (Def. III).

Bez. Wir bezeichnen im Allgemeinen die Elemente mit grossen und die Formen mit kleinen Buchstaben.

§ 58. *Def. I.* Die Gesammtheit der nöthigen Merkmale einer Form, die ausreichen, um sie von den andern Formen zu unterscheiden (Def. I, § 9 und Beisp. § 10) und die unabhängig von einander sind, heisst *Gesetz der Bestimmung* der Form.

Def. II. Wird die Form als gegeben betrachtet, so heisst das Bestimmungsgesetz *Gesetz der Existenz*, wird sie dagegen als construirt betrachtet (Def. II, § 10), *Gesetz der Construction oder Erzeugung* der Form.

---

1) Hier meinen wir also nicht, dass das Element an sich keine Theile habe.

2) Siehe auch Def. V, § 8.

Bem. I. Wenn die Elemente einer Form zuerst mittelst des Constructionsgesetzes construirt werden, so können wir sie nachher als gegeben voraussetzen (I, § 18) und das Constructionsgesetz wird Existenzgesetz; wenn sie dagegen gegeben sind und man will sie construiren, so wird das Existenzgesetz Erzeugungsgesetz.

Def. III. Die Darstellung des Bestimmungsgesetzes einer Form in Worten heisst *Definition* der Form.

Bem. II. Es können verschiedene Formen eine gemeinschaftliche Eigenschaft haben, dann dient aber diese Eigenschaft zur Definition ihres Ganzen oder ihrer Gesammtheit und nicht zur Bestimmung irgend einer von ihnen einzeln genommen und ausser der gemeinschaftlichen sind noch andre specielle Eigenschaften nöthig, um jede von ihnen zu bestimmen.

Def. IV. Eine Form auf andre Formen *beziehen* heisst die durch die erste gegebene Gruppe mit den gegebenen Formen zusammen betrachten. Die letzteren heissen *Bezugsformen.*

Bem. III. Daraus, dass wir bei den identischen Formen, jedoch nicht etwa bei den Gruppen identischer Formen (Def. III, Bem. III, § 9; Bem. und Def. I, § 38; § 41), die Verschiedenheit ihrer Position in Bezug auf andre Formen nicht in Rechnung ziehen können, folgt, dass ihr Bestimmungsgesetz dasselbe ist, wenn diese Formen an sich betrachtet, nicht aber, wenigstens im Allgemeinen, wenn sie auf andre Formen bezogen werden. Denn bezeichnet man die beiden identischen Formen mit a und b und mit c eine Bezugsform, so ist möglicher Weise die Form ac nicht identisch mit der Form bc.

Def. V. Statt zu sagen, die Elemente einer Form wären gegeben oder würden mittelst eines gegebenen Gesetzes construirt, sagen wir auch, man *erzeuge* oder *erhalte* vermöge dieses Gesetzes aus einem oder mehreren Elementen die übrigen Elemente der Form.

Def. VI. Man sagt auch, jede Form sei *die Darstellung ihres Bestimmungsgesetzes.*

§ 59. Wir geben hier einen speciellen Fall des Satzes a, § 37, von dem wir erst in der Folge Gebrauch machen:

a. *Wenn aus der Definition einer Form A nicht hervorgeht, dass alle möglichen Elemente der Form A angehören, so lassen sich Elemente denken, die eine andre Position als die Elemente von A haben (d. h. ausserhalb A liegen) und unabhängig von A sind.*

Bem. Wenn wir künftig von einer Form sprechen, so meinen wir, wenn nicht Anderes bestimmt wird, dass sie nicht alle Grundelemente enthalte.

3.

Bestimmung der Formen. — Identitätszusammenhang der Formen. — Begriff von „grösser" und „kleiner".

§ 60. *Bem. I.* Wir merken uns, dass die Elemente einer Form A (Bem. § 59) als gemeinsame Elemente derjenigen Formen, welche sie enthalten und welche keine andern Elemente ausserhalb der gegebenen Form A gemeinsam haben, bestimmt sind. Wir können daher festhalten, dass eine Form auf diese Weise durch andre Formen bestimmt wird.

a. *Gegebene Formen, die durch identische Formen bestimmt sind, sind identisch.*

Bem. II. Die Ordnung und die Art, wie einige der bestimmenden Formen gegeben sind (Def. I, § 38), kann man sich durch andre bestimmende Formen bestimmt denken (Bem. I, siehe Bem. III und IX).

a^{I}. *Wenn identische Formen andre Formen bestimmen, so sind diese Formen identisch.*

Denn die beiden resultirenden Formen sind durch identische Formen bestimmt (a).

a^{II}. *Wenn durch andre Formen bestimmte Formen nicht identisch sind, so sind die ersten Formen nicht identisch.*

Denn, wären sie es, so würden sie identische Formen bestimmen (a^{I}).

a^{III}. *Formen, welche mittelst derselben Operation aus identischen Formen construirt werden, sind identisch.*

Bem. III. In der Operation denken wir uns auch die Ordnung der erzeugenden Formen und die Art, wie sie gegeben sind (Def. I, § 38) enthalten, wenn auf die letzteren nicht ausdrücklich hingewiesen wird. Es ist nicht nöthig zu bemerken, dass die Operation eindeutig ist (Def. II, § 11); denn lieferte sie die Resultate Y, Y', Y'' u. s. w., so wäre sie in Bezug auf das ganze Resultat Y, Y', Y'' u. s. w. eindeutig.

Die Sätze a und a^{III} sind unmittelbare Folge der Definition der Identität (Def. VI, § 8; Def. III und Bem. III, § 9); denn aus a oder a^{III} folgt, dass die Bedingungen der Bestimmung der Formen sämmtlich gleich sind (Def. I, § 11) und daher auch alle Merkmale, die dazu dienen die beiden Formen von den andern zu unterscheiden (Def. I, § 9). Mithin sind diese Formen identisch (Def. III, § 9).

a^{IV}. *Nicht identische Formen liefern mittelst derselben Operation nicht identische Formen.*

Denn die Bestimmungsbedingungen der resultirenden Formen sind nicht alle identisch (Def. VIII, § 8; Def. I, § 11).

a^{V}. *Wenn man aus gegebenen Formen durch dieselbe Operation identische Formen erhält, so sind die gegebenen Formen identisch.*

Wenn sie es nicht wären, so wären es auch nicht die resultirenden Formen (a^{IV}).

a^{VI}. *Wenn man aus gegebenen Formen durch dieselbe Operation nicht identische Formen erhält, so sind die gegebenen Formen nicht identisch.*

Denn, wären sie es, so wären es auch die resultirenden Formen (a^{III}).

a^{VII}. *Wenn man aus identischen Formen durch gegebene Operationen identische Formen erhält, so sind die Operationen identisch.*

Denn, wenn sie es nicht wären, so wären die Bestimmungsbedingungen nicht dieselben (Def. II, § 10) und die resultirenden Formen darum nicht identisch (Def. VIII, § 8).

Bem. IV. Es ist zu bemerken, wie wir schon am andern Ort (g, § 54) gethan haben, dass aus a^{V} nicht folgt, dass zwei nicht identische Formen durch dieselbe Operation identische Formen nicht bestimmen könnten. Es ist dies jedoch nur dann der Fall, wenn die resultirenden Formen unabhängig von den erzeugenden betrachtet werden. Es liegt darin kein Widerspruch mit a^{IV} (Bem. V, § 9).

b. *Den Formen einer gegebenen Form kann man identische Formen einer andern mit der gegebenen identischen Form eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen lassen.*

Denn wenn zwei Formen a und b identisch sind, so entsprechen sie, jede an sich betrachtet, demselben Begriff c in Bezug auf alle ihre Merkmale (Def. VI, § 8; § 4; Bem. III, § 9; Bem. II, § 58). Jedem Element A von a

entspricht eine Vorstellung C in c oder ein Element von c und diesem das Element A sowie auch ein Element B von b (Beisp. 2, § 42). Die Formen a und b, welche durch Gruppen von Elementen gegeben sind (Def. IV, § 57) entsprechen so eindeutig der Form c und daher auch einander (e, § 42). Wenn ferner eine Reihe von Elementen von a gegeben ist, so entspricht derselben eine Reihe von Elementen von c und diese entsprechen den ersten eindeutig und in derselben Ordnung (Beisp. 2, § 42). Der Reihe von c entspricht in derselben Weise eine Reihe von Elementen von b; es entsprechen sich also die Elemente der beiden Reihen a und b eindeutig und in derselben Ordnung (f, § 42). In diesem Sinn entsprechen den Formen von a die Formen von b eindeutig und in derselben Ordnung.

Man kann auch so verfahren. Da man bei den Formen a und b die Verschiedenheit ihrer Position in Bezug auf andre Formen nicht in Betracht zieht (Bem. III, § 9; Bem. III, § 58), so kann man bei dem Identitätsverhältniss, nachdem man von dieser Verschiedenheit abgesehen, sich denken, dass jedes Element der einen sich mit einem Element der andern decke und umgekehrt, das heisst dass es ein Element der andern sei (Def. III, § 57).

Def. I. Zwischen den Elementen und den Formen zweier identischer Formen besteht so ein eindeutiger in derselben Ordnung stattfindender Zusammenhang, der *Zusammenhang der Identität oder Gleichheit* heisst.

Bem. V. Es ist nicht ausgeschlossen, dass ein solcher Zusammenhang zwischen zwei Formen sich auf verschiedene Art feststellen lässt.

Bem. VI. Die entsprechenden Formen zweier identischer Formen sind identisch, wie aus b und Def. I hervorgeht.

b′. *Wenn man in identischen Formen mit identischen Formen dieselbe Operation ausführt, so sind die resultirenden Formen identisch.*

Wenn man aus entsprechenden Formen zweier identischer Formen durch dieselbe Operation andre Formen erhält, so sind diese identisch (b und a^{III}).

b″. *Wenn die Theile einer Form, in eine unbegrenzte Reihe geordnet, eindeutig und in derselben Ordnung den der Reihe nach mit ihnen identischen Theilen einer andern Form entsprechen, so sind die beiden Formen gleich in Bezug auf die Reihen der gegebenen Theile.*

Denn wenn man zwei Reihen identischer sich entsprechender Theile der zwei Formen

$$\ldots ABCDEF \ldots$$
$$\ldots A'B'C'D'E'F' \ldots$$

betrachtet, die der Art sind, dass

$$A \equiv A',\ B \equiv B', \ldots$$
$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C', \ldots$$
$$BC \equiv B'C',\ BD \equiv B'D', \ldots$$

u. s. w.

$$ABC \equiv A'B'C', \ldots \quad ABCD \equiv A'B'C'D', \ldots$$
$$BCD \equiv B'C'D', \ldots \quad BCDE \equiv B'C'D'E', \ldots$$

so bestimmen die beiden Reihen zwei gleiche Formen, weil diese in derselben Art durch der Reihe nach identische Formen oder besser durch die zwei Reihen bestimmt werden (a).

Wir haben sie gleich in Bezug auf die Reihe von Theilen (Def. IV, § 9) genannt, weil die Formen, unabhängig von den Reihen, nicht identisch in dem Sinn sein können, dass die eine ein Theil der andern ist, ohne die ganze andre zu sein, das heisst ohne dass jedes gegebene Element der zweiten auch Element der ersten sei (Def. II, § 27; Bem. II, § 9).

Bem. VII. Wenn eine oder beide Formen aus einer begrenzten Reihe von Theilen zusammengesetzt ist, welche unter den Bedingungen des Satzes b″ als Theil eine unbegrenzte Reihe von Theilen enthält (b, § 37; Def. II, § 27; Def. I, § 38), alsdann besteht die Gleichheit nur in Bezug auf die Reihen der gleichen Theile (Def. III, IV, § 9).

c. *Mit einer dritten identische Formen sind einander identisch* (e, § 8; Def. III, § 9; Def. I, § 38).

Bem. VIII. Diese Sätze gelten offenbar auch im Fall der Gleichheit in relativem Sinn, wenn man nur die Merkmale ins Auge fasst, die den in Vergleich gezogenen Formen gemeinschaftlich sind (Def. II, § 9), weil man in diesem Fall die Formen in Bezug auf diese Merkmale in dem Verhältniss der Gleichheit einander substituiren kann (Def. IV, § 9).

Bem. IX. Offenbar geben die obigen Sätze die Identität zweier Formen mittelst der Identität andrer Formen. Wenn sie also dazu dienen sollten, die Identität aller Formen festzustellen, so enthielten sie eine petitio principii. Wir werden im § 71 sehen, wie man sie bei der Betrachtung der Grundform verwenden kann. Siehe die Theile I und II z. B. I. Kap. 14.

§ 61. *Def. I.* Wenn man eine Form c aus der Vereinigung einer Form b mit einer Form a erhalten hat (Def. I, § 26), so heisst die Form c *(das Ganze) grösser* als a und b *(die Theile)* und a und b *kleiner* als c und man schreibt:

(1) $c > a$ oder $a < c$; $c > b$ oder $b < c$.[1])

Def. II. Wenn man c' aus a' erhält, indem man in derselben Weise, wie b mit a vereinigt wurde, b' mit a' vereinigt und

(2) $a \equiv a', b \equiv b'$

ist, so ist:

(3) $c \equiv c'$. (a^{IV}, § 60)

Wir sagen c ist *grösser* als a' und b' und a', b' sind *kleiner* als c und schreiben

(4) $c > a'$ oder $a' < c$, $c > b'$, $b' < c$.

Bem. I. Aus demselben Grund sind a und b kleiner als c' und daher

(5) $c' > a$ oder $a < c'$, $c' > b$ oder $b < c'$.

a. *Der Begriff grösser und kleiner ist bei den Formen unabhängig von der relativen Position der Formen unter sich.*

Denn nach (1), (2), (3), (4) können wir in der Relation $c > a$ oder $a < c$

1) Es ist also nicht nöthig, wie *Euclid* es thut, ein Axiom aufzustellen, das Ganze sei grösser als sein Theil und der Theil kleiner als das Ganze. Es ist dies eine Definition und (1) beruht auf der Operation des Vereinigens in ihrer einfachsten Gestalt (I, § 29), von der auch *Euclid* in seinen andern Axiomen oder „gewöhnlichen Begriffen“ ohne jede Erklärung Gebrauch macht.

dem c oder a eine beliebige identische Form c' oder a' substituiren (Bem. III, § 58; Def. VIII, § 13).

b. *Wenn* $a > b$ *oder* $a < b$, *so ist nicht* $a \equiv b$ (f, § 8).

b'. *Wenn* $a \equiv b$, *so ist nicht* $a \gtrless b$ [1]),

weil, wenn $a \gtrless b$ wäre, nicht $a \equiv b$ sein könnte (b).

c. *Wenn* $a \gtrless b$, *so ist nicht* $a \lessgtr b$.

Denn im ersten Fall erhält man a aus der Vereinigung einer Form y mit der Form b oder einer mit b identischen Form (Def. I oder II) und wäre $a < b$ so erhielte man b durch die Vereinigung einer Form x mit der Form a oder einer mit a identischen Form, man erhielte also b durch die Vereinigung der Form x mit der Form (by) und es wäre also

$$b(yx) \equiv b \qquad \text{(a, § 40)}$$

was widersinnig ist (Def. III, § 8; Def. I und b).

Wenn $a < b$, so ist nicht $a > b$, denn, wäre es der Fall, so wäre nach dem eben Gesagten nicht $a < b$.

d. *Wenn* $a > b$, $b > c$, *so ist* $a > c$.

Denn in a ist ein Theil a' identisch mit b, ohne dass a' das ganze a wäre, sonst wäre $a \equiv b$ (Def. I und b). In b ist ein Theil b' identisch mit c, welcher nicht b ist; folglich ist in a' ein Theil identisch mit c und daher auch in a (b, § 60). Es ist also $a > c$.

d'. *Wenn* $a < b$, $b < c$, *so ist* $a < c$ (d).

Bem. II. Wenn $a > b$ und $b < c$, so geht daraus nur hervor, dass in a und in c mit b identische Theile sind aber es folgt durchaus nicht, dass in c ein mit a identischer Theil oder in a ein mit c identischer Theil sei. [2])

4.

System einer Dimension. — Segmente des Systems, ihre Enden. — Untheilbares Segment. — Richtungen des Systems. — Einfach geschlossenes und offenes System einer Dimension. — Verlängerungen eines Segments im System.

§ 62. *Def. I.* Die durch eine beliebige Reihe von Elementen und die umgekehrte Reihe gegebene Form, welche ein erstes und ein letztes Element hat oder nicht hat und deren Ordnung von einem beliebigen ihrer Elemente (Def. § 21) an gegebenes Merkmal der Form (Def. I, § 38) ist, heisst *System einer Dimension.* [3])

Bem. I. Consecutive Elemente der Form sind diejenigen, welche consecutiv in der gegebenen oder der umgekehrten Ordnung sind (§ 24; Def. I, § 33), so dass also, wenn

---

1) Mit diesem Doppelzeichen meinen wir, dass entweder die eine oder die andre Ungleichheit stattfindet.

2) Aus dem was wir in den §§ 3 und 9 und über die Operation des Vereinigens (§§ 29, 38, 41) und in diesem Paragraph gesagt haben, geht klar hervor, wie unbestimmt die sogenannten Axiome *Euclids* über die Grössen sind, welche *Heiberg* in seiner Uebersetzung des griechischen Textes *gewöhnliche Begriffe* nennt (siehe die Vorrede).

3) Man beachte, dass hier der Begriff der Dimension nicht denjenigen des Masses enthält, der später erklärt werden wird. Es wird gut sein, wenn der Leser sich bei seinem Studium

man die Elemente in einer andern Ordnung betrachtet, die consecutiven in dieser neuen Ordnung es nicht mehr für die gegebene Form sind, weil die Ordnung der Reihen von Elementen der Form von einem ihrer Elemente an bereits festgesetzt ist (Def. I, § 26).

Bem. II. Die Theile der Form sind ausser den Elementen ... A, B, C, D, ... auch AB, BC, CD u. s. w. ABC, BCD ... u. s. w. (Def. I, § 38; Def. II, § 27).

Bem. III. Die Ordnung der Elemente der Form bestimmt sowohl die Ordnung, in welcher sich alle ihre Theile AB, BC, CD u. s. w., ABC, BCD, u. s. w. folgen, als die Ordnung eines jeden dieser Theile, weil in der Ordnung der Form C auf B, D auf C u. s. w. folgt (I, § 18; Def. I, § 21; Def. II, § 39).

Def. II. Die gegebene und die umgekehrte Ordnung in Bezug auf ein beliebiges Element des Systems heissen *die Richtungen* oder *der Sinn* des Systems und eine beliebige heisst der andern *entgegengesetzt.*

Def. III. Jeder Theil des Systems, der wenigstens zwei verschiedene Elemente enthält, heisst *Segment* des Systems.[1])

Def. IV. Die Elemente A und B, die ein Segment begrenzen, heissen *Enden oder Grenzen* des Segments. Wir bezeichnen das Segment mit (AB).

Wenn es nicht anders bestimmt wird, so meinen wir immer, dass ein Segment von zwei bestimmten Elementen begrenzt wird.

Def. V. Wenn zwischen den beiden Elementen A und B in der gegebenen Form und in ihrer Ordnung keine andern Elemente dieser Form enthalten sind (§ 23), so heisst das Segment (AB) *untheilbar.*

Def. VI. Wenn in einem System einer Dimension das Element A gegeben ist und wir construiren das consecutive B, dann das consecutive C u. s. w. in der Richtung ABC, so sagen wir auch, *wir wendeten von dem Element A an in der gegebenen Richtung das Constructionsgesetz des Systems an* (Def. II, § 58).

Def. VII. Unter *consecutiven Segmenten* in einer gegebenen Richtung des Systems verstehen wir zwei Segmente, für welche das zweite Ende des ersten das erste Ende des zweiten Segments in der gegebenen Richtung ist.

Bem. IV. Wie jede Form von ihrem Bestimmungsgesetz abhängt (§ 58), so hängen von diesem Gesetz auch die Verhältnisse der Position der Elemente der Form ab. Wenn desshalb zwei Systeme einer Dimension zwei Elemente A und B gemeinschaftlich haben, so geht daraus im Allgemeinen nicht hervor, dass die von A und B in beiden Systemen bestimmten Segmente identisch sein müssen, weil man a priori, ohne sich zu widersprechen, annehmen kann, dass die Bestimmungsgesetze verschieden seien. Eine Bestätigung dieser Bemerkung werden wir in Kurzem a posteriori erhalten (siehe Anm. zu § 64). Uebrigens finden wir in unsrer äussern Umgebung viele Beispiele solcher Verschiedenheit.

§ 63. *Def. I.* Wenn man das Constructionsgesetz anwendet, indem man mit einem Element A eines Systems einer Dimension beginnt und wenn man dieses Element A, nachdem man alle andern Elemente erhalten hat, wieder erhält *(reproducirt)*, so heisst das System *geschlossen*, im andern Fall *offen.*

---

gegenwärtig hält, dass das Wort *Form* die mathematischen Gegenstände im Allgemeinen (Def. I, § 38) bezeichnet, während die Gruppe (§ 13), die Reihe (§ 19), die geordnete Gruppe (§ 26), das System einer Dimension eigentlich verschiedene Gegenstände sind, die mit dem Wort Form bezeichnet werden können. So kann z. B. das System einer Dimension auch geordnete Gruppe genannt werden, wenn man es nur in einer einzigen Richtung betrachtet (siehe auch die Anm. zu § 4).

1) Dieses der Geometrie entlehnte Wort soll nicht etwa bedeuten, dass wir hier ein gradliniges oder krummliniges oder auch continuirliches Segment meinen; denn die Elemente $ABCD$ ... sind verschieden und beliebig.

a. *Das geschlossene System einer Dimension kann man als ein Segment betrachten, dessen Enden mit einem beliebigen Element des Systems zusammenfallen.*

Diese Eigenschaft geht unmittelbar aus Def. I, Def. III, IV, § 62 und Def. III, § 57; Def. VIII, § 13 hervor.

a'. *Ein System einer Dimension, welches ein erstes Element hat und unbegrenzt ist, ist immer offen.*

Denn, wäre es geschlossen, so könnte man es als ein Segment betrachten, dessen beide Enden mit dem ersten Element des Systems zusammenfallen. Es hätte mithin ein letztes Element und wäre folglich nicht unbegrenzt (Def. II, § 32 und Bem. § 28).

Def. II. Wenn in einem geschlossenen oder offenen System einer Dimension kein Element wiederholt wird (bei einem geschlossenen System: bevor man alle übrigen Elemente erhält), so heisst das System *einfach* oder auch *einfach geschlossen* oder *einfach offen.*

Ist das System offen und wird nicht Anderes bestimmt, so meinen wir, das System habe kein erstes und letztes Element oder auch es habe keine Elemente, die es begrenzen.

Bem. I. Betrachtet man das geschlossene System als gegebenes Ganze, so hat es keine Elemente, die es begrenzen, wie es bei einem Segment (AB) der Fall ist (Def. IV, § 62). Dagegen hat es sofort begrenzende Elemente, wenn man es von einem seiner gegebenen Elemente an betrachtet. Im ersten Fall können wir es *unbegrenzt* nennen, es ist aber zu beachten, dass es dies nicht in dem Sinn ist, dass seine unbegrenzten Reihen (Def. I, § 62) ein erstes oder letztes Element haben oder von einem ihrer Elemente an unbegrenzt in dem (Def. II, § 32 und § 33) festgesetzten Sinn sind. So angesehen ist das geschlossene System vielmehr von zwei mit einem beliebigen seiner gegebenen Elemente zusammenfallenden Elementen begrenzt (a).

b. *Das geschlossene System kann von einem beliebigen seiner gegebenen Elemente an als ein unbegrenztes System angesehen werden.*

Denn, nachdem man von einem gegebenen Element A an in einer festgesetzten Richtung alle andern Elemente und somit von Neuem das Element A (Def. I) erhalten hat, genügt es, nach dieser Operation A als ein von A verschiedenes Element A' zu betrachten (Bem. III, § 9) und es ebenso mit allen andern Elementen zu machen, die man durch Wiederholung der obigen Operation erhält. Kommt man dann wieder zu A', so bezeichnet man es mit A'' und so weiter ohne Ende (Def. II, § 32).

c. *Ein einfach offenes System einer Dimension wird von einem Element in zwei unbegrenzte Theile zerlegt, die keine andern Elemente gemeinschaftlich haben, den einen in der einen, den andern in der entgegengesetzten Richtung von dem gegebenen Element an.*

Es geht dies unmittelbar aus der Definition des Systems selbst hervor, dass es nämlich keine Elemente habe, die es in den beiden Richtungen begrenzen (Def. II).

d. *Wenn man in einem einfachen System einer Dimension, dessen Elemente*

$\ldots A^{(-s-1)} \ldots A^{(-s)} \ldots A^{(-2)} \ldots A^{(-1)} \ldots A A^{(1)} \ldots A^{(2)} \ldots A^{(s)} \ldots$ [1])

1) Die Zeichen $\ldots(-s)\ldots(-2)\ (-1)\ (1)\ (2)\ldots(s)\ldots$ haben für den Augenblick keine numerische Bedeutung.

sind, ein erstes Element A und eines seiner consecutiven Elemente, wenn ein solches existirt, z. B. $A^{(1)}$ *als zweites Element auswählt, so ist die Richtung des Systems bestimmt.*

Das System hat in Bezug auf jedes seiner Elemente zwei Richtungen (Def. II, § 62). Wenn das zu A consecutive $A^{(1)}$, das auf A folgen muss, gegeben ist, so ist eine der beiden Richtungen des Systems vollständig bestimmt. Denn wenn das System geschlossen ist, so kann man jedes andre seiner Elemente X nach A und $A^{(1)}$ betrachten. Dieses X geht einem beliebigen andern Element Y des Systems voran, wenn es zwischen A und Y, $A^{(1)}$ und Y liegt (§ 23) und diese letztere Bedingung ist gegeben (Def. I, § 62). Wenn das System offen ist, so theilt A es in zwei Theile, die kein Element gemeinschaftlich haben, da es sich um ein einfaches System handelt (c). Betrachtet man mithin A als das erste Element des Theiles, in welchem sich $A^{(1)}$ befindet, so steht jedes andre Element X desselben hinter A und $A^{(1)}$ und X geht jedem andern Element Y voran, wenn es zwischen A und Y liegt. Die Elemente des andern Theils gehen A und $A^{(1)}$ voraus und jedes beliebige Element X von ihnen folgt auf jedes andre Y, wenn X zwischen Y und A liegt. Auf diese Weise ist also die Richtung

$$\ldots AA^{(1)}\ldots A^{(2)}\ldots A^{(s)}\ldots$$

bestimmt. Die Elemente

$$\ldots A\ldots A^{(-1)}\ldots A^{(-2)}\ldots A^{(-s)}\ldots$$

bestimmen die entgegengesetzte Richtung.

e. *Eine Richtung des Systems von einem Element A an bestimmt eine Richtung von jedem andern Element B des Systems an.*

Denn es sei

$$A\ldots A^{(1)}\ldots A^{(s)}\ldots A^{(s+1)}\ldots$$

die Richtung von A an. Wenn B z. B. hinter A steht, nehmen wir an, es sei $A^{(s)}$, so ist die Richtung $A^{(s)}\ldots A^{(s+1)}\ldots$ bestimmt. Wenn es nicht hinter A steht und z. B. $A^{(-s)}$ ist und wenn das System geschlossen ist, so erhält man wieder den vorigen Fall. Denn man kann dann B so betrachten, als ob es auch hinter A in der gegebenen Richtung stände (Def. II). Man erhält so, wie vorhin, die Richtung $A^{(-s)}\ldots A^{(-s+1)}\ldots A\ldots$ Wenn das System offen ist, so ist das zum vorigen umgekehrte System $\ldots A\ldots A^{(-1)}\ldots A^{(-s)}\ldots$ bestimmt (Def. I, § 33) und damit seine Richtung $A\ldots A^{(-1)}\ldots A^{(-s)}\ldots$ und also auch nach dem vorigen Fall die Richtung $A^{(-s)}\ldots A^{(-s-1)}\ldots$, womit dann auch die umgekehrte Richtung $A^{(-s)}\ldots A^{(-1)}\ldots A$ bestimmt ist (Def. II, § 62).

f. *Wenn ein einfaches System einer Dimension β in einem andern analogen System α enthalten ist, so bestimmt eine beliebige Richtung des ersten eine Richtung des zweiten.*

A und B seien zwei consecutive Elemente des Systems β, die in der gegebenen Richtung desselben liegen (Def. I, § 25 und Def. II, § 62). Wenn zwischen A und B in α (§ 23) keine andern Elemente enthalten sind, so sind A und B auch in α consecutiv (§ 24) und die Ordnung, in welcher AB sich

in β folgen, bestimmt mithin auch die Ordnung, in der sich dieselben Elemente in α folgen (d). Wenn dagegen in α zwischen A und B andre Elemente (§ 23) z. B. $A'A''...B'$ enthalten sind, alsdann bestimmt die Ordnung AB des Systems β die Ordnung, in der sich die Elemente $AA'A''...B'B$ von α folgen. Ist dagegen die Ordnung der Elemente $AA'A''...B'B$ von α gegeben, so ist offenbar die Ordnung, in der sich die Elemente AB von β folgen, bestimmt.

f'. *Man kann im vorigen Fall sagen, die Systeme β und α hätten dieselbe Richtung oder gleiche Richtungen.*

Wir wollen mit $...A_1...A_1'...A_1''...$ die von den Elementen von α eingenommenen Stellen bezeichnen (§ 20). Eine Richtung von α bestimmt eine Richtung des Systems $...A_1...A_1'...A_1''...$ und die nämliche Richtung wird durch die entsprechende Richtung des Systems β bestimmt, wenn man mit einem beliebigen Element desselben, welches Element von α ist, beginnt. Man kann desshalb sagen, die in Betracht gezogenen Richtungen von α und β wären *gleich*, weil sie derselben Richtung des Systems $...A_1...A_1'...A_1''...$ entsprechen, oder auch weil man die eine der andern bei der Bestimmung der Richtung von $...A_1...A_1'...A_1''...$ substituiren kann (Def. VII, § 8).

f''. *Die Richtungen eines einfachen Systems sind unabhängig von dem gegebenen Element, von welchem an sie in Betracht gezogen werden.*

Denn betrachtet man das System α von zwei beliebigen Elementen B und C an, so bestimmt eine Richtung, die mit B anfängt, eine Richtung, die mit C anfängt (e) und man erhält so zwei Systeme β und γ, die mit B und C beginnen, dem System α angehören und eine Richtung desselben bestimmen (Def. I, § 62; Def. II, § 27 und f). Die beiden Systeme, die mit B und C beginnen, haben dieselbe Richtung (f'); das heisst also, dass es gleichgültig ist, ob man bei der Bestimmung der Richtungen von α mit B oder mit C beginnt.

f'''. *Jedes Segment des einfachen Systems einer Dimension hat zwei Richtungen, die die Richtungen des Systems sind.*

Denn jedes Segment des Systems ist ein System, welches dem gegebenen angehört (Def. III, I, § 62; und § 27).

§ 64. a. *Wenn ein begrenztes Segment eines einfachen Systems einer Dimension mit den beiden Enden A und B gegeben ist, so kann man eine der Richtungen des Segments als durch das eine seiner Enden, die andre als durch das übrig bleibende Ende bestimmt ansehen.*

Das Segment kann keinen geschlossenen Theil enthalten, sonst würde ein Element des Segments und mithin des Systems wiederholt werden, während das System noch andre Elemente ausserhalb des Segments enthält. Das System wäre mithin nicht einfach (Def. III, § 62 und Def. II, § 63).

Eine der Richtungen des Segments (AB) kann man offenbar als durch das Element A und die entgegengesetzte Richtung als durch das andre Ende bestimmt ansehen; denn betrachtet man A als erstes Element, so folgen die andern Elemente des Segments auf A und ein Element X steht einem andern Y voran, wenn X zwischen A und Y liegt (Def. I, III, § 62).

Bez. I. Wenn wir nicht Anderes bestimmen, so meinen wir, dass das Symbol (AB) auch eine Richtung dieses Segments bestimme, nämlich diejenige, welche man erhält, wenn man mit A anfängt. Die umgekehrte Richtung erhält man, wenn man mit dem Element B beginnt.

b. ***In dem einfach offenen System reichen zwei Elemente aus, um ein von ihnen begrenztes Segment zu bestimmen.***

Denn es sei das System

$$\ldots B' \ldots A \ldots B \ldots C \ldots B'' \ldots \tag{1}$$

gegeben. Wenn man zwei Elemente A und C betrachtet, so bestimmen diese in dem System die drei Theile

$$A \ldots B \ldots C, \; A \ldots B' \ldots, \; C \ldots B'' \ldots,$$

von denen nur einer A und C zu Enden hat; die beiden andern haben ein einziges Ende und sind unbegrenzt (c, § 63).

b′. ***Eine Richtung des einfach offenen Systems ist durch die Ordnung zweier Elemente bestimmt.***

Es seien A und C die beiden Elemente in der Ordnung, in der sich ihre Zeichen folgen; sie bestimmen das Segment (AC) und die Richtung von A nach C und daher auch eine Richtung des Systems (a, Bez. I; f‴, § 63).

c. ***Zwei Elemente eines einfach geschlossenen Systems einer Dimension bestimmen zwei Segmente, die miteinander in einer gegebenen Richtung vereinigt das ganze System geben.***

Es geht dies aus der Erörterung zu Satz b hervor, wenn man in (1) B' und B'' zusammenfallen lässt (Def. II, § 57). Man erhält die beiden Segmente:

$$A \ldots B \ldots C, \; C \ldots B' \ldots A.$$ [1]

c′. ***Um ein Segment des einfach geschlossenen Systems zu bestimmen, genügt es, ausser den Enden ein andres Element des Systems zu geben.***

Denn, wenn man, um das Segment $A \ldots B \ldots C$ zu individualisiren, ausser den Enden A und C das Element B gibt, so kann dieses Element nicht in dem andern, durch A und C bestimmten Segment $C \ldots B' \ldots A$ enthalten sein, da es ein einfaches System ist (Def. II, § 63).

Bez. II. Ein durch die drei Elemente ABC bestimmtes Segment dieses Systems, dessen Enden A und C sind, bezeichnen wir mit dem Symbol (ABC).

1) Wir haben hier eine Bestätigung unsrer Bem. IV in § 62, dass nämlich die beiden Segmente $A \ldots B \ldots C$, $C \ldots B' \ldots A$, die durch zwei Elemente A und C in der einfach geschlossenen Form bestimmt sind, nicht gleich zu sein brauchen. Denn wären sie es, so genügte es in einem der Segmente, z. B. $A \ldots B \ldots C$, ein von A und C verschiedenes Element A' zu nehmen, man hätte dann:

$$(A' \ldots B \ldots C) < (A \ldots B \ldots C) \qquad \text{(Def. I, § 61)}$$

und auch

$$(C \ldots B' \ldots A') > (C \ldots B' \ldots A) \qquad \text{(Def. I, § 61)}$$

und da nach der Voraussetzung

$$(A \ldots B \ldots C) \equiv (C \ldots B' \ldots A),$$

so ist

$$(A' \ldots B \ldots C) < (C \ldots B' \ldots A)$$

und daher:

$$(A' \ldots B \ldots C) < (C \ldots B' \ldots A'). \qquad \text{(d′, § 61)}$$

Bem. I. Wenn man daher das Segment getrennt von dem System als Ding an sich betrachtet, so genügt das Symbol (AC), betrachtet man es dagegen mit dem System, zu dem es gehört, zusammen, so muss man es mit dem Symbol (ABC) bezeichnen. Man kann es auch in diesem Fall mit dem erstern Symbol bezeichnen; dann muss man aber ausdrücklich sagen, in welcher der beiden Richtungen von A an man das Segment betrachten soll, um jede Unbestimmtheit zu entfernen.

d. *Eine Richtung eines einfach geschlossenen Systems wird durch drei Elemente ABC bestimmt; die entgegengesetzte Richtung wird durch die Elemente CBA in der Ordnung, in welcher sich ihre Zeichen folgen, bestimmt.*

Denn da das Segment (ABC) vollständig bestimmt ist (c'), so ist auch eine seiner Richtungen, wenn man mit A anfängt, bestimmt (a) und die ihr entgegengesetzte, wenn man mit C anfängt. Somit werden auch die Richtungen des Systems mittelst der drei geordneten Elemente ABC und CBA bestimmt (f''', § 63).

d'. *Wenn ABC drei geordnete Elemente eines einfach geschlossenen Systems sind, so bestimmen die geordneten Gruppen BCA, CAB dieselbe Richtung wie ABC, während die Gruppen CBA, BAC, ACB die entgegengesetzte Richtung bestimmen.*

In der That sind die Elemente B und C des Segments (ABC) die Enden eines einzigen Segments (BC), das dem gegebenen Segment angehört (§ 27), und die Richtung von (AC) von B an ist dieselbe wie die des Segments (ABC) von A an (a; f und f''', § 63). So verhält es sich auch mit dem Segment (AB) von (ABC). Der zweite Theil des Satzes geht aus diesem Beweis und aus d hervor.

§ 65. a. *Ist ein Segment (AC) in einem einfachen System einer Dimension gegeben, so sind die andern Segmente, die mit A anfangen und in der Richtung (AC) liegen, kleiner oder grösser als (AC).*

Wenn das System von A an unbegrenzt ist, so gibt es in der gegebenen Richtung immer ein Segment (AC'), welches (AC) enthält, ohne dass C' und C zusammenfallen.

Die erste Eigenschaft geht unmittelbar aus der Definition des einfachen Systems einer Dimension (Def. II, § 63 und Def. I, § 62) oder aus den Eigenschaften der Reihe von Elementen (Def. I und b, § 36) und aus Def. I, § 61 hervor. Der letzte Theil des Satzes ist auch einleuchtend, da das System, wenn C' und C ein einziges Element wären, nicht länger unbegrenzt sein könnte, insofern wir immer vorausgesetzt haben, dass es sich um verschiedene Elemente handelt (Def. I, § 62; Def. II, § 32; Def. V und Bem. I, § 8 oder Bem. II, § 57).

Bem. I. Die letzte Eigenschaft gilt auch für das geschlossene System, wenn man es von einem Element A an als unbegrenzt im Sinn des Satzes b, § 63 betrachtet.

b. *Wenn die Richtung, in welcher sich die Elemente eines beliebigen Systems einer Dimension folgen, gegeben ist, so kann das System immer als ein einfaches angesehen werden* (Def. II, § 63; Def. I, § 62 und a, § 36).

§ 66. *Def.* Es sei (AB) ein Theil des Segments (A_1B_1) eines einfachen Systems einer Dimension in der Richtung (A_1ABB_1). Wenn A_1 und A, B und B_1 nicht dasselbe Element sind, so heissen die Theile (AA_1), (BB_1) *Ver-*

längerungen des Segments (AB) in den beiden Richtungen des Systems, nämlich der Theil (BB_1) in der Richtung A_1ABB_1 und der Theil (AA_1) in der entgegengesetzten Richtung.

5.

Anwendung der Sprache der Bewegung auf die Systeme einer Dimension.

§ 67. *Def. I.* Anstatt zu sagen, man wende von einem Element A an das Constructionsgesetz eines Systems einer Dimension

$$\ldots A^{(-n)} \ldots A^{(-2)} \ldots A^{(-1)} \ldots A \ldots A^{(1)} \ldots A^{(2)} \ldots A^{(n)} \ldots \qquad \text{(A)}$$

an und erhalte so in einer gegebenen Richtung die Elemente $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, u. s. w. des Systems (Def. VI, § 62), werden wir sagen, $A \ldots A^{(1)} \ldots A^{(2)} \ldots$ seien *verschiedene Lagen des nämlichen Elements* X, welches sich nach dem Gesetz des Systems bewegt, so wie ein Körper seine Lage in der Aussenwelt ändert. Damit meinen wir jedoch nicht, das Element besitze in der That diese Eigenschaft, denn das Element ist eine abstracte Form und ohne jede besondere Bedeutung oder Inhalt (Def. I, § 57).

Def. II. Wie wir in dem einfachen System einer Dimension zwei Richtungen haben, die von einem beliebigen Element desselben an bestimmt sind, so sagen wir auch: Ein Element *kann* ein gegebenes System einer Dimension in den zwei entgegengesetzten Richtungen *erzeugen*, indem es *sich* von einem Element desselben an nach dem Erzeugungsgesetz des Systems *bewegt* (Def. II, § 58).

Def. III. Der Satz: das System einer Dimension β, welches dem analogen System α angehört, hat dieselbe *Bewegungsrichtung* wie α — heisst: β und α haben dieselbe Richtung (f', § 63).

Def. IV. Der Satz: die Verlängerungen eines Segments (AB) eines Systems einer Dimension *werden* von einem Element *erzeugt*, welches *sich* nach dem Gesetz des Systems in der einen oder andern Richtung *bewegt*, indem es von den zwei Enden desselben *ausgeht*, bedeutet, dass man die Verlängerungen (BB_1), (AA_1) (§ 66) in einer oder der andern Richtung erhält, indem man von den Endelementen von (AB) an (Def. IV, § 62) das Constructionsgesetz des Systems anwendet (Def. II, § 58; Def. VI, § 62).

Def. V. Der Satz: wenn man von einem Element A *ausgeht* und das ganze System in einer gegebenen oder der entgegengesetzten Richtung *durchläuft*, so *kehrt* man in dem einfach geschlossenen System zu dem Ausgangselement *zurück* ohne mehr als einmal *durch* ein andres Element des Systems *gekommen zu sein* — und der Satz: wenn ein Element von dem Element A an in einer oder der entgegengesetzten Richtung *ausgeht* und das ganze System *durchläuft*, so *kehrt* es in seine ursprüngliche oder *Anfangs*- oder *Ausgangs*lage *zurück* ohne mehr als einmal *durch* ein andres Element *gekommen zu sein* — geben in andern Worten die Definition des einfach geschlossenen Systems (Def. II, § 63).

Def. VI. Wenn man in einem System einer Dimension die Segmente

$$(AA^{(m)}) > (AA^{(m-1)}) > \cdots > (AA^{(1)})$$

in einer gegebenen Richtung betrachtet und man sieht $A^{(m)}$, $A^{(m-1)}$, ..., $A^{(1)}$ successive als Lagen eines und desselben Elements X an (Def. I), so sagt man, X *nähere sich* A. Sind dagegen die Lagen von X successive $A^{(1)}A^{(2)}\ldots A^{(m)}$, so sagt man, X *entferne sich von* A.

Def. VII. Wenn wir die in derselben Richtung consecutiven Segmente $(AA^{(1)})$, $(A^{(1)}A^{(2)})$, u. s. w. betrachten, so können wir sagen, sie seien verschiedene Lagen eines Segments (XY), welches sich in der gegebenen Richtung *bewegt* oder in dem System *variirt.* Das Segment (XY) heisst in diesem Fall *variables* oder *veränderliches* Segment, um es von einem gegebenen Segment $(AA^{(1)})$ zu unterscheiden, welches bei unsern Betrachtungen immer dasselbe bleibt und *constant* heisst.

Die Segmente $(AA^{(1)})$, $(AA^{(2)})$, $(AA^{(3)})$, u. s. w. heissen *Zustände* des variablen Segments (AX).

Bem. Wir meinen damit jedoch nicht, dass die Segmente $(AA^{(1)})$, $(A^{(1)}A^{(2)})$, u. s. w. identisch sein müssen.

In diesem Paragraphen haben wir nicht vor, neue Sätze einzuführen, sondern schon erklärte oder definirte durch neue Worte auszudrücken, so dass wir den Paragraphen, wenn wir gewollt, hätten weglassen können.[1])

V. Kapitel.

Von der Grundform.

1.

Definition des in einer gegebenen Richtung homogenen Systems einer Dimension und seine ersten Eigenschaften.

§ 68. *Def. I.* Wenn es in einer Richtung eines Systems einer Dimension zwei Segmente gibt, die jedem in derselben Richtung gegebenen Segment

1) Eine der einfachsten concreten Formen einer Dimension ist die Zeit. Die Zeit ist nicht eine Aufeinanderfolge von Dingen, sondern die Zeit ist nöthig, um successive an diese verschiedenen Dinge denken zu können und damit die Begebenheiten in der Aussen- und Innenwelt successive stattfinden können. Wenn ein System einer Dimension gegeben ist, so können wir, wenn wir wollen, voraussetzen, man erhielte die betrachteten Elemente in demselben Zeittheil, indem wir das Constructionsgesetz des Systems in der Art anwenden, dass A' aus A entsteht (Def. V, § 58) und in demselben Zeittheil A'' aus A' und so weiter. Bei dieser Voraussetzung werden die Segmente (AA'), $(A'A'')$ u. s. w. in demselben Zeittheil abgeleitet; daraus folgt aber nicht, dass sie gleich sein müssen, während sie andrerseits in ungleichen Zeittheilen erzeugt und doch identisch sein können. Unser Geist kann die consecutiven Elemente oder die Segmente eines Systems einer Dimension successive in verschiedenen Zeittheilen betrachten. Wir legen in der für die Bewegung üblichen Ausdrucksweise dem Element diese Fähigkeit des Gedankens bei und nehmen mithin an, das Element selbst oder das Segment nehme successive die Lagen der übrigen Elemente oder der übrigen Segmente ein, auch wenn das System nicht continuirlich ist (I, § 18). Das Resultat ist dasselbe, nur der Ausdruck gewinnt an Klarheit und Bequemlichkeit; doch ist es der genauen Unterscheidung wegen gut diese Sprache in der Geometrie mit der gehörigen Vorsicht zu gebrauchen, um diese *nominelle* Bewegung nicht mit der *reellen* der Körper zu verwechseln (siehe Vorrede und Theil I).

identisch sind und von denen das eine zum ersten Ende das andre zum zweiten ein beliebiges gegebenes Element A hat, so wird das System *in der gegebenen Richtung homogen* genannt.[1])

a. *Wenn das in einer gegebenen Richtung homogene System offen ist, so ist es von einem beliebigen seiner Elemente an in beiden Richtungen unbegrenzt.*

Denn in der gegebenen Richtung kann es von einem seiner Elemente A an kein letztes Element X (§ 22) geben, denn gäbe es ein solches letztes Element X, so existirt in der gegebenen Richtung ein Segment (XY), das jedem beliebigen andern Segment des Systems in der gegebenen Richtung z. B. (AX) identisch ist (Def. I). Auch in der entgegengesetzten Richtung kann das System nicht begrenzt sein; denn jedes Element X des Systems ist auch zweites Ende eines zu (AX) in der festgesetzten Richtung identischen Segments.

Bem. I. Auch wenn das System geschlossen ist, können wir es als offen betrachten (b, § 63).

b. *Wählt man ein beliebiges Element X des in einer gegebenen Richtung homogenen Systems und ist ein Segment (AB) von dieser Richtung gegeben, so gibt es in derselben Richtung nur ein einziges (AB) gleiches Segment, von welchem X entweder das erste oder das zweite Ende ist.*

Denn das homogene System einer Dimension kann, wenn die Richtung gegeben ist, stets als ein einfaches System angesehen werden (b, § 65). Wenn man nun in der betrachteten Richtung von X als erstem Element ausgeht, so gibt es ein zu (AB) identisches Segment (XY) (Def. I), und weil jedes andre Segment in derselben Richtung von X aus grösser oder kleiner als (XY) ist (a, § 65), so ist (XY) das einzige zu (AB) in der Richtung des Systems identische Segment, denn die Beziehungen $A > B$ oder $A < B$ schliessen die Beziehung $A \equiv B$ aus (b, § 61).

c. *Wenn zwei in dem homogenen System gegebene Segmente (AC), $(A'C')$ in der gegebenen Richtung in consecutive Theile $(AB)(BC)$, $(A'B')(B'C')$ zerlegt werden und es ist $(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C')$, so ist $(AC) \equiv (A'C')$.*

Denn wenn man in der gegebenen Richtung von A' ausgeht, so gibt es ein und nur ein (AC) gleiches Segment (b), welches sich wegen des Zusammenhangs der Identität mit (AC) in zwei Segmente $(A'B'')$, $(B''C'')$ zerlegen lässt, die (AB) bezüglich (BC) identisch sind (b, § 60). Man erhält daraus

$$(A'B'') \equiv (A'B') \text{ und } (B''C'') \equiv (B'C')$$

(c, § 60). B'' muss daher mit B' und C'' mit C' (b) zusammenfallen und daher auch $(A'C'')$ mit $(A'C')$ (Def. V, § 57; b, a, § 65; Def. I, § 61).

c'. *Das homogene System ist ein einfach geschlossenes oder offenes System.*

1) Wir werden in der Folge untersuchen, ob die Theile dieser Definition unabhängig sind. Wir wollen nur bemerken, dass der Begriff des Systems einer Dimension allgemeiner als der des homogenen Systems ist; denn es fehlt nicht an Systemen einer Dimension — zu welchen z. B. der grössere Theil der geometrischen Curven gehört —, die die Eigenschaft des homogenen Systems nicht besitzen. Dass ferner ein einziges gegebenes Segment nicht ausreicht, sieht man sofort, wenn man annimmt, das System bestehe aus einer begrenzten oder unbegrenzten Reihe, welche als Theil eine unbegrenzte Reihe enthält (siehe Bem. II, § 81).

Nehmen wir an, A sei ein im System wiederholtes Element und (BA), (AC) seien zwei in der Richtung des Systems liegende Segmente, die das Element A gemeinschaftlich haben. Zu dieser Annahme ist man berechtigt, weil das System in seinen beiden Richtungen unbegrenzt ist (a). Jedes andre Element A' kann man als gemeinschaftliches Element zweier andrer Segmente $(B'A')$, $(A'C')$ von derselben Richtung betrachten, die (BA) bezüglich (AC) identisch sind (Def. I). Da nun $(BC) \equiv (B'C')$ (c), so hat das Element A' in $(B'C')$ dieselbe Eigenschaft, welche A in (BC) hat (b, § 60). Wenn daher A wiederholt wird, so wird es auch A' und mithin reducirt sich *entweder* das System auf ein einziges Element — und dieses ist durch den Begriff selbst des Systems einer Dimension, welches aus verschiedenen Elementen zusammengesetzt wird, ausgeschlossen (Def. I, § 62 und Bem. I, § 57) — *oder* das System wird mehrere mal betrachtet. Im letzten Fall ist das einmal betrachtete System einfach (Def. I, § 62).

c''. *Man kann die Elemente des Systems sich in der gegebenen Richtung von zwei gegebenen Elementen A und A' aus einander eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen lassen.*

Es genügt, A dem A' und A' dem A und jedem Element X, das von A aus in der gegebenen Richtung liegt, das Element X', das von A' aus in derselben Richtung liegt, der Art entsprechen zu lassen, dass $(AX) \equiv (A'X')$ (Def. I). Wenn X dem A in der gegebenen Richtung vorausgeht, so genügt es ein solches X' in Betracht zu ziehen, dass in dieser Richtung $(XA) \equiv (X'A')$ ist (Def. I). Auf diese Weise ist der eindeutige Zusammenhang vollständig festgestellt. Er ist auch von derselben Ordnung (Def. III, § 42); denn, wenn

$$(AB) < (AX) < (AC)$$

ist, so muss auch

$$(A'B') < (A'X') < (A'C')$$

sein (a, § 61).

c'''. *Die untheilbaren Segmente sind, wenn sie existiren, gleich.*

(AB) und (XY) seien die untheilbaren Segmente (Def. V, § 62). In der Richtung von (XY) können wir von X ausgehend ein Segment $(XY_1) \equiv (AB)$ betrachten (Def. II, § 61; Def. I). Wenn (AB) und mithin (XY_1) dem (XY) nicht gleich ist (h, § 8), so ist (XY_1) entweder grösser oder kleiner als (XY) (c'; a, § 65). Wenn $(XY_1) < (XY)$, so würde das Element Y_1 dem Segment (XY) angehören (Def. I, § 61; Def. I, § 62; Def. II, § 27) und mithin wäre der Voraussetzung zuwider (XY) nicht untheilbar. Ebenso ist es, wenn (XY) kleiner als (AB) wäre.

Def. II. Von jetzt an verstehen wir unter *consecutiven Elementen* eines homogenen Systems auch diejenigen eines andern in derselben Richtung gegebenen Systems, das dem ersten angehört (Def. I, § 27; Def. I, § 62; Def. I) und dessen consecutive Elemente durch Elemente des ersten Systems getrennt sind (§ 23).

Bem. I. Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, dass die Enden der consecutiven, gleichen in der Richtung des homogenen Systems gelegenen Segmente auch als consecutive Elemente betrachtet werden können.

§ 69. a. *Wenn zwei Segmente (AB), (CD) eines oder zweier beliebiger Systeme einer Dimension in einer gegebenen Richtung betrachtet identisch sind, so sind sie es auch in der entgegengesetzten Richtung.*

Denn, stellt man den Zusammenhang der Identität zwischen beiden Segmenten fest (b und Def. I, § 60), so entspricht A dem C, B dem D und (BA), (DC) erhält man aus den Segmenten (AB), (CD) durch dieselbe eindeutige Operation, indem man sie von den sich entsprechenden Elementen B und D aus in umgekehrter Richtung betrachtet (b', § 60).

b. *Das in einer gegebenen Richtung homogene System einer Dimension ist auch in der entgegengesetzten Richtung homogen.*

Denn, ist ein dem System entgegengesetzt gerichtetes beliebiges Segment (BA) gegeben, so kann man von einem beliebigen Element X aus zwei mit (AB) in der gegebenen Richtung des Systems identische Segmente (ZX) und (XY) betrachten (Def. I, § 68) und mithin sind die in der entgegengesetzten Richtung verlaufenden Segmente (XZ), (YX) mit (BA) identisch (a). Damit ist der Satz bewiesen (Def. I, § 68).

b'. *Sind ein beliebiges Element X des homogenen Systems und ein Segment (AB) mit einer bestimmten Richtung gegeben, so gibt es in dieser Richtung nur zwei mit (AB) identische Segmente, deren gemeinsames Ende X ist.*

Geht man von X in der gegebenen Richtung aus (Def. I, § 68), so ist der Satz nichts Anderes als b, § 68. Es existiren aber auch zwei und nur zwei umgekehrt gerichtete und mit (BA) identische Segmente $(Y'X)$ und (XY), deren gemeinsames Ende X ist (b; b', § 68).

c. *Das homogene offene System ist, wenn man von einem seiner Elemente A in einer gegebenen Richtung ausgeht, in Bezug auf die Anordnung seiner begrenzten Theile in Reihen identisch mit demjenigen, welches man erhält, wenn man von einem andern beliebigen Element A' desselben Systems in derselben Richtung ausgeht.*

Denn, lässt man dem Element A das Element A' und den consecutiven Segmenten von A aus die consecutiven gleichen und in derselben Richtung von A' aus liegenden Segmente entsprechen, welche sich gegenseitig begrenzen (Def. VII, § 62), so befinden sich die beiden Reihen von Segmenten in demselben Verhältniss wie die Formen in b'', § 60.

Bem. I. Man beachte wohl, dass die Theile des Systems von A und von A' aus in der gegebenen Richtung nicht ohne Weiteres d. h. ohne eine besondere Uebereinkunft identisch genannt werden können (Def. III, § 9); man käme sonst zu dem Widerspruch, dass das Ganze A mit einem seiner Theile B identisch, d. h., dass A A ist und nicht ist (Def. I, § 62; Def. II, § 27 und Def. VI, § 8), weil die Relationen $A < B$, $A > B$ die Relation A B ausschliessen (b, § 61).

d. *Wenn das homogene System geschlossen ist, so gilt der Satz c in absolutem Sinn.*

Denn zwei Elemente A und B theilen das System in zwei Theile (c, § 64). Man wähle ein Element C der Art aus, dass in einer gegebenen Richtung $(AB) = (BC)$ ist. Da man nun von C aus in der Richtung ABC ein Segment CB' betrachten kann, welches mit dem zweiten durch die Elemente A und B bestimmten Segment (BA) identisch ist (Def. I, § 68; b, § 69), so sind, weil

$(AB) \equiv (BC)$ und $(BA) \equiv (CB')$ ist, auch die Resultate identisch (c, § 68). In dem ersten Fall fallen aber die Enden mit A zusammen, desshalb müssen sie auch im zweiten zusammenfallen, das heisst das Element B' muss sich mit B decken.

Uebereink. I. Da wir das homogene System bei der Untersuchung seiner Grundeigenschaften als offenes oder geschlossenes System behandeln, so wollen wir in Bezug auf die Eigenschaften c und d, ohne ein offenes und ein geschlossenes System zu unterscheiden, die *Uebereinkunft* treffen, zu sagen, auch der Theil des offenen homogenen Systems von einem seiner Elemente A an in einer gegebenen Richtung sei dem Theil desselben Systems von einem andern Element A' an in der betrachteten Richtung *gleich, vorausgesetzt jedoch, dass die Gleichheit der beiden Theile, wenn es nöthig ist, in dem Sinn des Satzes* c *interpretirt wird.*[1])

2.

Erste Eigenschaften des in der Lage seiner Theile identischen Systems.

§ 70. *Bem. I.* Aus dem Vorhergehenden folgt nicht, dass wenn in einer gegebenen Richtung

$$(A^{(-s)} \ldots A) \equiv (A \ldots A^{(s)})$$

ist, auch

$$(A \ldots A^{(-s)}) \equiv (A \ldots A^{(s)}) \tag{1}$$

sei und mithin

$$(A \ldots A^{(s)}) \equiv (A^{(s)} \ldots A) \tag{2}$$

sei.

Die zweite Relation würde offenbar die erste in sich schliessen. Ist ein Ganzes z. B. $ABCDE$ mit einem Ganzen $A'B'C'D'E'$ identisch, so heisst das nicht, dass dasselbe Ganze $ABCDE$ mit dem Ganzen $E'D'C'B'A'$ identisch sei (Bem. § 41).

Wenn das Segment (AB) des homogenen Systems demselben Segment in entgegengesetzter Richtung (BA) nicht gleich ist, so bleiben die Eigenschaften des homogenen Systems unverändert (Def. I, § 68).

In der Geometrie findet man viele Beispiele von Curvensegmenten, die denselben Segmenten in umgekehrter Richtung betrachtet nicht gleich sind.[2]) Es gilt daher:

Auch wenn das System in einer gegebenen und der umgekehrten Richtung homogen ist (b, § 69), *so bedeutet dies nicht, dass das System in einer Richtung von einem beliebigen seiner Elemente an identisch mit dem System in der entgegengesetzten Richtung sei.*

Jetzt wollen wir unserm System auch diese Eigenschaft zukommen lassen.

---

1) Die Axiome in den Büchern über Elementargeometrie, die ausdrücken, dass eine Figur sich so bewegen kann, dass sie unverändert bleibt (und daher alle ihre Verhältnisse als Ganzes und Theil erhalten bleiben) und dass die Grade (welche als offen angesehen wird) um einen ihrer Punkte rotiren kann, bis sie durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht, vermeiden den Widerspruch in Bem. I nicht, welcher jedoch solange keinen Einfluss hat, als man auf dem beschränkten Gebiet einer Einheit bleibt. Man wird dies später besser sehen.

2) Man denke sich z. B. nach einem bestimmten Gesetz identische consecutive Curvenbogen z. B. Ellipsenbogen. Betrachtet man nur die Enden, deren Lageverhältnisse gerade durch die Ellipsenbogen, deren Enden sie sind, gegeben werden, so bilden diese Enden ein homogenes System einer Dimension in einer Richtung, ohne dass dieses System von einem Element A an im Allgemeinen mit demselben System in umgekehrter Richtung identisch zu sein braucht. Wir werden später (Hyp. VI, VIII) den Satz von dem Continuum für das homogene System geben. Aber während wir mit ihm die Theilbarkeit in gleiche Theile für ein gegebenes Segment (AB) und das Commutationsgesetz der Summe der Segmente beweisen können, haben wir zum Beweis der Eigenschaft $(AB) \equiv (BA)$ gerade die Definition des in der Lage seiner Theile identischen Systems nöthig.

Def. I. Wenn ein homogenes System einer Dimension von einem gegebenen Element A desselben an in einer Richtung mit dem von demselben Element an in der umgekehrten Richtung betrachteten System identisch ist, so nennen wir es ein *in der Lage seiner Theile identisches System.*[1])

a. *Der Theil des in der Lage seiner Theile identischen Systems, den man von einem gegebenen Element A desselben in einer beliebigen Richtung ausgehend betrachtet, ist dem Theil desselben Systems, den man von einem andern gegebenen beliebigen Element A' aus in der einen wie in der andern Richtung betrachtet, gleich.*

A sei das Element, in Bezug auf welches das System in der einen Richtung dem System in der entgegengesetzten Richtung gleich ist (Def. I). Da das System in der einen und in der andern Richtung homogen ist (Def. I, und b, § 69), so ist der von A' aus in der einen oder andern Richtung betrachtete Theil des Systems dem von A aus in derselben Richtung (c, d, Uebereink. I, § 69) und auch in entgegengesetzter Richtung betrachteten Theil gleich (Def. I, c, § 60). Aus demselben Grund ist der Theil des Systems, der von A aus in der einen Richtung liegt, demjenigen Theil des Systems, der von A' aus in der umgekehrten Richtung liegt, gleich.

a'. *Ist ein beliebiges Element X des in der Lage seiner Theile identischen Systems gegeben, so existirt in der einen und der andern Richtung ein mit einem gegebenen Segment (AB) identisches Segment* (a; b, § 60).

a''. *Ein beliebiges Element eines offenen in der Lage seiner Theile identischen Systems theilt es in zwei von dem Element aus betrachtet gleiche Theile* (c, § 63; a; Uebereink. I, § 69).

Def. II. In dem in der Lage seiner Theile identischen System einer Dimension können wir von einem als erstes Ende gegebenen Element aus in der einen wie in der andern Richtung eine Reihe begrenzter identischer consecutiver Segmente betrachten. Wendet man die Sprache der Bewegung an (Def. VII, § 67), so kann man sagen: In einem in der Lage seiner Theile identischen System einer Dimension kann einer seiner Theile *sich bewegen oder*

---

1) Die Eigenschaft, welche das in einer gegebenen Richtnng homogene System und diejenige, welche das in der Lage seiner Theile identische System von den andern Systemen einer Dimension unterscheidet, haben wir schon bei dem gradlinigen Gegenstand bei unsern auf die Beobachtung eingeschränkten Betrachtungen angetroffen. Hier ist nur zu beachten, dass unser in der Lage seiner Theile identisches System nicht nothwendig, wie die betrachtete Grade, continuirlich sein muss und dass unsere Definitionen unabhängig von der Beobachtung sind. Es ist ferner hinzuzufügen, dass der gradlinige Gegenstand in Bezug auf seine consecutiven Theile ein begrenzter Gegenstand der ersten Art ist, unser System dagegen diese Eigenschaft nicht zu besitzen braucht. Die durch die Definitionen I, § 68 und I, § 70 gegebenen Eigenschaften werden auch von den Büchern über Elementargeometrie in andrer Gestalt für die Grade in Anspruch genommen und sie machen dabei von dem Axiom der Bewegung der Figuren ohne Deformation Gebrauch. Man geht noch weiter und vindicirt die zweite Eigenschaft jedem Punkt der Graden, während sie für einen genügen würde, wie es auch ausreichen würde, sie für ein einziges begrenztes Segment und seine Vielfachen in Anspruch zu nehmen, so lange man, wie in den genannten Büchern, in dem beschränkten Gebiet einer Einheit bleibt. Ebenso reicht es aus, die Definition I, § 68 für ein einziges gegebenes Segment und seine Vielfachen gelten zu lassen (siehe Bem. II, § 81). Als Axiom wird auch gegeben, dass $(AB) = (BA)$ ist, während wir es später beweisen werden (siehe §§ 99 und 104).

kann ein solches System durchlaufen und dabei mit sich selbst identisch oder invariabel bleiben.

Bem. II. Aus dem Vorstehenden geht noch nicht hervor, dass die Eigenschaft (2) der Bemerkung I für jedes Segment $(A \ldots A^{(s)})$ gilt. Wenn $(A \ldots A^{(s)})$ ein untheilbares Segment eines in der Lage seiner Theile identischen Systems ist (Def. V, § 62), so kann man von $A^{(s)}$ aus in der entgegengesetzten Richtung ein Segment $(A^{(s)}A')$ betrachten, welches mit $(AA^{(s)})$ identisch ist. Wenn A' nicht mit A zusammenfiele, so würde entweder das Element A' in $(A^{(s)}A)$ und mithin auch in $(AA^{(s)})$ oder es würde das Element A in $(A^{(s)}A')$ enthalten sein, während das System einfach geschlossen oder offen ist (Def. I; c', § 68; Def. II, § 63; b, § 36 und b', § 33). Dies ist nicht möglich, weil $(AA^{(s)})$ und $(A^{(s)}A')$ nach der Voraussetzung untheilbar sind (Def. V, § 62). Damit wäre die Eigenschaft (2) für das untheilbare Segment bewiesen. Es ist leicht sie für jedes Segment nachzuweisen, welches aus einer beliebigen gegebenen Anzahl n von untheilbaren consecutiven Segmenten der Reihe (I) besteht (Def. VII, § 62); für ein beliebiges Segment können wir sie aber nicht beweisen, ohne viele andre Betrachtungen vorauszuschicken. [1])

3.

Weiteres über die Identität zweier Formen. — Grundform. — Ihre Nothwendigkeit. — Hypothese I und II.

§ 71. *Bem. I.* Die Sätze a und a^{III} in § 60 über die identischen Formen, die wir dazu benutzten, sie in den übrigen Sätzen dieses Paragraphen in andrer Gestalt zu reproduciren oder auch diese Sätze durch sie zu beweisen, sind aus dem auf verschiedene Formen angewandten Identitätssatz $A \equiv A$ abgeleitet (Def. V und VI, § 8; Def. III, Bem. III und IV, § 9; Def. I, § 38; Bem. III; § 58) und *stützen sich* daher, wie wir schon im § 60 (Bem. VI) erwähnten, *auf die Identität andrer Formen.*

Um daher nicht einen Zirkelschluss zu machen und um die Anwendung dieser Sätze auf die Construction der Formen zu ermöglichen, *müssen wir annehmen,* wenigstens für eine Form sei die Identität unter ihren Theilen auf Grund der Def. VI, § 8 ohne Weiteres festgestellt oder mit andern Worten *wir müssen annehmen,* die von uns betrachteten Formen seien mit Hilfe wenigstens einer Form bestimmt, construirt oder constructionsfähig.

Hyp. I. **Es gibt eine Form, die zur Bestimmung aller andern dient.** Wir nennen diese Form *die Grundform.*

Die Grundformen sind identisch. [2])

Bem. II. Die Elemente einer beliebigen Form und damit die Form selbst, sind ihrer Position nach durch andre Formen bestimmt (Bem. I, § 60). Auch in dieser Hinsicht ist *der Fall der einfachste,* wenn die Elemente von allen mit einer gegebenen identischen Formen, welche sie enthalten, bestimmt werden. Wir sagen in diesem und in ähnlichen Fällen auch, sie würden von einer einzigen Form bestimmt, indem wir ein Individuum als Classe ansehen.

Bem. III. Bei den andern Formen muss ihre Identität aus ihrer Construction mit Hülfe der Grundform hervorgehen oder mit andern Worten:

Die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Formen und zwischen den Theilen einer und derselben Form reduciren sich auf Verhältnisse zwischen den Theilen einer oder mehrerer gegebener Grundformen.

Die Grundform kann nicht durch andre Formen bestimmt sein.

---

1) Siehe §§ 99 und 104.

2) Diese Hypothese ist in einem gewissen Grad für die mathematische Behandlung der abstracten Formen nothwendig (§ 38), während die übrigen Hypothesen sich mehr auf die speciellen Eigenschaften der Grundform beziehen. Zur Festsetzung dieser Eigenschaften dient uns stets das gradlinige Anschauungs-Continuum als Führer.

Es ist dies im Grunde der Sinn der Hypothese I.

Denn nach Hyp. I. kann die Grundform nur durch andre mit ihr identische Formen oder durch Formen, welche sie selbst bestimmt oder zu deren Construction sie dient oder mit andern Worten durch sich selbst bestimmt werden. Man käme sonst zu einem Zirkelschluss. Ihre Eigenschaften können daher nicht von ihrer Construction mittelst andrer Formen abhängen, weil ihre Construction von ihren Eigenschaften abhängt (Def. II, § 10).

Hyp. II. **Die Grundform ist ein in der Lage seiner Theile identisches System einer Dimension.**

Bem. IV. Wir werden am Schluss die Gründe dieser Wahl angeben. Die Grundform ist jedoch unter den andern Formen noch nicht vollständig bestimmt; wir wissen nur, dass sie ein in der Lage seiner Theile (Def. I, § 70) identisches geschlossenes oder offenes (c′ § 68) System einer Dimension ist. Solange wir uns unter diesen Systemen noch nicht entschieden haben, gelten die sämmtlichen Eigenschaften, die wir in den folgenden Paragraphen entwickeln werden, ohne besondre Erwähnung auch für die in der Lage ihrer Theile identischen Systeme einer Dimension, die nicht mit der Grundform identisch sind.[1])

4.

Die Operationen des Vereinigens und des Wegnehmens bei der Grundform und ihre neue Bedeutung. — Das Segment Null. — Andre Bezeichnung eines in seinen beiden Richtungen durchlaufenen Segments. — Beziehungen zwischen drei beliebigen Elementen der Form.

§ 72. *Bem. I.* Nach dem Sinn, in welchem wir bisher die Operation des Vereinigens aufgefasst haben (Def. I und Bem. § 13; Def. I, § 26 und I, II, § 29), muss die aus der Vereinigung eines Segments (BC) mit einem Segment (AB), welches nur das Element B mit (BC) gemeinschaftlich hat, bei der Grundform resultirende Form alle Elemente der vereinigten Formen zu Elementen haben. Es ist jetzt daher noch nicht möglich, dass bei dieser Operation (AB) und (BC) entgegengesetzte Richtung haben. Denn, da die Grundform ein einfaches System ist und in diesem Fall C in der Richtung von (AB) vor B kommen müsste (Bez. I, § 61; f″, § 63), so würde C entweder mit A zusammenfallen oder es wäre in (BA) das heisst in (AB) enthalten, oder A wäre in (BC) enthalten (Def. I, § 70; c′, § 68, Def. II, § 63; b, § 36 und b′, § 33); auf jeden Fall hätten mithin die Segmente (AB) und (BC) mehr als ein Element gemeinschaftlich.

Das Resultat ferner der Vereinigung des Segments (BC) mit dem Segment (AB) von derselben Richtung bei der Grundform ist das Segment (AC), welches (AB) und (BC) zu consecutiven Theilen hat (Def. VII, § 62).

Def. I. (BC) zu (AB) *addiren oder summiren* bedeutet das Segment (BC) mit dem Segment (AB) vereinigen. Diese Operation [*Addition* des

---

1) *Du Bois Reymond* (a. a. O. S. 19) kommt auch auf eine „Grundform“ zurück, die er lineare Grösse nennt. Er hat jedoch nur die Analysis also nur die numerische Grösse im Auge, während wir als wesentliches Merkmal unsrer Formen die Verschiedenheit ihrer Position ansehen (Def. I, § 38 und z. B. Def. II, § 45). Er nimmt ferner bei der Aufstellung seiner Sätze I—VI über die lineare Grösse (Seite 44—48) nicht nur wie wir es thun und gethan haben die wahrnehmbare Darstellung der Graden zu Hilfe, um die Eigenschaften des in der Lage seiner Theile identischen Systems festzusetzen, sondern die Fassung seiner Sätze ist auch nicht immer unabhängig von dieser Darstellung gehalten (wie bei Satz I), so dass er auf die Beobachtung zurückkommen muss, um mit den gegebenen Sätzen den Begriff seiner linearen Grösse zu construiren. Gerade dies thun wir nicht und dürfen wir nicht thun. *Du Bois Reymond* erklärt allerdings S. 47, er habe nicht beabsichtigt, seine Sätze auf logischem Weg auf die möglichst kleinste Anzahl zu reduciren. Wir bemerken noch, dass die Grundform an sich, so lange wir von ihr als einem in der Lage seiner Theile identischen System handeln, nicht nur der Graden sondern auch z. B. dem Kreis entspricht.

Segments (BC) zu dem consecutiven Segment (AB) (Def. VII, § 62)] bezeichnen wir so:

$$(AB) + (BC) \equiv (AC),$$

indem wir für sie wie für die Addition der Zahlen (Bez. I, § 47) das Zeichen $+$ gebrauchen.

Def. II. Das Segment (AC) heisst *Summe* des Segments (BC) und des Segments (AB).

a. *Die Addition zweier Segmente bei der Grundform ist eine eindeutige Operation.*

Die Position und die Ordnung der Segmente sind festgesetzt (Def. I), woraus a folgt (Def. I; §§ 29 und 41).

b. *Summen bezüglich gleicher Segmente sind gleich* (Def. I; c, § 68).

Bem. II. Um daher das Segment AC zu erhalten, genügt es bei gegebenem (AB) das Segment (BC) in der Richtung (AB) von B aus zu durchlaufen.

§ 73. a. *Wenn* $(AC) \equiv (AB) + (BC)$ *ist und man wählt in der Richtung von* (AC) *das Segment* $(AC') \equiv (BC)$ *aus, so ist* $(AC') < (AC)$ *und wenn man das Segment* $(A'C) \equiv (AB)$ *auswählt, so ist* $(A'C) < (AC)$.

Denn es ist $(BC) < (AC)$ (Def. I, § 61) und da $(AC') \equiv (BC)$ ist (Def. I, § 68 und b, § 69), so ist $(AC') < (AC)$ (Def. II, § 61).

Aus demselben Grund ist $(A'C) < (AC)$.[1])

b. *Sind zwei nicht identische Segmente* (AB), $(A'B')$ *der Grundform gegeben, so ist das eine entweder grösser oder kleiner als das andre.*

Denn man kann in der Richtung $(A'B')$ von A' aus ein Segment $(A'B'')$ in Betracht ziehen, welches mit dem Segment (AB) identisch ist (Def. I, und a' § 70). Da B'' nicht mit B' zusammenfallen kann, weil $(A'B'')$ mit $(A'B')$ nicht identisch ist (h, § 8), so muss es in dem Segment $(A'B')$ oder B' muss in $(A'B'')$ enthalten sein (Def. I, § 70; c', § 68; Def. II, § 63 und b, § 36). Im ersten Fall ist $(A'B') > (A'B'')$ und im zweiten $(A'B') < A'B'')$ (Def. I, § 61) und mithin auch im ersten Fall $(A'B') > (AB)$ und im zweiten $(A'B') < (AB)$ (Def. II, § 61).

c. *Um zu sehen, ob ein Segment* $(A'B')$ *grösser, ebensogross oder kleiner als ein Segment* (AB) *ist, ist es gleichgültig, ob man ein* $(A'B')$ *gleiches Segment in der Richtung* (AB) *von* A *als erstem Ende oder von* B *als zweitem Ende aus betrachtet.*

Dieses Theorem geht aus b in Verbindung mit dem Satz a und der Definition II, § 61 hervor.

d. *Ist ein Segment* (AB) *und einer seiner Theile* (CD), *von dem kein Ende mit* A *oder* B *zusammenfällt, gegeben, so ist* $(AB) > (CD)$.

Denn die Elemente A, C, D, B folgen sich in der Richtung von (AB) von A aus in der Ordnung $ACDB$ (Def. III, II, I und Bem. III, § 62; f''', § 63) daher ist:

1) Es heisst dies jedoch noch nicht, dass in dem ersten Fall $(C'C)$ mit (AB) identisch sein muss (siehe §§ 99 und 104).

$$(AB) > (AD),\ (AD) > (CD) \qquad (§\ 23,\ \text{Def. I},\ §\ 61)$$

und mithin $(AB) > (CD)$ (d, § 61).

e. *Wenn ein Segment (AB) grösser als ein andres Segment (CD) ist, so ist (BA) grösser als (DC).*

(CD) ist einem Theil von (AB) gleich (Def. II, § 61) und diesem Theil können wir in der Richtung von (AB) das Segment $(A'B) \equiv (CD)$ substituiren (c). Nun ist $(BA) > (BA')$ (Def. I, § 61) und daher $(BA) > (DC)$, da $(DC) \equiv (BA')$ (a, § 69 und Def. II, § 61).

f. *Wenn man zu gleichen Segmenten (AB), $(A'B')$ die Segmente $(BC) \gtreqless (B'C')$ derselben Richtung addirt, so ist*

$$(AC) \gtreqless (A'C').$$

Der Satz ist einleuchtend, wenn $(BC) \equiv (B'C')$ (c, § 68; Def. I). Wenn $(BC) > (B'C')$ und man betrachtet $(BC'') \equiv (B'C')$ in derselben Richtung, so muss das Element C'' zwischen B und C fallen, weil $(BC) > (BC'')$ (Def. II, § 61). Daher ist

$$(AC'') \equiv (A'C') < (AC) \qquad (\text{c, § 68; Def. I, § 61})$$

und analog, wenn $(BC) < (B'C')$ ist.

g. *Wenn das gegebene Segment (AB) grösser, ebensogross oder kleiner als das gegebene Segment $(A'B')$ ist und man summirt zu beiden die gleichen Segmente (BC) bezüglich $(B'C')$, die mit ihnen dieselbe Richtung haben, so ist die erste Summe grösser, ebensogross oder kleiner als die zweite.*

Wenn $(AB) \equiv (A'B')$, so ist der Satz bewiesen (c, § 68).

Wenn $(AB) > (A'B')$, so betrachte man von A aus in der Richtung (AB) (Bez. I, § 64; f‴, § 63) ein $(A'B')$ gleiches Segment (AB'') (a', § 70). Das Element B'' ist zwischen A und B enthalten, ohne mit B zusammenzufallen (Def. II, I, § 61). Daraus folgt, dass B zwischen B'' und C liegt; denn da es nicht zu (AB'') gehört (Def. I, § 70; c' § 68; Def. II, § 63 und b, § 36) und ein Element von (AC) ist, so muss es zu $(B''C)$ gehören (Def. I, § 70; Def. I, § 27 und II, § 29), ohne B'' zu sein. Fügt man zu (AB) und (AB'') die gleichen Segmente (BC) und $(B''C'')$ hinzu, so behaupten wir, es muss

$$(AB) + (BC) > (AB'') + (B''C'')$$

oder

$$AC > AC'' \quad \text{sein.}$$

Denn das Element C'' muss in $(B''C)$ enthalten sein, ohne C zu sein, weil B in $(B''C)$ liegt, sonst wäre das Segment $(B''C'')$ grösser als (BC) (Def. I, § 61 und d). Da C'' in $(B''C)$ enthalten ist, welches ein Theil von (AC) ist, so liegt C'' in (AC) (c, § 27; Def. I, § 62 und Def. I, § 70), daher ist $(AC) > (AC'')$ (Def. I, § 61). Aber $(AC'') \equiv (A'C')$, mithin ist $(AC) > (A'C')$ (c, § 68; Def. II, § 61). Damit ist zugleich auch der dritte Theil des Satzes bewiesen.

g[1]. *Wenn in dem ersten Fall des Satzes g*

$$(BC) > (B'C'),$$

so ist die erste Summe grösser als die zweite.

Wenn in der Richtung von (AB) betrachtet $(BC_1) \equiv (B'C')$ (Bez. I, § 64 und f''', § 63), so ist $(AB) + (BC_1) > (A'B') + (B'C')$ (g); es ist aber $(AB) + (BC) > (AC_1)$ (f), folglich ist

$$(AB) + (BC) > (A'B') + (B'C'). \qquad \text{(d, § 61)}$$

g^{II}. *Je nach den drei Fällen* $(AB) \gtreqless (A'B')$ *ist*

$$(AB) + (AB) \gtreqless (A'B') + (A'B'). \qquad (g, g^1)$$

g^{III}. *Wenn man dadurch, dass man zu den gleichen Segmenten* (AB), $(A'B')$ *andre Segmente* (BC), $(B'C')$ *summirt, gleiche Segmente erhält, so sind* (BC) *und* $(B'C')$ *gleich.*

Denn es ist:

$$(AB) + (BC) \equiv (AC), \quad (A'B') + (B'C') \equiv (A'C').$$

Wenn $(BC) \gtrless (B'C')$ wäre, so könnte (AC) nicht gleich $(A'C')$ sein (f; b, § 61).

g^{IV}. *Wenn man dadurch, dass man zu den Segmenten* (AB), $(A'B')$ *gleiche Segmente addirt, gleiche Resultate erhält, so ist* $(AB) \equiv (A'B')$.

Denn wäre $(AB) \gtrless (A'B')$, während $(BC) \equiv (B'C')$, so erhielte man

$$(AB) + (BC) \gtrless (A'B') + (B'C'), \qquad (g)$$

was jedenfalls widersinnig ist (b', § 61).

g^{V}. *Wenn* $(AB) > (A'B')$ *und man erhält dadurch, dass man zu den Segmenten* (AB), $(A'B')$ *die Segmente* (BC) *und* $(B'C')$ *addirt, gleiche Resultate, so muss* $(BC) < (B'C')$ *sein.*

Es kann nicht $(BC) \equiv (B'C')$ (g, u. b', § 61) und auch nicht $(BC) > (B'C')$ sein (g' und b', § 61), folglich ist $(BC) < (B'C')$ (b).

§ 74. *Bem. I.* In der Grundform ein Segment (BC) von einem Segment (AC) wegnehmen, bedeutet in dem bisherigen Sinn (AC) in zwei consecutive Theile zerlegen, von denen der letzte (BC) ist und alsdann von (BC) abstrahiren; und ein Segment (AC) von einem Segment (AC) wegnehmen bedeutet von dem Segment selbst abstrahiren (§ 7; Def. I, Uebereink. § 31).

Wir können auch sagen:

In der Grundform ein Segment (BC) von einem grösseren Segment (AC) wegnehmen bedeutet ein Segment (AB) von (AC) so zu bestimmen, dass man durch Addition von (BC) zu (AB) das Segment (AC) erhält.

Def. I. Diese Operation nennen wir in einem solchen Fall *Subtraction* des Segments (BC) von dem Segment (AC) und bezeichnen sie so:

$$(AB) \equiv (AC) - (BC), \qquad (1)$$

indem wir für dieselbe, wie für die Subtraction der Zahlen (Bez. II, § 51) das Zeichen — gebrauchen.

Das Segment (AB) heisst *Differenz* oder *Rest.*

a. *Die Operation des Wegnehmens eines Segments* (BC) *von einem Segment* (AC) *ist eindeutig.*

Denn, nehmen wir an, man könne zwei verschiedene Segmente erhalten (AB), (AB'), so wäre

$$(AB) + (BC) \equiv (AC), \quad (AB') + (B'C) \equiv (AC),$$

worin $(B'C)$ nach der Voraussetzung identisch mit (BC) ist. Das heisst, die Addition der Formen (BC), $(B'C)$ zu (AB), (AB') [welche eindeutig ist (a, § 72)] würde identische Formen ergeben, was widersinnig ist (g, § 73; b', § 61).

Bem. I. Um das Segment (BC) von dem Segment (AC) wegzunehmen, genügt es also das Segment (CB) in dem zu (AC) entgegengesetzten Sinn zu durchlaufen.

b. *Wenn von zwei gegebenen Segmenten* (AB) *und* $(A'B')$ *das erste grösser, ebenso gross oder kleiner als das zweite ist und man zieht von ihnen die gleichen Segmente* (CB) *bezüglich* $(C'B')$ *von derselben Richtung wie* (AB) *und* $(A'B')$ *ab, so ist die erste Differenz grösser, ebenso gross oder kleiner als die zweite.*

Da man

$$(AB) \equiv (AC) + (CB), \quad (A'B') \equiv (A'C') + (C'B')$$

erhält, so könnte im ersten Fall, wenn nicht $(AC) > (A'C')$ wäre, das Segment (AB) nicht grösser als $(A'B')$ sein (g, § 73; b, c, § 61). Aehnlich ist es in den beiden andern Fällen.

§ 75. a. $(AB) \equiv (AB) + (BC) - (BC) \equiv (BC) - (BC) + (AB)$.

Denn wenn man eine schon gesetzte Sache wegnimmt, erhält man das Resultat Null (§§ 7 und 31). Es bleibt daher (AB) übrig, wenn man den Theil (BC) zu ihm erst zufügt und dann wegnimmt. Ebenso erhält man (AB), wenn man zu keinem Segment das Segment (AB) hinzufügt.

b. *In einer gegebenen Richtung ist* $(AA) \equiv (AC) - (AC)$.

Es reicht aus vorauszusetzen, A und B fielen in (1), § 74 zusammen (Def. III, § 57).

c. *Das Resultat der Operation* $(AC) - (AC)$ *ist von der Richtung, in welcher der Theil* (AC) *von* A *aus durchlaufen wird, unabhängig.*

Denn, wenn (AC) gegeben ist, so kann man in dem System in der entgegengesetzten Richtung von A aus ein Segment (AC') in Betracht ziehen, welches mit (AC) identisch ist (a', § 70), und da die Operation $(AC) - (AC)$ eindeutig ist (a, § 74 oder a, § 11) (oder da man das ganze (AC) von C aus in entgegengesetzter Richtung durchläuft), so folgt, dass die Resultate dieser mit (AC') und (AC) vorgenommenen Operation identisch sind (a^{III}, § 60 oder b, § 74).

§ 76. *Def. I.* Da $(AC) - (BC)$ im Allgemeinen ein Segment der Grundform gibt, wenn $(AC) > (BC)$ und um keine Ausnahme zu machen (wie bei der Zahl Null), werden wir statt zu sagen $(AC) - (AC)$ liefere kein Segment der Form (Def. III, § 62), sagen, es liefere *ein Segment Null.* Wir schreiben, wie bei den Zahlen

$$(AA) \equiv (AC) - (AC) \equiv 0 \qquad (1)$$

a. $(AC) - (AC) \equiv (A'C') - (A'C')$, *wenn* (AC) *und* $(A'C')$ *zwei beliebige Segmente von derselben oder entgegengesetzten Richtung sind.*

Denn

$$(A'C') - (A'C') + (AC) \equiv (AC), \qquad (\text{a, § 75})$$

woraus:

$$(A'C') - (A'C') \equiv (AC) - (AC). \qquad (\text{b, § 74})$$

Bem. I. Weil alle Elemente identisch sind (Def. I, § 57) und die bis jetzt betrachteten Segmente wenigstens zwei verschiedene Elemente enthalten (Def. III, § 62), während das Segment Null nicht Elemente hat, so folgt:

Das Element stellt das Segment Null dar [b, § 75 und (1)].

§ 77. *Def. I.* Wenn man dem Verhältniss von Ganzem und Theil nicht Rechnung trägt (Def. I, § 61), so kann man die Operation des Wegnehmens des Segments (BC) von dem Segment (AC) *als eine Vereinigung* des Segments (CB) mit dem Segment (AC) ansehen. *Man behält bei dieser neuen Vereinigung dasselbe Zeichen bei* und durchläuft (AC) und (CB) in ihrer Richtung, wobei (CB) die zu (AC) entgegengesetzte Richtung hat (Bem. I, § 72)

$$A \ldots B \ldots C.$$

Bem. I. Diese Definition findet ihre Rechtfertigung auch durch die folgende Betrachtung. Man denke sich, (CB) habe dieselbe Richtung wie (AC) und die Elemente von (BC) würden alsdann zweimal wiederholt. Anstatt nun $(AC) + (CB)$, das letztere in derselben Richtung wie (AC), als Resultat der Vereinigung anzusehen, betrachte man nur das Segment (AB) als Resultat. *Natürlich liefert in diesem Fall die Vereinigung nicht das Ganze aus den Theilen,* weil (AB) nicht das Ganze $(AC) + (CB)$ ist, insofern in ihm der Theil $(BC) + (CB)$ — den letzteren in der obigen Art in derselben Richtung betrachtet — ausgelassen ist.

a. $$(AC) + (CB) \equiv (AC) - (BC), \qquad (1)$$

wenn (CB) *die entgegengesetzte Richtung von* (AC) *hat* (Def. I; Def. I, § 74).

a′. $$(BC) + (CB) \equiv (BC) - (BC) \equiv 0. \qquad (2)$$

Es genügt, in (1) A mit B zusammenfallen zu lassen.

a″. $$0 + (CB) \equiv 0 - (BC) \qquad (3)$$

Es genügt, in (1) A mit C zusammenfallen zu lassen [(1), § 76].

Bem. II. Die Relation (2) bedeutet jedoch nicht, dass (BC) und (CB) identisch sind. Denn $(BC) + (CB)$ heisst, dass man von (BC) das Segment (BC) wegnimmt oder von (BC) abstrahirt, was zwar $(BC) \equiv (BC)$ ergibt, aber nicht $(BC) \equiv (CB)$.

Def. II. Wie wir aber zu einem Segment (AC) ein beliebiges Segment (CB) nach der dieser Operation gegebenen Ausdehnung auch dann addiren können, wenn (CB) die entgegengesetzte Richtung wie (AC) hat, so *dehnen wir auch die Operation des Wegnehmens aus, indem wir annehmen,* (BC) *sei grösser als* (AC) *und als Resultat der Subtraction das in der Richtung von* (CB) *durchlaufene Segment* (AB) *betrachten.*

b. *Das Segment* (BC) *zu einem Segment* (AC) *addiren oder das Segment* (CB) *von einem Segment* (AC) *wegnehmen, sind identische Operationen.*

Dies geht unmittelbar aus der den Operationen des Vereinigens und Wegnehmens gegebenen Ausdehnung hervor (Def. I und II).

b′. *Die Operation des Vereinigens in dem neuen Sinn ist ebenfalls eindeutig.*

Dies resultirt unmittelbar aus b und den Eigenschaften a, § 72; a, § 74; und c′, § 68 und a, § 65.

c. (4) $$+(CB) \equiv -(BC).$$

Dies folgt aus (3); dem Satz a^{III}, § 60 und aus b.

Bem. III. Das Zeichen + bedeutet, dass (CB) in der Richtung von C nach B durchlaufen werden muss; das Zeichen — auf der rechten Seite der Gleichung (4), dass (BC) in der entgegengesetzten Richtung von C nach B durchlaufen werden soll.

Bez. I. Um anzuzeigen, dass ein von dem System getrenntes Segment (CB) in seiner Richtung mit C beginnend durchlaufen werden soll, sind keine besondren Zeichen nöthig (Bez. I, § 64). Wir können also ohne Zweideutigkeit setzen:

(5) $$+(CB) \equiv (CB).$$

Wollen wir aber das Segment (CB) in seiner Richtung mit dem Symbol (BC) bezeichnen, so müssen wir das Zeichen — vorsetzen, damit bestimmt ist, dass das Segment (BC) von C nach B also in der entgegengesetzten Richtung zu durchlaufen ist. Es ist also:

c′. (4′) $$(CB) \equiv -(BC),$$

was auch aus (4) in Verbindung mit (5) hervorgeht (b, § 9).

c″. $$(AC) + (CB) \equiv (AC) + [-(BC)] \equiv (AC) - (BC).$$

Es genügt in (1) — (BC) in Klammern geschlossen an Stelle von (CB) zu substituiren.

Def. III. Bisher haben wir consecutive Segmente der Form betrachtet, die dieselbe Richtung hatten (Def. VII, § 62). Nachdem wir die Operation des Vereinigens ausgedehnt haben, werden wir auch diejenigen Segmente consecutiv nennen, die ein gemeinschaftliches Ende und entgegengesetzte Richtung haben.

d. *Für die Addition und Subtraction der consecutiven Segmente der Grundform gilt das Associationsgesetz.*

Es ist nämlich

(6) $$[(AB) + (BC)] + (CD) \equiv (AB) + [(BC) + (CD)].$$

In dieser Formel ist auch der Fall der Subtraction enthalten, wenn man die Addition im Sinn der Def. I auffasst.

Denn es ist

$$(AB) + (BC) \equiv (AC)$$
$$(BC) + (CD) \equiv (BD)$$
$$(AC) + (CD) \equiv (AD) \equiv (AB) + (BD). \quad \text{(b′; e, § 8 oder c, § 60)}$$

e. $$(AB) + (BC) + (CA) \equiv 0,$$

die drei Elemente A, B, C mögen sein, welche sie wollen.

Denn man erhält aus den Beziehungen

$$(AB) + (BC) \equiv (AC), \ (AC) - (AC) \equiv 0 \quad \text{(Def. I und Def. I, § 76)}$$
$$(AB) + (BC) - (AC) \equiv 0. \quad \text{(b, § 74)}$$

Aber das Segment AC hinwegnehmen ist dasselbe wie das Segment (CA) addiren (b), daher:

$$(AB) + (BC) + (CA) \equiv 0. \qquad \text{(Def. I)}$$

§ 78. a. *Wenn man das Segment (BC) zu dem Segment (AB) von einem beliebigen Element der Grundform aus addirt, so erhält man identische Resultate, welches auch die Richtung sei, in der die Operation ausgeführt wird.*

Nehmen wir an, (AB) und (BC) hätten dieselbe Richtung (Def. III, § 67). Das Element von dem man ausgeht sei zuerst A selbst und nehmen wir an, die Addition des Segments (BC) zu dem Segment (AB) sei von A aus in einer der Richtungen der Form ausgeführt. Man erhält $(AC) \equiv (AB) + (BC)$ und es gibt nur ein Segment (AC), das in der gegebenen Richtung diese Eigenschaft besitzt (b, § 68; b, § 69 und Def. I, § 70).

Geht man in der entgegengesetzten Richtung von A aus, so gibt es nur ein Segment $(AB_1) \equiv (AB)$ (Def. I, § 70; a', § 70) und auch nur ein Segment $(B_1C_1) \equiv (BC)$ und schliesslich nur ein Segment $(AC') \equiv (AC)$. Wir behaupten, dass $(AC') \equiv (AC_1)$.

Denn (AC') muss wie (AC) die Summe zweier consecutiver Segmente von derselben Richtung wie (AC') sein (b, § 60), von denen das erste (AB) oder auch (AB_1) gleich und das zweite (B_1C') oder auch (B_1C_1) gleich ist (b, § 69 und Def. I, § 70).

Wenn das Segment (BC) die entgegengesetzte Richtung von (AB) hat, so gilt eine analoge Schlussweise (g^{IV}, § 73 oder a, § 69 und g^{IV}, § 73).

Schliesslich ist es gleichgültig, ob man die Operation von dem Element A oder einem beliebigen Element X der Form aus vollzieht, weil das System von A aus in einer oder der andern Richtung mit demselben System von X aus in derselben oder der umgekehrten Richtung identisch ist (a oder a', § 70), Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

a'. *Wenn man zu den beiden Seiten einer zwischen consecutiven Segmenten bestehenden Gleichung dasselbe Segment addirt oder von ihnen wegnimmt, so sind die Resultate identisch.*

Das heisst, wenn

$$(AB) + (BC) \equiv (A'B') + (B'C'),$$

so ist:

$$(AB) + (BC) + (CD) \equiv (A'B') + (B'C') + (C'D'), \text{ wenn } (CD) \equiv (C'D').$$

Denn es ist:

$$(AC) + (CD) \equiv (A'C') + (C'D'). \qquad \text{(a; Def. I und II, § 77)}$$

b. *Man kann zu einem Segment (AB) immer ein und nur ein Segment (BC) addiren, um ein gegebenes Segment zu erhalten, das grösser oder kleiner als (AB) ist und dieselbe oder die umgekehrte Richtung hat.*

(AC) sei das dem gegebenen gleiche Segment von derselben oder der entgegengesetzten Richtung wie (AB) (a', § 70; f''', § 63). Sind die Elemente A, B, C gegeben, so ist das Segment (BC) vollständig bestimmt und gibt es in der Grundform nur ein solches Segment (Hyp. II, Def. I, § 70; c', § 68

und a § 65), so dass jedes andre Segment BC' von derselben Richtung wie (BC) zu (AB) addirt ein von (AC) verschiedenes Segment ergibt, es sei denn C und C' fielen zusammen (Def. III, § 57; a, § 65 und f, § 73).

5.

Segmente, die Vielfache und Factoren eines gegebenen Segments der Grundform sind und ihre Symbole. — Scala, Einheit, Anfang und Gebiet derselben. — Bedingungen für die Gleichheit der Scalen. — Relative Gleichheit zweier Segmente in Bezug auf die Einheit. — Segmente, die in Bezug auf ein andres Segment zu vernachlässigen sind.

§ 79. *Bem. I.* Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, die Grundform sei offen; es wird uns später leicht sein auf den Fall der geschlossenen Form überzugehen.

Def. I. Wenn man in der Grundform von einem gegebenen Element A an eine Anzahl n (Bem. V, § 47) von consecutiven Segmenten derselben Richtung betrachtet, die einem gegebenen Segment (AB) dieser Richtung gleich sind, so heisst das aus der successiven Addition der n Segmente resultirende Segment (AD) *Vielfaches* des gegebenen Segments (AB) *nach der Zahl n* und wir sagen (AD) *enthält $n$mal das Segment* (AB).

Wir sagen auch, ein Segment (AC) sei *Vielfaches nach der Zahl n* eines andern Segments $(A'B')$ derselben oder einer andern Grundform (Hyp. I), wenn es die Summe von n consecutiven $(A'B')$ gleichen Segmenten ist.

Def. II. Das Segment (AB) oder $(A'B')$ heisst dagegen *Factor von* (AC) *nach der Zahl n.*

Wenn (AC) zwei, drei, vier, u. s. w. $n$mal (AB) enthält, heisst es *das doppelte, dreifache, vierfache u. s. w. $n$fache* von (AB) oder von $(A'B')$ und (AB) oder $(A'B')$ *die Hälfte, der dritte, vierte, u. s. w. n^{te} Theil* von (AC).

Bez. I. Ein Segment (AC), das ein Vielfaches nach der Zahl n eines Segments (AB) ist, bezeichnen wir mit dem Symbol $(AB)\,n$.

Einen n^{ten} Theil (AB) eines Segments (AC) bezeichnen wir mit dem Symbol $\frac{(AC)}{n}$ oder auch $(AC)\cdot\frac{1}{n}$ oder $(AC)\frac{1}{n}$.

a. $$(AB) = \frac{(AC)}{n} = (AC)\cdot\frac{1}{n} = (AC)\frac{1}{n}.$$

Denn $\frac{(AC)}{n}$, $(AC)\cdot\frac{1}{n}$, $(AC)\frac{1}{n}$ können, da sie denselben Theil (AB) bezeichnen, demselben substituirt werden, das heisst, sie sind einander gleich (b, § 9).

a'. $$(AB)m = \frac{(AC)}{n}m = (AC)\cdot\frac{1}{n}m = (AC)\frac{1}{n}m \quad (m \gtreqless n). \quad \text{(a u. b, § 9)}$$

Bem. I. $\frac{(AC)}{n}m$ bedeutet, dass das aus dieser Operation resultirende Segment m n^{te} Theile von (AC) enthält.

Bez. II. Wir gebrauchen auch das Symbol $(AC)\frac{m}{n}$, um dieses Resultat zu bezeichnen.

b. $$(AB)m = \frac{(AC)}{n} m = (AC)\frac{1}{n} m \equiv (AC)\frac{m}{n}$$

$$\equiv (AC)\frac{m'}{n} \pm (AC)\frac{m''}{n}, \quad (m = m' \pm m'').$$

Denn $\frac{(AC)}{n}m$, $(AC)\frac{m}{n}$, $(AC)\frac{m'}{n} \pm (AC)\frac{m''}{n}$ stellen dasselbe Segment dar und können mithin einander substituirt werden (b, § 9).

b'. Wenn $m \lesseqgtr n$, *so ist* $(AC) \gtreqless (AC)\frac{m}{n}$.

Denn, wenn $m = n$, so erhält man aus (AC) dasselbe Segment (AC) (Def. II und I). Wenn $m > n$, so ist $m = n + r$ (g, § 50) und daher $(AC)\frac{m}{n} \equiv (AC)\frac{n}{n} + (AC)\frac{r}{n}$ (b), mithin $(AC)\frac{m}{n} > (AC)$ (Def. I, § 72 und Def. I, § 61). Analog ist es, wenn $m < n$ (Def. I, § 74 und Def. I, § 61).

b''. $$(AC)\frac{0}{n} \equiv 0.$$

Denn dies heisst, dass das Segment $\frac{(AC)}{n}$ überhaupt nicht betrachtet wird (Bem. I, § 54).

c. $$\frac{(AC)}{n}\frac{m}{n'} \equiv (AC)\frac{m}{nn'}.$$

Nehmen wir zuerst an, der n^{te} Theil (AB) von (AC) sei Vielfaches nach der Zahl n' eines Segments (AB'). Man erhält:

$$(AB') \equiv (AB)\frac{1}{n'} \qquad \text{(a)}$$

und weil

$$(AB) \equiv \frac{(AC)}{n}, \qquad \text{(a)}$$

so ist

$$(AB') \equiv \frac{(AC)}{n}\frac{1}{n'}. \qquad \text{(b, § 9)}$$

Und da (AB') ein Factor von (AB) nach der Zahl n' ist, so ist (AC) Vielfaches von (AB') nach der Zahl nn' (Def. I, II, § 52) oder:

$$\frac{(AC)}{n}\frac{1}{n'} \equiv \frac{(AC)}{nn'} \equiv (AC)\frac{1}{nn'} \qquad \text{(Bez. I und a)}$$

und daher:

$$\frac{(AC)}{n}\frac{1}{n'}m \equiv \frac{(AC)}{nn'}m \equiv (AC)\frac{1}{nn'}m \qquad \text{(Bez. I; b, § 9)}$$

oder:

$$\frac{(AC)}{n}\frac{m}{n'} \equiv \frac{(AC)}{nn'}m \equiv (AC)\frac{m}{nn'}. \qquad \text{(b)}$$

c'. $$\frac{(AC)}{n}\frac{1}{n} \equiv (AC)\frac{1}{n^2}. \qquad \text{(Bez. II, § 52)}$$

Def. III. Das Segment $(AC)\frac{m}{n}$ heisst auch Bruch von (AC).[1])

---

1) Hier könnten wir die gebrochenen Zahlen definiren, wie wir es in unsern Fundamenten der Geometrie als geschehen voraussetzen, ohne uns jedoch mit den Operationen zu beschäftigen, die man mit ihnen vornimmt.

d. *Wenn ein Segment der Grundform grösser, gleichgross oder kleiner als ein andres Segment derselben Form oder verschiedener Grundformen ist, so ist ein Segment, das Vielfaches des ersten ist, grösser, gleichgross oder kleiner als ein Segment, das Vielfaches des zweiten nach derselben Zahl ist.*

Es sei $(AB) \stackrel{<}{\stackrel{=}{>}} (A'B')$; wir behaupten, dass man für jedes beliebige n, wenn n eine gegebene Zahl der Reihe (I) (§ 46) ist, erhält:

$$(AB)n \stackrel{<}{\stackrel{=}{>}} (A'B')n.$$

Wir wissen bereits, dass

$$(AB) + (AB) \stackrel{<}{\stackrel{=}{>}} (A'B') + (A'B') \qquad (g^{II}, § 73)$$

oder:

$$(AB)2 \stackrel{<}{\stackrel{=}{>}} (A'B')2. \qquad (Bez. I)$$

Wenn nun die Eigenschaft für eine gegebene Zahl m besteht, ist leicht zu beweisen, dass sie auch für die Zahl $m+1$ besteht. Denn es sei:

$$(AB)m \stackrel{<}{\stackrel{=}{>}} (A'B')m$$

es ist dann:

$$(AB)m + (AB) \stackrel{<}{\stackrel{=}{>}} (A'B')m + (A'B') \qquad (g \text{ und } g^{I}\ § 73)$$

oder:

$$(AB)(m+1) \stackrel{<}{\stackrel{=}{>}} (A'B')(m+1). \qquad (Bez. I)$$

Der Satz gilt aber für $m = 2$, folglich gilt er allgemein für eine beliebige gegebene Zahl n (c, § 46 und 1, § 39).

d'. *Wenn (AC), $(A'C')$ Vielfache nach der Zahl n der Segmente (AB), $(A'B')$ sind und $(AC) \stackrel{>}{\stackrel{=}{<}} (A'C')$, so ist $(AB) \stackrel{>}{\stackrel{=}{<}} (A'B')$.*

Wenn $(AC) = (A'C')$ ist, so muss auch $(AB) = (A'B')$ sein, weil sonst (AC) nicht identisch mit $(A'C')$ sein könnte (d; b', § 61). Wenn dagegen $(AC) < (A'C')$ ist, so kann nicht $(AB) = (A'B')$ sein, sonst wäre $(AC) = (A'C')$ (d; b, § 61). Wäre aber $(AB) > (A'B')$, so wäre $(AC) > (A'C')$ gegen die Voraussetzung (d; c, § 61), daher ist $(AB) < (A'B')$. Daraus geht hervor, dass im dritten Fall $(AB) > (A'B')$ ist.

d''. *Wenn man n consecutive in derselben Richtung liegende Segmente (AA_1), (A_1A_2), ..., $(A_{n-1}A_n)$ hat und es ist $(AA_1) < (A_1A_2) < \ldots < (A_{n-1}A_n)$, so ist:* $(AA_1)n < (AA_n)$ *und* $(A_{n-1}A_n)n > (AA_n)$.

Es ist klar, dass

$$(AA_1)2 < (AA_2). \qquad (f, § 73 \text{ und Bez. I})$$

Setzen wir voraus, der Satz gelte für $n-1$, so gilt er für n (g^I § 73), er gilt aber für $n=2$, desshalb ist er für jedes beliebige n gültig (c, § 46; l, § 39). Ebenso beweist man, dass

$$(A_{n-1}A_n)\,n > (AA_n). \quad (g^I \text{ und } g, \S\ 73;\ c, \S\ 46 \text{ und } l, \S\ 39)$$

e. *Wenn* $(AB) \equiv (AC)\frac{m}{n}$ *und* $(AB) \underset{>}{\overset{<}{\equiv}} (AC)$, *so ist* $m \underset{>}{\overset{<}{\equiv}} n$ *und umgekehrt.*

Denn, wenn $(AB) \equiv (AC)$, so ist $m=n$, denn wäre $m=n-r$, so wäre

$$(AC)\frac{m}{n} \equiv (AC) - (AC)\frac{r}{n} \quad \text{(b und b')}$$
$$< (AC)$$

und daher auch

$$< (AB), \quad \text{(Def. I, II, § 61)}$$

was widersinnig ist (b', § 61).

Ebenso verhält es sich, wenn man $m>n$ voraussetzt, desshalb ist $m=n$ (Def. II, § 49).

Wenn $(AB) < (AC)$, so kann nicht $m=n$ sein, sonst wäre $(AB) \equiv (AC)$ (b', § 79 und b, § 61). Es kann auch nicht $m>n$ sein; denn wäre $m=n+r$, so kann man wie eben beweisen, dass $(AC)\frac{m}{n} > (AC)$ und daher auch $(AB) > (AC)$ (Def. I, II, § 61), was widersinnig ist (c, § 61).

Ebenso beweist man, dass, wenn $(AC) > (AB)$, $m>n$ sein muss.

Wenn umgekehrt $m=n$, so ist $(AB) \equiv (AC)$ (b', § 79 und b', § 61).

Ist $m \gtrless n$, so ist nach den vorstehenden Beweisen $(AC)\frac{m}{n} \gtrless (AC)$, woraus e folgt.

§ 80. *Def. I.* Von einem Element A in der Grundform in einer gegebenen Richtung anfangend, betrachte man eine unbegrenzte Reihe erster Art von consecutiven Segmenten, die einem gegebenen Segment (AB) gleich sind (Hyp. II; a, § 68; Def. III, § 39).

Diese Reihe heisst *Scala*, (AB) heisst ihre *Maasseinheit* oder *Einheit* und das Element A ihr *Anfang*.

Bem. I. Von dem Segment (AB) selbst setzen wir für jetzt nur voraus, dass es ein gegebenes von zwei Enden A und B begrenztes Segment ist (Def. III und IV, § 62). Wir bemerken noch, dass wir uns da, wo wir zur Führung der Beweise nöthige Sätze citiren, nur auf das homogene System einer Dimension oder das in der Position seiner Theile identische System beziehen und dass wir nicht jedesmal daran erinnern werden, dass nach Hyp. II die Grundform auch ein in der Position seiner Theile identisches System einer Dimension ist und dass das letztere homogen ist (Def. I, § 70; Def. I, § 68).

Def. II. Die zweiten Enden der der Einheit gleichen Segmente der Scala nennen wir *Theilungs*elemente der Scala.

Def. III. Unter *Gebiet* der Scala verstehen wir das unbegrenzte Segment der Grundform, das durch *alle* in der Richtung der Scala consecutiven Segmente derselben bestimmt wird.

Bem. II. Die Scala ist eine Reihe und ihr *Gebiet* das geordnete aus ihr abgeleitete Ganze (Bem. § 28). Wenn Zweideutigkeiten nicht möglich sind, können wir das eine Wort dem andern substituiren.[1])

---

1) Siehe die zweite Anm. zu § 62.

a. *Das Gebiet der Scala ist grösser als jedes begrenzte Segment* (BC), *dessen Enden gegeben sind und der Scala angehören, und als jedes ihr angehörige unbegrenzte Segment, dessen erstes Ende mit dem Anfang nicht zusammenfällt.*

Nehmen wir zuerst an, B falle mit A zusammen. Es ist klar, dass (AC) nicht das ganze Gebiet der Scala ist, weil die Reihe, welche es bestimmt, unbegrenzt ist (Def. I, Def. III). Wenn daher $(C \ldots X \ldots)$ der übrig bleibende Theil ist, so ist das Gebiet der Scala $(AC) + (C \ldots X \ldots)$ und folglich grösser als (AC) und auch als $(C \ldots X \ldots)$ (Def. I, § 61). Ist dagegen B nicht A, so ist das Gebiet der Scala

$$(AB) + (BC) + (C \ldots X \ldots)$$

und da es grösser als (AC) und (AC) grösser als (BC) ist, so ist das Gebiet der Scala auch grösser als (BC) (d, § 61).

b. *Die Segmente, welche successive durch den Anfang in Verbindung mit den Theilungs-Elementen der Scala bestimmt werden oder die der Einheit* (AB) *gleichen consecutiven Segmente selbst entsprechen eindeutig und in derselben Ordnung den Zahlen der Reihe* (I) (Def. I; b, Def. III, § 46).

b'. *Die Theilungselemente der Scala von dem Anfang an entsprechen eindeutig und in derselben Ordnung den Zahlen der Reihe* (I).

Denn sie entsprechen eindeutig und in derselben Ordnung den (AB) gleichen consecutiven Segmenten der Scala (c', § 68; b und Bem. I, § 64), welche eindeutig und in derselben Ordnung den Zahlen der Reihe (I) entsprechen (b). Damit ist der Satz bewiesen (f, § 42).

Bez. I. Wir können also die Theilungselemente der Scala vom Anfang an mit den Zahlen der Reihe (I) bezeichnen und die Theilungselemente der Scala *stellen* mithin in der Grundform die Zahlen der Reihe (I) *dar.*

c. *Der Anfang stellt die Zahl Null dar.*

Denn es ist $(AB) - (AB) \equiv 0$ und wenn (AB) die Einheit der Zahl darstellt (Def. I, § 45), so ist $1 - 1 = 0$ (b, § 54). Auf der andern Seite stellt das Element das Segment Null dar (Bem. I, § 76); folglich stellt das Element A die Zahl 0 dar.

Bem. III. Die Darstellung der Elemente einer Reihe durch die Zahlen von (I) bedeutet noch nicht, dass die consecutiven Segmente gleich sind, wie es bei der Scala der Grundform der Fall ist. Stellt (AB) die Einheit 1 der Zahl dar, so wird jedes Vielfache von (AB) nach der Zahl n, nämlich $(AB)n$ auf der Scala durch die Zahl n dargestellt (Def. I, Bez. I, § 79). Bei derartigem Zusammenhang besitzen mithin die den Zahlen entsprechenden Segmente dieselben Eigenschaften in Bezug auf die Addition und Subtraction (diese letzteren im Sinn der §§ 72, 73 betrachtet) wie die Zahlen der Reihe (I). In diesem Fall gilt das Commutationsgesetz der Addition der Zahlen ohne Weiteres für die Addition der consecutiven Segmente der Scala (h, § 48). Das bedeutet jedoch nicht, dass diese Eigenschaft auch dann für die Addition zweier beliebiger consecutiver Segmente gilt, wenn die Form ausser den der Einheit (AB) gleichen Segmenten oder Vielfachen von (AB), auch andre Segmente enthält.

Bez. II. Wenn ein Segment (AB') existirt, das der n^{te} Theil von (AB) ist, so ist jedes (AB) gleiche Segment der Scala aus n dem (AB') gleichen Theilen zusammengesetzt (Def. I und II, § 79 und b, § 60). Wir können diese Theile successive mit

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{m}{n}, \ldots \qquad \text{(b, § 79)}$$

bezeichnen.

d. *Wenn (CD) einem Segment gleich ist, das von zwei gegebenen Elementen des Gebiets der Scala mit der Einheit (AB) begrenzt wird und $(AB) < (CD)$ ist, so gibt es immer eine solche Zahl n der Reihe (I), dass*

$$(AB)n \mathrel{\substack{=\\<}} (CD) < (AB)(n+1).$$

Die Enden des Segments, dem (CD) gleich ist, sind gegebene Elemente des Gebiets der Scala und weil dieses durch alle consecutiven Segmente der Scala selbst bestimmt wird (Def. III), so sind seine gegebenen Elemente entweder Theilungselemente (Def. II) oder sie gehören zwei consecutiven Segmenten an (Def. I, § 62 und II, § 29 und Def. I, § 27). Denn wenn sie einem einzigen (AB) gleichen Segment angehörten, so wäre nicht $(AB) < (CD)$ (d, § 73 und Def. I, II, § 61).

(AA') sei ein dem gegebenen Segment (CD) gleiches Segment der Scala (Def. I, § 68 und c, § 60). Da das Ende A' ein gegebenes Element der Scala ist, so gehört es einem gegebenen Segment derselben an und ist desshalb entweder ein Theilungselement oder es liegt zwischen zwei Enden eines solchen Segments. Diese Enden entsprechen zwei bestimmten successiven Zahlen n und $n+1$ der Reihe (I) (b'). Man erhält daher:

$$(AB)n \mathrel{\substack{=\\<}} (AA') < (AB)(n+1)$$

oder

$$(AB)n \mathrel{\substack{=\\<}} (CD) < (AB)(n+1). \qquad \text{(Def. II, § 61)}$$

§ 81. a. *Die Gebiete zweier Scalen mit zwei gleichen Einheiten sind in Bezug auf die Reihe der Segmente der beiden Scalen gleich.*

Denn man kann einen Identitätszusammenhang zwischen den der Einheit gleichen consecutiven Segmenten in der einen und den gleichen consecutiven Segmenten in der andern Reihe feststellen, indem man die Anfänge einander entsprechen lässt (Def. I, § 60 und d, § 79). Daher sind in Bezug auf die Anordnung der Segmente der Scalen in Reihen die Gebiete derselben gleich (b' und Bem. VII, § 60).

b. *Sind zwei Scalen mit den Einheiten (AB) und $(A'B')$ derart gegeben, dass $(A'B') < (AB)$ und $(A'B')n > (AB)$, worin n eine beliebige Zahl der Reihe der natürlichen Zahlen ist, so sind die Gebiete der beiden Scalen, wenn sie es nicht in absolutem Sinn sind, in Bezug auf die Reihe der Segmente der beiden Scalen gleich.*

A und A' seien die Anfänge der beiden Scalen. In der ersten kann man von A aus in der Richtung der Scala ein mit $(A'B')$ identisches Segment (AC) betrachten (a' § 70). Nach den Bedingungen des Satzes ist daher:

$$(AC) < (AB) \qquad (1)$$

$$(AC)n > (AB). \qquad \text{(Def. II, § 61)} \qquad (2)$$

Aus (1) folgt für jedes beliebige m

$$(AC)m < (AB)m. \qquad \text{(d, § 79)}$$

Daher ist jedes Segment des Gebiets der Scala von (AC) vom Anfang an ein Segment des Gebiets der Scala der Einheit (AB) (Def. III, § 80). Aus (2) aber erhält man

$$(AC)nm > (AB)m. \qquad \text{(d, § 79)}$$

Es ist desshalb jedes Segment des Gebiets der Scala von (AB) Segment der Scala von (AC). Jedes Element der einen ist ein Element der andern, daher fallen die Gebiete der beiden Scalen der Einheiten (AB), (AC) zusammen (Def. III, § 80 und Def. III und I, § 62) und ihre Gleichheit ist absolut (Def. III, § 9).

Nach dem Satz (a) aber ist die Scala der Einheit (AC) in Bezug auf die Anordnung in Reihen mit der Scala der Einheiten $(A'B')$ von derselben Form oder in verschiedenen Grundformen identisch (Hyp. I und c, Bem. V, § 60 und Uebereink. § 69). Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Beweis erhält man mithin auch:

b'. *Zwei gegebenen Scalen mit den Einheiten (AB) und $(A'B')$, welche den Beziehungen (1) und (2) in derselben Grundform mit demselben Anfang und in derselben Richtung genügen, fallen zusammen* (b: Def. V, § 57).

b''. *Wenn zwei Scalen gegeben sind und die Einheit der einen ist ein Vielfaches der Einheit der andern oder die eine Einheit enthält eine Anzahl m von Factoren der andern, so sind die Gebiete der beiden Scalen, wenn sie es nicht absolut sind, in Bezug auf die Reihen ihrer Segmente gleich.*

Denn ihre Einheiten (Def. I, § 80) genügen den Bedingungen des Satzes b. In der That, wenn die Einheit (AB) der einen mit der Einheit (AB') der andern identisch ist, so ist b'' der Satz a.

Wenn $(AB) \equiv \frac{(AB')}{n} m < (AB')$ ist (Def. I, II, § 79) und man wählt m' der Art, dass $mm' > n$ ist [dazu genügt es wenigstens $m' = n + 1$ zu nehmen (Def. I, § 52)], so erhält man

$$(AB)m' \equiv \frac{(AB')}{n} mm' \equiv (AB')\frac{mm'}{n} > (AB'). \qquad \text{(b; b' § 79)}$$

Wenn dagegen $\frac{(AB')}{n} m > (AB')$, so ist auch $m > n$ (e, § 79). Nimmt man daher das Vielfache von (AB') wenigstens nach der Zahl m, so ist

$$(AB')m > \frac{(AB')}{n} m \equiv (AB).$$

c. *Ist in der Grundform eine Scala von einer (AD) gleichen Einheit gegeben und eine andre mit der Einheit $(A'B)$ und dem Anfang A' und es gibt keine solche Zahl n, dass*

$$(AD)n > (A'B), \text{ wenn } (AD) < (A'B)$$

oder dass

$$(A'B)n > (AD), \text{ wenn } (AD) > (A'B)$$

ist, so ist das Gebiet der Scala der Einheit (AD) *demjenigen der Einheit* $(A'B)$ *nicht gleich.*

Wir können annehmen, die Scalen der Einheiten (AD) und (AB) hätten denselben Anfang, in derselben Grundform und derselben Richtung (b, § 70; Hyp. I und b, § 60). Im ersten Fall gibt es im Gebiet der Scala von (AD) kein Segment $(AD)n$, welches auch die Zahl n der Reihe (I) sein mag, das grösser als (AB) und daher auch als ein beliebiges Segment (AC) wäre, welches den Bedingungen des Satzes b in Bezug auf (AB) genügt und kleiner als (AB) ist. Denn, wenn man $(AC)m \overline{\overline{\gtrless}} (AB)$ annimmt und es wäre $(AD)n \overline{\overline{\gtrless}} (AC)$, so erhielte man $(AD)nm \overline{\overline{\gtrless}} (AB)$ (d, § 79 und d, § 61), was der Voraussetzung widerspricht. Es ist daher einleuchtend, dass die unbegrenzte Reihe erster Art von consecutiven (AD) gleichen Segmenten, welche das Gebiet der Scala der Einheiten (AD) bilden (Def. III, § 80), keine Elemente ausser dem ersten Segment in der Scala mit dem Anfang A und der Einheit (AB) hat. Der Satz ist daher in diesem Fall bewiesen (a; c und Bem. V, § 60).

Im zweiten Fall dagegen liegt (AD) nicht vollständig in dem Gebiet der Scala der Einheiten (AB) und daher auch nicht in demjenigen eines Segments (AC), das grösser als (AB) ist, dieselbe Richtung wie (AB) hat und den Bedingungen des Satzes b in Bezug auf (AB) genügt (b'). Der Satz gilt auch in diesem Fall für (AD) und für jedes ihm gleiche Segment (a; c und Bem. V, § 60).

c'. *Wenn das Gebiet der Scala der Einheiten* $(A'B')$ *demjenigen der* (AB) *gleich ist, so gibt es immer eine solche Zahl* n, *dass*

$$(A'B')(n-1) \overline{\overline{\lessgtr}} (AB) < (A'B')n, \text{ wenn } (A'B') < (AB).$$

Das Segment (AB) ist einem Segment gleich, welches den Bedingungen des Satzes b' in Bezug auf $(A'B')$ genügt, sonst wäre das Gebiet der Scala der Einheiten (AB) weder in absolutem Sinn noch in Bezug auf die Reihe der Segmente der beiden Scalen (c; a, § 80) demjenigen der Einheiten $(A'B')$ gleich. Damit ist der Satz bewiesen (d, § 80).

Def. I. Wir sagen, ein Segment *erzeuge* das Gebiet einer Scala der Einheiten (BC), wenn das Gebiet derselben, nachdem man ein dem gegebenen identisches Segment (BD) von derselben Richtung wie diese Scala (b', § 69) ausgewählt hat, mit dem Gebiet der Scala der Einheiten (BD) zusammenfällt (Def. V, § 57).

d. *Ein Segment, welches das Gebiet einer Scala einer beliebigen Einheit* (BC) *erzeugt, genügt der Bedingung des Satzes* b *in Bezug auf* (BC) *und umgekehrt.*

Denn wir können von B aus in der Richtung der Scala ein dem gegebenen gleiches Segment (BD) betrachten (b', § 69). Das Gebiet der Scala der Einheit (BD) fällt nach der Voraussetzung mit demjenigen der Einheit (BC) zusammen (Def. I). Es kann also (BD) den Bedingungen des Satzes c nicht genügen und genügt daher denjenigen des Satzes b (IV, § 8).

Wenn umgekehrt das gegebene Segment der Bedingung des Satzes b genügt, so erzeugt (BD) das Gebiet der Scala der Einheit (BC) (b′ u. Def. I).

d′. *Jedes Segment, welches nicht das Gebiet einer Scala einer beliebigen Einheit (BC) erzeugt, genügt einer oder der andern Bedingung des Satzes c in Bezug auf (BC) und umgekehrt.*

Denn das gegebene Segment genügt der Bedingung des Satzes b in Bezug auf (BC) nicht und es oder ein ihm gleiches Segment muss daher einer der Bedingungen des Satzes c genügen (d, § 79 und IV, § 8).

e. *Wenn (AD) die Bedingung erfüllt*

$$(AA_1)(n-1) < (AD) < (AA_1)n,$$

so ist auch

$$(A_1A)(n-1) \leq (DA) < (A_1A)n.$$

Die Scala mit dem Anfang A und der Einheit (AA_1) sei construirt. Man erhält

$$(DA) < (A_1A)(n-1) \equiv (A_{n-1}A)$$

und auch

$$(DA) < (A_1A)n \equiv (A_nA). \quad \text{(c, § 73 u. Def. I, § 61)}$$

f. *Wenn A und B zwei in dem Gebiet einer Scala gegebene Elemente sind, so ist das Gebiet der Scala von A an in der Richtung von (AB) dem Theil desselben Gebiets von B an in Bezug auf eine Reihe consecutiver Segmente desselben gleich.*

Denn betrachtet man A und B als Anfänge zweier Scalen in derselben Richtung und mit derselben Einheit (AB), so sind die Gebiete dieser beiden Scalen in Bezug auf die Anordnung in Reihen gleich (a). Jedes Element X des Gebiets der Scala mit dem Anfang B ist aber ein Element des Gebiets der Scala mit dem Anfang A; denn, wenn keine solche Zahl n existirte, dass $(AB)n > (AX)$ wäre, so wäre auch nicht $(BC)n > (BX)$, worin $(BC) \equiv (AB)$, mithin könnte auch X dem Gebiet der Scala mit dem Anfang B nicht angehören (d, § 80).

Die Gleichheit findet statt in Bezug auf die Anordnung in Reihen (b″, Bem. VII, § 60). Das Gebiet der Scala mit dem Anfang A enthält dasjenige mit dem Anfang B als *Theil* (Def. III, § 80 und Def. II, § 27); dies schliesst die absolute Gleichheit $A \equiv B$ aus, sonst existirte der Widerspruch „*A ist und ist nicht A*" (III, § 8 und Bem. III, § 9).

Def. II. Dass $(AB) + (B \ldots X \ldots) \equiv (B \ldots X \ldots)$ ist in Bezug auf die Anordnung der Segmente der Gebiete der Scalen mit dem Anfang A und B und der Einheit (AB) in Reihen, bedeutet, dass man von (AB) abstrahiren kann (§ 7). Wir sagen mithin, (AB) *sei in Bezug auf* $(B \ldots X \ldots)$ *Null oder zu vernachlässigen.*

f′. *Ein beliebiges begrenztes Segment (AB) des Gebiets einer Scala oder ein ihm gleiches Segment ist in Bezug auf das übrig bleibende Segment, das mit B beginnt und dieselbe Richtung wie die Scala hat, zu vernachlässigen.*

Denn, wenn auch die Einheit $(A'B')$ ist, so kann man doch als Einheit der Scala in Bezug auf das Gebiet derselben das Segment. (AB) selbst betrachten, sofern es der Bedingung des Satzes b genügt. In diesem Fall ist es also in Bezug auf den übrig bleibenden Theil zu vernachlässigen (f, Def. II). Wenn es dagegen diese Bedingung nicht erfüllt, so kann es nicht grösser sein als irgend ein begrenztes Segment der Scala und mithin auch als das Gebiet der Scala; denn seine Elemente gehören, wie gegeben, diesem Gebiet an (Def. I, § 61). Es muss desshalb kleiner sein, wie jedes Segment (AB'), welches die Scala erzeugt (d'). Weil aber (AB') zu vernachlässigen ist, so sind es umsomehr seine Theile. Denn wenn $(AB') \equiv (AB'') + (B''B')$ (Def. I, § 72), so ist $(AB') > (AB'')$ und $(B''B')$ (Def. I, § 61) und wenn B' mit A zusammenfiele und B'' wäre von A verschieden, so wäre $(AA) = 0$ (Def. I, § 76) $> (AB'')$, was widersinnig ist (Def. I, und c, § 61).

Bem. I. Wie zu beachten, hängt die Gültigkeit der Sätze b, b', b'', c, c', d, d' und e davon ab, ob auf der Grundform Segmente existiren, die Factoren eines gegebenen Segments (AB) sind oder ob kleinere bezüglich grössere Segmente als (AB) existiren, die weder Factoren noch Vielfache von (AB) sind.

Bem. II. Da wir bisher die Scala in einer bestimmten Richtung von einem gegebenen Element an betrachtet haben (Def. I, § 80), so gelten diese Sätze auch in dem homogenen System allein (Def. I, § 68). Daraus folgt, dass wir bei der Definition dieses Systems, wenn es durch eine einzige Scala von Segmenten gegeben ist, die einem gegebenen Segment (AB) gleich sind, und wenn (AD), unter der Voraussetzung $(AD) < (AB)$, dem Satz c nicht genügt, nur das Segment (AB) allein und die Vielfachen von (AB) in Betracht zu ziehen brauchen. Nachdem man die Definitionen von Vielfachem und Factor vorausgeschickt und die so eingeschränkte Definition des homogenen Systems gegeben hat, unterwirft man die Segmente des Systems der Eigenschaft des Satzes b dieses Paragraphen, welcher das Axiom V des Archimedes ausdrückt. Darauf beweist man die Beziehung d, § 80 zwischen zwei Segmenten und dann die Sätze der §§ 68 und 69.

So kann man die Definition des in der Position seiner Theile identischen Systems (Def. I, § 70) nicht nur auf ein einziges Element A, sondern auch auf ein einziges Segment (AB) mit einem Ende in A und seine Vielfachen einschränken d. h. der Art, dass es ein andres Segment (AB') in entgegengesetzter Richtung und identisch mit (AB) oder einem seiner Vielfachen in dem System gibt, indem man dann den Satz a' und darauf a'' und a des § 70 beweist. Ebenso werden die Sätze der §§ 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80 bewiesen; man lässt dagegen die Sätze c, c', d, d' des § 80, die in diesem Fall unnöthig sind, weg und gibt die Sätze b, b' für zwei beliebige Segmente (AB), $(A'B')$, die nach dem Axiom des Archimedes schon der Bedingung des Satzes b genügen.[1])

Behält man dagegen die Def. I, § 68 bei und kommt an § 80, so lässt man die Eigenschaft der letzten Anm. zu § 99 folgen. (Es ist dies das Princip III in unserem Aufsatz: Il continuo rettilineo e l' ass. V. d' Archimede, Atti della R. Acc. dei Lincei,

1) Beschränkt man sich auf das Gebiet einer Scala (wie man aus didaktischen Gründen in einer für den Schulgebrauch bestimmten Behandlung der Elementargeometrie wenigstens in der Planimetrie thun muss), so muss die Definition des in der Position seiner Theile identischen Systems und mithin auch des homogenen Systems in diesem Sinn abgeändert werden. Man fügt noch hinzu, dass es keine andern Segmente ausserhalb des Gebietes der Scala gibt oder mit andern Worten man gibt noch das Axiom, dass es, wenn (AB) und (CD) zwei gradlinige Segmente sind, und $(AB) < (CD)$ ist, immer eine solche Zahl n gibt, dass $(AB)n > (CD)$ (siehe die Vorrede).

Stolz ist, soviel wir wissen, der erste gewesen, der die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diesen von ihm mit Recht „Axiom des *Archimedes*" genannten Satz gelenkt hat, welchen der grosse Syrakusaner in seiner berühmten Schrift: De sphaera et cylindro behandelte (*O. Stolz,* Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Math. Annalen Vol. XXII).

1890). Nachdem man darauf Hyp. VI und dann das Axiom des *Archimedes* aufgestellt, beweist man den Satz d, § 80 für zwei beliebige Segmente (Satz m, S. 13 des citirten Aufsatzes).

Man könnte sich auf das homogene System einer Dimension allein beschränken und die Definition des in der Position seiner Theile identischen Systems einer Dimension erst geben, nachdem man die Eigenschaften des continuirlichen homogenen Systems abgeleitet hat, indem man die Theile dieser Sätze; z. B. der vorstehenden, welche sich auf das in der Position seiner Theile identische System beziehen, solange weglässt (siehe den citirten Aufsatz).

Beschränkt man sich auf das Gebiet einer Scala allein, so ist der hier angegebene Weg wissenschaftlich vorzuziehen, weil man auf ihm vermeidet, in die Definitionen überflüssige Eigenschaften einzuführen, die man aus den Prämissen beweisen kann und daher auch muss.

VI. Kapitel.

Endliche, unendlich grosse, unendlich kleine, unbegrenzt kleine und unbegrenzt grosse Segmente. — Unendlich grosse Zahlen.

1.

Hypothese III über die Existenz von Elementen ausserhalb des Gebiets einer Scala. — Endliche, unendlich grosse, unendlich kleine Segmente. — Variable endliche Segmente. — Endliches Gebiet einer Scala. — Hypothese IV über die Bestimmung der unendlich grossen Segmente. — Das unendlich Grosse und unendlich Kleine von verschiedener Ordnung. — Ihre Eigenschaften. — Unendlich grosse Gebiete. — Grenzelemente im Unendlichgrossen von verschiedenen Ordnungen.

§ 82. *Bem. I.* Wir haben in Bezug auf das Segment (AB), die Einheit der Scala, keine Voraussetzung gemacht (Def. I, § 80). Nach den Hypothesen 1 und II betrachten wir die Grundform als schon gegeben und an die Definition des in der Position seiner Theile identischen Systems gebunden und diese Definition ist unabhängig von den Eigenschaften der Reihen, welche in dem System selbst sind. Die Reihe, welche die Scala bestimmt, ist unbegrenzt von der ersten Art. Auf der andern Seite können wir uns vorstellen, dass begrenzte und unbegrenzte Reihen existiren, welche als Theil eine unbegrenzte Reihe erster Art enthalten (Def. III, § 39; Def. I, § 27 und b, § 37). Wir werden daher durch diese Betrachtung *aus freien Stücken* dazu geführt, die Grundform der folgenden Bedingung zu unterwerfen:

Hyp. III. **In einer Richtung der Grundform existirt wenigstens ein Element, welches in Bezug auf jedes begrenzte Segment als Einheit ausserhalb des Gebiets der Scala liegt.**

a. *Es gibt mehrere verschiedene Elemente ausserhalb des Gebiets einer Scala.*

Denn wenn eines dieser Elemente gegeben ist, so ist es nach Hypothese II das Ende zweier Segmente, welche einem gegebenen und beliebigen Segment der Scala selbst gleich sind (Def. I, § 68).

b. *Die Hypothese III widerspricht der Definition und den Eigenschaften des in der Position seiner Theile identischen Systems nicht und geht nicht aus ihnen hervor.*

Da die Hypothese die Form in einer einzigen gegebenen Richtung unabhängig von der entgegengesetzten Richtung ansieht, so reicht es aus, dass sie der Definition des homogenen Systems nicht widerspricht, damit sie derjenigen des in der Position seiner Theile identischen Systems nicht widerspreche (Def. I, § 70 und Def. I, § 68). Wie wir weiter oben bemerkt haben, ist nun die Definition des homogenen Systems unabhängig von der Construction der Scala; das heisst, das System braucht nicht von einem gegebenen Element desselben an aus einer einzigen unbegrenzten Reihe erster Art von gleichen Segmenten zu bestehen und es kann möglicher Weise aus einer Reihe von Reihen gebildet sein, die von jedem ihrer Elemente an unbegrenzt von der ersten Art sind (Def. III, § 39 und b, § 37). Der Satz a § 68 sagt ausdrücklich, dass das homogene System nach seinen beiden Richtungen hin unbegrenzt ist; aber er sagt nicht, dass das System durch eine einzige unbegrenzte Reihe der ersten Art gegeben sei, wie er auch das Gegentheil nicht feststellt. Es erübrigt, zu zeigen, dass die Def. I, § 68, welche sich nur auf begrenzte Segmente bezieht (Def. IV, § 62), anwendbar bleibt, auch wenn das homogene System aus mehreren unbegrenzten Reihen besteht.

Ist eine geordnete Gruppe N gegeben, welche von einem beliebigen gegebenen ihrer Elemente an unbegrenzt von der ersten Art ist (Def. III, § 39 und Bem. § 28) und welche durch consecutive gleiche Segmente in der Ordnung der Gruppe gegeben ist, so können wir N als ein neues gegebenes Element und dann ein anderes N' dieser Elemente betrachten, das mit N identisch ist, ausserhalb desselben liegt, unabhängig von ihm ist und kein Grundelement mit ihm gemeinschaftlich hat (Def. I, § 57 und a', § 37). Wir können ferner die Formen N und N' in der Ordnung NN' betrachten (§ 14). In der Reihe NN' (§ 19) folgt N' auf die Reihe N (§ 14) und jedes Element von N geht daher N' voraus, das heisst, jedes Element von N geht jedem Element von N' voran oder jedes Element von N' folgt auf N und mithin auf jedes Element von N (Def. II, § 39 und § 21). Bezüglich der begrenzten Segmente von N oder N' ist der Def. I, § 68 genügt.

Da wir uns nach geeigneter Auswahl der Grundelemente A und B, ohne uns zu widersprechen, die Reihe dreier Elemente ABC so denken können, dass $(AB) \equiv (BC)$, so können wir uns eine Reihe von identischen Gruppen N, N', N'', die kein Element gemeinschaftlich haben, der Art vorstellen, dass $(NN') \equiv (N'N'')$. Jedem begrenzten Segment (AA'), das seine Enden A und A' in N bezüglich in N' hat, wird ein Segment $(A'A'')$ mit dem zweiten Ende in N'' gleich sein (b, § 60), weil bei einem Identitätszusammenhang zwischen (NN'), $(N'N'')$ N dem N' entspricht und man das Element A dem Element A' und A' dem Element A'' entsprechen lassen kann. In dem System gibt es von einem seiner Elemente aus nur ein Segment, das einem gegebenen Segment in der Richtung desselben gleich ist (b, § 68); diese Eigenschaft gilt auch in dem System (NN'). Auf diese Weise wird dem Satz b, § 60 und denjenigen des § 61, die sich auf die begrenzten Segmente beziehen, genügt.

Wir beschäftigen uns bei der Vergleichung der begrenzten Segmente nicht mit den unbegrenzten Segmenten von N und N', weil die letzteren von den begrenzten Segmenten bestimmt werden und ihre relative Gleichheit, wie z. B. diejenige der unbegrenzten Segmente $(AB\ldots X\ldots)$, $(B\ldots X\ldots)$ von N durch die Gleichheit der begrenzten Segmente, welche sie bestimmen, gegeben ist (b″, § 60). Wenn in zwei Segmenten (AA'), (BB') den begrenzten gleichen Segmenten in der gegebenen Ordnung des einen eindeutig und in derselben Ordnung gleiche Segmente des andern entsprechen, so sind wir berechtigt die beiden Segmente identisch zu nennen; denn wären sie es nicht, so bestände die genannte Eigenschaft nicht, wie wir oben bemerkt haben.

Da N' unabhängig von N ist, so ist die Reihe NN' unabhängig von N, das heisst, sie ist durch N ohne den Act, welcher N' setzt, nicht gegeben. Die Eigenschaft der Hypothese III geht also nicht aus N allein hervor.[1])

Def. I. Wir sagen, die Grundform *erstrecke sich über* jedes in ihr existirende Scalagebiet *hinaus.*

Bez. I. Um ein ausserhalb des Gebiets einer Scala gegebenes Element zu bezeichnen, gebrauchen wir häufig das Symbol ∞ in Verbindung mit einem Buchstaben.

c. *Ein gegebenes Segment, welches das eine Ende in dem Gebiet einer Scala, das andre ausserhalb dieses Gebiets und in der Richtung der Scala hat, ist grösser als jedes von zwei gegebenen Elementen des Gebiets der Scala begrenzte Segment und umgekehrt.*

A sei der Anfang, (AA_1) die Einheit, A_∞ ein ausserhalb des Gebiets der Scala in der Richtung derselben gelegenes Element. Es kann keine solche Zahl n geben, dass $(AA_1)n > (AA_\infty)$ ist, sonst würde A_∞ dem Gebiet der Scala angehören (b′, § 81). Wenn (AD) ferner ein beliebiges begrenztes Segment des Gebiets der Scala von der Einheit (AA_1) ist, so fällt das Gebiet der Scala von der Einheit (AD) mit demjenigen der Einheit (AA_1) zusammen (b′, § 81) und es gibt keine solche Zahl n, dass $(AD)n$ grösser als (AA_∞) ist. Ist das erste Element des gegebenen Segments nicht A sondern ein andres beliebiges Element D des Gebiets der Scala und man betrachtet von D aus in der Richtung derselben ein beliebiges Segment (DD'), das von einem andern Element D' der Scala der Einheit (AA_1) begrenzt wird, so ist das Gebiet der Scala mit

1) Wir erhalten eine erste Vorstellung von der Reihe (NN'), wenn wir uns die Grade in einer gegebenen Richtung z. B. von links nach rechts und dann dieselbe Grade in derselben Richtung durchlaufen denken, sie bei dieser zweiten Operation aber mit N' bezeichnen und dabei voraussetzen, dass die Punkte von N' von denen von N verschieden sind. Man kann NN' auch als zwei parallele Grade in dem Sinn Euclids betrachten in der Art, dass man zuerst eine Grade in einer gegebenen Richtung und dann N' in derselben Richtung durchläuft und dass der Abstand zweier Punkte der beiden Graden in der durch das Durchlaufen der beiden Graden gegebenen Richtung gemessen wird. Siehe auch die geometrische Darstellung in der Anm. § 105.

Die Reihe der begrenzten Segmente der Reihen $NN'N''\ldots$ besitzt die sieben ersten Eigenschaften, die Peano als Axiome für die Reihe der natürlichen Zahlen aufstellt (a. a. O., § 1; siehe auch unsere Anm. § 46). Wenn sich N auf ein erstes Element beschränkt, so besitzt die Reihe $NN'N''$ auch die Eigenschaft 8^a.

der Einheit (DD') und dem Anfang D dem Gebiet der Scala mit der Einheit (AA_1) und dem Anfang A in Bezug auf den eindeutigen in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhang ihrer Segmente gleich (d, § 80; b, § 81). Weil nun (DA_∞) grösser als (DD') ist (Def. I, § 61), so ist damit der erste Theil des Satzes bewiesen.

Wenn umgekehrt (AB) grösser als jedes begrenzte Segment des Gebiets der Scala ist, so kann B nicht in diesem Gebiet liegen (d, § 80).

c'. *Jedes Segment, welches dazu dient, das Gebiet einer Scala zu erzeugen, ist kleiner als jedes Segment, welches ein Ende in dem Gebiet der Scala und das andre ausserhalb desselben und in der Richtung der Scala hat.*

Denn das erste Segment ist einem Segment des Gebiets der Scala gleich, welches das erste Ende in dem Anfang der Scala hat (Def. I, § 81) und mithin ist das zweite Segment grösser als das erste (c; Def. I, § 61).

Def. II. Um die von zwei gegebenen Enden begrenzten Segmente, welche das Gebiet einer Scala von beliebiger Einheit (AA_1) erzeugen (Def. § 81) von denjenigen zu unterscheiden, welche dies Gebiet nicht erzeugen und grösser als sie sind, nennen wir die ersten *endlich* und die zweiten *actual unendlich gross* oder *unendlich gross* in Bezug auf die gegebene Einheit. Wenn die zweiten dagegen kleiner als die ersten sind, so heissen sie *actual unendlich klein* oder nur *unendlich klein* in Bezug auf die gegebene Einheit. Es ist z. B. die Einheit (AA_1) oder ein beliebiges begrenztes Segment einer gegebenen Scala unendlich klein in Bezug auf ein unendlich grosses Segment (AA_∞) (d', § 81).

Def. III. Die Hypothese III nennen wir *die Hypothese über die Existenz der begrenzten unendlich grossen Segmente.*[1])

---

1) Diese Hypothese erfüllt alle Bedingungen einer mathematisch möglichen Hypothese, die im Grunde nicht auf Betrachtungen philosophischer Natur über den Ursprung der mathematischen Vorstellungen, sondern auf der *Abwesenheit jeden Widerspruchs* beruhen (siehe die Vorrede).

Die Vorstellung ferner eines unendlich grossen Segments erhalten wir sicherlich nicht, wenn wir uns auf das Gebiet der Vorstellung endlicher successive gleicher Segmente beschränken; treten wir aber aus dieser Reihe heraus, so können wir uns das begrenzte unendlich grosse Segment, wie wir sehen werden, so ziemlich wie ein endliches Segment vorstellen. Es ist dies ein ähnlicher Fall, wie bei der Reihe immer wachsender Segmente, welche die Spitze eines Geschosses durchläuft, welches vom Punkt A ausgeht und den Punkt B trifft (siehe die fünfte Anm. zu § 55).

Auch die Beobachtung führt uns übrigens dazu die Existenz des begrenzten unendlich grossen Segments zuzulassen (wohl zu unterscheiden von dem gewöhnlich und eigentlich mit Unrecht so genannten Unendlichgrossen, mit welchem man eine endliche variable Grösse bezeichnet, die grösser als jede gegebene endliche Grösse wird). Wenn a ein reeller gradliniger Gegenstand ist, z. B. die obere Kante des Hauptbalkens einer langen Säulenhalle und unser Auge befindet sich in C, so ist die Scala von a, die zum Beispiel durch die Axen der Säulen gebildet wird, scheinbar keine Scala gleicher Segmente. Wenn dann a' der Durchschnitt der Gesichtsebene Ca mit einer verticalen Glasscheibe ist, so bringen die Scala von a' und diejenige von a geometrisch dasselbe Bild auf der Netzhaut hervor, das heisst a und a' fallen scheinbar zusammen. Die Scala in a' convergirt aber gegen den Punkt $0'$, den Durchschnittspunkt des von C parallel zur Kante a geführten Strahls. Wenn Titius die Scala in a misst und sich dabei fortbewegt, so wird sein Bild T' immer kleiner. Indem er sich nun nach und nach entfernt, vorausgesetzt er bewege sich in einem vollkommen homogenen Mittel, ist er überzeugt, dass sein Körper immer derselbe bleibt, auch wenn es in Wirklichkeit nicht der Fall wäre. Wir schätzen jedoch seine Grösse nach den successiven Bildern auf der Glasscheibe. Wenn sich nun

$a \quad A \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad 0$

$a' \quad A' \quad A_1' \quad A_2' \quad A_3'$

Fig. 3.

d. *Ein in Bezug auf ein gegebenes Segment* (AA_1) *unendlich grosses (oder unendlich kleines) Segment ist grösser (kleiner) als ein beliebiges andres Segment* (BC), *das die Bedingung des Satzes* b, § 81 *in Bezug auf* (AA_1) *erfüllt.*

Denn das in Bezug auf (AA_1) unendlich grosse (oder unendlich kleine) Segment erfüllt auch eine der beiden Bedingungen des Satzes c, § 81 (d, § 81 und Def. II) und daher auch in Bezug auf (BC) (d oder d′, § 61).

d′. *Ein in Bezug auf ein gegebenes Segment unendlich grosses (oder unendlich kleines) Segment ist in Bezug auf ein beliebiges andres Segment, das mit dem gegebenen endlich ist, unendlich gross (oder unendlich klein).*

Denn ein zu dem gegebenen (AA_1) endliches Segment erzeugt das Gebiet der Scala von der Einheit (AA_1) (Def. II) und ist einem Segment dieses Gebiets gleich (Def. I, § 81), welches die Bedingung des Satzes b, § 81 in Bezug auf das Segment (AA_1) erfüllt. Daraus folgt d′ (d).

e. *Jedes Segment, das grösser als ein unendlich grosses Segment ist, ist ebenfalls unendlich gross und jedes Segment, das kleiner als ein unendlich kleines Segment ist, ist ebenfalls unendlich klein* (Def. II; d′ und c, § 81; d oder d′, § 61 und Def., § 81).

f. *Ein Segment ist in Bezug auf ein andres entweder endlich oder unendlich gross oder unendlich klein und jeder dieser drei Fälle schliesst die beiden andern aus.*

(AB), $(A'B')$ seien die beiden Segmente. Wenn sie gleich sind, so sind sie endlich (Def. II; Def., § 81).

Wenn dagegen z. B. $(AB) < (A'B')$, so erfüllt (AB) entweder die Bedingung des Satzes b, § 81 oder nicht (IV, § 8). Im ersten Fall sind (AB) und $(A'B')$ endlich (d′, § 81 und Def. II); im zweiten Fall ist $(A'B')$ in Bezug

---

Titius vorstellen kann, dass die Scala *a* für uns scheinbar einen Punkt 0′ ausserhalb derselben hat, so wird er offenbar dahin geführt *geometrisch* zuzugeben, dass auch die Scala *a* einen reellen Punkt habe, der ausserhalb derselben liegt. Wir wollen gleich hinzufügen, wie wir in der Vorrede bemerkt haben, dass das actual Unendlichgrosse und mithin auch das actual Unendlichkleine für uns eine rein abstracte Existenz haben und nur insofern reell sind, als sie ein Product unseres Geistes sind und aus einer logisch möglichen Hypothese hervorgehen. Wir wollen also damit nicht die Behauptung aufstellen, das Unendlichgrosse habe in der Aussenwelt eine materielle Existenz, so wenig wie wir die materielle Wirklichkeit unseres allgemeinen Raumes behaupten. Gesetzt aber, sie existirten für ein andres Wesen, das dieselbe Logik besitzt, wie wir, so würden seine Betrachtungen über das Unendliche von den unsrigen nicht verschieden sein. Es ist dann noch im obigen Fall zu bemerken, dass der gradlinige Gegenstand ein in der Position seiner Theile identisches System ist und dass mithin, wenn man die Eigenschaften der Graden wie bei der Grundform unabhängig von dem Begriff der Scala macht, die Annahme die Grade sei immer ein in der Position seiner Theile identisches System nicht nur kein Widerspruch ist, sondern vielmehr die entgegengesetzte Hypothese weniger gerechtfertigt wäre.

Die Beweise einiger Mathematiker gegen die begrenzten unendlich grossen Segmente mit zwei Enden halten die Kritik nicht aus (siehe die Anm. im Anhang über die Unendlichgrossen und Unendlichkleinen). *Dedekind* (Was sind und was sollen die Zahlen? Seite 17) sagt, ein System S von Elementen heisse *unendlich gross*, wenn sich ein eindeutiger Zusammenhang (Def. II, § 42) zwischen S und einem seiner Theile — der Theil in dem von uns gegebenen Sinn verstanden — feststellen lasse; im entgegengesetzten Fall nennt er S ein endliches System. Diese Definition ist aber allen unendlich grossen Systemen gemeinschaftlich; denn das Unendlichgrosse lässt, wie wir sehen werden, verschiedene Formen zu. Unsere Definition, die sich auf den Begriff der Scala, des Grösseren und des Kleineren stützt, ist ebenso unangreifbar und eignet sich überdies besser für unsere Untersuchungen. *Dedekind's* Definition allein würde nicht für die Bestimmung unserer Segmente oder der unendlich grossen Zahlen *G. Cantor's* ausreichen.

auf (AB) unendlich gross und (AB) in Bezug auf $(A'B')$ unendlich klein (d', § 81 und Def. II).

Wenn sie endlich sind, so kann das eine von ihnen in Bezug auf das andre weder unendlich gross noch unendlich klein sein, weil sie alsdann der Bedingung des Satzes b, § 81 (IV, § 8) nicht entsprechen würden. Ebenso können sie, wenn das eine in Bezug auf das andre unendlich gross oder unendlich klein ist, nicht endlich sein. Schliesslich ist das eine, wenn es unendlich gross in Beziehung auf das andre ist, grösser als dieses, während, wenn es zugleich auch unendlich klein wäre, es kleiner als dieses sein müsste, was widersinnig ist (c, § 61).

g. *Zwei mit einem dritten endliche Segmente sind miteinander endlich.*

Denn wäre eines von ihnen unendlich gross in Bezug auf das andre, so wäre es auch unendlich gross in Bezug auf das dritte (d'). Wäre dagegen das eine unendlich klein in Bezug auf das andre, so wäre es unendlich klein in Bezug auf das dritte, was gegen die Voraussetzung ist (e); folglich u. s. w.

h. *Wenn ein Segment in Bezug auf ein andres endlich ist, so ist das letzte in Bezug auf das erste endlich.*

Denn wäre das zweite in Bezug auf das erste unendlich gross (unendlich klein), so wäre das erste in Bezug auf das zweite unendlich klein (unendlich gross) (Def. II) und nicht endlich (f).

i. *Die Addition zweier endlichen (unendlich kleinen oder eines endlichen und eines unendlich grossen) Segmente von derselben Richtung liefert ein endliches (unendlich kleines oder unendlich grosses) Segment.*

Es seien (AB), (BC) die beiden endlichen Segmente von derselben Richtung, welche das Segment (AC) geben. Dasselbe ist ein Segment der Scala mit dem Anfang A und der Einheit (AB) (Def. II; Def. I, § 81; d, § 80; d, § 81).

Wenn (AB), (BC) unendlich gross sind, oder das eine von ihnen ist unendlich gross, so folgt die Eigenschaft aus e (Def. I, § 72 und Def. I, § 61).

Sind sie unendlich klein und einander nicht gleich, so nehmen wir an $(AB) > (BC)$, dann ist:

$$(AB)2 > (AB) + (BC) \qquad \text{(f, § 73)}$$
$$> (BC) + (AB). \qquad \text{(g, § 73)}$$

Aber $(AB)2$ ist kleiner als jedes beliebige endliche Segment (Def. II; c', § 81), um so mehr ist es $(AB) + (BC)$ oder $(BC) + (AB)$ (d', § 61).

Folglich u. s. w.

Def. IV. Da das Gebiet der Scala vom Anfang ausgehend grösser als irgend ein gegebenes *endliches* Segment derselben ist (a, § 80), so nennen wir das Gebiet auch *unendlich gross.*

Bem. III. Das Gebiet der Scala ist *unbegrenzt* (Def. III, § 80), weil es kein letztes Element hat, das es in der Richtung der Scala begrenzt (Def. II, § 32) und ist *unendlich gross,* weil es grösser als jedes gegebene Segment der Scala ist (Def. IV).

k. *Das Gebiet einer Scala ist in einem begrenzten unendlich grossen Segment, dessen eines Ende in dem Anfang der Scala liegt, enthalten, ohne dieses Segment selbst zu sein.*

Denn das Gebiet der Scala (AA_1) ist in einem begrenzten unendlich grossen Segment (AA_x) enthalten (Def. II, Hyp. III); es fällt aber mit diesem ganzen Segment nicht zusammen, weil (AA_x) ausserdem mindestens das Element A_x und mithin auch noch andre von A_x verschiedene Elemente enthält (a).

§ 83. *Def. I.* Wenn man eine unbegrenzte Reihe begrenzter Segmente (AX'), (AX''), ... hat und es ist $(AX') < (AX'') < \dots$, so kann man in der bei der Bewegung üblichen Ausdrucksweise sagen (Def. VII, § 67), das erzeugende oder variable Segment (AX) *werde immer grösser*, (AX) sei ein variables *immer wachsendes* Segment und X entferne sich mithin von A (Def. VI, § 67).

Wenn es dagegen eine letzte Lage gibt, das heisst wenn die gegebene Reihe der Segmente begrenzt ist, so heisst (AX) variables *begrenzt wachsendes* Segment.

Def. II. Hat man dagegen eine unbegrenzte Reihe begrenzter Segmente $(AX') > (AX'') > \dots$, so sagt man, das erzeugende Segment (AX) sei *variabel und immer abnehmend oder werde immer kleiner* und das Element X nähere sich mithin dem Element A (Def. VI, § 67). Ist die Reihe begrenzt, so heisst das Segment (AX) *begrenzt abnehmend.*

Die Def. I und II gelten auch in dem Fall, wenn die Segmente kein gemeinschaftliches Ende haben.

Def. III. Wenn die Reihen von einem ihrer Segmente an unbegrenzt von der ersten Art sind (Def. III, § 39), so nennen wir die entsprechenden Variablen *unbegrenzt von der ersten Art.*

Def. IV. Das Constructionsgesetz der Reihe in den vorigen Fällen (Def. II § 58) heisst Variabilitätsgesetz des Segments (AX).

Def. V. Das Gebiet der Scala ist für uns ein gegebenes constantes Ganze (Def. III, § 80). Wir wollen uns denken, wir construirten dieses Gebiet nur mittelst der Operation des Wiederholens der consecutiven gleichen Segmente der Scala und des successiven Vereinigens derselben mit den bereits gegebenen in ein Ganzes (Def. I, § 26), wie wir es bei den Zahlen gethan haben (Def. II, § 46), doch mit dem Unterschied, dass wir hier auch die Verschiedenheit der Position der verschiedenen Segmente und ihrer Theile in Rechnung ziehen (§ 38). Mit dieser einfachen Operation des Wiederholens und Vereinigens können wir nicht nur niemals aus der Scala heraustreten, sondern *wir behalten auch immer noch andre endliche Segmente zum Betrachten übrig.* Das Segment also, welches man mit dem Anfang beginnend durch diese Operation erhält, ist ein variables immer wachsendes Segment (Def. I), das wir das *endliche Gebiet* der Scala nennen.

Bem. I. Das endliche Gebiet der Scala ist desshalb nicht wie das Gebiet der Scala ein gegebenes und constantes Ganze, sondern ein Ding, das, wenn man es betrachtet, variabel ist (Def. VII, § 67).

Def. VI. Von jedem endlichen variablen immer wachsenden Segment (AX), welches grösser als jedes gegebene endliche Segment wird, sagen wir, *es wachse unbegrenzt oder strebe unendlich gross zu werden oder habe das Gebiet C der Scala zur Grenze.* Wir schreiben

$$\lim (AX) = C.$$

a. *Das endliche Gebiet der Scala hat das Gebiet der Scala zur Grenze.*

Denn es ist nur ein Segment, das der Definition VI genügt (Def. V).

Def. VII. Wir sagen auch, das endliche Gebiet der Scala *sei* unbegrenzt gross, meinen damit aber immer, auch wenn wir das Wort *sein* statt des Wortes *werden* benutzen, dass es kein gegebenes und constantes Ganze ist.

Bem. II. Wir haben also unbegrenzte Segmente, wie das Gebiet C der Scala, welches gegeben und constant und auch unendlich gross ist (Def. IV, § 82), und haben unbegrenzte nicht constante Segmente, welche *streben unendlich gross zu werden.*

Man darf also diese beiden Formen nicht verwechseln, wenn man nicht in Widersprüche gerathen will.

b. *Das endliche Gebiet der Scala ist dem durch ein beliebiges endliches Segment desselben als Einheit bestimmten Gebiet gleich* (f, § 81 und Def. V).

Def. VIII. Der ganze Theil der Grundform, welcher die im Unendlichgrossen liegenden Elemente enthält, heisst in Bezug auf die gegebene Einheit oder die Scala dieser Einheit *das im Unendlichgrossen liegende Gebiet.*

b'. *Das im Unendlichgrossen liegende Gebiet einer Scala ist auch das im Unendlichgrossen liegende Gebiet einer andern Scala, deren Einheit ein endliches Segment der ersten ist und deren Anfang in dem Gebiet der ersten liegt.*

Denn die Gebiete der durch die Segmente des gegebenen Gebiets erzeugten Scalen fallen, wenn man vom Anfang ausgeht, zusammen und mithin auch das im Unendlichgrossen liegende Gebiet (Def. VIII). Wenn nun der Anfang ein andres gegebenes Element ist, so ist das so erhaltene Gebiet der Scala in dem ersten enthalten und differirt von dem ersten nur durch das Segment, das die beiden Anfänge zu Enden hat (a, § 80 und f, § 81). Damit ist der Satz bewiesen.

§ 84. a. *Wenn (AD) endlich ist in Bezug auf eine Einheit (AA_1), so ist (DA) endlich in Bezug auf die Einheit (A_1A)* (Def. II, § 82; e und b, d, § 81).

a'. *Wenn ein Segment (AB) unendlich gross (oder unendlich klein) in Bezug auf ein Segment (CD) ist, so ist das Segment (BA) unendlich gross (unendlich klein) in Bezug auf (DC).*

Denn (BA) kann nicht endlich sein in Bezug auf (DC), weil sonst (AB) endlich wäre in Bezug auf (CD) (a; f, § 82). Im ersten Fall kann (BA) auch nicht unendlich klein in Bezug auf (DC) sein; denn wählt man in (DC) ein mit (BA) identisches Segment (DD') aus, so wäre $(D'D)$ in (CD) enthalten (b', § 69; c', § 68; Def. I, § 61) und mithin wäre (CD) grösser als $(D'D)$ das heisst als (AB) (Def. I, § 61 und a, § 69; Def. II, § 61), was gegen die Voraussetzung ist. Desshalb muss (BA) unendlich gross in Bezug auf (DC) sein (f, § 82). Ist dagegen (AB) unendlich klein in Bezug auf (CD), so kann (BA) weder endlich noch unendlich gross in Bezug auf (DC) sein (a und der vorstehende Beweis), es muss folglich unendlich klein sein (f, § 82).

b. *Ist mit Bezug auf die Einheit (AA_1) ein Segment $(AA^{(x)})$ gegeben und hat man in demselben die Scala mit dem Anfang A und der Einheit (AA_1) und die Scala mit dem Anfang $A^{(x)}$ und der Einheit (A_1A) construirt, so ist immer*

$$1) \qquad (AA_n) \equiv (A_n^{(x)} A^{(\infty)}),$$

wenn n eine beliebige Zahl der Reihe der natürlichen Zahlen ist, die den Elementen entspricht, welche die Enden der Vielfachen der gegebenen Einheiten nach der Zahl n sind.

2) *Wenn X' ein Element des Gebiets der Scala mit dem Anfang $A^{(\infty)}$ ist welches zwischen den Elementen $A_{n-1}^{(\infty)}$, A_n^{∞} liegt und wenn $(AX) \equiv (X'A^{(\infty)})$, so liegt das Element X zwischen den Elementen A_{n-1}, A_n der Scala mit dem Anfang A.*

1) Vorerst ist $(A^{(\infty)}A)$ unendlich gross in Bezug auf (A_1A) (a') und mithin auch auf $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ (Def. II, § 82). Aus der Relation

(1) $$(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}) \equiv (A_1A)$$

erhält man

(1') $$(A_1^{(\infty)}A^{(\infty)}) \equiv (AA_1). \qquad \text{(a, § 69)}$$

Dass das Segment $(A_1^{(\infty)}A^{(\infty)})$ existirt, geht aus der Definition des homogenen Systems hervor (Def. I, § 68; a, § 82). Construirt man die Scala mit der Einheit (AA_1) in der Richtung $(AA^{(\infty)})$ und mit dem Anfang A und dann die Scala mit dem Anfang $A^{(\infty)}$ in der entgegengesetzten Richtung und mit der Einheit $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ (b', § 69), nämlich

$$A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}A_2^{(\infty)}\ldots A_n^{(\infty)}\ldots,$$

wobei

$$(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}) \equiv (A_1^{(\infty)}A_2^{(\infty)}) \equiv \cdots \equiv (A_{n-1}^{(\infty)}A_n^{(\infty)}) \equiv \cdots$$

und analog

(2) $$(AA_1) \equiv (A_1A_2) \equiv \cdots \equiv (A_{n-1}A_n) \equiv \cdots$$

ist, so behaupten wir, es ist:

(3) $$(A^{(\infty)}A_2^{(\infty)}) \equiv (A_2A).$$

Denn (3) kann man auch schreiben

(3') $$(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}) + (A_1^{(\infty)}A_2^{(\infty)}) \equiv (A_2A_1) + (A_1A). \qquad \text{(Def. I, § 72)}$$

Aus den Beziehungen (1), (1'), (2) erhält man aber:

$$(A_2A_1) \equiv (A_1A) \equiv (A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}) \equiv (A^{(\infty)}{}_1A_2^{(\infty)}), \qquad \text{(c, § 60)}$$

und weil also die Gleichung (3') gilt, so gilt auch (3) (c, § 68).

Aus (3) folgt dann

(3'') $$(AA_2) \equiv (A_2^{(\infty)}A^{(\infty)}). \qquad \text{(a, § 69)}$$

Wenn die Relation (3) für $n - 1$ besteht, d. h. wenn

(4) $$(A^{(\infty)}A_{n-1}^{(\infty)}) \equiv (A_{n-1}A),$$

so besteht sie auch für n, d. h. es ist:

(5) $$(A^{(\infty)}A_n^{(\infty)}) \equiv (A_nA).$$

Denn es ist

(6) $$(AA_{n-1}) \equiv (A_1A_n) \qquad \text{(d, § 79)}$$

und daher

(6') $$(A_{n-1}A) \equiv (A_nA_1) \qquad \text{(a, § 69)}$$

und mithin ergibt (4) mittelst (6')

(4') $$(A^{(\infty)}A_{n-1}^{(\infty)}) \equiv (A_nA_1). \qquad \text{(c, § 60)}$$

Nun kann man (5) schreiben

$$(A^{(\infty)}A_{n-1}^{(\infty)}) + (A_{n-1}^{(\infty)}A_n^{(\infty)}) \equiv (A_nA_1) + (A_1A), \qquad \text{(Def. I, § 72)}$$

weil aber

$$(A_{n-1}^{(\infty)}A_n^{(\infty)}) \equiv (A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}) \equiv (A_1A), \quad \text{[(1) und (2) und c, § 60]}$$

so ist durch (4′) die Gleichung (5) bewiesen (c, § 68).

Aus (5) erhält man dann

$$(A_n^{(\infty)}A^{(\infty)}) \equiv (AA_n). \qquad \text{(a, § 69)} \quad (5')$$

2) Es folgt aus (5′)

$$(A \ldots A_{n-1}A_n) \equiv (A_n^{(\infty)}X'A_{n-1}^{(\infty)} \ldots A^{(\infty)})$$

und gegeben ist:

$$(AX) \equiv (X'A^{(\infty)}) \qquad (7)$$

$$(X'A^{(\infty)}) < (A_n^{(\infty)}A^{(\infty)}), \qquad \text{(Def. I, § 61)}$$

mithin ist:

$$(AX) < (AA_n). \quad \text{[(5′) und Def. II, § 61]} \quad (8)$$

X liegt also in dem Segment (AA_n) (c′, § 68; b, § 36 und Def. I, § 61).

Es ist aber

$$(AA_{n-1}) \equiv A_{n-1}^{(\infty)}A^{(\infty)}) \qquad \text{[(4′), a, § 69 und (6)]}$$

und weil nach der Voraussetzung

$$(A_{n-1}^{(\infty)}A^{(\infty)}) < (X'A^{(\infty)})$$

so ist $\qquad (AA_{n-1}) < (X'A^{(\infty)}) \qquad$ (Def. II, § 61)

oder $\qquad (AA_{n-1}) < (AX). \qquad$ [(7) und Def. II, § 61]

also liegt X in dem Segment $(A_{n-1}A_n)$, wie zu beweisen war.

c. *Es ist nicht möglich, dass ein gegebenes Element X' des Gebiets der Scala mit dem Anfang $A^{(\infty)}$ in Satz* b, *es mag sein, welches es wolle, dem Gebiet der Scala mit dem Anfang A angehöre.*

Denn da $(A^{(\infty)}X')$ in Bezug auf die Einheit $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ oder (A_1A) endlich ist, so ist $(X'A^{(\infty)})$ in Bezug auf die Einheit (AA_1) endlich [a und (1)]. Wenn aber X' dem Gebiet der Scala mit dem Anfang A angehörte, so wäre auch (AX') und mithin das Segment $(AX') + (X'A^{(\infty)}) \equiv (AA^{\infty})$ in Bezug auf die Einheit (AA_1) endlich (i, § 82), während es doch unendlich gross ist (f, § 82).

§ 85. *Bem. I.* Der vorstehende Satz beweist, dass das Segment $(AA^{(\infty)})$, ohne gegen die Definition des einfach homogenen Systems (Def. I, § 68) und die Hypothese über die Existenz der unendlich grossen Segmente (Hyp. III, § 82) zu verstossen, kein andres Element ausserhalb der Gebiete der beiden Scalen vom Anfang A und $A^{(\infty)}$, die wir eben betrachtet haben, enthalten kann. Wir müssen nun die Grundform oder jeden ihrer Theile von einer gegebenen Einheit ausgehend, auf Grund möglicher Principien construiren oder setzen können, sonst ist es uns nicht möglich ihre sämmtlichen Eigenschaften zu bestimmen oder, besser gesagt, es bliebe der Uebergang von einer gegebenen Einheit zu einem unendlich grossen Segment, dessen Existenz uns nur die Hyp. III lehrt, unbestimmt.

Nimmt man auch an, in dem Segment (AA^{∞}) gäbe es Elemente der Grundform, die ausserhalb der Gebiete der beiden in Satz b construirten Scalen liegen, so genügt das nicht; denn es können in $(AA^{(\infty)})$ andre in Bezug auf (AA_1) unendlich grosse und in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ unendlich kleine Segmente existiren. Auch wenn man diese Voraussetzung macht, so folgt daraus nicht, in welchen Verhältnissen sie zueinander stehen. Wir werden desshalb zu folgender Hypothese geführt:

Hyp. IV. **Wenn man in dem in Bezug auf eine beliebige Einheit (AA_1) im Unendlichgrossen liegenden Gebiet 1) ein beliebiges Element $B^{(\infty)}$ auswählt, so existirt in dem Segment $(AB^{(\infty)})$ ein solches Element X, dass (AX) und $(XB^{(\infty)})$ ebenfalls in Bezug auf (AA_1) unendlich gross sind und 2) existirt ein solches Element $A^{(\infty)}$, dass das Segment (AX) für jedes beliebige X, in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich ist.**

a. *Die Hypothese IV geht nicht aus den vorhergehenden Eigenschaften der Grundform hervor und widerspricht ihnen nicht.*

Die Existenz von X derart, dass (AX) und $(XB^{(\infty)})$ in Bezug auf (AA_1) unendlich gross sind, geht nicht aus den Prämissen hervor (Bem. I). Setzt man voraus, X existire, so gibt es zwei Möglichkeiten, die den früheren Voraussetzungen nicht widersprechen, nämlich, dass $(AB^{(\infty)})$ in Bezug auf (AX) endlich oder unendlich gross ist. So ist z. B. in der Reihe NN' des Beweises zu Satz b, § 82 ein begrenztes Segment mit den Enden A und A' in N bezüglich in N' in Bezug auf ein Segment (AB), dessen Enden in N liegen, unendlich gross, während ein andres Segment (CD) von N in Bezug auf (AB) endlich ist.

Im zweiten Theil der Hypothese wird also angenommen, es gäbe ein solches Element $A^{(\infty)}$, dass (AX) für jedes Element X, welches der ersten Bedingung genügt, in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich sei. Dass dies für ein Element X möglich sei, unterliegt keinem Zweifel, man braucht nur $(AA^{(\infty)}) \equiv (AX)2$ zu nehmen. Wählt man irgend ein andres zwischen X und $A^{(\infty)}$ liegendes Element X_1 und es wäre $(AA^{(\infty)})$ in Bezug auf AX_1 unendlich gross, so wäre es dies umsomehr in Bezug auf (AX) (Def. II, § 82). Es kann aber auch nicht unendlich klein sein, da es grösser als (AX_1) ist (Def. I, § 61; Def. II, § 82), desshalb muss es in Bezug auf (AX_1) endlich sein (f, § 82). Für irgend ein zwischen A und X liegendes Element X_2, welches nicht in den Gebieten der Scalen von den Einheiten (AA_1) oder (A_1A) und dem Anfang A und X in dem Segment (AX) enthalten ist, ist es in unser Belieben gestellt anzunehmen, (AX_2) sei endlich oder unendlich klein in Bezug auf (AX) (Def. II, § 82). Die Hypothese wählt den ersten Fall, nämlich (AX_2) sei in Bezug auf (AX) und daher auch auf $(AA^{(\infty)})$ endlich (g, § 82).[1]

Def. I. Diese Hypothese nennen wir auch *die erste Hypothese der Construction* oder der *Bestimmung* der unendlich grossen Segmente der Grundform.

Bem. II. Diese Hypothese begreift nothwendiger Weise die Hypothese III über die Existenz der unendlich grossen Segmente, nachdem die Def. II, § 82 gegeben ist, in sich.

b. *Das Segment $(XA^{(\infty)})$ ist ebenfalls in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich.*

Denn es kann nicht unendlich gross in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ sein, weil es in $(AA^{(\infty)})$ enthalten ist (Def. II, § 82 und Def. I, § 61). Wenn es daher nicht endlich ist, so muss es unendlich klein in Beziehung auf $(AA^{(\infty)})$ sein (f, § 82), während es unendlich gross in Beziehung auf (AA_1) ist (Hyp. IV).

1) Eine Vorstellung von dieser Hypothese erhält man z. B., wenn man annimmt, jeder Punkt eines gradlinigen intuitiven Segments stelle eine Punktreihe N vor, die man auf die in dem Beweis zu Satz b, § 82 angegebene Art erhalten hat.

Es muss daher $(XA^{(\infty)})$ auch unendlich klein in Beziehung auf (AX) sein, welches in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich ist (Hyp. IV; d', § 82). Wir wollen in diesem Fall in (AX) ein Segment $(AX') \equiv (XA^{(\infty)})$ betrachten (Def. I, § 68). Das Segment $(A^{(\infty)}X)$ ist dann in Bezug auf die Einheit $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)}) \equiv (A_1 A)$ unendlich gross (a', § 84), daher ist auch $(A^{(\infty)}X')$ in Bezug auf $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ unendlich gross, weil $(A^{(\infty)}X)$ nach der Voraussetzung ein Theil des Segments $(A^{(\infty)}X')$ ist (Def. I, § 61 und Def. II, § 82). Folglich ist $(X'A^{(\infty)})$ in Bezug auf (AA_1) unendlich gross (a', § 84); aber (AX') ist ebenfalls in Bezug auf (AA_1) unendlich gross, weil das ihm gleiche $(XA^{(\infty)})$ in Bezug auf dasselbe unendlich gross ist. Mithin kann das Element X' dem Gebiet der Scala vom Anfang A und der Einheit (AA_1) nicht angehören. Nach der Hypothese IV muss aber (AX') und mithin auch $(XA^{(\infty)})$ in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich sein (Def. II, § 82). Daraus folgt also, dass die Annahme, $(XA^{(\infty)}) \equiv (AX')$ sei in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ unendlich klein, widersinnig ist. Daraus folgt b (f, § 82).

c. *Die Segmente (AX) und $(XA^{(\infty)})$ des zweiten Theils der Hyp. IV besitzen selbst die in der Hypothese IV angegebene Eigenschaft.*

Denn wenn X in Bezug auf die Einheit (AA_1) ein im Unendlichgrossen liegendes Element ist, so muss es in (AX) ein solches Element X' geben, dass (AX') und $(X'X)$ unendlich gross sind und dass (AX') und $(X'A^{(\infty)})$ mit $(AA^{(\infty)})$ verglichen endlich sind (Hyp. IV; b). (AX') ist daher endlich in Bezug auf (AX) (g, § 82.).

Verfährt man ebenso, wie bei dem Beweis des Satzes b, so findet man, dass $(X'X)$ in Bezug auf (AX) endlich sein muss.

Dies gilt auch für das Segment $(XA^{(\infty)})$. Denn es ist mit (AA_1) verglichen unendlich gross (Hyp. IV.) und es muss in ihm ein solches Element X'' geben, dass (XX''), $(X''A^{(\infty)})$ in Bezug auf (AA_1) unendlich gross sind (Hyp. IV, 1). Die Segmente (AX'') und $(X''A^{(\infty)})$ sind in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ (Hyp. IV, 2 und b) und daher auch in Bezug auf $(XA^{(\infty)})$ endlich (g, § 82).

Man denke sich nun, es sei ein Segment $(AY) \equiv (XX'')$ gegeben. Da (XX'') verglichen mit (AA_1) unendlich gross ist, so gilt dies auch für (AY) (Def. II, § 61; Def. II, § 82). Das Element X'' muss aber zwischen Y und $A^{(\infty)}$ enthalten sein, weil $(XX'') < (AX'')$ (Def. I, II, § 61) und mithin ist $(YA^{(\infty)}) > (X''A^{(\infty)})$ (Def. I, § 61) in Bezug auf (AA_1) unendlich gross. (AY) ist daher endlich in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ und auf $(X''A^{(\infty)})$ (Hyp. IV und g, § 82), mithin auch (XX'').

d. *Jedes Segment $(AA_1^{(\infty)})$ von $(AA^{(\infty)})$, dessen Element $A_1^{(\infty)}$ in dem Gebiet der Scala mit dem Anfang $A^{(\infty)}$ und der Einheit (A_1A) liegt, ist in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich und das Element $A_1^{(\infty)}$ genügt wie $A^{(\infty)}$ der Hypothese IV.*

Denn $(AA_1^{(\infty)})$ ist mit Bezug auf (AA_1) unendlich gross (c, § 84). Das Segment $(AA_1^{(\infty)})$ kann mit $(AA^{(\infty)})$ verglichen nicht unendlich gross sein, weil es in letzterem enthalten ist (Def. II, § 82 und Def. I, § 61). Es kann auch nicht unendlich klein sein, weil (AX) ein Theil von $(AA_1^{(\infty)})$ (Def. II, § 27 und Def. I, § 62) in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich ist (Hyp. IV, Def. II,

§ 82); folglich ist $(AA_1^{(\infty)})$ in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich (f, § 82). Für jedes Element X nun, welches derart ist, dass (AX) und $(XA_1^{(\infty)})$ unendlich gross sind (Hyp. IV, 1)], ist auch (AX) und $(XA^{(\infty)})$ unendlich gross (Def. II und e, § 82) und sind (AX) und $(XA^{(\infty)})$ mit Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ (Hyp. IV, 2 und b) und mithin auch auf $(AA_1^{(\infty)})$ endlich (g, § 82). $(XA_1^{(\infty)})$, welches in Beziehung auf (AA_1) unendlich gross ist, ist daher in Beziehung auf $(AA_1^{(\infty)})$ endlich (b). Damit ist der Satz bewiesen.

e. *Jedes Segment* $(AA_1^{(\infty)}) > (AA^{(\infty)})$, *welches der Bedingung*

$$(AA^{(\infty)})n > (AA_1^{(\infty)})$$

genügt, worin n eine gegebene beliebige Zahl der Reihe (I) ist, besitzt die zweite Eigenschaft der Hypothese IV.

$(AA_1^{(\infty)})$ ist endlich in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ (b′, § 81 und Def. II, § 82) und $(AA^{(\infty)})$ ist endlich in Bezug auf $(AA_1^{(\infty)})$ (h, § 82). Ist ein beliebiges Element X derart gegeben, dass (AX) und $(XA^{(\infty)})$ unendlich gross sind, während (AX) und $(XA^{(\infty)})$ in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ endlich sind (Hyp. IV, b), so sind sie es auch in Bezug auf $(AA_1^{(\infty)})$ (g, § 82). Weil ferner $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ in Bezug auf das Segment $(AA^{(\infty)})$ höchstens endlich ist — sonst wäre $(AA_1^{(\infty)})$ in Bezug auf $(AA^{(\infty)})$ unendlich gross (i, § 82) — so ist das Segment $(A^{(\infty)}X)$, wenn das Element X in $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ enthalten ist, höchstens endlich in Bezug auf das Segment $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ (Def. II, § 82) und mithin auch auf das Segment $(AA^{(\infty)})$; denn wäre es unendlich gross, so würde es dies auch in Bezug auf das erste sein (d′, § 82). (AX) ist also auch in diesem Fall bezüglich $(AA_1^{(\infty)})$ endlich (i, g, § 82) und desshalb auch $(XA_1^{(\infty)})$, wenn $(XA_1^{(\infty)})$ bezüglich (AA_1) unendlich gross ist (b). Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

f. *Alle in Bezug auf die Einheit* (AA_1) *unendlich grossen Segmente, welche der Hypothese IV genügen, sind untereinander endlich.*

Es seien $(AA_1^{(\infty)})$, $(AA_2^{(\infty)})$ zwei solche Segmente und $(AA_2^{(\infty)}) > (AA_1^{(\infty)})$. Wenn sie nicht endlich zueinander sind, so heisst dies, dass $A_2^{(\infty)}$ nicht zum Gebiet der Scala von der Einheit $(AA_1^{(\infty)})$ gehört (Hyp. III und Def. II, § 82). $(AA_1^{(\infty)})$ ist mithin mit Bezug auf $(AA_2^{(\infty)})$ unendlich klein (Def. II, § 82). Alsdann würde aber $A_2^{(\infty)}$ die letzte Eigenschaft der Hypothese IV nicht besitzen; $(AA_2^{(\infty)})$ muss daher in Bezug auf $(AA_1^{(\infty)})$ endlich sein. Diese Eigenschaft besitzen auch Segmente, welche nicht dasselbe Ende A haben, weil man den gegebenen gleiche Segmente mit dem Ende A und von derselben Richtung in Betracht ziehen kann (Def. I, § 68). Damit ist der Satz bewiesen.

g. *Ein endliches Segment ist in Bezug auf ein unendlich grosses Segment Null.*

Es sei vorerst $(AA^{(\infty)})$ das unendlich grosse Segment und (AD) das endliche Segment, welches derselben Scala angehört und sein erstes Ende in dem Anfang derselben hat.

Es ist zu beweisen, dass in Bezug auf das Segment $(DA^{(\infty)})$

$$(AA^{(\infty)}) \equiv (AD) + (DA^{(\infty)}) \equiv (DA^{(\infty)})$$

ist. Das Segment $(DA^{(\infty)})$ enthält das Gebiet der Scala mit der Einheit (AD)

und dem Anfang D (1, § 82), für welches die Eigenschaft f', § 81 gilt. Mit einem begrenzten oder nicht begrenzten Segment $a+b$ ein begrenztes oder unbegrenztes Segment c vereinigen, ist, wenn a in Bezug auf b Null ist (Def. II, § 81) das Nämliche, wie c mit b vereinigen, das heisst in $a+(b+c)$ ist a Null in Bezug auf $(b+c)$. Daher ist (AD) Null in Bezug auf $(DA^{(\infty)})$. Man betrachte nun in $(AA^{(\infty)})$ ein Segment $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$, das (A_1A) gleich ist, wenn (AA_1) die Einheit vorstellt und es sei

$$(A^{(\infty)}D^{(\infty)}) \equiv (DA) \qquad \text{(b', § 69)}$$

und mithin

$$(D^{(\infty)}A^{(\infty)}) \equiv (AD). \qquad \text{(a, § 69)}$$

Das Segment (DA) ist endlich in Bezug auf (A_1A) (a, § 84) und daher auch bezüglich $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ (Def. II, § 82). Nach dem Vorstehenden ist aber, weil $(A^{(\infty)}A)$ in Bezug auf (A_1A) oder auf $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ unendlich gross ist (a', § 84)

$$(A^{(\infty)}A) \equiv (D^{(\infty)}A)$$

oder

$$(A^{(\infty)}D^{(\infty)}) + (D^{(\infty)}A) \equiv (D^{(\infty)}A)$$

oder auch

$$(AD^{(\infty)}) + (D^{(\infty)}A^{(\infty)}) \equiv (AD^{(\infty)}). \qquad \text{(a, § 69)}$$

Das heisst: Vereinigt man mit einem unendlich grossen Segment $(AD^{(\infty)})$ ein endliches $(D^{(\infty)}A^{(\infty)})$, so ist das endliche Segment mit Bezug auf das unendliche zu vernachlässigen.

Und wenn wir von dem in Bezug auf die Einheit (AA_1) unendlich grossen Segment $(AA^{(\infty)})$ das Segment $(D^{(\infty)}A^{(\infty)})$ wegnehmen, so ist der übrig bleibende Theil $(AD^{(\infty)})$ dem ganzen Segment gleich.

Wir sehen, dass auch hier die Gleichheit in relativem und nicht in absolutem Sinn stattfindet (Bem. VII, § 60).

Schliesslich untersuchen wir den Fall, in welchem keines der Enden des endlichen Segments (XY) mit einem Ende von $(AA^{(\infty)})$ zusammenfällt und weder (AY) noch $(XA^{(\infty)})$ in Bezug auf (AA_1) endlich sind; denn ohne die letztere Bedingung erhielte man wieder einen oder den andern der vorstehenden Fälle (i, § 82). (AY) und $(XA^{(\infty)})$ sind also bezüglich (AA_1) unendlich gross. Es ist aber, wie oben gezeigt:

$$(AX) + (XY) \equiv (AX)$$

und daher:

$$\begin{aligned}(AA^{(\infty)}) &\equiv (AX) + (XY) + (YA^{(\infty)}) \\ &\equiv [(AX) + (XY)] + (YA^{(\infty)}) \qquad \text{(d, § 77)} \\ &\equiv (AX) + (XD^{(\infty)}),\end{aligned}$$

wenn $(XD^{(\infty)}) \equiv (YA^{(\infty)})$ ist.

Bem. III. Wir bemerken, dass wir bei diesem Beweis den zweiten Theil der Hypothese IV nicht benutzt haben und dass mithin $(AA^{(\infty)})$ ein beliebiges gegebenes unendlich grosses Segment ist.

Def. II. Wenn man sagt, die Segmente $(AA^{(\infty)})$, $(A'A^{(\infty)})$ seien in *Bezug auf die Einheit* (A_1A) *gleich*, so bedeutet dies, sie seien in Bezug auf den

Identitätszusammenhang zwischen den endlichen Theilen in dem Gebiet der Scala dieser Einheit gleich (Bem. VII, § 60).

g'. *Wenn man zu einem endlichen Segment (AA') ein unendlich grosses $(A'A^{(\infty)})$ von derselben Richtung hinzufügt, so erhält man dasselbe in Bezug auf die Einheit unendlich grosse Segment, mag man von dem einem Ende A oder dem andern A' ausgehen.*

g''. *Fügt man zu einem unendlich grossen Segment $(AA^{(\infty)})$ ein endliches Segment $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ von derselben Richtung hinzu oder nimmt man es weg, so bleibt das unendlich grosse Segment in Bezug auf die Einheit (AA_1) oder ein beliebiges gegebenes endliches Segment unverändert.*

Das heisst $(AA^{(\infty)}) \equiv (AA_1^{(\infty)})$.

Es geht dies aus dem Beweis des zweiten Falls in Satz g hervor (Def. II). Dass g'' für jedes endliche gegebene Segment gilt, ergibt sich daraus, dass die Gebiete der Scala, welche untereinander endliche Segmente zu Einheiten haben, gleich sind (Def. II, § 82; b, § 81 und Def. II).

Bem. IV. Wir sagen, die Segmente $(AA^{(\infty)})$, $(A^{(\infty)}A_1^{(\infty)})$ würden in derselben Richtung betrachtet, weil nach dem bis jetzt festgesetzten und durch die Hypothesen III und IV ausgedehnten Begriff der Scala die Segmente in derselben Richtung betrachtet werden.

h. *Der Unterschied zwischen einem endlichen und einem andern ebenfalls endlichen Segment ist, wenn er nicht Null ist, in Bezug auf die Einheit endlich.*

Wäre der Unterschied (Def. I, § 74) unendlich klein, so würde er in Bezug auf die Einheit Null sein (g). Er kann nicht unendlich gross sein; denn wählt man in dem grösseren Segment a ein dem kleineren gleiches a', so müsste a in Bezug auf a' unendlich gross sein (Def. II, § 82). Folglich muss er endlich sein (f, § 82).

Bem. V. Wir werden also von nun an die in absolutem Sinn identischen begrenzten Segmente von denjenigen unterscheiden, die in Bezug auf die Masseinheit gleich sind. Die Verwechslung der einen Identität mit der andern führt zu Widersprüchen.

i. *Zwei begrenzte unendlich grosse Segmente sind in Bezug auf ein beliebiges gegebenes endliches Segment gleich.*

Sind die beiden gegebenen Segmente a und b in absolutem Sinn gleich, so sind sie es um so mehr in relativem Sinn (§ 9). Es sei also $a > b$ (dasselbe ergibt sich, wenn man $b > a$ nimmt) und c ein endliches Segment. Bei der Construction der Scala von der Einheit c können wir a nicht mit b vergleichen, weil sie nicht in dem Gebiet dieser Scala liegen und auch dieses Gebiet selbst nicht sein können, da sie begrenzt sind (Def. III, § 80 und I, § 82). Wir können daher nur sagen, dass sie in Bezug auf die Einheit unendlich gross sind, das heisst, dass sie demselben Begriff entsprechen und daher gleich sind (Def. VI, § 8 und Def. I, § 9).

Oder auch: Man fügt zu einem von ihnen z. B. zu b nacheinander consecutive c gleiche Theile in der Richtung der Scala hinzu. Diese Theile sind dann stets in Bezug auf b Null (g'') und die resultirenden Segmente in Bezug auf c bleiben sich gleich. Auch wenn man die Null auf Grund irgend eines möglichen Princips öfter in Betracht zieht, erhält man stets Null als Resultat

(Def. I, § 31), weil aus Null, das heisst aus der Abwesenheit jeden Elements, auch öfter wiederholt, kein Element entstehen kann, so lange man sich auf die Einheit bezieht. Fügt man hinzu, dass die in Bezug auf c unendlich grossen Segmente es auch in Bezug auf jedes andre endliche Segment sind (d', § 82), so ist der Satz bewiesen.

i'. *Die im Unendlichgrossen liegenden Elemente fallen in Bezug auf ein beliebiges endliches Segment als Einheit in ein einziges Element zusammen.*[1])

Def. III. Das Element, welches alle Elemente darstellt, die in Bezug auf eine gegebene Einheit in der Richtung der Scala der Einheit von einem gegebenen Anfang an im Unendlichgrossen liegen, nennen wir *das im Unendlichgrossen liegende Grenzelement.*

i''. *In Beziehung auf die Einheit kann man dem Gebiet der Scala von dem Anfang A aus das Segment $(AA^{(\infty)})$ substituiren, wenn $(A^{(\infty)})$ sein im Unendlichgrossen liegendes Grenzelement ist.*

Denn alle andern gegebenen Elemente X liegen mit Ausnahme von $A^{(\infty)}$ in Bezug auf die gegebene Einheit in dem Gebiet der Scala, welches, wie wir wissen, gegen $A^{(\infty)}$ hin unbegrenzt ist. Das Segment $(XA^{(\infty)})$ nimmt mit der Zunahme von (AX) absolut genommen ab und strebt danach endlich und mithin Null in Bezug auf die Einheit zu werden (g). Wir können mithin auch hier schreiben:

$$\lim (AX) \equiv (AA^{(\infty)})$$

wie $\lim (AX) \equiv C$ ist (Def. VI, § 83), weil $(AA^{(\infty)})$ und C sich in Bezug auf das variable endliche Segment (AX) gleichmässig verhalten und man, wenn kein andrer Unterschied zwischen C und $(AA^{(\infty)})$ in Betracht gezogen wird, $C \equiv (AA^{(\infty)})$ erhält (c, § 60; Bem. I, § 9 und Def. VII, § 8).

§ 86. *Def. I.* Alle mit einem gegebenen Segment endlichen Segmente, sind untereinander endlich (g, § 82). Sie heissen *Segmente derselben Art.*

Def. II. Alle Segmente $(AA^{(\infty)})$, welche dem zweiten Theil der Hypothese IV genügen, heissen *unendlich grosse Segmente erster Ordnung in Beziehung auf die Einheit* (AA_1).

Die in Beziehung auf ein unendlich grosses Segment erster Ordnung unendlich grossen Segmente erster Ordnung heissen *unendlich gross von der zweiten Ordnung.* Im Allgemeinen nennen wir ein in Beziehung auf ein Segment $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich grosses Segment erster Ordnung *ein in Bezug auf die Einheit* (AA_1) *unendlich grosses Segment von der Ordnung* m.

Bem. I. Für jetzt ist m eine Zahl der Reihe (I) (Def. III, § 46).

1) Bei einer der Hyp. III widersprechenden Hypothese würden natürlich die im Unendlichgrossen liegenden Elemente und mithin die unendlich grossen Segmente nicht existiren. Legt man aber diese Hypothese zu Grund, so bestimmt das Gebiet der Scala von einer beliebigen Einheit (AA') und z. B. dem Anfang A allein schon das im Unendlichgrossen liegende Gebiet, dem das endliche Gebiet der Scala zustrebt. Das heisst, die im Unendlichgrossen liegenden Elemente existiren auch in Bezug auf die Einheit (AA') und den Anfang A. Bleiben wir also im Gebiet einer einzigen Einheit, so können wir uns denken, die in der gegebenen Richtung im Unendlichgrossen liegenden Elemente existirten und fielen mithin in Bezug auf diese Einheit zusammen (i').

Def. III. Ist ein Segment in Beziehung auf ein andres unendlich gross von der Ordnung m, so heisst das letztere in Beziehung auf das erstere *unendlich klein von der Ordnung m.*

a. 1) *Die Segmente, welche derselben Art sind, wie ein unendlich grosses Segment von gegebener Ordnung, sind unendlich gross von derselben Ordnung.*

2) *Unendlich grosse Segmente derselben Ordnung sind von derselben Art.*

Handelt es sich um ein unendlich grosses Segment der ersten Ordnung, so ist der erste Theil des Satzes nur eine andre Formulirung der Sätze c, d, e des § 85.

Die Unendlichgrossen m^{ter} Ordnung sind aber nach unsrer Definition in Bezug auf ein Unendlichgrosses $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich gross erster Ordnung. Daher gilt für sie der Satz a, 1). Weil aber die Segmente derselben Art wie ein unendlich grosses Segment m^{ter} Ordnung in Bezug auf die unendlich grossen Segmente $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erster Ordnung sind, so sind sie in Bezug auf die Einheit (AA_1) unendlich gross von der m^{ten} Ordnung (Def. II).

Für den zweiten Theil genügt die Bemerkung, dass dasjenige Segment, welches in Bezug auf ein andres von ihnen unendlich gross wäre, in Beziehung auf ein Unendlichgrosses von der nächst niedrigeren Ordnung zugleich mit den andern der Hypothese IV nicht genügen könnte (siehe auch f, § 85).

b. *Ein in Bezug auf ein gegebenes Segment b unendlich grosses Segment a von gegebener Ordnung ist unendlich gross von derselben Ordnung bezüglich aller Segmente von der Art des Segments b.*

Ist es ein unendlich grosses Segment a von der ersten Ordnung, so ist der Satz einleuchtend, weil das unendlich grosse Segment erster Ordnung nur von dem Gebiet der Scala mit der Einheit b abhängt und nicht von dem Segment selbst (Hyp. III), da die Gebiete der Scalen, die zwei endliche Segmente zur Einheit haben, gleich sind (Def. II, § 82; d, b, § 81).

Dieses trifft aber auch für die unendlich grossen Segmente m^{ter} Ordnung zu, weil das unendlich grosse Gebiet m^{ter} Ordnung durch das endliche Gebiet der Einheit b mittelst der Hypothesen III und IV bestimmt wird (Def. II).

b'. *Alle Segmente von der Art eines Segments b, welches in Bezug auf ein Segment a unendlich klein von gegebener Ordnung ist, sind unendlich klein von derselben Ordnung.*

Dies folgt aus Satz b und Def. III.

c. *Ein in Bezug auf ein Segment a unendlich kleines Segment b von gegebener Ordnung ist in Bezug auf alle Segmente von der Art der a unendlich klein von derselben Ordnung.*

Denn alle diese Segmente sind in Bezug auf das Segment b unendlich gross von derselben Ordnung m (a) und b ist mithin, mit ihnen verglichen, unendlich klein von derselben Ordnung m (Def. III).

d. *Die Segmente, in Bezug auf welche ein Segment a unendlich gross von einer gegebenen Ordnung ist, sind von derselben Art.*

Denn wäre eines von ihnen c bezüglich eines andern b unendlich gross, so wäre das Segment α nicht in Bezug auf beide unendlich gross von derselben Ordnung (Def. II).

d'. *Segmente, die bezüglich eines Segments α unendlich klein von derselben Ordnung sind, sind von derselben Art.*

Denn α ist in Bezug auf die gegebenen Segmente unendlich gross von derselben Ordnung (Def. III, d).

Def. IV. Das Gebiet der Scala, welche ein in Bezug auf die Einheit (AA_1) unendlich grosses (unendlich kleines) Segment von der Ordnung m zur Einheit hat, heisst *das in Bezug auf (AA_1) im Unendlichgrossen (Unendlichkleinen) liegende (unendlich ferne) Gebiet von der Ordnung m.*

Def. V. Das Gebiet der Scala der Einheiten (AA_1) ist in jedem Segment $(AA^{(\infty)})$ der ersten Ordnung enthalten (1, § 82); wir nennen es desswegen auch *unendlich gross von der ersten Ordnung.* Ebenso ist das im Unendlichen liegende Gebiet der Scala von der m^{ten} Ordnung in jedem unendlich grossen Segment von der $(m+1^{\text{ten}})$ Ordnung enthalten und heisst *unendlichgross von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung.*

Def. VI. Das endliche Gebiet, welches ein unendlich grosses (unendlich kleines) Segment von der Ordnung m zur Einheit hat (Def. V, § 83) heisst *unendlich grosses (unendlich kleines) Gebiet der m^{ten} Ordnung.*

Das bezüglich der ursprünglichen Einheit (AA_1) endliche Gebiet heisst auch *unendlich grosses Gebiet der Ordnung Null.*

Bem. II. Während das *im Unendlichgrossen liegende* Gebiet der Ordnung m ein gegebenes Ding ist, das bei unsern Betrachtungen constant bleibt, ist *das unendlich grosse* Gebiet der Ordnung m, wie das in Bezug auf eine Einheit endliche Gebiet (Bem. I, § 83), veränderlich und wird durch ein unendlich grosses Segment der Ordnung m dargestellt, welches grösser als jedes gegebene unendlich grosse Segment derselben Ordnung wird und welches *unbegrenzt* in dem im Unendlichgrossen liegenden Gebiet von der Ordnung m wächst. Wir nennen es *unbegrenzt gross von der Ordnung $m+1$*, dürfen es aber nicht mit dem unendlich grossen Gebiet von der Ordnung $m+1$ verwechseln.

e. *Das in Bezug auf ein Segment a unendlich grosse oder unendlich kleine Gebiet von einer gegebenen Ordnung ist in Bezug auf jedes Segment von derselben Art wie a unendlich gross oder unendlich klein von derselben Ordnung* (b, c, und Def. VI).

Def. VII. Um das in Bezug auf ein unendlich grosses Segment erster Ordnung als Einheit im Unendlichgrossen liegende Grenzelement von dem Grenzelement in Bezug auf die ursprüngliche Einheit (AA_1) zu unterscheiden (Def. III, § 85) nennen wir das zweite *das im Unendlichgrossen 1ter Ordnung* und das erste *das im Unendlichgrossen 2ter Ordnung liegende Element.*

Im Allgemeinen heisst das Grenzelement in Bezug auf ein unendlich grosses Segment $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung als Einheit, *das* in Bezug auf die ursprüngliche Einheit *im Unendlichgrossen m^{ter} Ordnung liegende Grenzelement.*

f. *Das Grenzelement m^{ter} Ordnung stellt das ganze im Unendlichgrossen m^{ter} Ordnung in Bezug auf ein unendlich grosses Segment $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung als Einheit liegende Gebiet dar* (i, i', § 85).

Bem. III. Diese Unterscheidung der Grenzelemente in Bezug auf die ursprüngliche Einheit bedeutet nur, dass sie sich *successive* auf unendlich grosse Segmente verschiedener Ordnung als Einheiten beziehen, weil wir, wie wir schon wissen, bei einer Einschränkung unsrer Betrachtungen auf eine einzige Einheit (AA_1), nur ein einziges Grenzelement haben (i', § 85). So erklärt sich der *scheinbare* Widerspruch, dass wir hier von verschiedenen Grenzelementen sprechen, während wir im § 85 gesagt haben, dass es bezüglich der Einheit (AA_1) nur ein einziges gebe.

Auch wenn wir von Gebieten sprechen, die in Bezug auf die Einheit (AA_1) unendlich-gross von gegebener Ordnung sind, meinen wir nicht, diese Gebiete seien in Bezug auf die Einheit (AA_1) allein verschieden, weil wir damit offenbar in den Widerspruch geriethen: A ist und ist nicht A, sondern sie seien in Bezug auf die wiederholte Anwendung des Princips der Hypothese IV verschieden.

Wir können endlich sagen:

Da bezüglich der Einheit (AA_1) nur ein einziges Grenzelement existirt, so existiren für sie allein die unendlich grossen Gebiete 2ter, 3ter ... n^ter^, ... *Ordnung nicht, welche sich auf andre mittelst der Hypothese IV erhaltene Einheiten beziehen.*

Bem. IV. Wenn wir daher von dem Gebiet sprechen, welches in Bezug auf nur eine Einheit im Unendlichen liegt, so müssen wir darunter dasjenige erster Ordnung in absolutem Sinn verstehen.

2.

Unendlich grosse und unendlich kleine Zahlen verschiedener Ordnungen, ihre Eigenschaften und Symbole.

§ 87. *Bem. I.* Wie jedes Theilungselement der Scala vom Anfang aus eine Zahl der Reihe (I) 1, 2, ... n darstellt (b, b' und Bez. I, § 80), so stellt das Zeichen ∞, welches die Stelle eines Elementes in dem im Unendlichgrossen liegenden Gebiet angibt, eine neue Zahl dar, die durch die Gesammtheit der den zweiten Enden der Segmente entsprechenden Einheiten 1, 2, ... n, ... ∞ gegeben ist (Def. I, II, § 45). Die Eigenschaften und Beziehungen der so definirten Zahlen sind durch diejenigen der Segmente, welche sie darstellen, gegeben und geben dann ihrerseits wieder die Eigenschaften und Beziehungen der Segmente, zu deren Bestimmung diese Zahlen, wie wir in der Folge sehen werden, dienen.

Def. I. Diese neue Zahl heisst *unendlich gross* zum Unterschied von den Zahlen, welche die Elemente des Gebiets der Scala darstellen oder darstellen können und welche *endlich* genannt werden.

Um von nun an die Zahlen von (I) von den andern möglichen endlichen Zahlen zu unterscheiden nennen wir sie *ganze, endliche Zahlen.*

Bem. II. Um eine Zahl zu bezeichnen, welche nur unendlich gross ist, wenden wir, wie geschehen, das Zeichen ∞ an; sollen später diese Zahlen, wie die Elemente, durch welche sie dargestellt werden, untereinander unterschieden werden, so werden wir dem Zeichen ∞ noch besondere Zeichen beifügen.

Da noch andre unendlich grosse Zahlen möglich sind (siehe z. B. § 3), so meinen wir, wenn nicht Anderes bestimmt wird, unsre unendlich grossen Zahlen, die stets durch von zwei Enden begrenzte Segmente dargestellt werden und *unsre Sätze sind daher nur für diese Zahlen bestimmt.*

Aus der Bem. I. erhält man inzwischen:

a. *Eine unendlich grosse Zahl ist grösser als eine beliebige endliche Zahl* (c und Def. II, § 82).

b. *Zwischen einer endlichen Zahl und einer unsrer unendlich grossen Zahlen* [illegible] *im absoluten Sinn andre unendlich grosse Zahlen* (a, § 82).



c. *Ist eine beliebige bestimmte unendlich grosse Zahl gegeben, so liegt zwischen ihr und den endlichen Zahlen eine andre unendlich grosse Zahl der Art, dass die Zahl, die zu ihr addirt werden muss, um die gegebene zu erhalten, ebenfalls unendlich gross ist. Ferner existirt immer eine unendlich grosse Zahl der Art, dass alle andern unendlich grossen Zahlen, die zwischen ihr und Null liegen, in Bezug auf die als Einheit gegebene Zahl endlich sind* (Bem. II).

In andern Worten: Wenn die erste Zahl des letzten Theils des Satzes β ist, und die zweite γ und es ist

$$\beta > \gamma,$$

so gibt es immer eine solche Zahl n, dass

$$\gamma n > \beta. \qquad \text{(Hyp. IV und b, § 85)}$$

d. *Eine endliche Zahl ist in Bezug auf eine unendlich grosse Zahl Null, jedoch nicht in absolutem Sinn* (Def. I und Bem. II; g, § 85).

d'. *Wenn man zu einer endlichen Zahl α eine unendlich grosse Zahl β addirt, so erhält man in Bezug auf die gegebene Einheit dieselbe Zahl β* (g', § 85).

Das heisst $$\alpha + \beta = \beta.$$

d''. *Wenn man eine endliche Zahl α zu (oder von) einer unendlich grossen Zahl β zuzählt (oder abzieht), so ist β die resultirende Zahl in Bezug auf die gegebene Einheit* (g'', § 85).

Das heisst $$\beta \pm \alpha = \beta.$$

Bem. III. Die Operation des Summirens ist hier im ursprünglichen Sinn gedacht (Def. I, § 72) und nicht im Sinn der Def. I, § 77. Wir können auch hier nicht davon sprechen eine unendlich grosse Zahl von einer endlichen hinwegzunehmen, weil wir den Sinn des Abziehens einer grösseren von einer kleineren Zahl noch nicht erklärt haben, wie es für die Segmente bereits geschehen ist (Def. II, § 77) und wie wir es später thun werden (siehe §§ 113, 114).

e. *Die Differenz zweier endlichen Zahlen ist in Beziehung auf die Einheit endlich, wenn sie nicht Null ist. In absolutem Sinn kann sie unendlich klein sein* (Bem. I, Def. I, Bem. II; h, § 85).

f. *Zwei unendlich grosse Zahlen sind in Bezug auf eine endliche Zahl gleich* (i, § 85).

Def. II. Die Zahl ∞ heisst *unendlich grosse Grenzzahl* in Bezug auf die Einheit 1 (Def. III, § 85).

f'. *Wenn x eine endliche stets wachsende Zahl ist, so erhält man in Bezug auf die Einheit*

$$\lim x = S = \infty, \qquad \text{(i'' § 85)}$$

wenn S die der ganzen Reihe der natürlichen Zahlen entsprechende Zahl darstellt (Def. II, § 46 und Def. II, § 45).

§ 88. *Def. I.* Die untereinander endlichen Zahlen heissen *Zahlen derselben Art* (Bem. I, Def. I, Bem. II, § 87 und Def. I, § 86).

Def. II. Die den unendlich grossen Segmenten einer gegebenen Ordnung m entsprechenden Zahlen heissen *in Bezug auf die ursprüngliche Zahleneinheit unendlich grosse Zahlen der Ordnung m* (Bem. I, Def. I, Bem. II, § 87 und Def. II, § 86).

Def. III. Wenn eine Zahl in Bezug auf eine andre Zahl unendlich gross von der Ordnung m ist, so heisst letztere *in Bezug auf erstere unendlich klein von der Ordnung m* (Def. III, § 86).

a. 1) *Zahlen von derselben Art, wie eine unendlich grosse Zahl von gegebener Ordnung sind unendlich gross von derselben Ordnung.*

2) *Unendlich grosse Zahlen von derselben Ordnung sind von derselben Art* (Bem. I, Def. I, Bem. II, § 87 und a, § 86).

b. *Eine in Bezug auf eine Zahl b unendlich grosse Zahl α von gegebener Ordnung ist in Bezug auf alle Zahlen von derselben Art wie b unendlich gross von derselben Ordnung* (Bem. I, Def. I, Bem. II, § 87 und b, § 86).

b′. *Alle Zahlen von derselben Art wie eine Zahl b, die in Bezug auf eine Zahl α unendlich klein von gegebener Ordnung ist, sind unendlich klein von derselben Ordnung* (b′, § 86).

c. *Eine in Bezug auf eine gegebene Zahl α unendlich kleine Zahl β von gegebener Ordnung ist in Bezug auf alle Zahlen derselben Art wie α unendlich klein von derselben Ordnung* (Bem. I, Def. I, Bem. II, § 87 und c, § 86).

d. *Die Zahlen, in Bezug auf welche eine Zahl α unendlich gross von gegebener Ordnung ist, sind von derselben Art* (Bem. I, Def. I, Bem. II, § 87 und d, § 86).

Bem. I. Auch bei den Zahlen sind die Gebiete der Scalen der unendlich grossen Zahlen von dem Gebiet der Scala der ursprünglichen Einheit zu unterscheiden (Def. IV, V, VI und Bem. II, § 86).

e. *Das in Bezug auf eine Zahl a unendlich grosse oder unendlich kleine Gebiet gegebener Ordnung ist in Bezug auf alle Zahlen von derselben Art wie a unendlich gross oder unendlich klein von derselben Ordnung* (Bem. I, Def. I, Bem. II, § 87 und e, § 86).

f. *Eine unbegrenzte Gruppe erster Art ist unendlich gross.*

Denn man kann sie eindeutig und in derselben Ordnung der Reihe der consecutiven Segmente einer Scala entsprechen lassen (Def. I, § 80), deren Gebiet ebenfalls unendlich gross ist (Def. IV, § 82 und b, § 43).

§ 89. *Bez. I.* Um die Elemente der im Unendlichgrossen liegenden Gebiete verschiedener Ordnung zu unterscheiden, gebrauchen wir verschiedene Zeichen.

Die im Unendlichgrossen erster Ordnung liegenden Elemente bezeichnen wir mit dem gewöhnlichen Symbol ∞^1 oder auch ∞. Ist eines dieser Elemente $A^{(\infty_1)}$ gegeben, so bezeichnen wir die Elemente, die man erhält, wenn man mit $A^{(\infty_1)}$ beginnend die ursprüngliche Einheit (AA_1) mit ihm vereinigt oder von ihm wegnimmt, mit den Symbolen

$$\infty_1 + 1,\ \infty_1 + 2,\ \ldots,\ \infty_1 + n,\ \ldots$$
$$\infty_1 - 1,\ \infty_1 - 2,\ \ldots,\ \infty_1 - n,\ \ldots$$

Nimmt man $(AA^{(\infty_1)})$ zur Einheit und construirt die Scala mit dem Anfang A, so bezeichnen wir die Theilungselemente mit

$$\infty_1 \cdot 2,\ \infty_1 \cdot 3,\ \ldots,\ \infty_1 \cdot n_1 \pm n_2.$$

Def. I. Wir sagen, $(AA^{(\infty_1)})$ *enthalte* ∞_1 *mal die Einheit* (AA_1).

Bez. II. Dagegen geben wir den Elementen des im Unendlichgrossen zweiter Ordnung liegenden Gebiets das Symbol ∞^2, indem wir mit ∞_1^2 das Product $\infty_1 \cdot \infty_1$ bezeichnen, das durch das zweite Ende des Segments $(AA^{(\infty_1^2)})$ dargestellt wird, welches ∞_1 mal das Segment $(AA^{(\infty_1)})$ enthält (Def. I). Wir erhalten die Zahlen:

$$\infty_1^2 \pm 1,\ \infty_1^2 \pm 2,\ \ldots,\ \infty_1^2 \pm n,\ \ldots,\ \infty_1^2 + \infty_1,\ \infty_1^2 \pm \infty_1 \pm 1,\ \ldots,$$
$$\infty_1^2 \pm \infty_1 n_1 \pm n_2,\ \ldots,\ \infty_1^2 \cdot 2, \ldots,\ \infty_1^2 \cdot 3,\ \ldots,\ \infty_1^2 \cdot n_1 \pm \infty_1 n_2 \pm n_3,\ \ldots,$$

worin n_1, n_2, n_3 Zahlen der Reihe (I) sind.

Bez. III. Im Allgemeinen bezeichnen wir die Elemente des im Unendlichgrossen liegenden Gebiets m^{ter} Ordnung (Def. IV, § 86) mit ∞^m und setzen $\infty_1^{m-1} \cdot \infty_1 = \infty_1^m$. Die Elemente in diesem Gebiet sind mithin mit den folgenden Zahlen bezeichnet:

$$\infty_1^m \pm n_1,\ \infty_1^m \pm \infty_1 n_1 \pm n_2,\ \infty_1^m \pm \infty_1^2 n_1 + \infty_1 n_2 \pm n_3,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \infty_1^m \pm \infty_1^{m-1} n_1 \pm \cdots \pm \infty_1 n_{m-1} \pm n_m,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \infty_1^m n \pm \infty_1^{m-1} n_1 \pm \cdots \pm \infty_1 n_{m-1} \pm n_m,$$

wobei n, n_1, n_2, $\ldots$, n_m Zahlen der Reihe (I) sind und n_1, n_2, $\ldots$, n_m Null sein können.

a. *Es ist*

$$n_1 + \infty_1 n_2 + \cdots + \infty_1^{m-1} n_m + \infty_1^m n_{(m+1)} = \infty_1^m n_{(m+1)} \pm$$
$$\pm \infty_1^{m-1} n_1' \pm \cdots \pm \infty_1 n'_{(m-1)} + n'_m = \infty_1^m n_{(m+1)}$$

in Bezug auf die Zahl ∞_1^m als Einheit. n_1, n_2, $\ldots$, n_n, n'_1, n'_2, $\ldots$, n'_m sind dabei Zahlen der Reihe (I) (d, § 87).

Bem. I. Die in Bezug auf die unendlich grossen Zahlen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich grosse Grenzzahl oder die unendlich grosse Grenzzahl m^{ter} Ordnung (Def. II, § 87) wird durch das Symbol ∞^m dargestellt, welches in Bezug auf eine unendlich grosse Zahl der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung alle unendlich grossen Zahlen der Ordnung m repräsentirt (Def. II, § 87 und f, § 86).

3.[1]

Die transfiniten Zahlen Cantor's. — Wesshalb sie sich nicht zur Vergleichung begrenzter Segmente der Grundform verwenden lassen.

§ 90. *Hyp. I.* **Es existirt ein System Σ einer Dimension, in welchem es stets ein Segment gibt, welches mit einem beliebigen in einer gegebenen Richtung liegenden Segment (AB) identisch ist, dessen erstes Ende ein beliebiges Element X des Systems Σ ist.**

Bem. I. Aus dieser Hypothese geht nicht hervor, dass es immer ein zweites (AB) gleiches Segment, dessen zweites Ende X ist, in der Richtung des Systems Σ gibt, wie die Hyp. II annimmt (Def. I, § 68).

---

1) Von den Zahlen *G. Cantor*'s machen wir in den Fundamenten der Geometrie keinen Gebrauch und benutzen sie in dieser Einleitung auch nur zum Vergleich mit unsern unendlich grossen Zahlen. Wir geben mithin die Hyp. II wieder auf; Hyp. I ist schon in Hyp. II, § 71 enthalten.

Mittelst der vorstehenden Hypothese können wir eine Scala construiren (Def. I, § 80) und können mithin folgende Hypothese aufstellen:

Hyp. II. **Das Gebiet einer Scala im System Σ (Def. III, § 80) bestimmt in der Richtung der Scala ein erstes Element ausserhalb desselben.**

Bem. II. Um die Möglichkeit dieser Hypothese zu beweisen, genügt es statt der beiden vollständigen Scalen N und N' des Beweises zu dem Satz b, § 82, das heisst, ohne ein der ursprünglichen Einheit gleiches erstes Segment, sich zu denken, die beiden Scalen N und N' seien durch ihre Anfänge begrenzt und der Anfang von N' sei vollständig durch N bestimmt und sei das einzige erste Element, welches auf diejenigen von N folgt.

Wenn A der Uranfang und A_ω das Element der Hypothese ist, so stellt (AA_ω) das Gebiet der gegebenen Scala dar.

Bem. III. Das Symbol ω, welches dieses neue Element bezeichnet, heisst auch Zahl und wie jede Zahl n die Zahl der Theilungselemente $A_1 A_2 \ldots A_n$ der Scala ist (Def. II, § 80), so ist ω die Zahl aller Elemente der Gruppe

$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots A_\omega. \qquad \text{(Def. I, II, § 45)}$$

a. *Die Zahl ω ist grösser als alle endlichen ganzen Zahlen und jede ganze Zahl, die kleiner als ω ist, ist endlich.*

Denn die Gruppe $A_1 \ldots A_\omega$ enthält alle natürlichen Gruppen, aus denen die natürlichen Zahlen abgeleitet werden (Def. II, § 46), und eine natürliche Gruppe kann nicht eindeutig und in derselben Ordnung der Gruppe $A_1 \ldots A_\omega$, welche nicht natürlich ist, entsprechen (c'', § 43; Def. § 65).

Der zweite Theil geht aus der Hyp. II selbst hervor.

Def. I. Die Zahl ω heisst *die unendlich grosse oder transfinite Zahl* Cantor's.[1]

---

1) Siehe z. B. Acta mathematica Vol. 2 Seite 381 u. f. Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre, Zeitschr. f. Phil. v. Fichte a. a. O. u. s. w.

Cantor definirt seine Zahl ω als *Zeichen*, welches die ganze Reihe (I) in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge darstellt (Acta Math. Seite 385) oder auch als Resultat der Abstraction von der Gesammtheit ihrer Zahlen, letztere in ihrer Ordnung als Elemente betrachtet (Zeitschr. f. Phil. Vol. 91, S. 84).

Indem er weitere Einheiten nach demselben Princip hinzufügt, erhält er seine Zahlen $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., 2ω, ... u. s. w. Mittelst des dritten Bildungsprincips theilt er dann seine transfiniten Zahlen in Classen. Die erste Classe ist durch die Zahlen der Reihe (I) gegeben. Die zweite Classe ist aus unendlich grossen Zahlen der Art gebildet, dass das System von Zahlen, welche in den Reihen der erhaltenen Zahlen einer beliebigen Zahl der Classe, von 1 angefangen, vorausgehen, eindeutig der Reihe (I) entspricht oder, wie *Cantor* sagt, von derselben *Potenz* ist wie (I). Er zeigt, dass die Classe (II) nicht dieselbe Potenz wie Classe (I), sondern die nächst höhere hat. Das System der Zahlen, welche einer Zahl der dritten Classe, von 1 angefangen, vorangehen, ist von derselben Potenz wie die zweite Classe u. s. w. Die von uns hier gegebene Hypothese gibt auch *Cantor*, indem er sagt (Zeitschr. f. Phil. v. Fichte 91. Heft I, Seite 97): denken wir uns aber statt der endlichen Linien AB in derselben Richtung und mit demselben Anfangspunkte eine actual unendliche Linie $A0$, die ihren Zielpunkt 0 im Unendlichen hat, u. s. w. und dann: da die gedachte actual unendliche Grade $A0$, ihrer Grösse nach, der von mir mit ω bezeichneten kleinsten transfiniten Ordnungszahl entspricht, u. s. w.

Die Elemente der Reihe NN' genügen, wenn N und N' von ihren Anfängen begrenzt sind, wie die Elemente der ganzen Reihe transfiniter Zahlen *Cantor*'s, den ersten acht Axiomen *Peano*'s (siehe Anm. 1 zu § 82). Für obige Reihe gilt jedoch nicht das Princip des Beweises von n auf $n + 1$. Um die Möglichkeit der obigen Reihe oder der Zahlenreihe *Cantor*'s auszuschliessen, braucht man den obigen acht Eigenschaften nur die andre hinzuzufügen: Wenn a eine beliebige Zahl der Reihe ist, so ist auch $a - 1$ eine von a verschiedene Zahl.

Daraus geht hervor, dass bei den acht ersten von *Peano* aufgestellten Eigenschaften verschiedene Möglichkeiten existiren: die Reihe NN' ist möglich, in welcher N und N' von einem Element begrenzt sind und N' die erste Reihe nach N ist, ohne dass zwischen N und N' andre mit N und N' identische Reihen liegen oder es ist möglich, dass zwischen N und N' andre mit N' identische Reihen vorkommen oder unsre Reihe ist möglich, bei

Bem. IV. Der Unterschied zwischen unserer unendlich grossen Zahl und der Zahl ω *Cantor's* besteht darin, dass wir keine erste unendlich grosse Zahl kennen (b und Bem. II, § 87), während bei den unendlich grossen Zahlen *Cantor's* ω die erste in absolutem Sinn ist. Das heisst also: Wenn eine von unseren unendlich grossen bestimmten Zahlen gegeben ist, z. B. ∞_1, so gibt es von ∞_1 verschiedene Zahlen $\infty_1 - n$, welche zwischen den endlichen Zahlen und der Zahl ∞_1 liegen (§ 23).

b. *Man kann in absolutem Sinn mit der Zahl ω kein im Unendlichgrossen liegendes Element des homogenen Systems darstellen.*

Denn wählt man ein Element z. B. A_ω in dem unendlich grossen Segment (AA_ω), so gibt es stets noch andre im Unendlichgrossen liegende Elemente, die nicht mit A_ω zusammenfallen z. B. alle Elemente der Scala von dem Anfang A_ω und der Einheit $(A_1 A)$ in Satz b, § 84.

c. *Mit Bezug auf eine endliche Zahl als Einheit ist die Zahl ∞ die Zahl ω.*

Denn in Bezug auf eine endliche Zahl stellt die Zahl ∞ alle im Unendlichgrossen liegende Zahlen dar (f, § 87) und ist daher die erste und auch die letzte unendlich grosse Zahl.

c'. *Die Zahl ω kann man die Anzahl aller endlichen ganzen Zahlen nennen.*

Denn, bezeichnet man diese Anzahl mit S, so ist

$$S = \omega. \qquad \text{(f, § 87 und c)}$$

Uebereink. Die Zahl einer geordneten Gruppe, die man durch die Anwendung der vorstehenden Hypothesen erhält, hängt nur von dem eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhang zwischen den Elementen der Gruppe und den Einheiten der entsprechenden Zahl ab (Def. II, § 45). (Siehe Bem. I, § 93.)

d. *Es ist $n + \omega = \omega$, $\omega + 1 > \omega$.*

Denn die Gruppen

$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots, \; A_n A_{n+1} \ldots \qquad (1)$$

entsprechen sich eindeutig und in derselben Ordnung, da sie unbegrenzt von der ersten Art sind (c, § 46; e, § 39; b', § 43). Daher entsprechen sich auch in derselben Art

$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots A_\omega, \; A_n A_{n+1} \ldots A_\omega,$$

worin die Zahl ω durch eine unbegrenzte Gruppe erster Art dargestellt wird, die zum ersten Grenzelement, wie wir vorausgesetzt haben (Hyp. II) ein zweites Element A_ω hat. Den beiden Gruppen (1) entspricht daher dieselbe Zahl ω (Def. II). In absolutem Sinn erhält man aber die erste aus der zweiten durch Hinzufügen der Elemente $A_1 A_2 \ldots A_n$, es ist also:

$$n + \omega = \omega.$$

Dagegen können sich die beiden Gruppen

$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots, \; A_2 A_3 \ldots A_1$$

oder auch nach unserer Hypothese

---

welcher N' kein erstes Element hat und zwischen N und N' andre an die Hypothese IV gebundene Reihen N' sind — wie es in $(0 \ldots 1)$ unendlich viele andre Zahlen gibt. — Wählt man eines dieser Systeme aus, so sind natürlich die andern zugleich mit ihm nicht möglich. Daraus folgt aber nicht, dass, wenn das eine möglich ist, die andern an sich falsch sind.

$$A_1 A_2 \ldots A_\omega, \quad A_2 A_3 \ldots A_\omega A_1$$

nicht eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen; denn lässt man dem A_1 das Element A_2 in der zweiten Gruppe entsprechen, dem A_2 das Element A_3 u. s. w., so entspricht dem A_ω in der zweiten Gruppe kein Element der ersten, es ist mithin:

$$\omega + 1 > \omega.$$

Bem. V. In absolutem Sinn sind unsre Zahlen $n + \infty_1$ und $\infty_1 + n$ von ∞_1 verschieden, sie sind jedoch dieselben in Bezug auf die Einheit 1 (oder eine endliche Zahl als Einheit), wie in Bezug auf die Einheit, welche der die Zahl ∞ darstellenden Gruppe entspricht (d und d', § 87).

Bem. VI. Eine mit der Zahl ω ausgeführte Operation ist gleichwerthig mit einer mit allen Zahlen der Reihe (I) in ihrer natürlichen Ordnung successive ausgeführten Operation (Bez. III, § 47).

e. *Es gibt weder ein erstes unendlich grosses Segment von der Ordnung ω, noch ein Gebiet begrenzter Segmente z. B. $(AA^{(\infty_1^\omega)})$ von der Ordnung ω, wenn ein Element X derart existiren soll, dass (AX) und $(XA^{(\infty_1^\omega)})$ in Bezug auf $(AA^{(\infty_1^\omega)})$ endlich sind. Dagegen lässt sich bei einer unendlich grossen Zahl unserer Reihe die Hyp. IV über die Bestimmung unendlich grosser Segmente in der Grundform anwenden.*

Wenn $(AA^{(\infty^\omega)})$ das erste Segment von der Ordnung ω in Bezug auf die Einheit (AA_1) wäre, so würde jedes Segment (AX) von $(AA^{(\infty^\omega)})$ unendlich gross von endlicher Ordnung sein. Denn $(AA^{(\infty^\omega)})$ wird durch die Reihe unendlich grosser Gebiete von endlicher Ordnung bestimmt und es fällt desshalb jedes bestimmte Element X von $(AA^{(\infty^\omega)})$ in eines dieser Gebiete, da $A^{(\infty^\omega)}$ in absolutem Sinn das *erste* im Unendlichgrossen von der Ordnung ω liegende Element ist.

In dem Segment $(AA^{(\infty^\omega)})$ können wir ferner ein Segment $(A^{(\infty^\omega)}A_1^{(\infty^\omega)}) \equiv (A_1 A)$ (Def. I, § 68 und b, § 69) betrachten, wobei $A_1^{(\infty^\omega)}$ ein in absolutem Sinn von $A^{(\infty^\omega)}$ verschiedenes Element ist. Der Eigenschaft des Elementes X wegen muss nun $(AA_1^{(\infty^\omega)})$ in Bezug auf die Einheit (AA_1) unendlich gross von endlicher Ordnung sein. Weil $(AA^{(\infty^\omega)})$ nun z. B. in dem Segment $(AA_1^{(\infty^\omega)}) \cdot 2$, enthalten ist, welches in Bezug auf $(AA_1^{(\infty^\omega)})$ endlich ist (Def. II, i, § 82) und mithin in Bezug auf (AA_1) unendlich gross von derselben Ordnung ist (Def. IV, a, § 86), so ist auch $(AA^{(\infty^\omega)})$ unendlich gross von derselben Ordnung wie $(AA_1^{(\infty^\omega)})$, da es weder von höherer Ordnung noch von niederer (Def. II, § 82) — was gegen die Voraussetzung wäre — sein kann. Es gebe nun ein Gebiet von solchen Elementen, dass, wenn man eines von ihnen, z. B. $A^{(\infty_1^\omega)}$ nimmt, $(AA^{(\infty_1^\omega)})$ unendlich gross von der Ordnung ω wäre und construirt man um dieses Element die unendlich grossen Gebiete endlicher Ordnung, deren Elemente durch die Zahlen

$$\infty_1^\omega + \infty_1^m n_1 \pm \infty_1^{m-1} n_2 \pm \cdots \pm n_{m+1}$$

ausgedrückt werden, so müsste das Element X für jedes beliebige m zwischen den Gebieten endlicher Ordnung und den Gebieten

$$\infty_1^\omega - \infty_1^m n_1 - \infty_1^{m-1} n_2 - \cdots - n_{m+1}$$

liegen. Es müsste daher (AX) und $(XA^{(\infty_1^{\omega})})$ von einer unendlich grossen Ordnung sein, die nach der Voraussetzung weder ω noch $\omega - n$ sein kann, da $\omega - n = \omega$ ist. Denn X gehört nicht dem obigen Gebiet um $A^{(\infty_1^{\omega})}$ an. (AX) kann auch nicht von einer niedrigeren Ordnung als ω sein, weil es sonst der Annahme zuwider von endlicher Ordnung wäre. Damit sind die beiden ersten Theile des Satzes bewiesen.

Um den dritten Theil zu beweisen, beachte man, dass man in einem Segment $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ immer ein Element X derart auswählen kann, dass (AX) und $(XA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ in Bezug auf $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ endlich sind. Es folgt dies aus der Eigenschaft der Zahl ∞_1 selbst, weil das Segment $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ in Bezug auf das Segment $(AA^{(\infty_1^{\infty_1 - 1})})$ unendlich gross von der ersten Ordnung ist und die in Bezug auf ein gegebenes Segment unendlich grossen Segmente erster Ordnung der Hypothese IV genügen (Def. II, § 86).

Bem. VII. Die Hypothese IV ∞_1 mal anwenden, ist die Operation, mittelst welcher man aus (AA_1) die Einheit $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ erhält. Sie hat daher einen bestimmten Sinn.

4.

Weitere Hypothese (V) über die Construction der Segmente der Grundform. — Unendlich grosse Segmente und Zahlen von unendlich grosser Ordnung. — Segmente die Vielfache und Factoren nach einer unendlich grossen Zahl sind. — Das absolute Unendlichgrosse, Endliche und die absolute Einheit. — Die Grundeinheit.

§ 91. *Bem. I.* Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass sich die Hypothese IV eine unendlich grosse Anzahl mal anwenden lässt und dass diese Anzahl der früher betrachteten Reihe der unendlich grossen Zahlen von der Ordnung n angehört, indem n eine beliebige Zahl der Reihe (I) ist (e, § 90; Bez. III, § 89). Wir können damit aber nicht ausschliessen, dass es noch andre Mittel gibt, ein unendlich grosses Segment von unendlich grosser Ordnung zu bestimmen, ohne gegen die Definition des homogenen Systems, die Hyp. IV und die Eigenschaften, die sich aus ihnen ergeben, zu verstossen. Der erste Theil der Hypothese IV sagt uns nur, dass, wenn ein beliebiges unendlich grosses Segment $(AA^{(\infty)})$ gegeben ist, ein Element X (und mithin auch unendlich viele andre) derart existiren muss, dass (AX) und $(XA^{(\infty)})$ ebenfalls unendlich gross sind, er sagt aber Nichts über die Art, wie das Segment $(XA^{(\infty)})$ in Bezug auf das Segment (AA_1) bestimmt wird. Wir stellen daher folgende Hypothese auf:

Hyp. V. **Jedes unendlich grosse Segment, welches nicht mehr von endlicher Ordnung m ist, erhält man dadurch, dass man das Princip der Hypothese IV eine unendlich grosse Anzahl mal anwendet, welche Anzahl entweder schon gegeben ist oder sich aus den neuen so construirten Segmenten ergibt.**

a. *Die Hypothese V ist unabhängig von den früheren Hypothesen.*

Sie ist offenbar von ihnen unabhängig, weil aus ihnen weder hervorgeht, dass es Segmente $(AA^{(\infty)})$ gibt, die der Hypothese V genügen, noch dass es solche Segmente nicht gibt (Bem. I). Die Hyp. V schliesst die Existenz von Segmenten $(AA^{(\infty)})$ aus, welche man nicht mittelst wiederholter Anwendung

der Hyp. IV auf die Segmente oder auf die unendlich grossen Zahlen erhält, welche sich ergeben, wenn man die einen aus den andern nacheinander ableitet.

Def. I. Wir nennen die Hyp. V *die Hypothese über die Construction* der unendlich grossen Segmente der Grundform.

Def. II. Die unendlich grossen Segmente von der Ordnung ∞_1^m bilden, wenn man vom Anfang A ausgeht, ein Gebiet, das in Bezug auf die Einheit (AA_1) *das im Unendlichgrossen liegende (unendlich ferne) Gebiet von der Ordnung* ∞_1^m heisst. Die Einheit (AA_1) ist in Bezug auf ein unendlich grosses Segment von der Ordnung ∞_1^m unendlich klein von der Ordnung ∞_1^m.

Ferner heisst das endliche Gebiet, welches zur Einheit ein unendlich grosses Segment von der Ordnung ∞_1^m hat, *unendlich gross von der Ordnung* ∞_1^m.

b. *Die unendlich grossen Segmente einer gegebenen Ordnung sind Null in Bezug auf die unendlich grossen Segmente höherer Ordnung.*

Denn sie sind in Bezug auf die Segmente der nächst höheren Ordnung zu vernachlässigen (g, § 85).

b′. *Die unendlich kleinen Segmente sind in Bezug auf die unendlich kleinen Segmente niedrigerer Ordnung auf die endlichen und unendlich grossen Segmente zu vernachlässigen* (b; Def. III, § 86; g, § 85).

Def. III. Das Grenzelement des unendlich grossen Gebiets der Ordnung ∞_1^m nennen wir *das in Bezug auf die Einheit* (AA_1) *im Unendlichgrossen der Ordnung* ∞_1^{m+1} *liegende Grenzelement.*

Def. IV. Die den Elementen des unendlich grossen Gebiets der Ordnung ∞_1^m entsprechenden Zahlen heissen *unendlich gross von der Ordnung* ∞_1^m und werden mit dem Symbol $\infty^{\infty_1^m}$ bezeichnet, so dass es in diesem Gebiet die Zahlen

$$\infty_1^{\infty_1^m} \pm 1,\ \infty_1^{\infty_1^m} \pm 2,\ \ldots,\ \infty_1^{\infty_1^m} \pm n \ldots$$

gibt.

Bem. II. Das Unendlichgrosse $\infty_1^{\infty_1^m} \cdot \infty_1^{\infty_1^{m'}}$ ist von der Ordnung $\infty_1^m + \infty_1^{m'}$.

Bem. III. So erhalten wir auf Grund der Hypothese IV die unendlich grossen Segmente der Ordnung $\infty_1^{\infty_1^m}$, ein im Unendlichgrossen liegendes und ein unendlich grosses Gebiet derselben Ordnung und ein Grenzelement von der Ordnung $\infty_1^{\infty_1^m} + 1$. Daraus ergeben sich dann wieder unendlich grosse Zahlen derselben Ordnung, deren Gebiet mit dem Symbol $\infty^{\infty_1^{\infty_1^m}}$ bezeichnet wird. So geht es unbegrenzt weiter.

Bez. I. Wir bezeichnen die unendlich grossen und endlichen Zahlen mit griechischen, die endlichen Zahlen mit lateinischen Buchstaben. Eine unendlich grosse Zahl der Ordnung η bezeichnen wir mit ∞^η und ∞^η stellt in diesem Fall nicht eine einzelne Zahl dar, sondern definirt ein bestimmtes Gebiet von Zahlen.

Wenn wir also von einer bestimmten Zahl η sprechen, so meinen wir damit eine absolut bestimmte Zahl der Classe der Zahlen:

$$\left.\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ \infty_1 - 1,\ \infty_1,\ \infty_1 + 1,\ \ldots,\ \infty_1^m - 1,\ \infty_1^m, \\ \qquad \infty_1^m + 1,\ \ldots,\ \infty_1^{\infty_1^m} - 1,\ \infty_1^{\infty_1^m},\ \infty_1^{\infty_1^m} + 1,\ \ldots \\ \qquad \ldots,\ \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}} - 1,\ \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}},\ \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}} + 1,\ \ldots \end{array}\right\} (II).$$

Bez. II. Jede Zahl dieser Classe lässt sich durch das Symbol

$$Z = \infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \cdots \pm \infty_1^{m} n_{\mu-m+1} \pm \cdots \pm n_{\mu+1}$$

wiedergeben, worin $n_1, n_2, \ldots, n_{\mu+1}$ beliebige gegebene Zahlen der Classe (*I*) sind (§ 46), welche sämmtlich oder zum Theil $= 0$ sein können und μ entweder eine Zahl von (*I*) oder eine der unendlich grossen Zahlen von (*II*) ist, die man vorher mittelst desselben Symbols Z erhalten hat.

Def. V. Um diese Zahlen von andern Zahlen ausser Null zu unterscheiden, nennen wir sie *ganze Zahlen.*

Bem. IV. Wir bemerken, dass, wie bei der Scala der endlichen Zahlen der Anfang A als Repräsentant der Zahl 0 gewählt wurde, so auch in dem im Unendlichgrossen erster Ordnung liegenden Gebiet ein bestimmtes Element $A^{(\infty_1)}$ als Repräsentant der Zahl ∞_1 gewählt werden muss. Dasselbe muss bei jedem im Unendlichgrossen liegenden Gebiet geschehen, so dass wir sozusagen soviel Anfänge haben, als es solcher Gebiete sind. Es ist zu bemerken, dass als Anfang im Gebiet z. B. des Unendlichgrossen erster Ordnung und damit als Repräsentant der Zahl ∞_1 jedes Element dieses Gebiets gewählt werden kann, nicht jedoch ein andres Element eines andern im Unendlichgrossen liegenden Gebiets, und dass dieses, wenn es einmal bestimmt ist, immer dasselbe bleibt. Wir bemerken ferner, dass den andern Elementen, wenn, wie wir voraussetzen, die Anfänge gegeben sind, bestimmte Zahlen der Classe (*II*) oder andre noch zu eruirende Zahlen entsprechen und dass man daher bei der Vergleichung der Segmente annehmen muss, die Scalen und Anfänge seien bereits gegeben (siehe § 103).

Die Operation ∞_1 ist mithin in Folge der Definition selbst der Zahl ∞_1 eindeutig, weil jedes andre Segment, das verschieden von dem Segment $(AA^{(\infty_1)})$ ist, mit einem verschiedenen Symbol bezeichnet wird, so dass, wenn $(AB) > (AB')$ ist, $(AB)\infty_1 > (AB')\infty_1$ ist (siehe § 103).[1]

Den grösseren, gleichgrossen oder kleineren Segmenten entsprechen grössere, gleichgrosse oder kleinere Zahlen und umgekehrt (Bem. I, § 87 und Hyp. V).

Uebereink. I. Wir sagen auch, das Segment (AA_η), wenn η eine bestimmte Zahl der Classe (*II*) ist, die derart bestimmt wird, dass (AA_η) die Zahl η in Bezug auf die Einheit (AA_1) und den Anfang A darstellt, *enthalte* η *consecutive* in derselben Richtung liegende und (AA_1) gleiche Segmente, ohne dass wir diese Segmente desshalb darstellen könnten, als hätten sie successive ein gemeinschaftliches Ende, d. h. ohne Sprünge in der Darstellung, wie er z. B. von den Segmenten (AA_1), (A_1A_2), (A_2A_3), ..., (A_nA_{n+1}) auf das Segment $(A_{\infty_1-n}A_{\infty_1-n+1})$ stattfindet.

c. *Für die neuen Segmente und die unendlich grossen und unendlich kleinen Zahlen gelten die Sätze in den* §§ 86 *und* 88.

Aus der Art, wie die Segmente unendlich grosser Ordnung von dem Typus ∞_1^m durch die in § 88 abgeleiteten Zahlen dargestellt werden, geht der Satz a, § 86 hervor, der dann auch für die aus ihm abgeleiteten Zahlen gilt (Bem. II, § 87) u. s. w. (Hyp. V). Die übrigen Sätze werden in derselben Weise mittelst der Hyp. V bewiesen.

§ 92. a. *Sind die Theilungselemente* A, A_μ, A_η, $A_{\mu+\eta}$ *der Scala gegeben, so ist*

$$(AA_\eta) \equiv (A_\mu A_{\mu+\eta}).$$

---

1) Wenn in dem in Betracht gezogenen Gebiet unserer Grundform oder besser unseres homogenen Systems die Zahlen *Cantor*'s in Bezug auf die Classe (*II*) nicht zu verwenden sind, so kann man thun, was *Cantor* in Bezug auf Classe (*I*) gethan hat, d. h. eine neue Zahl Ω als erste Zahl festsetzen, die grösser als alle Zahlen von (*II*) ist, u. s. w.

Denn dies heisst, dass von dem Element A_μ an ein (AA_μ) gleiches Segment betrachtet wird (Def. I, § 68).

b. *Es gibt nur eine einzige Zahl σ oder eine einzige Zahl μ, die der Gleichung $\mu + \sigma = \eta$ genügt* (f und g, § 73).

Def. I. Wenn η eine bestimmte Zahl der Classe (II) ist und ein Segment (AB) gegeben ist, so heisst das Segment (AC), welches η consecutive in derselben Richtung liegende (AB) gleiche Segmente enthält (Uebereink. I, § 91), *Vielfaches von (AB) nach der Zahl η* und (AB) *Factor von (AC) nach derselben Zahl η.*

Bezeichnet man (AC) mit $(AB)\eta$ und (AB) mit $(AC)\frac{1}{\eta}$ oder $\frac{(AC)}{\eta}$, so folgt aus dieser Bezeichnung:

c. $$(AC) = (AB)\eta\,, \quad (AB) = (AC)\frac{1}{\eta} = \frac{(AC)}{\eta}. \qquad \text{(b, § 9)}$$

Bem. I. Wenn wir von Vielfachen oder Factoren eines gegebenen Segments nach den Zahlen der Classe (II) sprechen, setzen wir voraus, dass dieselben eindeutig bestimmt sind. Wir behalten uns die Bestimmung der Segmente, die Vielfache oder Factoren eines gegebenen Segments sind, für später vor, wenn wir die Scalen festgestellt haben werden, wie wir dies voraussetzen müssen (Bem. IV, § 91; siehe § 103).

Bez. I. Wenn ein Segment (AB') gegeben ist, das ein Vielfaches von (AB) nach der endlichen oder unendlich grossen Zahl μ ist, so bezeichnen wir dasselbe statt mit dem Symbol $\frac{(AC)}{\eta}\mu$ auch mit $(AC)\frac{\mu}{\eta}$. Es ist daher:

d. $$(AB') = \frac{(AC)}{\eta}\mu = (AC)\frac{\mu}{\eta} = (AC)\frac{\mu'}{\eta} + (AC)\frac{\mu''}{\eta} \ (\mu = \mu' + \mu''). \qquad \text{(b, § 9)}$$

Bem. II. Das Symbol $\frac{\mu}{\eta}$ bedeutet daher, dass das Segment (AC) in η gleiche Theile getheilt wurde und dass man ein Segment gebildet hat, welches μ η^{te} Theile von (AC) enthält. Z. B. enthält (AA_η) η Einheiten (AA_1) (Uebereink. I, § 91).

d′. *Wenn* $\mu \lesseqgtr \eta$, *so ist* $(AC) \gtreqless (AC)\frac{\mu}{\eta}$.

Dies geht aus der Bedeutung des Symbols $\frac{\mu}{\eta}$ (Bem. II, Bem. I) mittelst eines Beweisverfahrens wie bei b′, § 79 hervor.

d″. $$(AC)\frac{0}{\eta} = 0.$$

Der Beweis ist derselbe wie zu Satz b″, § 79.

Bem. III. Die Multiplication einer Zahl η mit einer Zahl η' von (II) wird ebenso wie bei den Zahlen der Classe (I) definirt (§ 52).

e. $$\frac{(AC)}{\eta}\frac{\mu}{\eta'} = (AC)\frac{\mu}{\eta\eta'}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist demjenigen zu Satz e, § 79 analog.

e′. $$\frac{(AC)}{\eta}\frac{1}{\eta} = (AC)\frac{1}{\eta'}.$$

Def. II. Das Segment $(AB) = (AC)\frac{\mu}{\eta}$ heisst auch *Bruch* des Segments (AC).

f. *Jedes Segment, das ein Vielfaches von* (AB) *nach einer unendlich grossen Zahl der Ordnung* μ *ist, ist ein in Bezug auf* (AB) *unendlich grosses Segment der Ordnung* μ. *Und jedes Segment, welches ein Vielfaches eines unendlich grossen Segments der Ordnung* μ *nach einer unendlich grossen Zahl der Ordnung* η *ist, ist ein Segment der Ordnung* $\mu + \eta$.

Denn im ersten Fall ist die Zahl von der Form ∞^μ, welche man aus ∞ erhält, indem man es μ mal mit sich selbst multiplicirt (Bez. I, § 82 und Def. IV, Bem. II, III und Bez. I, § 91). Dies liefert aber gerade aus (AB) die in Bezug auf (AB) unendlich grossen Segmente der Ordnung μ (Hyp. V).

Die zweite Eigenschaft ist einleuchtend, da $\infty^\mu \infty^\eta = \infty^{\mu+\eta}$ (Bem. II und Bem. III, § 91).

f'. *Wenn* (AB) *ein in Bezug auf* (AC) *unendlich kleines Segment der Ordnung* η *ist; so sind die Vielfachen von* (AB) *nach den unendlich grossen Zahlen derselben Ordnung* η *mit* (AC) *endlich.*

Denn die Vielfachen von (AB) nach den unendlich grossen Zahlen der Ordnung η sind in Bezug auf (AB) unendlich gross von derselben Ordnung und sind mithin untereinander endlich (f; c, § 91; a, § 86).

(AC) aber ist in Bezug auf (AB) unendlich gross von der Ordnung η (Bem. III, § 91 und Def. III, § 86), folglich u. s. w.

f''. *Ist ein in Bezug auf* (AC) *unendlich kleines Segment* (AA_1) *der Ordnung* η *gegeben, so ist jedes in Bezug auf* (AA_1) *unendlich grosse Segment der Ordnung* $\mu (\eta = \mu + \sigma)$ *in Bezug auf* (AC) *unendlich klein von der Ordnung* σ.

Denn wenn in Bezug auf (AA_1) (AC') unendlich gross von der Ordnung μ und (AC) von der Ordnung $\eta = \mu + \sigma$ ist, so ist (AC) in Bezug auf (AC') unendlich gross von der Ordnung σ (Def. II, § 86 und Bem. III, § 91). Mithin ist (AC') in Bezug auf (AC) unendlich klein von der Ordnung σ (Def. III, § 86; Bem. III, § 91).

g. *Wenn ein Segment der Grundform grösser, ebenso gross oder kleiner als ein andres Segment derselben Form oder verschiedener Grundform ist, so ist ein Segment, das das Vielfache des ersten nach der Zahl* η *ist, grösser, ebenso gross oder kleiner als das Vielfache des zweiten nach derselben Zahl.*

Dies wird ebenso wie der Satz d, § 79 bewiesen. Angenommen der Satz gelte für $\eta - 1$, beweist man ihn für η auf Grund der Sätze g und g', § 73, welche unabhängig von dem Begriff der Scala und mithin von der Unterscheidung in Endlich, Unendlichgross, Unendlichklein gültig sind. Der Satz gilt aber für ein endliches η (d, § 79) und die Operation ∞_1 ist an dieselbe Eigenschaft gebunden (Bem. IV, § 91) und da man $\eta - 1$ durch einfache Addition verbunden mit der Operation ∞_1 erhält, so ist damit der Satz bewiesen (Bem. I).

g'. *Wenn* (AC), $(A'C')$ *Vielfache der Segmente* (AB) *und* $(A'B')$ *nach der Zahl* η *sind und es ist* $(AC) \gtreqless (A'C')$, *so ist* $(AB) \gtreqless (A'B')$.

Der Beweis ist analog dem zu d', § 79.

h. *Wenn* $(AB) = (AC)\frac{\mu}{\eta}$ *und* $(AB) \lesseqgtr (AC)$, *so ist* $\mu \lesseqgtr \eta$ ***und umgekehrt.***

Beweis wie Satz e, § 79.

i. *Wenn ein unendlich grosses Segment* (AB) *der Ordnung* η *gegeben ist, so existiren unendlich viele Elemente* X *derart, dass* (AX), (XB) *in Bezug auf das Segment* (AB) *endlich sind.*

Ist η eine endliche Zahl, so ist der Satz eine unmittelbare Folge der Hyp. IV und des Satzes b, § 85, da (AB) in Bezug auf das unendlich grosse Segment der Ordnung $(\eta - 1)$ unendlich gross von der ersten Ordnung ist (Def. II, § 86).

Die Segmente, welche man dadurch erhält, dass man die Hypothese IV eine unendliche Anzahl endlicher Ordnung mal anwendet, haben ebenfalls diese Eigenschaft. Denn ist z. B. die Zahl ∞_1^m, so sind die so erhaltenen Segmente in Bezug auf das durch $(\infty^m_1 - 1)$ malige Anwendung der Hyp. IV erhaltene Segment unendlich gross von der ersten Ordnung. Daher besitzen auch die Zahlen der unendlich grossen Ordnung

$$\infty_1^{\infty_1}, \infty_1^{\infty_1^2}, \ldots, \infty_1^{\infty_1^m} \ldots$$

diese Eigenschaft und dann die unendlich grossen Segmente der Ordnung

$$\infty_1^{\infty_1^{\infty_1}} \ldots \infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}} \ldots$$

und mithin die unendlich grossen Zahlen $\infty_1^{\infty_1^{\infty_1^{\infty_1^m}}}$ u. s. w.

Der Satz gilt auch für die unendlich grossen Segmente der Ordnung $\infty_1 + n$, unter n eine endliche Zahl verstanden, weil sie in Bezug auf ein Segment der Ordnung $\infty_1 + (n - 1)$ unendlich gross von der ersten Ordnung sind. Ebenso gilt der Satz für die unendlich grossen Segmente der Ordnung $\infty_1^2 \pm \infty_1 n_1 \pm n_2$. Und im Allgemeinen: wenn das unendlich grosse Segment der Ordnung ∞_1^η diese Eigenschaft besitzt, so besitzen sie auch die Segmente von der Ordnung $\infty_1^\eta \pm \infty_1^{\eta-1} n_1 \pm \infty_1^{\eta-2} n_2 \pm \cdots \pm n_{\eta+1}$.

Der Satz gilt also auch für die Zahl $\infty_1^{\infty_1 \eta}$ und mithin auch für das unendlich grosse Segment der Ordnung $\infty_1^{\infty_1^\eta}$ u. s. w.

Auf diese Weise erhält man aber jedes unendlich grosse Segment (AB) der Grundform (Hyp. V). Damit ist der Satz bewiesen.

Uebrigens würde es auch genügen, nur den Satz c, § 91 und die Hyp. V anzuwenden, nach welcher ein Segment in Bezug auf ein andres Segment unendlich gross von der ersten Ordnung ist.

i'. *Ist ein Segment* (AB) *gegeben, so gibt es immer ein Segment* (AX) *kleiner als* (AB), *für welches eine endliche Zahl* m *der Art existirt, dass*

$$(AX)m > (AB). \qquad \text{(Def. II, § 82; d, § 81)}$$

i''. *Ist eine unendlich grosse Zahl* α *von beliebiger gegebener Ordnung* η *gegeben, so gibt es immer Zahlen* σ, *die kleiner als* α *und derart sind, dass*

$$\sigma m > \alpha$$

ist, wenn man unter m *eine endliche Zahl versteht.*

l. *Sind zwei beliebige Segmente $(AB) < (CD)$ gegeben, so gibt es immer eine bestimmte endliche oder unendlich grosse Zahl η derart, dass*

$$(AB)\eta \geqq (CD)$$

und $(AB)\eta$ in Bezug auf (CD) endlich ist. Wenn η von der Ordnung μ ist und man bezeichnet die Einheit $(AA_{\infty_1\mu})$ mit 1_μ, so gibt es eine solche Zahl η_1 von derselben Ordnung, dass

$$(AB)\eta_1 \leqq (CD) \leqq (AC)(\eta_1 + 1_\mu)$$

und
$$(AB)\eta_1 m \leqq (CD) < (AB)\eta_1(m + 1)$$

ist, unter m eine endliche Zahl verstanden.

Sind (AB) und (CD) unendlich gross von derselben Ordnung, alsdann sind sie untereinander endlich und η ist mithin endlich (a, § 86 und c, § 91). Ist (AB) unendlich gross von der Ordnung μ, (CD) von der Ordnung μ', und $\mu' = \mu + \mu''$ und man nimmt ein Vielfaches von (AB) nach einer unendlich grossen Zahl der Ordnung μ'', so erhält man ein Segment von derselben Ordnung wie (CD) (f) und mithin endlich mit (CD) (a, § 86 und c, § 91).

Wenn η' eine unendlich grosse Zahl der Ordnung μ'' ist, so tritt einer der drei Fälle ein

$$(AB)\eta' \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} (CD). \qquad \text{(b, § 73)}$$

Im ersten und zweiten Fall kann man immer eine solche Zahl η von derselben Ordnung wie η' geben, dass $(AB)\eta > (CD)$, in jedem Fall aber eine solche Zahl η_1, dass

$$(AB)\eta_1 \leqq (CD) < (AB)(\eta_1 + 1_\mu).$$

Es ist nun klar, dass, wenn $(AB)\eta_1$ und (CD) untereinander endlich sind, immer eine solche endliche Zahl m (die auch 1 sein kann) existiren muss, dass:

$$(AB)\eta_1 m \leqq (CD) < (AB)\eta_1(m + 1).$$

m. *Jedes gegebene Segment (AB) ist in Bezug auf ein andres grösseres Segment (AC) unendlich klein von bestimmter Ordnung η, wenn (AB) in Bezug auf (AC) nicht endlich ist.*

Denn es muss eine bestimmte unendlich grosse Zahl η derart geben, dass $(AB)\eta \geqq (AC)$, während zugleich $(AB)\eta$ mit (AC) endlich ist (l). Mithin ist (AB) in Bezug auf (AC) unendlich klein von der Ordnung η, weil $(AB)\eta$ unendlich gross von derselben Ordnung wie (AC) ist (Def. III, § 86 und Bem. III, § 91).

n. *Die Grundform von einem beliebigen gegebenen Element an in einer gegebenen Richtung ist grösser als jedes gegebene Segment (AB) in derselben oder der entgegengesetzten Richtung.*

A sei der gegebene Anfang, (AB) das gegebene Segment. Da es auf der Form ein grösseres Segment in der Richtung (AB) gibt (a, § 68), so ist der Satz soweit bewiesen (Def. I, § 61). Wenn dagegen (AB) in der entgegen-

gesetzten Richtung betrachtet wird, so beachte man, dass die Form von A in einer Richtung ausgehend mit der Form von A in der entgegengesetzten Richtung gehend identisch ist (Def. I, b, § 70; Hyp. II). Folglich u. s. w.

Def. III. Wir nennen daher die Grundform *absolut unendlich gross oder unendlich gross von unbestimmter Ordnung* in der einen wie in der andern Richtung zum Unterschied von den Gebieten der Scala, welche unendlich gross von gegebener Ordnung sind. Wir bezeichnen sie mit dem Symbol Ω.

Bem. IV. Offenbar ist dieses Absolute in einem gewissen Sinn auch relativ. Denn wenn die ganze Grundform vom Anfang A an gegeben ist, so können wir sie von Neuem der Hypothese IV unterwerfen. In diesem Fall wären die Zahlen statt vom Typus ∞_1 von einem andern Typus z. B. Ω_1 u. s. w. [1])

Def. IV. Absolutes endliches Gebiet in einer gegebenen Richtung von einem gegebenen Element an nennen wir dagegen das Gebiet der begrenzten Segmente mit zwei Enden in der gegebenen Richtung in derselben Weise wie wir das endliche Gebiet in Bezug auf eine gegebene Einheit (AA_1) haben (Def. V, § 83).

Es ist selbstverständlich, dass von zwei Segmenten dieses Gebietes das eine unendlich gross bezüglich des andern sein kann.

Def. V. Ein beliebiges gegebenes Segment (AB) heisst desshalb auch *absolut endlich* und unter *absoluter Einheit* versteht man ein beliebiges gegebenes Segment (AB).

Def. VI. Von einem Segment, das grösser als jedes gegebene Segment (und mithin auch unendlich gross wird) sagen wir, es wachse unbegrenzt oder es sei unbegrenzt gross oder es habe die ganze Grundform vom Anfang A an in der Richtung der absoluten Scala d. h. das absolute Unendlichgrosse zur *Grenze* und wir schreiben:

$$\lim_{\text{abs}} (AX) = \Omega .$$

Def. VII. Das Segment, welches der Einheit 1 der Zahlenclasse (II) entspricht, nennen wir auch *Grundeinheit.* Den ersten Anfang nennen wir *Grundanfang* oder einfacher *Anfang.*

5.

Das Associations- und Commutationsgesetz der Summe; das Distributions- und Commutationsgesetz der Multiplication der Zahlen der Classe (II).

§ 93. a. *Für die Summe von drei oder mehr Zahlen von (II), die eine Zahl von (II) darstellt, gilt das Associationsgesetz.*

Denn es gilt für die Segmente, durch welche sie dargestellt werden (d, § 77).

Bez. I. Das Segment $(A_\mu A_\eta)$, dessen Enden die Zahlen μ und η von (II) in Bezug auf die Grundeinheit (AA_1) und den Grundanfang A darstellen (Def. VII, § 92) $(\eta > \mu)$, bezeichnen wir mit dem Symbol $-\mu + \eta$, welches wir ebenfalls Zahl nennen. Die Zahl $-\mu + \eta$ hat daher so eine bestimmte Bedeutung. Wir werden bald sehen, dass sie auch eine Zahl der Classe (II) ist.

1) Wie es verschiedene Classen der transfiniten Zahlen *G. Cantor's* gibt (siehe Anm. 2, § 90).

b. *Wenn μ eine beliebige Zahl von (II) ist, so ist* $-\mu + \mu = 0$.

Denn wenn A_η mit A_μ zusammenfällt, so ist $(A_\mu A_\eta) \equiv 0$ (Def. I, § 76) und mithin $-\mu + \mu = 0$ (Bez. I).

Bem. I. Die Zahlen sind geordnete Gruppen von als Einheiten betrachteten Elementen (Def. II, § 45). Wenn zwei Zahlen gleich sind, so entsprechen sie sich eindeutig und in derselben Ordnung (b, § 60); aber, wenn das Letztere der Fall ist, so können wir nicht sagen, dass sie gleich sind, weil die eine ein Theil der andern oder einem Theil der andern gleich sein kann (Def. II, § 27), während die Def. II, § 45 diese Verschiedenheit durchaus nicht ausschliesst (c, § 45). Die natürlichen Zahlen dagegen brauchen sich nur eindeutig und in derselben Ordnung (g, § 48), ja auch nur eindeutig (h, § 48) zu entsprechen, um auch nach Def. II, § 45 gleich zu sein, weil in diesem Fall die eine kein Theil der andern oder keinem Theil der andern gleich sein kann.

Sicher ist, dass zwei geordnete Gruppen, die sich nicht eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen, nicht gleiche Zahlen haben können, weil die beiden Gruppen, wenn die Zahlen gleich sind, sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen (b, § 60; b, § 45 und f, § 42).

Wenn man die Zahl einer Gruppe nur von dem eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden oder nur von dem eindeutigen Zusammenhang zwischen den Elementen der Gruppe und den Einheiten der Zahl abhängig macht, alsdann ist die Gleichheit der Zahlen in dem ersten Fall durch den eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden, in dem zweiten durch den eindeutigen Zusammenhang allein gegeben (Bem. I, § 45).[1]) Für uns aber, die wir auch dem zwischen einer Untergruppe und der Gruppe bestehenden Unterschied Rechnung tragen (Def. II, § 27), genügt im Allgemeinen der eindeutige und in derselben Ordnung stattfindende Zusammenhang nicht. Darin liegt kein Widerspruch irgend welcher Art.

In Bezug auf die Gleichheit unserer Zahlen wie unserer Elemente der Grundform (§ 71) muss man daher die Sätze c, § 45; b, § 60 und diejenigen in § 61 beachten. Die Segmente

$$(AA_1 \ldots A_\mu),\ (A_1 A_2 \ldots A_\mu)$$

können in absolutem Sinn nicht gleich sein, da das zweite ein Theil des ersten ist. Ueberdies, wenn zwei geordnete Gruppen gleich sind, so ist jeder Untergruppe der einen eine Untergruppe der andern gleich. Und da die endlichen und unsere unendlich grossen Zahlen eine einzige Classe bilden, so können wir den vorstehenden Bedingungen entsprechend festsetzen, dass die Segmente

$$(AA_1 \ldots A_\mu),\ (A_1 A_2 \ldots A_{\mu+1})$$

für jedes beliebige μ gleich sind, wie dies für ein endliches μ der Fall ist.

c. $$1 + \mu = \mu + 1.$$

Denn die beiden Gruppen $AA_1 \ldots A_\mu$, $A_1 A_2 \ldots A_{\mu+1}$ stellen die beiden Zahlen $1 + \mu$, $\mu + 1$ dar (Bem. II, § 87; Bem. III und Bez. I, § 91).[2])

---

1) Dies thut *Cantor* bei der Definition der Gleichheit seiner *Idealzahlen* und daher auch seiner *Ordnungszahlen* und *Cardinalzahlen* (siehe Anm. § 48 und Uebereink. § 90).

2) Wenn man sich z. B. die Grade in dem endlichen Gebiet *Euclid*'s in einer gegebenen Richtung von A als Null an und in Beziehung auf (AB) als Einheit durchlaufen denkt und man stellt die in der gegebenen Richtung durchlaufene Grade durch das Symbol ∞_1 dar, so wird der Punkt A, nachdem man die ganze Grade von A aus durchlaufen hat, mit ∞_1 bezeichnet, B' mithin, wenn $(B'A) \equiv (AB)$ ist, mit $\infty_1 - 1$ und B mit 1 und $\infty_1 + 1$ u. s. w. Wenn wir von B ausgehen und die Grade bis A in derselben Richtung durchlaufen, so erhalten wir nicht die ganze Grade, weil die Strecke (AB) fehlt, es ist mithin

B' $\overset{0}{A}$ $\overset{1}{B}$

$\infty_1 - 1$ ∞_1

Fig. 4.

$$(1 \cdots \infty_1) < \infty_1 \quad \text{und} \quad (1 \cdots \infty_1) + 1 = \infty_1 .$$

Da aber $\infty_1 - 1 + 1 = \infty_1$, so ist $(1 \cdots \infty_1) = \infty_1 - 1$, weil die Addition auf der Graden eindeutig ist.

d. *Für die Addition einer endlichen Anzahl von Zahlen der Classe (II) gilt das Commutationsgesetz.*

Wenn

(1) $$n + \mu = \mu + n,$$

so ist auch

$$(n + 1) + \mu = n + (1 + \mu) = n + (\mu + 1) = (n + \mu) + 1 = (\mu + n) + 1 =$$
$$= \mu + (n + 1). \qquad \text{(a § 40)}$$

Die Eigenschaft gilt aber für $n = 1$, folglich gilt sie für alle Zahlen von (I) (c′, § 46 und 1, § 39). Daraus geht auch hervor:

(2) $$\sigma + \mu - n = \sigma - n + \mu;$$

denn:

$$\sigma + \mu - n = \sigma - n + n + \mu - n = \sigma - n + \mu + n - n = \sigma - n + \mu$$

und mithin auch

(2′) $$\mu \pm n = \pm n + \mu.$$

Wenn m eine beliebige Zahl von (I) ist, so erhält man $(s < m)$

$$\infty_1{}^m n_1 \pm \infty_1{}^s n_2 = \infty_1{}^s(\infty_1{}^{m-s} n_1 \pm n_2),$$

wenn man unter $\infty_1{}^\sigma(\infty_1{}^{\sigma_1} n_1 \pm \infty_1{}^{\sigma_2} n_2 \pm \cdots)$ versteht, dass $\infty_1{}^\sigma$ zuerst mit $\infty_1{}^{\sigma_1} n_1$, dann mit $\pm \infty_1{}^{\sigma_2} n_2$ u. s. w. multiplicirt wird (Bem. II und III, § 91) und weil $s + m - s = m$ ist (m, § 48; § 54 oder Def. I, § 76) und mithin

(2″) $$\infty_1{}^m n_1 \pm \infty_1{}^s n_2 = \infty_1{}^s(\pm n_2 + \infty_1{}^{m-s} n_1),$$

woraus

(3) $$= \pm \infty_1{}^s n_2 + \infty_1{}^m n_1.$$

Wenn man daher eine unendlich grosse Zahl von endlicher Ordnung aus der Classe (II) d. h.

$$\infty_1{}^m n_1 \pm \infty_1{}^{m-1} n_2 \pm \cdots \pm \infty_1 n_m \pm n_{m+1} \qquad \text{(Bez. II, § 91)}$$

hat, so können wir in dem Symbol dieser Zahl nach Gleichung (3) die Zahlen, welche sie zusammensetzen, durch Vertauschen consecutiver Elemente ihre Stelle wechseln lassen (c, § 48).

Setzen wir voraus, wir hätten, so fortfahrend, diese Eigenschaft für die unendlich grosse Zahl ϱ und für die Zahlen bewiesen, die kleiner als ϱ sind und betrachten wir eine unendlich grosse Zahl μ der Ordnung ϱ (Bem. III, § 91), so haben wir:

$$\mu = \infty_1{}^\varrho n_1 \pm \infty_1{}^{\varrho-1} n_2 \pm \cdots \pm \infty_1 n_\varrho \pm n_{\varrho+1}. \qquad \text{(Bez. II, § 91)}$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$\infty_1{}^\varrho n_1 \pm \infty_1{}^{\varrho'} n_2 = \infty_1{}^{\varrho'}(\infty_1{}^{\varrho-\varrho'} n_1 \pm n_2)$$
$$= \infty_1{}^{\varrho'}(\pm n_2 + \infty_1{}^{\varrho-\varrho'} n_1) \qquad [(2')]$$
$$= \pm \infty_1{}^{\varrho'} n_2 + \infty_1{}^\varrho n_1.$$

Andrerseits ist
$$1 + (1 \cdots \infty_1) = \infty_1,$$
folglich
$$\infty_1 - 1 + 1 = 1 + \infty_1 - 1.$$
Dieses ist aber das Commutationsgesetz. Siehe die letzte Anm. zu § 105.

Mithin können wir in μ die Zahlen, welche es zusammensetzen, durch Vertauschen consecutiver Zahlen ihre Stelle wechseln lassen.

Nach der Hypothese V nun lässt sich jede Zahl von (II) in die vorstehende Form bringen (Bez. II, § 91) und wird durch Wiederholung aus ϱ erhalten der Art, dass, wenn sie zuerst endlich war, sie dann unendlich gross von endlicher Ordnung u. s. w. wird und dass bei jeder Wiederholung die obige Eigenschaft gilt. Die Eigenschaft besteht daher für jede Zahl von (II).

Man betrachte nun eine andre Zahl η von (II), die sich in eine analoge Form bringen lässt. Da man die Zahlen, welche die Summe $\mu + \eta$ bilden, ihre Stelle wechseln lassen kann, so ist

$$\mu + \eta = \eta + \mu. \tag{4}$$

Das Commutationsgesetz gilt für eine endliche Anzahl von Zahlen; denn gesetzt es gelte für m, so lässt es sich für $m + 1$ beweisen (a, (4) und d, § 47); es gilt aber für $m = 2$, folglich gilt es für jede endliche Zahl m (c', § 46; 1, § 39).

e. *Die zwischen zwei mit beliebigen Zahlen von (II) bezeichneten Segmenten liegenden Segmente werden durch Zahlen von (II) ausgedrückt.*

Denn es seien μ und η zwei Zahlen von (II), $\eta > \mu$. Sie werden durch zwei Segmente der Grundform vom Grundanfang an dargestellt. Das Differenzsegment wird durch das Zeichen

$$-\mu + \eta = \sigma \qquad \text{(Bez. I)}$$

ausgedrückt. Wir wollen beweisen, dass σ ebenfalls eine Zahl von (II) ist.

Es ist nämlich

$$\eta - \mu = -\mu + \mu + \eta - \mu = -\mu + (\mu + \eta) - \mu = -\mu + (\eta + \mu) - \mu =$$
$$= -\mu + \eta + (\mu - \mu) = -\mu + \eta, \qquad \text{(a, (4) und d, § 47)}$$

also:

$$\sigma = \eta - \mu,$$

welches, wenn η und μ Zahlen von (II) sind, eine Zahl dieser Classe ist, weil sie sich in die allgemeine Form einer dieser Zahlen bringen lässt (Bez. I, § 91). Z. B.

$$2 + \sigma = \infty_1, \text{ mithin } \sigma = \infty_1 - 2.$$

Um aus 2 die Zahl ∞_1 zu erhalten, braucht man nur die Zahl $\infty_1 - 2$ zu ihr hinzuzufügen.

f. *Für die Addition einer unendlich grossen Anzahl von Zahlen von (II) gilt das Commutationsgesetz, wenn das Resultat eine Zahl von (II) darstellt, so jedoch, dass die Beschaffenheit der Zahl ∞_1 nicht geändert wird.*

Nehmen wir an, die Anzahl der betrachteten Zahlen sei unendlich gross, vorerst ∞_1 und ihre Summe stelle eine Zahl von (II) dar; man hat dann:

$$\eta = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_{\infty_1 - n} + \mu_{\infty_1 - n + 1} + \cdots + \mu_{\infty_1 - 2} + \mu_{\infty_1 - 1} + \mu_{\infty_1}. \tag{3}$$

Diese Zahl wird durch die Summe zweier Segmente dargestellt, von denen das eine $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 1})$ Einheiten und das andre μ_{∞_1} Einheiten darstellt. Man hat also:

(4) $$\eta = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 1}) + \mu_{\infty_1}$$
und daraus
$$\eta = \mu_{\infty_1} + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 1})$$
$$= \mu_{\infty_1} + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 1} \qquad \text{(a, § 40; Def. I, § 87)}$$
und mithin auch:
$$\eta = \mu_{\infty_1} + (\mu_{\infty_1 - 1} + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 2})$$
$$= \mu_{\infty_1} + \mu_{\infty_1 - 1} + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 2}).$$
Führt man so fort, so findet man:

(5) $$\eta = \mu_{\infty_1} + \mu_{\infty_1 - 1} + \cdots + \mu_{\infty_1 - n} + (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n + \cdots + \mu_{\infty_1 - n + 1}).$$

Lassen wir n wachsen, so erhalten wir als die ersten Zahlen diejenigen des Gebietes $\mu_{\infty_1 - n}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots m \ldots)$ und als letzte diejenigen, deren Indexe $\ldots n \ldots 1$ sind.

In jedem dieser Gebiete kann man dann die Elemente ihre Stelle untereinander vertauschen lassen. Es ist ferner:
$$\eta = (\mu_{\infty_1} + \mu_1) + (\mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 1}) \qquad \text{(a, § 40; d, § 77)}$$
$$= (\mu_1 + \mu_{\infty_1}) + (\mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 1}) \qquad \text{(b)}$$
$$= \mu_1 + (\mu_{\infty_1} + \mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1 - 1}).$$
Man kann mithin μ_{∞_1} an die Stelle von μ_2 setzen und mithin auch von jeder andern gegebenen Zahl μ_n. Dasselbe kann mit $\mu_{\infty_1 - 1}$ geschehen. Man kann mithin jede gegebene Zahl des zweiten Gebiets an die Stelle jeder gegebenen Zahl des ersten Gebiets setzen und umgekehrt.

Der Satz ist mithin für die Zahl ∞_1 bewiesen.

Bem. II. Nach dem Kriterium der Gleichheit der von einer Gruppe dargestellten Zahlen ist es unmöglich, dass die Elemente der Gruppe
$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots A_{\infty_1 - n} \ldots A_{\infty_1 - 1} A_{\infty_1}$$
eindeutig und in derselben Ordnung z. B. der Gruppe
$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots A_{\infty_1} A_{\infty_1 - 1} \ldots A_{\infty_1 - n} \ldots$$
entsprechen können, in welcher A_{∞_1} das erste Element ist, was auf die erste unbegrenzte Reihe erster Art $A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$ folgt (c′, § 46). Denn dem Element A_{∞_1} in der zweiten müsste das erste Element nach derselben Reihe in der ersten Gruppe entsprechen. Dieses ist aber nicht vorhanden und mithin können die beiden Gruppen nicht gleiche Zahlen haben (Bem. I). Damit also bei dem Stellenwechsel die Summe sich nicht ändere, muss man den obigen Zusammenhang zwischen den so erhaltenen Gruppen von Einheiten feststellen können, die Gruppe muss daher entgegengesetzte Reihen enthalten, wie z. B. $1\ 2\ 3 \ldots n \ldots \infty_1 - n \ldots \infty_1$. Wir sagen desswegen, *dass die Beschaffenheit der Zahl ∞_1 nicht geändert werden darf.*

Wenn nun
$$\eta = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1} + \mu_{\infty_1 + 1}$$
ist und der Satz für die ersten ∞_1 Zahlen gilt, so gilt er, da man $\mu_{\infty_1 + 1}$ mit μ_{∞_1} vertauschen kann, offenbar auch für $\infty_1 + 1$ und ebenso für $\infty_1 \pm m$ Zahlen.

Es sei nun
$$\eta = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\infty_1} + \mu_{\infty_1 + 1} + \cdots + \mu_{\infty_1 \cdot 2}$$

was man schreiben kann:

$$\eta = (\mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_{\infty_1}) + (\mu_{\infty_1+1} + \cdots \mu_{\infty_1 \cdot 2}).$$

Jede der Gruppen, aus denen η besteht, enthält ∞_1 Zahlen und da der Satz für jede dieser Gruppen gilt und man das letzte Element der ersten mit dem ersten der zweiten Gruppe vertauschen kann, so ist der Satz auch für die Zahl $\infty_1 \cdot 2$ bewiesen.

Ist die Zahl η durch die Summe von $\infty_1{}^2$ Zahlen gegeben, so besteht, da $\infty_1 \cdot \infty_1 = \infty_1{}^2$ ist (§ 89), die Zahl η aus ∞_1 Gruppen von ∞_1 Zahlen μ, für welche unser Theorem Gültigkeit hat. Da dasselbe für diese Gruppen als Zahlen betrachtet gilt und man von einer Gruppe zur andern durch Vertauschen des letzten Elements der ersten mit dem ersten der folgenden Gruppe übergehen kann, so gilt der Satz auch für die Zahl $\infty_1{}^2$. Angenommen er gelte für $\infty_1{}^m$ Zahlen, so lässt sich auf dieselbe Art beweisen, dass er für die Zahl $\infty_1{}^{m+1}$ und überdies für die dazwischen liegenden Zahlen gilt. Er gilt aber für $m = 2$, folglich gilt er für jedes beliebige endliche m (1, § 39).

Es sei eine Zahl η als Summe von $\infty_1{}^{\infty_1}$ Zahlen gegeben und es seien

$$Z = \infty_1{}^{\infty_1 - m} n_1 \pm \infty_1{}^{\infty_1 - m - 1} n_2 \pm \cdots \pm n_{\infty_1 - m + 1},$$
$$Z' = \infty_1{}^{\infty_1 - r} n_1 \pm \infty_1{}^{\infty_1 - r - 1} n_2 \pm \cdots \pm n_{\infty_1 - r + 1}$$

die Zeichen, welche in der Summe die Stellen zweier Zahlen μ angeben und von denen die erste z. B. grösser sein möge als die zweite. Wir können dann die Zahlen μ der Summe in die folgenden ∞_1 successiven Gruppen trennen und uns nur auf ihre Stellen beziehen. Die Zahlen m und n in Z und Z' können auch unendlich gross $\leqq \infty_1$ sein.

$$\underset{1}{(1 \ldots \infty_1)} + \underset{2}{(\infty_1 + 1, \ldots \infty_1{}^2)} + \underset{3}{(\infty_1{}^2 + 1, \ldots \infty_1{}^3)} + \cdots +$$
$$+ \underset{\infty_1 - m}{(\infty_1{}^{\infty_1 - m - 1} \ldots Z - 1)} + \underset{\infty_1 - m + 1}{(Z \ldots \infty_1{}^{\infty_1 - m + 1})} + \cdots +$$
$$+ \underset{\infty_1 - r}{(\infty_1{}^{\infty_1 - r - 1} \ldots Z' - 1)} + \underset{\infty_1 - r + 1}{(Z' \ldots \infty_1{}^{\infty_1 - r + 1})} + \cdots +$$
$$+ \underset{\infty_1}{(\infty_1{}^{\infty_1 - 1} \ldots \infty_1{}^{\infty_1})}.$$

In diesen ∞_1 Gruppen können wir aber, ohne die Summe der Zahlen, welche sie darstellen, zu ändern, die beiden Gruppen $(Z \ldots \infty_1{}^{\infty_1 - m + 1})$, $(Z' \ldots \infty_1{}^{\infty_1 - r + 1})$ ihre Stelle vertauschen lassen und mithin auch die beiden gegebenen Zahlen, welche die mit Z und Z' bezeichneten Stellen einnehmen.

Ist $Z' = \infty_1{}^{\infty_1}$, so genügt es als letzte Gruppe die Zahl $\infty_1{}^{\infty_1}$ selbst zu betrachten.

Der Satz gilt daher auch für die Summe von $\infty_1{}^{\infty_1}$ Zahlen.

Vorausgesetzt, der Satz sei für eine Zahl μ bewiesen, so lässt er sich durch dieselbe Schlussfolgerung, die für die Zahl $\infty_1{}^{\infty_1}$ angewandt wurde, auch für die Zahl $\infty_1{}^{\mu}$ beweisen. Man zerlegt nämlich die geordnete Gruppe von $\infty_1{}^{\mu}$ Zahlen in μ Gruppen und in zwei von diesen Gruppen mögen zwei Zahlen die ersten sein, deren Stellen durch die Zahlen Z und Z' die kleiner als μ gegeben sind und von denen die eine kleiner als die andre ist, bezeichnet werden. Besteht nun die Eigenschaft für μ, so können die beiden Gruppen, denen Z und Z' angehören, und mithin auch die beiden gegebenen Zahlen ihre Stelle vertauschen. Dasselbe ist bei allen andern Zahlen der Fall, nur muss man dabei immer die Beschaffenheit der Zahl ∞_1 berücksichtigen. Derselbe Beweis gilt für jede Zahl $\infty_1{}^{\varrho}$, wenn $\varrho < \mu$ ist.

Der Satz gilt auch für jede Zahl $\infty_1{}^{\mu} n_1$, unter n_1 eine beliebige gegebene Zahl von (I) verstanden; er gilt daher auch für die Zahl

$$Z_1 = \infty_1{}^{\mu} n_1 \pm \infty_1{}^{\mu - 1} n_2 \pm \cdots \pm n_{\mu + 1},$$

das heisst, wenn der Satz für μ gilt, so gilt er auch für die Zahl Z_1. Er ist aber für ein endliches μ bewiesen worden (d) und mithin auch für unendlich grosse Zahlen von endlicher Ordnung und desshalb auch für unendlich grosse Zahlen unendlich grosser Ordnung, welche ihrerseits als Zahl betrachtet unendlich gross von endlicher Ordnung ist und so weiter. Da man nun auf diese Weise nach Hyp. V jede Zahl von (*II*) erhält und der Satz bei jeder Wiederholung gilt, so gilt er im Allgemeinen.

Beisp. 1.

$$2 \cdot \infty_1 = \underset{1}{\bar{1}} + \underset{1}{1} \Big| + \Big| \underset{2}{\bar{1}} + \underset{2}{1} \Big| + \cdots + \Big| \underset{n}{\bar{1}} + \underset{n}{1} \Big| + \Big| \underset{n+1}{\bar{1}} + \underset{n+1}{1} \Big| + \cdots$$

$$\cdots + \Big| \underset{x_1-n-1}{1} + \underset{x_1-n-1}{1} \Big| + \Big| \underset{x_1-n}{1} + \underset{x_1-n}{1} \Big| + \cdots + \Big| \underset{x_1-1}{\bar{1}} + \underset{x_1-1}{1} \Big| + \Big| \underset{x_1}{\bar{1}} + \underset{x_1}{1} =$$

$$= \Big| \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \cdots + \underset{n}{\bar{1}} \Big| + \Big| \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \cdots + \underset{n}{1} \Big| +$$

$$+ \Big| \underset{n+1}{\bar{1}} + \underset{n+1}{1} \Big| + \cdots + \Big| \underset{x_1-n-1}{1} + \underset{x_1-n-1}{1} \Big| + \Big| \underset{x_1-n}{1} + \underset{x_1-n-1}{1} + \cdots + \underset{x_1}{1} \Big| +$$

$$+ \Big| \underset{x_1-n}{\bar{1}} + \underset{x_1-n+1}{1} + \cdots + \underset{x_1}{\bar{1}} \Big| =$$

$$= \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \cdots + \underset{n}{1} + \underset{x_1-n}{1} + \underset{x_1-n+1}{1} + \cdots + \underset{x_1}{1} \Big| +$$

$$+ \Big| \underset{n+1}{\bar{1}} + \underset{n+1}{1} \Big| + \cdots + \Big| \underset{x_1-n-1}{\bar{1}} + \underset{x_1-n-1}{1} \Big| +$$

$$+ \Big| \underset{1}{1} + \underset{2}{\bar{1}} + \cdots + \underset{n}{\bar{1}} + \underset{x_1-n}{\bar{1}} + \cdots + \underset{x_1}{\bar{1}} \Big|.$$

Setzt man $\underset{n+1}{\bar{1}}$ und $\underset{n+1}{1}$ hinter $\underset{n}{\bar{1}}$ bezüglich $\underset{n}{1}$, $\underset{x_1-n-1}{\bar{1}}$ und $\underset{x_1-n-1}{1}$ vor $\underset{x_1-n}{\bar{1}}$ bezüglich $\underset{x_1-n}{1}$, so erhält man die obige Summe bei unbegrenzt wachsendem n

$$= \Big| \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \underset{3}{1} + \cdots + \underset{n}{1} + \cdots + \underset{x_1-n}{1} + \cdots + \underset{x_1}{1} \Big| +$$

$$+ \underset{1}{1} + \underset{2}{\bar{1}} + \cdots + \underset{n}{\bar{1}} + \cdots + \underset{x_1-n}{\bar{1}} + \underset{x_1-n+1}{\bar{1}} + \cdots + \underset{x_1}{\bar{1}},$$

das heisst $= \infty_1 \cdot 2$.

Beisp. 2.

$$\infty_1 = \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \cdots + \underset{n}{1} + \cdots + \underset{x_1-n}{1} + \underset{x_1-n+1}{1} + \cdots + \underset{x_1}{1} =$$

$$= \Big| \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \cdots + \underset{n}{1} \Big| + \Big| \underset{n+1}{1} + \cdots + \underset{x_1-(n+1)}{1} \Big| + \Big| \underset{x_1-n}{1} + \cdots + \underset{x_1}{1} \Big|$$

$$= \Big| \underset{n+1}{1} + \cdots + \underset{x_1-(n+1)}{1} \Big| + \Big| \underset{x_1-n}{1} + \cdots + \underset{x_1}{1} \Big| + \Big| \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \cdots + \underset{n}{1} \Big|$$

$$= \Big| \underset{n+1}{1} + \cdots + \underset{x_1-(n+1)}{1} \Big| + \Big| \underset{x_1}{1} + \cdots + \underset{x_1-n}{1} + \underset{n}{1} + \underset{n-1}{1} + \cdots + \underset{1}{1} \Big|.$$

Mit dem Wachsen von n wird die Einheit $\underset{n+1}{1}$ vor $\underset{n}{1}$ und $\underset{x_1-(n+1)}{1}$ oder $\underset{x_1-n-1}{1}$ hinter $\underset{x_1-n}{1}$ gesetzt. Bei unbegrenzt wachsendem n wird auf diese Weise die erste **Reihe** aufgebraucht und die zweite vervollständigt. Man erhält daher:

$$\infty_1 = \underset{x_1}{1} + \cdots + \underset{x_1-n}{1} + \cdots + \underset{n}{1}\ \underset{n-1}{1} + \cdots + \underset{1}{1}.$$

Beisp. 3.

$$\infty_1 - m = \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \cdots + \underset{m}{1} + \cdots + \underset{n+1}{1} + \cdots + \underset{x_1-(n+1)}{1} + \underset{x_1-n}{1} +$$

$$+ \cdots + \underset{x_1-(m+1)}{1} + \underset{x_1-m}{1}$$

$$= \left| \underset{n+1}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-(n+1)}{1} \right| + \left| \underset{\infty_1-n}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-m}{1} \right| + \left| \underset{n}{1} + \underset{n-1}{1} + \cdots + \underset{1}{1} \right|$$

$$= \underset{n+1}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-(n+1)}{1} \Big| + \Big| \underset{\infty_1-m}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-n}{1} + \underset{n}{1} + \underset{n-1}{1} + \cdots + \underset{1}{1} \Big|$$

und mithin

$$= \left| \underset{\infty_1-m}{1} + \underset{\infty_1-m-1}{1} + \cdots + \underset{1}{1} \right|.$$

Analog ist es für $\infty_1 + m$.

Beisp. 4.

$$\infty_1 = \underset{1}{1} + \underset{2}{1} + \underset{3}{1} + \cdots + \underset{2n}{1} + \underset{2n+1}{1} + \underset{2n+2}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-2n-2}{1} +$$

$$+ \underset{\infty_1-2n-1}{1} + \underset{\infty_1-2n}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-1}{1} + \underset{\infty_1}{1}$$

$$= \underset{2}{1} + \underset{4}{1} + \cdots + \underset{2n}{1} + \vdots\ \underset{1}{1} + \underset{3}{1} + \cdots + \underset{2n-1}{1} + \underset{2n+1}{1} \Big| + \Big| \underset{2n+2}{1} +$$

$$+ \underset{2n+3}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-2n-3}{1} + \underset{\infty_1-2n-2}{1} \Big| +$$

$$+ \Big| \underset{\infty_1-2n-1}{1} + \underset{\infty_1-2n+1}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-1}{1}\ \vdots + \underset{\infty_1-2n}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-2}{1} + \underset{\infty_1}{1} \Big|$$

$$= \Big| \underset{2}{1} + \underset{4}{1} + \cdots + \underset{2n}{1} + \vdots\ \underset{\infty_1-2n}{1} + \underset{\infty_1-2n+2}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-2}{1} + \underset{\infty_1}{1} \Big| +$$

$$+ \Big| \underset{2n+2}{1} + \underset{2n+3}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-2n-3}{1} + \underset{\infty_1-2n-2}{1} \Big| + \Big| \underset{1}{1} + \underset{3}{1} + \cdots$$

$$+ \underset{2n+1}{1} + \vdots\ \underset{\infty_1-2n-1}{1} + \cdots + \underset{\infty_1-1}{1} \Big|.$$

Wenn man nun in der ersten Abtheilung $\underset{2n+2}{1}$ hinter $\underset{2n}{1}$ und $\underset{\infty_1-2n-2}{1}$ vor $\underset{\infty_1-2n}{1}$ und in der dritten $\underset{2n+3}{1}$ hinter $\underset{2n+1}{1}$ und $\underset{\infty_1-2n-3}{1}$ vor $\underset{\infty_1-2n-1}{1}$ setzt und so ohne Ende fortfährt, bis man die mittlere Reihe aufgebraucht hat, so werden die beiden äusseren Reihen vollständig. Dabei sind diese Reihen gleich und die ursprüngliche Reihe enthält doppelt so viele Einheiten als jede von ihnen; denn in der ersten Abtheilung sind $2n+1$ Einheiten und ebensoviel in der dritten, während aus der mittleren Reihe die Glieder zu zweien successive in die beiden andern gebracht werden.

Bezeichnet man die diesen beiden Reihen entsprechende Zahl mit ∞_1', so ist $\infty_1 = \infty_1' \cdot 2$, was wir auch schreiben

$$\infty_1' = \frac{\infty_1}{2}.$$

Diese Zahl gehört der Classe (*II*) nicht an, liegt aber zwischen 0 und ∞_1. Solange man mithin nicht voraussetzt, dass diese Zahl existirt, und solange nur die beiden Reihen $1\,2\,3 \ldots n \ldots$, $\infty_1 - n \ldots \infty_1$ gegeben sind, können wir mit den beiden entgegengesetzten Reihen nicht zwei Paare entgegengesetzter Reihen bilden. In diesem Fall ist n so gross wie man will, man muss es aber immer in einem gegebenen Zustand betrachten und nicht in dem Sinn, dass es unbegrenzt gross wird. Man kann sich jedoch alle gegebenen Zahlen der mittleren Abtheilung in der ersten und dritten denken.[1]

f′. *Wenn man in einer geordneten Gruppe einer unsrer unendlich grossen Zahlen von Elementen die Ordnung der Elemente vertauscht, ohne die Beschaffen-*

---

1) Wenn man in dem in der vor. Anm. gegebenen Beispiel der Graden, die ganze Grade von A aus in der gegebenen Richtung durchläuft und lässt alsdann A die Zahl $\frac{\infty_1}{2}$ darstellen, so würde A nach einem wiederholten Durchlaufen der Graden die Zahl ∞_1 darstellen.

heit der Zahl ∞_1 zu ändern, so stellt diese Gruppe immer dieselbe Zahl von (II) dar.

g. *Für die Multiplication der Zahlen (II) gilt das Distributionsgesetz.*

Denn wenn eine bestimmte Zahl von (II) nämlich:

$$(1) \qquad \infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \infty_1^{\mu-m} n_m \pm \cdots \pm \infty_1^{2} n_{\mu-2} \pm \infty_1 n_{\mu} \pm n_{\mu+1}$$

gegeben ist und sie soll mit einer Zahl η multiplicirt werden, so heisst das, dass die Zahl (1) ηmal summirt werden soll. Die Zahl (1) und mithin auch ihr Product mit η wird durch ein begrenztes Segment dargestellt. Nach dem Commutationsgesetz der Summe (d und f) können wir nun zuerst $\infty_1^{\mu} n_1 \eta$, dann $\pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \eta$ u. s. w. betrachten und erhalten also:

$$(\infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \cdots \pm n_{\mu+1}) \eta = \infty_1^{\mu} n_1 \eta \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \eta \pm$$
$$\pm \cdots \pm n_{\mu+1} \eta .$$

Ist dagegen die Zahl η mit (1) zu multipliciren, so heisst dies, dass man das durch η dargestellte Segment so viel mal summiren soll, als Einheiten in (1) enthalten sind. Man erhält mithin nach dem Sinn der Operation

$$\eta (\infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \cdots \pm n_{\mu+1}) = \eta \infty_1^{\mu} n_1 \pm \eta \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm$$
$$\pm \cdots \pm \eta n_{\mu+1} .$$

Wenn es sich um die Multiplication zweier Zahlen der Form (1) handelt, so gilt dieselbe Schlussweise.

h. *Für die Division der Zahlen (II) gilt ebenfalls das Distributionsgesetz* (Bem. III, § 92 und Def. 1, § 53).

Es folgt dies aus der Definition dieser Operation, welche lehrt aus dem Product und dem Multiplicator den Multiplicand zu bestimmen.

i. *Für die Multiplication zweier Zahlen von (II) gilt das Commutationsgesetz.*

Bew. I. Das Product $\mu \cdot \eta$ sei gegeben. Die Gruppe, durch welche es dargestellt wird, enthält η consecutive Gruppen (Uebereink. I, § 91) von μ Elementen. Wir haben also

$$\mu \eta = \mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \cdots + \mu^{(n)} + \cdots + \mu^{(\eta)}.$$

Betrachtet man in jeder dieser Gruppen die ursprüngliche Einheit und ordnet diese Einheiten als 1tes, 2tes u. s. w. ηtes Element (f) und widerholt diese Operation, bis man mit den Einheiten von μ zu Ende ist, so erhält man

$$\mu \eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \cdots + \eta^{(\mu)} = \eta \mu .$$

Bew. II. Wir haben gesehen (Beisp. 1), dass

$$2 \infty_1 = \infty_1 2$$

ist. Lässt man den Satz für $n-1$ gelten, so wäre er noch für n zu beweisen, nämlich

$$n \infty_1 = \infty_1 n .$$

Es ist:

$$n \infty_1 = [(n-1) + 1] \infty_1 = (n-1) \infty_1 + \infty_1 \qquad \text{(g)}$$
$$= \infty_1 (n-1) + \infty_1 = \infty_1 \cdot n . \qquad \text{(d, § 47)}$$

So erhält man auch:

$$n(\infty_1 \pm m) = \infty_1 n \pm mn = (\infty_1 \pm m) n \tag{g}$$

und aus

$$2\infty_1^2 = 2 \cdot \infty_1 \cdot \infty_1 = \infty_1 \cdot 2 \cdot \infty_1 = \infty_1^2 \cdot 2$$

lässt sich ähnlich beweisen

$$\infty_1^2 \cdot n = n \cdot \infty_1^2$$

und mithin

$$\begin{aligned}(\infty_1^2 n_1 \pm \infty_1 n_2 \pm n_3) m &= \infty_1^2 n_1 m \pm \infty_1 n_2 m \pm n_3 m \\ &= m \infty_1^2 n_1 \pm m \infty_1 n_2 \pm m n_3 \\ &= m(\infty_1^2 n_1 \pm \infty_1 n_2 \pm n_3).\end{aligned} \tag{g}$$

Die Zahl $\infty_1^{\infty_1}$ erhält man als die Summe von ∞_1 dem $\infty_1^{\infty_1 - 1}$ gleichen Zahlen. Wendet man daher den Beweis auf den Fall der Einheit 1 an (Beisp. 1), so erhält man

$$2\infty_1^{\infty_1} = \infty_1^{\infty_1} \cdot 2.$$

Ebenso gilt derselbe Beweis für ∞_1^μ, welches die Summe von ∞_1 dem $\infty_1^{\mu - 1}$ gleichen Zahlen ist; man hat

$$2 \cdot \infty_1^\mu = \infty_1^\mu \cdot 2$$

und also auch

$$m \infty_1^\mu = \infty_1^\mu m.$$

Sind nun zwei Zahlen μ und η von der Ordnung μ' bezüglich η' gegeben (Def. II, § 86 und Bem. III, § 91), so gibt man ihnen die Form

$$\infty_1^{\mu'} m_1 \pm \infty_1^{\mu' - 1} m_2 \pm \cdots \pm m_{\mu' + 1}$$

$$\infty_1^{\eta'} n_1 \pm \infty_1^{\eta' - 1} n_2 \pm \cdots \pm n_{\eta' + 1}. \qquad \text{(Bez. I, § 91)}$$

Da das Distributionsgesetz gilt und $\infty_1^{\mu'} \infty_1^{\eta'} = \infty_1^{\mu' + \eta'} = \infty_1^{\eta' + \mu'}$, so erhält man nach dem Commutationsgesetz der einzelnen Producte der Summe

$$\mu \cdot \eta = \eta \cdot \mu.$$

1. *Die Zahlen der Classe (II) lassen sich successive in unbegrenzte Reihen* 1[ter] *Art gruppiren und diese wieder in unbegrenzte Reihen* 1[ter] *Art und so weiter ohne Ende.*

Denn jede Zahl der Classe (II) ist von der Form Z (Bez. II, § 91). Setzt man $n_1 = n_2 = \cdots = n_\mu = 0$ und lässt $n_{\mu+1}$ variiren, so erhält man die Reihe (I), die wir mit $S_1^{(0)}$ bezeichnen wollen. Ist $n_1 = n_2 = \cdots = n_{\mu-1} = 0$ und man lässt n_μ, $n_{\mu+1}$ variiren, so erhält man für jeden Werth von n_μ eine Reihe S_1 und mithin für alle Werthe n_μ eine in Bezug auf die S_1 unbegrenzte Reihe 1[ter] Art $S_2^{(0)}$.[1]) Führt man so fort, so sieht man, dass die Zahlen der Ordnung μ eine Reihe S_μ bilden, die wir von der μ^{ten} Art nennen wollen.

Die erste Reihe $S_3^{(0)}$ ist:

---

1) Wir meinen bisher immer ganze und positive endliche Werthe.

$$\left.\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{ll}
0\ 1\ 2 \cdots n \quad \ldots\ldots\ldots & S_1^{(0)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\cdots \infty_1 - m_1 \cdots \infty_1 \cdots \infty_1 + m_1 \cdots \quad \ldots\ldots & S_1^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\cdots \infty_1 m_1 - m_2 \cdots \infty_1 m_1 \cdots \infty_1 m_1 + m_2 \quad \ldots\ldots & S_1^{(m_1)}
\end{array}\right\} & S_2^{(0)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\left.\begin{array}{ll}
\infty_1^2 - \infty_1 m_1 - m_2 \cdots \infty_1^2 - \infty_1 m_1 \cdots \infty_1^2 - \infty_1 m_1 + m_2 & S_1^{(\infty_1 - m_1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\infty_1^2 - m_1 \cdots \infty_1^2 \cdots \infty_1^2 + m_1 \quad \ldots\ldots & S_1^{(\infty_1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\infty_1^2 + \infty_1 m_1 - m_2 \cdots \infty_1^2 + \infty_1 m_1 \cdots \infty_1^2 + \infty_1 m_1 + m_2 & S_1^{(\infty_1 + m_1)}
\end{array}\right\} & S_2^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\infty_1^2 m_1 + \infty_1 m_2 - m_3 \cdots \infty_1^2 m_1 + \infty_1 m_2 \cdots \infty_1^2 m_1 + \infty_1 m_2 + m_3 & S_1^{(\infty_1 m_1 + m_2)}
\end{array}\right\} S_3^{(0)}$$

Bezeichnet man mit S_1 eine beliebige in $S_2^{(0)}$ enthaltene Reihe erster Art, mit S_2 eine beliebige in $S_3^{(0)}$ enthaltene Reihe zweiter Art u. s. w., so erhalten wir die Reihe

$$S_1\ S_2\ S_3 \cdots S_n \cdots,$$

welche durch die Zahlen, die zum gemeinschaftlichen Symbol bezüglich

$$\infty_1,\ \infty_1^2,\ \infty_1^3,\ \cdots,\ \infty_1^m$$

haben, dargestellt wird.

Wir bezeichnen diese Reihe mit $\Sigma_1^{(0)}$, sofort nach ihr kommt die Reihe:

$$\infty_1^{\infty_1 - m_1},\ \infty_1^{\infty_1 - m_1 + 1},\ \cdots,\ \infty_1^{\infty_1},\ \cdots,\ \infty_1^{\infty_1 + m} \quad \Sigma_1 \text{ [1])}$$

---

1) Im weiteren Verfolg der zweiten Anm. zu § 90 und der dritten zu § 92 geben wir folgende Sätze:

1. *Die Reihe gegebener Zahlen, welche einer gegebenen unendlich grossen Zahl in unsrer Classe (II) vorangehen, ist von der ersten Mächtigkeit.*

Zu dem Zweck beachte man, dass aus dem Symbol Z einer gegebenen Zahl von (II) hervorgeht (Bez. I, § 91), dass sie von den endlichen Zahlen n von (I) abhängt, welche in endlicher Zahl vorhanden sind. Man kann daher die Zahlen von (II), welche von keiner höheren Ordnung als μ sind, eindeutig den Zahlen von (I) entsprechen lassen.

2. *Die Classe (II) ist nicht von derselben Mächtigkeit wie die Classe (I).*

Denn den Zahlen *G. Cantor's* von der Form ω, $\omega^2 \ldots \omega^n \ldots \omega^\omega \ldots \omega^\eta \ldots$ können wir alle Zahlengruppen

$$\infty_1 - n_1 \quad (n_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n \ldots)$$

$\infty_1^2 - \infty_1 n_1 \pm n_2$ (n_1, $n_2 = 0, 1, 2 \ldots n \ldots$; wenn $n_1 = 0$, muss bei positivem Zeichen auch $n_2 = 0$ sein) u. s. w. entsprechen lassen.

Dem ω^ω lassen wir alle Zahlen entsprechen, die $\infty_1^{\infty_1}$ (dieses $\infty_1^{\infty_1}$ eingeschlossen) vorausgehen und auf die Zahlen der unendlich grossen Gebiete von endlicher Ordnung folgen; der Zahl ω^η ferner alle Zahlen, welche man aus dem Symbol ∞_1^η erhält, wenn man an Stelle von η unsre ihm entsprechenden Zahlen setzt und alle diejenigen, welche zwischen ihnen liegen.

Cantor hat aber schon bewiesen, dass seine Classe (II) von transfiniten Zahlen nicht von derselben Mächtigkeit wie (I) ist (siehe z. B. Acta math. Bd. II, S. 391—392); folglich ist auch die unsrige nicht von derselben Mächtigkeit.

3. *Unsre Classe (II) ist von derselben Mächtigkeit wie die Classe (II) Cantor's.*

Denn nehmen wir an, sie sei von derselben Mächtigkeit wie die Classe (III) *Cantor's*, welche von der nächst höheren Mächtigkeit wie die Classe (II) nach der Definition selbst der Classe (III) ist (zweite Anm. zu § 90). Das heisst also, dass es wenigstens eine Zahl η unsrer Classe (II) gibt, welche einer Zahl der Classe (III) entspricht. Damit dies aber möglich ist, müsste die Zahlenreihe, die η vorangeht von derselben Mächtigkeit wie (II) sein, was widersinnig ist (1).

Unsre unendlich grossen und unendlich kleinen Grössen haben Aehnlichkeit mit den unendlich grossen und den Nullgrössen *Du Bois Reymond's* (Math. Ann. XI. 'Ueber die

und jede Zahl dieser Reihe stellt eine Reihe S dar, nämlich

$$S_{x_1-m_1},\ S_{x_1-m_1+1},\ \ldots S_{x_1}\ \ldots S_{x_1+m_1},$$

von denen die erste alle vorhergehenden, durch die Zahlen von 0 bis zur Zahl

$$\infty_1^{x_1-m_1} n_1 + \infty_1^{x_1-m_1-1} n_2 + \cdots + \infty_1^{x_1-m_1-m} n_m + \infty_1^{m'} n'_1 +$$
$$+ \infty_1^{m'-1} n'_2 + \cdots + n'_m$$

gegebenen Reihen enthält.

m. *Die endlichen, unendlich kleinen und unendlich grossen Segmente bis zur Ordnung μ mit Einschluss aller derjenigen, deren Ordnungen zugleich mit μ endlich sind, bilden eine Gruppe, die sich in sich selbst transformirt, wenn man die Unendlichgrossen oder die Unendlichkleinen derselben Ordnungen jedes Segments der Gruppe eine endliche Anzahl mal nimmt.*

μ sei unendlich gross von der Ordnung σ; der Typus von μ ist ∞_1^{σ} und mithin der Typus der unendlich grossen Zahlen von der Ordnung μ $\infty_1^{x_1^{\sigma}} \cdot n_1$, unter n_1 eine endliche Zahl verstanden. Dazu können unendlich grosse Zahlen von niedrigerer Ordnung hinzugefügt oder weggenommen werden (Bez. II, § 91).

Alle unendlich grossen Zahlen von einer Ordnung, die zugleich mit denjenigen von der Ordnung μ endlich ist, haben den Typus $\infty_1^{x_1^{\sigma_n}}$. Wenn zwei von diesen Zahlen gegeben sind, deren grösste, typische, sie bildende Zahlen von der Form $\infty_1^{x_1^{\sigma_n}}$, $\infty_1^{x_1^{\sigma_m}}$ sind und man multiplicirt sie miteinander, so erhält man offenbar eine Zahl derselben Gruppe, nämlich

$$\infty_1^{x_1^{\sigma_n}} \cdot \infty_1^{x_1^{\sigma_m}} = \infty_1^{x_1^{\sigma(n+m)}}.$$

Betrachtet man ein unendlich kleines Segment (AB), von der Ordnung η, die höchstens mit μ endlich ist, so ist die Grundeinheit (AA_1) in Bezug auf (AB) unendlich gross von der Ordnung η. Betrachtet man ein Vielfaches von (AB) nach einer unendlich grossen Zahl σ von einer Ordnung, die in Bezug auf μ höchstens endlich ist, so erhält man ein in Bezug auf (AB) unendlich grosses Segment von der Ordnung σ (f, § 92), welches in Bezug auf (AA_1) entweder unendlich klein, endlich oder unendlich gross sein muss (f, § 82). In den beiden ersten Fällen ist es in dem obigen Gebiet enthalten, während es im letzten Fall nicht grösser als das Vielfache von (AA_1) nach

---

Paradoxen des Infinitärcalculs; die allgemeine Functionentheorie, Tübingen 1882, S. 278: „Ueber den monotonen Endverlauf der Functionen und die infinitäre Pantachie"), wie auch mit den Momenten der Functionen von *Stolz*. Für die arithmetischen Grundoperationen mit unsren Zahlen und denjenigen, welche wir später hinzufügen werden, gelten die gewöhnlichen Regeln. Unsre unendlich grossen und unendlich kleinen Zahlen sind im Grunde specielle complexe Zahlen mit unendlich grossen Einheiten der Art jedoch, dass sich das Product zweier von ihnen nicht linear durch die anderen ausdrücken lässt. Es gilt mithin für diese Zahlen der Satz, dass, wenn das Product zweier von ihnen Null ist, einer der Factoren Null sein muss, wie dieser Satz für die gewöhnlichen complexen Zahlen und die Quarternionen *Hamilton's* gilt.

Aus unsren Hypothesen über das Unendlichkleine, welche wir später vervollständigen werden (Hyp. VI, VII, VIII), geht hervor, dass der Begriff der unendlich grossen und unendlich kleinen Grösse des Idealisten *Du Bois Reymond's* (Allg. F. T. S. 71—75 und 283) nicht auf dieselbe Weise bestimmt ist.

derselben Zahl σ sein kann; denn dieses letztere Vielfache ist in Bezug auf (AB) von der Ordnung $\eta + \sigma$ (f, § 92).

Ein Segment, das bezüglich (AB) unendlich klein von der Ordnung σ ist, ist in Bezug auf (AA_1) unendlich klein von der Ordnung $\eta + \sigma$; weil aber η und σ höchstens endlich mit μ sind, so ist auch $\eta + \sigma$ mit μ höchstens endlich (i, § 82 und Def. I, § 87).

Damit ist der Satz bewiesen.

6.

Einheiten verschiedener Art. — Ein neues Kennzeichen der Masseinheit.

§ 94. *Def. I.* Unter *Einheit* einer gegebenen *Art* verstehen wir ein beliebiges der Segmente derselben Art (Def. I, § 86).

Geht man von einer gegebenen Scala als erster Scala aus, so heisst die entsprechende Einheit, die auch die Grundeinheit ist (Def. VII, § 91), auch *Einheit erster Art.*

Die dem unendlich grossen Gebiet von der Ordnung η entsprechende Einheit nennen wir *Einheit der Art* η.

Bem. I. Wenn die Grundeinheit gegeben ist, so wissen wir noch nicht, ob sie unendlich kleine Segmente enthält; man kann vielmehr annehmen, dass sie ausser A und A_1 kein andres Element enthält (Def. VI, § 62) oder auch dass sie, wenn andre Elemente vorkommen, kein unendlich kleines Segment enthält, da wir über die Grundeinheit, von der wir ausgegangen sind, keine Hypothese gemacht haben (Bem. I, § 80).

Def. II. Wir setzen von nun an fest, dass die Masseinheit ein Segment ist, *welches wenigstens ein unendlich kleines Segment erster Ordnung enthält.*

Dasselbe setzen wir von jedem Segment voraus, wenn wir nicht das Gegentheil bestimmen.

Bem. II. Offenbar liegt in dieser neuen Definition der Einheit keine Hypothese, weil sie eine andre Benennung der Segmente ist, die wenigstens ein Unendlichkleines haben und nur bedeuten soll, dass wir uns in Zukunft nur mit solchen Scalen beschäftigen, deren Masseinheit diese Segmente sind.

7.

Theilung endlicher Segmente in endliche Theile. — Endliches stets abnehmendes Segment. — Seine Grenze. — Ein in Bezug auf eine gegebene Einheit unbegrenzt kleines Segment. — Hypothese über die Stetigkeit bezüglich einer Einheit. — Grenzelemente einer Elementengruppe in Bezug auf eine Einheit in der Grundform.

§ 95. a. *In jedem Segment* (AB) *gibt es in der Richtung von* A *nach* B, *mit* A *angefangen eine Reihe von* n *consecutiven in Bezug auf* (AB) *endlichen Theilen für jedes beliebige* n.

Dies folgt aus Def. II, § 82, der Hyp. IV, dem Satz b, § 85 und dem Satz g, § 82; man braucht Satz b § 85 nur n mal anzuwenden.

a'. *In jedem Segment* (AB) *gibt es immer Segmente* (AB'), *deren Vielfache nach der gegebenen Zahl* n *kleiner als* (AB) *sind und andre, deren Vielfache nach derselben Zahl grösser als* (AB) *sind.*

Denn (AB) kann in eine endliche Anzahl n consecutiver Segmente (AB'), $(B'B'')$ ... (a) zerlegt werden und man kann immer annehmen, dass wenigstens eines kleiner als die andern ist. Denn, sind sie alle ungleich und man sieht von jedem Segment, das grösser als ein andres der n Segmente ist, ab und man wiederholt diese Operation höchstens für $n-1$ der n Segmente, so muss das übrigbleibende Segment das kleinere sein. Sind sie dagegen alle gleich, so braucht man nur das erste in zwei Theile (AB'), $(B'B'_1)$ zu theilen und (AB') als erstes $(B'B'_1)$ als zweites Segment anzusehen.

Für das erste ist offenbar

$$(AB')\, n < (AB). \qquad \text{(d'', § 79)}$$

Ist das grösste der Segmente $(B^{(n)}B) \equiv (AB'_1)$ so ist dagegen

$$(AB'_1)\, n > (AB). \qquad \text{(d'', § 79)}$$

b. *Ein endliches Segment der Grundform kann in eine ganze endliche Anzahl von endlichen consecutiven Theilen zerlegt werden, von denen jeder kleiner als ein beliebiges endliches gegebenes Segment ist.*

(AB) sei das gegebene Segment; $(AB') \equiv \alpha$, $(B'B) \equiv \beta$ seien zwei endliche consecutive Theile von (AB) (a). Nehmen wir an $\beta_1 \equiv \beta$ sei das endliche beliebig kleine gegebene Segment. Ist $\alpha \leqq \beta$, so ist der Satz die unmittelbare Folge des Theorems a. Ist dagegen $\beta < \alpha$, so gibt es immer eine solche endliche Zahl n, dass

$$\beta n < \alpha < \beta\,(n+1) \qquad \text{(Def. II, § 82 und c', § 81)}$$

das heisst $\alpha = \beta n + \gamma$, $(\gamma < \beta)$. Nach dem Satz a können wir aber β, sei es auch so klein es wolle aber gegeben, in endliche kleinere Theile zerlegen. Geschieht dies daher mit jedem in α enthaltenen Theil von β, so ist damit der Satz bewiesen.

Bem. I. Die Reihe der in einem Segment (AB) enthaltenen endlichen Segmente (AX) kann man sich durch ein variables stets abnehmendes Segment erzeugt denken (Def. I, § 83), in welchem A immer dasselbe bleibt, während X sich derart ändert, dass in jeder Lage (AX) ein Segment der Reihe ist, welches kleiner als jedes vorhergehende Segment ist.

Def. I. Von einem veränderlichen endlichen stets abnehmenden Segment, welches kleiner als jedes beliebige endliche gegebene Segment wird und bleibt (b; Def. II, § 83), sagen wir es werde *in Bezug auf die endliche Einheit unbegrenzt klein.*

c. *Das in Bezug auf eine Einheit unbegrenzt Kleine ist von dem in Bezug auf dieselbe Einheit unendlich Kleinen verschieden.*

Denn (AX) ist in jeder seiner Lagen endlich und tritt nicht aus dem Gebiet der endlichen Segmente heraus und kann mithin auf diese Weise nicht unendlich klein werden (Def. II, § 82).

Def. II. Wir sagen auch, ein veränderliches endliches Segment (AX) mit dem variablen Ende X, welches unbegrenzt klein wird, *strebe danach unendlich klein von der ersten Ordnung zu werden*, wenn in ihm andre unendlich kleine Segmente existiren oder in Betracht gezogen werden. Ist das Letztere nicht der Fall, so sagen wir, *es strebe danach, unendlich klein zu werden* (Def. II, § 94).

Def. III. Das unendlich kleine Segment erster Ordnung heisst Grenze des variablen endlichen Segments (AX) und man schreibt

$$\lim (AX) = \text{unendlich klein erster Ordnung}.$$

d. *Ein endliches Segment (AX) mit einem variablen Ende, welches unbegrenzt klein wird, hat mit Bezug auf die Einheit das Segment Null zur Grenze* (b′, § 91).

$$\lim (AX) = 0$$

Def. IV. Von einem endlichen Segment (AX), welches sich derart ändert, dass sich X in Bezug auf die Masseinheit unbegrenzt einem andern Element B nähert (Def. VI, § 67), sagt man, es habe (AB) zur Grenze und schreibt

$$\lim (AX) = (AB).$$[1]

e. *Ein Segment kann in Bezug auf die gegebene Einheit sowohl in einer Richtung als in der entgegengesetzten unbegrenzt klein werden.*

Denn man kann ein der Einheit (AA_1) gleiches Segment $(A_{-1}A)$ (Def. I, § 68) in Betracht ziehen, welches mithin dieselbe Richtung wie (AA_1) hat. Betrachtet man X in dem Segment $(A_{-1}A)$ und wächst $(A_{-1}X)$ stets, so wird (XA) immer kleiner (g^{V}, § 73) und wird kleiner als jedes endliche gegebene beliebig kleine $(A'A)$, wenn A' in $(A_{-1}A)$ enthalten ist. Dasselbe ist der Fall, wenn das Element X in dem Segment (AA_1) liegt.

f. *Wenn die Elemente X und X' sich in entgegengesetzten Richtungen unbegrenzt einem Element A nähern, so wird das Segment (XX') in Bezug auf die gegebene Einheit unbegrenzt klein.*

Denn es ist

$$(XX') = (XA) + (AX')$$

und da (XA) und (AX') unbegrenzt klein werden (e), so wird auch ihre Summe unbegrenzt klein. Bliebe z. B. (XX') grösser als ein endliches gegebenes noch so kleines Segment, so lässt sich immer ein dem gegebenen gleiches aus zwei endlichen Theilen (Y_1A), (AY'_1) bestehendes Segment auswählen (b′, § 69). (XA) aber und (AX') müssen nach der Voraussetzung kleiner als (Y_1A) und (AY'_1) werden, X und X' müssen also auf ihrem Weg nach A an den Elementen Y_1 und Y'_1 vorbeikommen und das Segment (XX') kann mithin nicht grösser als das gegebene Segment $(Y_1A) + (AY'_1)$ bleiben (d, § 73). Damit ist der Satz bewiesen.

---

1) Beschränkt man sich auf das Gebiet einer einzigen Scala, so ist der Name *unendlich klein* für ein *immer endliches* variables Segment, welches *unbegrenzt klein* wird, *ungeeignet*. Unterscheidet man aber wie wir *die actuellen Unendlichkleinen* von den unbegrenzt Kleinen, welche *potentielle Unendlichkleine* sind und wollte man die unbegrenzt kleinen Segmente einfach unendlich klein nennen, so wäre dies ein schwerer Fehler.

Bem. II. In diesem Fall schreibt man ebenfalls:

$$\lim (XX') \equiv 0 .$$

g. *Ein Segment mit in entgegengesetzten Richtungen veränderlichen Enden, welches in Bezug auf eine gegebene Einheit unbegrenzt klein wird und ausserhalb des Gebiets der Veränderlichkeit seiner Enden ein Element A enthält, hat in Bezug auf diese Einheit nur das Element A zur Grenze.*

Es ist dies nur eine verschiedene Fassung des Satzes f in Verbindung mit dem Satz d (Bem. I, § 76).

h. *Wenn sich X unbegrenzt dem Element X' nähert und X' in derselben Richtung dem Element A, so nähert sich X unbegrenzt dem A.*

X' ist in dem Segment (XA) enthalten (Def. II, § 62 und § 23). Wenn X sich nicht unbegrenzt dem A näherte, so gäbe es ein Segment $(A'A)$ derart, dass es in $(A'A)$ keine Elemente X gäbe (Def. II). Aber in $(A'A)$ gibt es ein Element X' und mithin existirte der Voraussetzung zuwider in dem Segment $(A'X')$ kein Element X. Folglich u. s. w.

i. *Wenn X und X' sich in derselben Richtung unbegrenzt dem Element A nähern, so wird (XX') [oder $(X'X)$] unbegrenzt klein.*

Wenn (XX') [oder $(X'X)$] grösser als ein gegebenes Intervall ε bliebe, so würde auch (XA) [oder $(X'A)$], welches (XX') [oder $(X'X)$] enthält, grösser als ε bleiben, was gegen die Voraussetzung ist (Def. I).

§ 96. *Bem. I.* Wir haben vorausgesetzt, dass das variable endliche Segment (XX') ein Element A ausserhalb des Gebiets der Veränderlichkeit der Elemente X und X' besitze. Wenn man aber mittelst eines gegebenen Gesetzes ein Segment erhält, dessen Enden in entgegengesetztem Sinn veränderlich sind und das unbegrenzt klein wird, so geht aus den früheren Sätzen nicht hervor, dass es in ihm ein Element ausserhalb des Gebiets, in welchem seine Enden variiren, geben muss, es sei denn man wüsste schon, dass ein solches Element existirt. Man kann sich in der That eine Gruppe von Elementen, welche der Definition des homogenen Systems und, wenn man will, auch des in der Position seiner Theile identischen Systems genügen (Def. I, § 68 und Def. I, § 70), derart vorstellen, dass jedes ihrer Segmente in Bezug auf ein gegebenes beliebiges Segment der Gruppe endlich ist und dass wenn ein Element A gegeben ist in Bezug auf die gegebene Einheit in der einen wie in der andern Richtung von A an kein erstes endliches Segment existirt. Nach der Definition des homogenen Systems besitzt jedes Element der Gruppe in der einen oder der andern Richtung diese Eigenschaft (Def. I, § 68; b, § 69). Wenn wir uns nun um jedes Element unendlich kleine Gebiete denken, z. B. ein einziges, dessen Elemente in Bezug auf die gegebene Einheit zusammenfallen (g, § 85) und so, dass die Elemente des unendlich kleinen Gebiets der Definition des homogenen Systems genügen, so erfüllen die in Bezug auf die unendlich kleinen Segmente endlichen Segmente die Bedingungen der Hypothese IV. Denn wenn man ein Unendlichkleines erster Ordnung als Einheit betrachtet, so liegt ein gegebenes Element der ersten Gruppe von einem andern Element derselben Gruppe aus im Unendlichgrossen. Weil nun in jedem Segment dieser Gruppe in Bezug auf die erste Einheit andre Elemente der Gruppe existiren, welche mit den Enden in Bezug auf diese Einheit endliche Segmente bilden, so ist auf diese Art der Hypothese IV Genüge geschehen.

Obgleich nun jedes Element Grenzelement eines oder mehrerer variabler Segmente (XX') ist, so kann man doch umgekehrt nicht a priori behaupten, ein variables Segment (XX'), welches in dem obigen Sinn unbegrenzt klein wird und dessen Enden Elemente der Gruppe sind, enthalte andre Elemente ausserhalb des Gebiets der Variabilität seiner Enden und habe mithin ein Grenzelement (g, § 95). Auf der andern Seite ist auch nicht ausgeschlossen, dass immer ein solches Element existiren kann.

Greifen wir auf das intuitive Continuum zurück, welches durch die Punkte des gradlinigen Gegenstandes bestimmt wird (§ 55), so werden wir zu der Annahme geführt, das variable Segment (XX') enthalte in jedem Fall *Elemente* ausserhalb des Variabilitätsgebiets zwischen X und X'. Wir stellen daher die folgende Hypothese auf.

Hyp. VI. **Jedes endliche Segment, dessen Enden stets in entgegengesetzten Richtungen variiren und welches unbegrenzt klein wird, enthält ein seinen Enden verschiedenes Element.**[1])

Def. I. Ein solches homogenes System nennen wir zum Unterschied von den andern, in welchen die Hyp. VI nicht gilt, *homogenes in Bezug auf die gegebene Einheit stetiges oder relativ stetiges System*, während wir jedes andere homogene System einer Dimension *in Bezug auf die gegebene Einheit unstetiges System* nennen.

a. *In jedem Segment mit in entgegengesetzten Richtungen stets variablen Enden, welches in Bezug auf eine gegebene Einheit unbegrenzt klein wird, gibt es wenigstens ein unendlich kleines Gebiet von Elementen, die ausserhalb des Variabilitätsgebiets der Enden des veränderlichen Segments liegen.*

Denn wenn A das durch die Hyp. VI. gegebene Element ist, so existirt, weil es stets in Bezug auf die gegebene Einheit ein unendlich kleines Gebiet gibt (Def. II, § 94), um jedes Element des Systems ein solches unendlich kleines Gebiet (Def. I, § 68) und folglich auch um A. Kein Element dieses Gebiets kann dem Variabilitätsgebiet der Enden des stets veränderlichen Systems angehören, weil sonst das Segment z. B. (XA), da es unendlich klein ist, in Bezug auf die Einheit Null wäre (g, § 85) und das Element X daher bezügl. dieser Einheit nicht stets variabel wäre.

b. *Jedes Segment (XX'), welches bezüglich einer gegebenen Einheit unbegrenzt klein wird und dessen Enden in entgegengesetzten Richtungen veränderlich sind, hat ein einziges Element des Systems und in absolutem Sinn ein unendlich kleines Gebiet zur Grenze.*

Denn es sei (XX') das variable Segment und Y und Y' zwei Elemente desselben, die jedoch nicht in dem Variabilitätsgebiet der Elemente X und X' liegen. Das Segment (YY') muss unendlich klein sein, wenn Y und Y' verschieden sind (Def. II, § 82 und Def. II, III, § 57). Denn sonst bliebe (XX') bei seinem Sichändern immer grösser, als ein endliches Segment (YY'), was gegen die Voraussetzung ist.

b'. *Sind zwei variable Segmente, von denen das eine (AX) wächst und das andre (AX') abnimmt, beide von derselben Richtung, gegeben und wird (XX') in Bezug auf die Einheit unbegrenzt klein, so gibt es ein einziges Element Y derart,*

1) In § 99 werden wir die Unabhängigkeit dieser Hypothese von den früheren beweisen. Der Idealist *Du Bois Reymond's* (a. a. O. S. 77) setzt nicht fest, wie ein gegebenes Segment aus unendlich kleinen Segmenten zusammengesetzt ist (siehe Anm. 3, § 93), was zur Folge hat, dass sein Beweis der Existenz der Grenze zweier convergirender Decimalreihen nicht entscheidend ist und eine petitio principii enthält. Denn er setzt implicite voraus, das endliche Segment (NN') (a. a. O.), welches kleiner als jedes gegebene Segment wird, enthalte immer ein Unendlichkleines, dessen Enden nicht Elemente der Reihe der Punkte N und N' sind. Die Hypothese VI ist desshalb in relativem Sinn, die Hypothese VIII in absolutem Sinn nothwendig.

dass (AY) Grenzsegment der beiden variablen Segmente ist. Wenn (AX) beständig wächst und (AX') immer abnimmt, so ist (AY) kein Zustand einer der Variabelen.

Dies geht unmittelbar aus dem Satz b und der Def. IV, § 95 hervor.

c. *Das homogene in Bezug auf eine Masseinheit stetige System ist stetig für jede beliebige unendlich grosse Einheit, kann es aber bezüglich einer unendlich kleinen Einheit nicht sein.*

Denn in diesem Fall sind die endlichen Segmente in Bezug auf die unendlich grosse Einheit gleich, weil sie Null sind (g, § 85) und das ganze endliche Gebiet reducirt sich bezüglich der unendlich grossen Einheit auf ein einziges Element. In Bezug auf eine unendlich kleine Einheit kann dagegen das System in der Umgebung eines beliebigen gegebenen Elements des endlichen Gebiets unstetig sein (Def. I).

§ 97. a. *Die successiven Zustände einer immer wachsenden oder abnehmenden Veränderlichen, die von einem dieser Zustände beginnend unbegrenzt von der ersten Art ist, können mit den Zahlen der Reihe (I) bezeichnet werden.*

Denn zwischen zwei consecutiven gegebenen Zuständen (AX), (AX') eines variablen Segments braucht man nur diejenigen in Betracht zu ziehen, für welche (XX') [wenn $(AX) > (AX')$] oder $(X'X)$ [wenn $(AX' > AX)$] endlich ist; denn wäre (XX') oder $(X'X)$ unendlich klein, so könnte man es in Bezug auf die endlichen Segmente vernachlässigen (g, § 85); andererseits kann es nicht unendlich gross sein (h, § 85). Wenn mithin die Variable in Bezug auf die Masseinheit immer wächst oder abnimmt, so bleibt im ersten Fall (XX') im zweiten $(X'X)$, wenn es sich um zwei verschiedene Zustände handelt, stets endlich. Die Zustände des veränderlichen Segments bilden aber eine unbegrenzte Reihe erster Art, die man eindeutig und in derselben Ordnung der Reihe (I) entsprechen lassen kann (c', § 46 und b, § 43). Man kann mithin die Zustände der Variabelen successive mit den Zahlen der Reihe (I) bezeichnen (§ 47), dass heisst:

$$(AX_1),\ (AX_2),\ \ldots,\ (AX_n)\ \ldots$$

Bem. I. Wenn wir von einer in Bezug auf eine Einheit wachsenden oder abnehmenden Veränderlichen (AX_n) sprechen, so meinen wir damit, wenn nicht Anderes bestimmt wird, eine begrenzte oder unbegrenzte Reihe erster Art (Def., § 35; Def. III, § 39).

Ist (AB) das Grenzsegment eines veränderlichen Segments (AX_n), so schreiben wir

$$\lim\ (AX_n) \equiv (AB),$$

wenn $\lim n = \infty$, statt $\lim\ (AX) \equiv (AB)$. [1])

Bem. II. Bezeichnet man jeden Zuwachs der Variabelen, wenn sie wächst, von dem ersten constanten Element A an mit $x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$, so ist

1) Beschränkt man sich auf das Gebiet einer Einheit, wie gewöhnlich, so kann man

$$\lim_{n = \infty} (AX_n) \equiv (AB)$$

schreiben.

Dies ist aber der Fall, wenn das Symbol ∞ nicht ein actuelles sondern ein potentielles Unendlichgrosses bezeichnet, welches seinem Wesen nach nicht constant, sondern endlich und variabel ist.

$$(AX_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

und wir können daher anstatt

$$\lim (AX_n) \equiv (AB)$$
$$\lim n = \infty$$

auch schreiben:

$$\lim S x_n \equiv (AB)$$
$$\lim n = \infty,$$

wenn S das Zeichen der Summe ist.

b. *Wenn die stets wachsende (wachsende) endliche Variabele (AX) und die abnehmende (stets abnehmende) endliche Variabele (AX') in derselben Richtung derart gegeben sind, dass (AX) $[(AX')]$ stets kleiner (grösser) als jeder Zustand von (AX') $[AX)]$ ist und jedes Segment (AY), welches grösser (kleiner) als jeder Zustand von (AX) $[(AX')]$ ist, der zweiten (ersten) Variabelen angehört, so wird das Segment (XX') in Bezug auf die gegebene Einheit unbegrenzt klein.*

Dass vor allem solche Variabelen möglich sind, geht unmittelbar aus a, § 95 und aus den Def. I und II des § 83 hervor. Wir bemerken ferner, dass da (AX) und (AX') endlich sind, das Segment $(X'X)$ zwischen zwei beliebigen Zuständen von (AX) und (AX') niemals unendlich gross sein kann (h, § 85). Man sieht auch, dass ein Zustand von (AX) das Grenzsegment (AL) der Variabelen (AX') nicht sein kann. Wenn dies der Fall wäre, so müssten, weil die Variabele (AX) stets derart wächst, dass die Differenz zwischen zwei successiven Zuständen (AL), (AL_1) derselben zwar noch so klein aber endlich ist (h, § 85), in (LL_1) Elemente X' existiren, da (LX') nach der Voraussetzung kleiner als jedes gegebene Segment (LL_1) werden muss (Def. IV, § 95), wenn L nicht selbst ein Element X' ist. Wir hätten mithin einen Zustand (AL_1) der Variabelen (AX), der grösser als ein Zustand der Variabelen (AX') wäre, was gegen die Annahme des Satzes ist.

Wir setzen nun voraus, es sei immer

$$(XX') > (BC) \tag{1}$$

unter (BC) ein gegebenes endliches Segment verstanden und wollen, um die Vorstellung zu erleichtern, annehmen, in dem Segment (XX') sei stets ein endliches gegebenes mit (BC) identisches Segment derart enthalten, dass $(XX') > (BC)$. Aus (1) geht hervor, dass, wenn (AX_1) ein beliebiger Zustand von (AX) ist (Def. I, § 83), die Variabele (AX') stets grösser als $(AX_1) + (X_1X_2)$ ist, welches mithin ein Zustand von (AX) ist $[(X_1X_2) \equiv \equiv BC)]$. Denn wäre sie ebensogross oder kleiner, so würde die Relation (1) nicht bestehen können. Da aber die Variabele (AX) nur die Bedingung erfüllt, dass sie immer kleiner als ein beliebiger Zustand der Variabelen (AX') ist, so folgt daraus, dass, wenn man einen Zustand der ersten Variabeln

$$(AX_1) + (X_1X_2) \equiv (AX_2)$$

betrachtet, da die Beziehung (1) nach der Annahme zwischen zwei beliebigen Zuständen von (AX) und (AX') stets ihre Geltung behält, auch das Segment

$$(AX_1) + (X_1X_2)\,n \equiv (AX_n)$$

ein Zustand der Variabelen (AX) ist.

Welche Zahl aber n auch sein möge, wenn (AX'_1) ein bestimmter Zustand der Variabelen (AX') ist, so ist $(X_1X'_1)$ endlich (h, § 85). Es gibt also immer eine solche Zahl n, dass

$$(X_1X_2)n > (X_1X'_1)$$

(Def. II, § 82; Def. I, c', § 81).

Wäre mithin die Beziehung (1) richtig, so gäbe es einen Zustand von (AX), der grösser als ein Zustand von (AX') ist, was den Bedingungen des Satzes widerspricht. Mithin ist (1) widersinnig.

Analog ist der Beweis, wenn (AX) wächst (Def. I, § 83) und (AX') stets abnimmt.

c. *Das Segment (X_nX_{n+r}), das zwischen zwei successiven Zuständen (AX_n), (AX_{n+r}) der endlichen Variabelen liegt, wenn die Variabele immer wächst oder das Segment $(X_{n+r}X_n)$, wenn sie immer abnimmt und zur Grenze das Segment (AB) hat, wird mit dem unbegrenzten Wachsen von n bei constant bleibendem r unbegrenzt klein.*

Denn wählt man das Segment $(B'B)$ aus, so kann man im ersten Fall zwei Elemente X_n und X_{n+r} in ihm betrachten, weil bei hinlänglich grossem n ein Element X_n in (B_1B) liegen muss (Def. IV und b, § 95) und mithin auch X_{n+r}. Wenn die Variabele abnimmt und (AB) ihr Grenzsegment ist, so braucht man nur ein Segment (BB') in der Richtung von (AB) zu betrachten.

d. *Ein endliches veränderliches immer wachsendes (oder abnehmendes) Segment (AX) hat in Bezug auf die Masseinheit immer ein und nur ein Segment zur Grenze, welches grösser (oder kleiner) als alle Zustände der Variabelen ist.*

Wenn das Segment unbegrenzt gross wird, so hat es das unendlich grosse Segment erster Ordnung zum Grenzsegment (i, § 85 und Bem. IV, § 86).

Wird das Segment nicht grösser als jedes endliche gegebene Segment, so heisst dies, dass es ein Segment (AB) in der Richtung der Variabelen geben muss, welches grösser als jeder Zustand dieser Variabelen ist. Wenn nun (AB) das erste Segment in der gegebenen Richtung ist, welches diese Eigenschaft in Bezug auf die Einheit besitzt, so ist (AB) das Grenzsegment von (AX); denn damit ist gesagt, dass (XB) unbegrenzt klein werden muss (Def. IV, § 95). Wählt man in der That in dem Segment (AB) ein beliebig kleines endliches Segment $(B'B)$ aus und es enthielte dasselbe keine Elemente X, so wäre das erste Segment, welches grösser als alle Zustände der Variabelen (AX) ist, zum mindesten (AB') und nicht (AB).

Ist (AB) nicht das Grenzsegment von (AX), so gibt es in (AB) andre Segmente (AB'), $(AB'')\ldots$, so dass $(AB) > (AB') > (AB'') > \ldots$ und welche für jedes beliebige n grösser als (AX_n) sind. Diese Segmente kann man als Zustände eines abnehmenden Segments (AX') betrachten, welches grösser als die Zustände von (AX) bleibt (Def. II, § 83) derart, dass jeder Zustand (AY), der grösser als (AX) ist, dem (AX') angehört. Es muss mithin ein Grenzsegment (AY) der beiden veränderlichen Segmente existiren (b', § 96 und b).

In diesem Fall gehört der Zustand (AY) der abnehmenden Reihe an, weil diese aus allen in AB liegenden Segmenten besteht, die grösser als alle Zustände des (AX) sind.

Dieselben Schlüsse gelten, wenn AX abnimmt, ohne dass sich X unbegrenzt dem A nähert. In dem letzteren Fall ist das Grenzsegment in Bezug auf die gegebene Einheit Null (d, § 95).

Bem. III. Da wir voraussetzen, dass der Variabelen entsprechende Reihe eine natürliche begrenzte oder unbegrenzte der ersten Art (Bem. I, § 94) ist, so kann sie in einer gegebenen Richtung nur ein Grenzelement oder Grenzsegment haben. Im Fall von Reihen, die noch andre Grenzen haben, heisst die Grenze des Satzes d nach Weierstrass gewöhnlich *die obere oder untere Grenze.*

d′. *Zwei Reihen von immer wachsenden oder abnehmenden bezüglich gleichen Segmenten bestimmen in Bezug auf die gegebene Einheit gleiche Segmente.*

(AB) und $(A'B')$ seien die durch die beiden Reihen bestimmten Segmente (d). Wäre $(AB) > (A'B')$, so gäbe es in AB ein Segment $AB_1 \equiv A'B'$ (Def. I, II, § 61 und b, § 62). Die erste Reihe müsste daher AB_1 zum Grenzsegment haben, wie die zweite $A'B'$, was widersinnig ist.

d″. *Zwei Variabele (AX) und (AX'), von denen die eine wächst, die andre abnimmt, und die derart sind, dass jedes Segment von A an in der Richtung der Variabelen entweder ein Zustand von AX oder von AX' ist, haben ein gemeinschaftliches und nur ein einziges Grenzsegment.*

Die Variabele (AX) wächst begrenzt oder unbegrenzt (Def. I, § 93). Im ersten Fall ist der letzte Zustand (AC) von (AX) ihr Grenzsegment. Wenn die Veränderliche (AX') begrenzt abnimmt, so muss sie nach der Voraussetzung dasselbe Segment (AC) zum ersten Segment oder Grenzsegment haben. Denn wäre $(AC') > (AC)$, dieses Segment und D ein Punkt in CC', so würde das Segment (AD) keiner der beiden Variabelen angehören.

Wenn dagegen (AX') stets abnimmt, so kommt man wieder auf den Fall des Satzes b. Sie haben alsdann ein gemeinsames Grenzsegment (AY) (b, § 95), welches in diesem Fall (AC) ist.

Aehnlich ist es, wenn (AX) beständig wächst. Es hat dann ein Grenzsegment (AY) (d). Betrachtet man nun auch (AY) als Zustand von (AX'), so kommt man wieder auf den vorigen Fall zurück.

§ 98. *Def. I.* Ein Element A heisst in Bezug auf eine Einheit *Grenzelement* einer Reihe von Elementen $X_1\, X_2 \ldots X_n \ldots$, die in einer gegebenen Richtung in der Grundform geordnet sind, wenn es entweder das erste oder letzte Element der Reihe ist oder wenn die Reihe derart ist, dass in einem endlichen

1 Die Existenz des Grenzsegments zweier convergirender Reihen wird von einigen Schriftstellern mittelst eines Postulats gegeben, wenn auch in verschiedener Form. Siehe z. B. *Stolz* (a. a. O. S. 81), *De Paolis* Elem. di Geometria Post. X und XI, S. 332, 334). Die Definition, die *Stolz* gibt, setzt aber nicht voraus, dass die Variabele endlich sei und ist analog derjenigen, die *Dedekind* benutzt, um mittelst Reihen rationaler Zahlen die gewöhnlichen Irrationalzahlen zu definiren.

willkürlich kleinen Segment (AM), das die zu ihr entgegengesetzte Richtung hat, ein Element der gegebenen Reihe existirt.

a. *Wenn* (AB) *das Grenzsegment eines Segments* (AX_n) *ist, so ist das Element* B *das Grenzelement der durch die Elemente* X_n *gegebenen Reihe.*

Denn ein endliches veränderliches Segment kommt einer gegebenen Reihe von Segmenten gleich (Def. I, II, § 83), so dass das Grenzsegment des veränderlichen Segments das Grenzsegment der Reihe ist. Ist (AB) das Grenzsegment, so fallen in ein willkürlich kleines Segment $(B'B)$ Elemente X_n (Def. IV, § 95) und mithin ist B auch das Grenzelement der Elementenreihe X_n, wenn n unbegrenzt wächst (Def. I).

b. *Eine Gruppe von einer unendlich* (∞) *grossen Anzahl verschiedener Elemente* (X), *die in einem gegebenen Segment* (AB) *enthalten sind, hat immer in Bezug auf die Masseinheit wenigstens ein Grenzelement.*

Wenn A nicht die Grenze der (X) ist, so bedeutet dies, dass es Segmente (AY) von (AB) gibt, die nicht unendlich viele Elemente X enthalten (Def. I). Wenn eines der Elemente Y z. B. Y_1 nicht die Grenze der (X) ist, so gibt es ein Segment $(AY_2) > (AY_1)$, welches nicht unendlich viele Elemente X enthält. Wenn keines der Elemente Y Grenze der (X) ist, so wächst die Reihe (AY) in (AB) stets und hat mithin ein Grenzsegment (AC) (d, § 97). Das Element C ist die Grenze der Gruppe X; denn wäre es dies nicht und gäbe es in einem Segment (CC') in der Richtung von (AB) nicht unendlich viele Elemente X, so wäre (AC') ein Zustand von (AY), was dem Satz d, § 97 widerspricht.

Das Grenzelement kann der Gruppe selbst angehören.

b'. *Eine Reihe von Elementen* (X_n) *auf der Grundform, welche derart ist, dass das Segment* $(X_n X_{n+r})$ *mit wachsendem* n *unbegrenzt klein wird, hat mit Bezug auf die Masseinheit ein einziges Grenzelement.*

Denn die Reihe muss von einem Element X_n an in einer gegebenen Richtung in einem Segment $(X_n B)$ enthalten sein, denn sonst könnte $(X_n X_{n+r})$ nicht unbegrenzt klein werden. In diesem Segment gibt es eine unendlich grosse (∞) Anzahl von Elementen X, gerade weil $(X_n X_{n+r})$ unbegrenzt klein wird. Mithin hat (X_n) ein Grenzelement. Sie kann in diesem Fall nur ein einziges Grenzelement haben, weil n ein einziges Mal unbegrenzt gross wird, das heisst die Reihe (X_n) unbegrenzt von der ersten Art ist (Bem. I, § 97) und mithin $(X_n X_{n+r})$ ein einziges Mal unbegrenzt klein wird.

8.

Zerlegung eines endlichen Segments in n gleiche Theile. — Commutationsgesetz der Summe zweier oder mehrerer consecutiver Segmente. — Das Segment (AB) ist mit demselben Segment, in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen, in Bezug auf die endliche Einheit identisch. — Grenzelemente der durch die successive Theilung eines Segments in n gleiche Theile erhaltenen Elementengruppe. — Andre Eigenschaften der Grenzelemente der Gruppen in Bezug auf eine Einheit.

§ 99. a. *Wenn das Segment $(X_1X'_1)$ oder (X'_1X_1), welches durch zwei Segmente (AX_1), (AX'_1) von derselben Richtung gegeben ist, unbegrenzt klein wird, so wird das durch die beiden Enden der Vielfachen von (AX_1) und (AX'_1) nach der nämlichen Zahl n gegebene Segment ebenfalls unbegrenzt klein. Und umgekehrt.*

Es sei $(AX'_1) > (AX_1)$; man erhält

(1) $$(AX'_1)n > (AX_1)n \qquad \text{(d, § 79)}$$

und bezeichnet man mit X'_n und X_n die zweiten Enden dieser Vielfachen, so ist

$$(AX'_n) > (AX_n),$$

so dass also X_n in das Segment (AX'_n) fällt (Def. I, § 61; c', § 68; b, § 36). Ist ein beliebiges Segment (AC) gegeben, so ist sein Vielfaches nach einer gegebenen Zahl in seiner Richtung von A aus bestimmt und ein einziges (a, § 72 und d', § 79). Auf diese Weise kann man daher einen eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhang zwischen den Elementen X_1 und den Elementen X_n feststellen, weil jedem Element X_1 mit A beginnend, ein einziges Element X_n entspricht und umgekehrt einem dieser Elemente nur ein einziges Element X_1 entsprechen kann. Entspräche ihm ein andres z. B. X'_1, so hätte man $(AX'_1)n \equiv (AX_1)n \equiv (AX_n)$, woraus man $(AX'_1) \equiv (AX_1)$ erhält (d', § 79), folglich fällt X'_1 mit X_1 zusammen (b', § 69) Der Zusammenhang findet auch in derselben Ordnung statt; denn wenn $(AX'_1) < (AX_1) < (AX''_1)$, so folgt aus (1): $(AX'_n) < (AX_n) < (AX''_n)$ (d, § 79), das heisst, wenn X_1 zwischen X'_1 und X''_1 liegt, so liegt X_n zwischen den entsprechenden Elementen X'_n, X''_n (Def. I, § 61). Wenn mithin (AX_1) ein Zustand der Variabelen (AX) ist und wenn $(X_1X'_1)$ abnimmt, so nimmt auch $(X_nX'_n)$ wegen des eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhangs ab (Def. I, § 61) und wenn $(X_1X'_1)$ unbegrenzt klein wird, so hat $(X_nX'_n)$ ein Grenzsegment (X_nY), vorausgesetzt, dass X_1 und mithin auch X_n constant ist (d, § 97).

Wir beweisen, dass Y mit X_n zusammenfällt.

Nehmen wir zuerst $n = 2$ an und es sei $(AX'_1) > (AX_1)$.

Es sei ferner

(2) $$(X'_1X''_2) \equiv (AX_1) \equiv (X_1X_2),\ (AX'_1) \equiv (X'_1X'_2) \qquad \text{(b, § 69)}$$

und da

$$(AX_2) \equiv (AX_1) + (X_1X_2),\ (AX''_2) \equiv (AX'_1) + (X'_1X''_2),$$
$$(AX'_2) \equiv (AX'_1) + (X'_1X'_2), \qquad \text{(Def. I, § 72)}$$

so erhält man

$$(AX_2) < (AX''_2) < (AX'_2), \qquad (3)$$

weil

$(AX_1) < (AX'_1)$ und $(X'_1X''_2) < (X'_1X'_2)$ (Def. I und II, § 61; f, g, § 73).

Auf diese Weise setzt man einen eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhang zwischen den Elementen X'_1 und X''_2 und mithin auch zwischen den Elementen X''_2 und X'_2 fest (f, § 42). In der That, wie jedem Element X'_1 in der Richtung von (AB) ein einziges Element X''_2 entspricht (b', § 69), so kann jedem Element X''_2 nur das Element X'_1 allein entsprechen, weil es nur ein mit dem Segment (AX_1) in der gegebenen Richtung identisches Segment $(X'_1X''_2)$ gibt, dessen zweites Ende X''_2 ist (b', § 69). Wenn ein Element dem X'_1 vorausgeht, so muss das entsprechende Element dem X''_2 vorausgehen, da das Segment zweier beliebigen entsprechenden Elemente dem (AX_1) gleich ist (Def. I, b', § 61), der Zusammenhang ist also auch von derselben Ordnung (Def. III, § 42).

A X₁ X₂ X'₁ L X''₂ X'₂

Fig. 5.

Wenn nun $(X_1X'_1)$ unbegrenzt klein wird, so wird auch $(X_2X''_2)$ unbegrenzt klein. Denn sonst gäbe es ein Segment (X_2L), welches kleiner als $(X_2X''_2)$ wäre und Elemente X''_2 enthielte (Def. IV und I, § 95). Wählt man daher zwischen X_2 und L ein Element Z aus (a, § 95) und betrachtet das Segment $(WZ) \equiv (X_1X_2)$ in derselben Richtung (b', § 69), so könnte das Element W alsdann nicht in (X_1X_2) liegen, für dessen Punkte die entsprechenden Elemente X''_2 ausserhalb des Segments (X_2L) fallen. Das Segment (X_1X_2) wäre also ein Theil des Segments (WZ), was widersinnig ist (d, § 73). L muss folglich mit X_2 zusammenfallen.

Nun ist

$(AX_1) + (X_1X'_1) \equiv (AX'_1)$, $(X'_1X''_2) + (X''_2X'_2) \equiv (X'_1X'_2)$ (Def. I, § 72)

und nach (2)

$$(X_1X'_1) \equiv (X''_2X'_2). \qquad (g^{III}, § 73)$$

Wenn mithin $(X_1X'_1)$ unbegrenzt klein wird, so ist dies auch mit $(X''_2X'_2)$ der Fall (Def. I, § 95); wie wir gesehen haben, wird aber auch das Segment $(X_2X''_2)$ unbegrenzt klein, folglich auch $(X_2X'_2)$ (h, § 95), was zu beweisen war.

Wäre $(AX'_1) < (AX_1)$, so hätte man

$$(AX_2) > (AX''_2) > (AX'_2) \qquad \text{(d, § 79 und f, § 73)}$$

A W X₁ L X₂ X'₁ X'₂ X''₂ Z

Fig. 6.

und wenn es ein von X_2 verschiedenes Element L als Grenze der X''_2 gäbe, so hätte das Segment $(WZ) \equiv (X_1X_2)$ das Element W, welches von X_1 verschieden ist, in dem Segment AX_1 liegen (d, § 73; Def. I, § 61), während für jedes in (WX_1) enthaltene Element X'_1 das entsprechende Element X''_2 der Voraus-

setzung zuwider in (LX_2) gelegen wäre (g, § 73 und Def. I, § 61); L muss daher mit X_2 zusammenfallen. Man hat in diesem Fall:

$$(AX_1) - (X'_1X_1) \equiv (AX'_1),\ (X'_1X''_2) - (X'_2X''_2) \equiv (X'_1X'_2),$$

woraus

$$(X'_1X_1) \equiv (X'_2X''_2). \qquad \text{(Def. I, § 74; } g^{III}\text{, § 73)}$$

Folglich wird $(X'_2X''_2)$ mit (X'_1X_1) unbegrenzt klein, dies ist aber auch mit (X''_2X_2) der Fall und mithin auch mit (X'_2X_2) (h, § 95).

Damit ist der Satz für $n = 2$ bewiesen.

Wir nehmen nun an, dass, wenn X'_1 sich unbegrenzt dem X_1 nähert, sich X'_{n-1} unbegrenzt dem X_{n-1} nähere (Def. I, § 95) und beweisen, dass dies dann auch für die Elemente X_n und X'_n gilt.

X_{n-2} X_{n-1} X_n
X'_{n-2} X'_{n-1} X''_n X'_n
Fig. 7.

Gegeben ist $(AX_1) \equiv (X_{n-2}X_{n-1}) \equiv (X_{n-1}X_n)$ und

$$(AX'_1) \equiv (X'_{n-2}X'_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X'_n).$$

Wenn $(AX_1) < (AX'_1)$, so ist:

$$(4) \qquad (X_{n-2}X_{n-1}) < (X'_{n-1}X'_n).$$

Es sei:

$$(5) \qquad (X'_{n-1}X''_n) \equiv (X_{n-1}X_n).$$

Nach (4) fällt X''_n in das Segment $(X'_{n-1}X'_n)$ (Def. I, § 61; c', § 68; b, § 36) und da $(AX'_{n-1}) > (AX_{n-1})$ (d, § 79), so liegt aus demselben Grund X'_{n-1} zwischen X_{n-1} und X'_n und mithin liegt nach (5) und (4) X''_n zwischen X_n und X'_n. Man beweist, wie für $n = 2$, dass, wenn sich X_{n-1} unbegrenzt dem X'_{n-1} nähert, sich X''_n unbegrenzt dem X_n nähert.

Man hat überdies:

$$(X_{n-2}X_{n-1}) + (X_{n-1}X'_{n-1}) \equiv (X_{n-2}X'_{n-1})$$
$$(X'_{n-1}X''_n) + (X''_nX'_n) \equiv (X'_{n-1}X'_n).$$

Da aber $\qquad (AX'_{n-2}) > (AX_{n-2}) \qquad$ (d, § 79) und
$\qquad (AX'_{n-1}) > (AX'_{n-2}) \qquad$ (f, § 73), so ist:

$(X_{n-2}X'_{n-1}) > (X'_{n-2}X'_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X'_n)$ (c', § 68; b, § 36 und Def. I, § 61).

Folglich ist:

$$(X_{n-1}X'_{n-1}) > (X''_nX'_n). \qquad \text{[(5) und f, § 73]}$$

Wenn $(X_{n-1}X'_{n-1})$ unbegrenzt abnimmt, so nimmt um so mehr $(X''_nX'_n)$ unbegrenzt ab (Def. I, § 95; d', § 61) und also auch $(X_nX'_n)$ (h, § 95).[1])

X_{n-1} X_n
X'_{n-1} X'_n X''_n
Fig. 8.

Ist $(AX'_1) < (AX_1)$, so ist $(AX'_{n-1}) < (AX_{n-1})$. Man kann sich X'_{n-1} dem X_{n-1} soweit nähern lassen, dass X''_n zwischen X_{n-1} X_n fällt, zu diesem Zweck muss nur $(X'_{n-1}X_{n-1}) < (X_{n-1}X_n)$ sein (b', § 69). Weil $(X'_{n-1}X_n) > (X'_{n-1}X''_n)$ (Def. I, § 61) und nach der Construction $(X'_{n-1}X_n) < (X'_{n-1}X''_n)$, so liegt das Element X''_n zwischen X'_n und X_n (c', § 68; b, § 36 und Def. I, § 61).

Es ist nun

1) Der Beweis ist unabhängig davon, dass X'_{n-2} in dem Segment $(X_{n-2}X_{n-1})$ enthalten ist.

$$(X_{n-2}X_{n-1}) - (X'_{n-1}X_{n-1}) \equiv (X_{n-2}X'_{n-1}),$$
$$(X'_{n-1}X''_n) - (X'_n X''_n) \equiv (X'_{n-1}X'_n)$$

und das Element X'_{n-1} liegt zwischen X_{n-2} und X_{n-1}, da $(X_{n-2}X_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X''_n)$ ist (d, § 73). Wie früher beweist man nun, dass X''_n zum Grenzelement X_n hat, wenn X'_{n-1} zum Grenzelement X_{n-1} hat (Def. I, § 98). Es ist aber

$$(X_{n-2}X'_{n-1}) < (X'_{n-2}X'_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X'_n) < (X'_{n-1}X''_n),$$

weil $(AX_{n-2}) > (AX'_{n-2})$ gegeben ist (d, § 79) und $(X_{n-2}X_{n-1}) \equiv (X'_{n-1}X''_n)$. Folglich ist

$$(X'_{n-1}X_{n-1}) > (X'_n X''_n) \qquad \text{(Def. I, § 74; g}^{\text{V}}\text{; § 73)}$$

und mithin wird $(X'_n X''_n)$ mit $(X'_{n-1}X_{n-1})$ unbegrenzt klein (Def. I, § 95 und d', § 61) und folglich auch $(X'_n X_n)$ (h, § 95).

Wenn der Satz also für $n-1$ gilt, so gilt er für n, er gilt aber für $n=2$ und also auch für jedes beliebige n (c', § 46; l, § 39).

Nimmt man schliesslich an, X_1 sowohl als X'_1 seien in entgegengesetzter Richtung oder in derselben Richtung derart variabel, dass $(X_1X'_1)$ oder (X'_1X_1) unbegrenzt klein wird, so bestimmt $(X_1X'_1)$ oder (X'_1X_1) ein Grenzelement Y_1 (b, § 96 oder d, § 97). Wenn aber $(X_1X'_1)$ oder (X'_1X_1) unbegrenzt abnimmt, so werden auch im ersten Fall (X_1Y_1) und $(Y_1X'_1)$ oder (X'_1Y_1) und (Y_1X_1) im zweiten Fall (X'_1Y_1) und (X_1Y_1) oder $(Y_1X'_1)$ und (Y_1X_1) unbegrenzt klein und umgekehrt (Def. I, und h, § 95). Nach den obigen Beweisen werden mithin im ersten Fall (X_nY_n), $(Y_nX'_n)$ oder (X'_nY_n), (Y_nX_n) und im zweiten (X'_nY_n), (X_nY_n) oder $(Y_nX'_n)$, (Y_nX_n) unbegrenzt klein, wenn dies mit $(X_1X'_1)$ oder (X'_1X_1) der Fall ist. Mithin wird auch $(X_nX'_n)$ oder (X'_nX_n) unbegrenzt klein (h, i, § 95).

Der erste Theil des Satzes ist damit bewiesen.

Wenn umgekehrt $(X_nX'_n)$ oder (X'_nX_n) ein Grenzelement Y_n hat, so hat das Segment (AX) ein Grenzsegment (AY) (d', § 79 und d, § 97) und nach dem ersten Theil des Satzes muss $(AY)n \equiv (AY_n)$.[1]

b. *Jedes endliche Segment lässt sich auf eine einzige Art in eine beliebige endliche Anzahl n consecutiver gleicher Theile derselben Richtung in Bezug auf die Masseinheit theilen.*

(AB) sei das gegebene Segment. Es gibt Segmente, $(AX^{(1)})$ deren Vielfache nach n kleiner als (AB) sind (a', § 95). Es sei also

$$(AX_1^{(1)})n \equiv (AX_n^{(1)}) < (AB).$$

Wenn nun in jedem in $(X_n^{(1)}B)$ enthaltenen Segment $(B'B)$ nicht andre Elemente X_n vorkommen, so würde, da es Elemente X'_1 gibt derart dass $(AX'_n) > (AB)$ (a', § 95), dem vorigen Satz zuwider $(X_n^{(1)}X'_n)$ zugleich mit $(X_1^{(1)}X_1')$ nicht unbegrenzt klein werden, während X_1' zwischen $X_1^{(1)}$ und B liegt (d', § 79). Die Variabele $(AX_n^{(1)})$ hat mithin (AB) (Def. IV, § 95) und

1) Der Beweis ist lang, dafür aber einfach und anschaulich. Die obige Eigenschaft liegt den folgenden Sätzen, welche ebenfalls Grundeigenschaften des Continuums geben, zu Grunde.

die Variabele $(AX^{(1)})$ das Segment (AY) (d', § 79 und d, § 97) zur Grenze, so, dass $(AY)n \equiv (AB)$ (a; d, § 97).[1]

b'. *Wenn die Grundform geschlossen ist, so kann man sie in n gleiche Theile theilen.*

Man braucht nur in b anzunehmen, die Enden des Segments fielen in Bezug auf die Einheit zusammen (Def. III, § 57 und Def. II, § 85).

b''. *Ist ein endliches Segment (AB) gegeben, so gibt es immer ein Segment* $(AB)\frac{1}{n}$.

Es ist dies nur eine andre Fassung des Satzes b (Bez. I, § 79).

Def. I. Das Element welches ein gegebenes Segment in zwei gleiche Theile zerlegt, heisst das *Mittelelement* dieses Segments.

c. *Die Hypothese VI ist unabhängig von den früheren Hypothesen.*

Dies geht aus dem Satz b hervor. Denn die Segmente eines Segments, die man durch Halbiren erhält, genügen den früheren Hypothesen, auch wenn man annimmt, die unendlich kleinen Gebiete in der Umgebung ihrer Enden seien gegeben (Bem. I, § 96).

Ein jedes dieser Segmente kann man durch das Symbol $(AA_1)\frac{m}{2^n}$ ausdrücken, in welchem m und n gegebene Zahlen der Reihe (I) sind (§ 46). Ist nun eine Zahl r gegeben, so kann man das Segment (AA_1) in r gleiche Theile zerlegen und ist das zweite Ende des Segments $(AA_1)\frac{1}{r}$ eines der Halbirungselemente, so muss $(AA_1)\frac{1}{r} \equiv (AA_1)\frac{m}{2^n}$ oder, wenn man das Vielfache nach 2^n nimmt, $(AA_1)\frac{2^n}{r} \equiv (AA_1)m$ sein. Damit aber eine Zahl m existiren kann, die dieser Bedingung genügt, muss r die Zahl 2^n ohne Rest theilen, was im Allgemeinen nicht der Fall ist, weil 2^n nur durch 2 und die Potenzen von 2, deren Exponent nicht grösser als n ist, ohne Rest theilbar ist. 2^n ist durch 3 z. B. nicht theilbar, n mag jede beliebige Zahl sein.

d. *Wenn (AA') der n^{te} und (AA'') der n'^{te} Theil eines beliebigen Segments (AB) ist $(n' > n)$, so ist (AA'') kleiner als (AA') und wenn n unbegrenzt wächst, so wird (AA') unbegrenzt klein.*

Wäre $(AA') \equiv (AA'')$, so würde, weil $(AA')n \equiv (AA'')n' \equiv (AB)$ gegeben ist, auch $(AA')n' \equiv (AB)$ (d, § 79) sein und mithin $n = n'$. Wäre dagegen $(AA') < (AA'')$, so wäre auch $(AA')n < (AA'')n$ (d, § 79), gegeben ist aber $(AA'')n' \equiv (AA')n \equiv (AB)$, es wäre also $(AA'')n' < (AA'')n$, während auf der andern Seite $(AA'')n' > (AA'')n$ sein muss, weil $n' > n$ ist (d, § 79). $(AA') \leqq (AA'')$ ist mithin widersinnig. Die Folge ist, dass, wenn n wächst, (AA') abnimmt.

---

1) Der von *Stolz* gegebene Beweis dieses Satzes (a. a. O. S. 83) hat zwar den Satz a nicht nöthig, setzt jedoch das Commutationsgesetz für zwei beliebige Grössen des Systems voraus, welches wir dagegen beweisen werden. Auch *De Paolis* (Teoria dei gruppi geometrici. Mem. della R. Accademia di Napoli. 1890. S. 15—16) macht diese Voraussetzung, obwohl sein Beweis, weil er unvollständig ist, zu dem Glauben bringen kann, der Satz a und auch das Commutationsgesetz seien nicht erforderlich.

Ist ein willkürlich kleines endliches Segment (AE) gegeben, so hat man:

$$(AE)m < (AA') \leqq (AE)(m+1). \quad \text{(Def. II, § 82; c', § 81)}$$

Theilt man daher (AA') in $m+1$ gleiche Theile, so ist $(AA')\frac{1}{m+1} < (AE)$ (a, d', § 79) und $(AA')\frac{1}{m+1} \equiv \frac{(AB)}{n(m+1)}$ (c und a, § 79). Damit ist der Satz bewiesen.

Bem. I. Wir bemerken, dass dieser Satz von der Hypothese VI unabhängig ist, sobald man annimmt, die Theilung eines *jeden* begrenzten Segments in eine *beliebige* Anzahl n gleicher Theile sei möglich, eine Hypothese, die, wie man sieht, verwickelter ist als diejenige über die Grenze. [1])

d' *Wenn man ein beliebiges Segment (AB) in n gleiche Theile $(n > 1)$ zerlegt und diese wieder in n gleiche Theile u. s. w., so werden dieselben unbegrenzt klein.*

Denn man erhält die Theile $\frac{(AB)}{n}, \frac{(AB)}{n^2}, \cdots, \frac{(AB)}{n^r}, \cdots$ und mit unbegrenzt wachsendem r, wird n^r grösser als jede gegebene Zahl m, folglich u. s. w. (d).[2])

e. *Wenn man ein Segment (BC) zu einem Segment (AB) von B aus in Bezug auf die Masseinheit addirt, so erhält man dasselbe Resultat, wie wenn man zu dem Segment (BC) von C aus ein mit (AB) identisches Segment addirt, welches dieselbe Richtung wie (AB) hat. Das Resultat ist von dem Element unabhängig, von welchem an man mit der Operation beginnt.*

Das heisst, wir schreiben

$$(AB) + (BC) \equiv (AC), \; (BC) + (AB) \equiv (AC)$$

und meinen damit bei der zweiten Gleichung, dass von C aus in derselben Richtung wie (AB) ein mit (AB) identisches Segment durchlaufen wird.

Wir nehmen zuerst an, (AB) und (BC) hätten dieselbe Richtung.

1) Wenn (BC) in Bezug auf (AB) unendlich klein ist, so erhält man mit Bezug auf (AB) als Einheit:

$$(AB) + (BC) \equiv (AB) + 0 \equiv (AB)$$
$$(BC) + (AB) \equiv 0 + (AB) \equiv (AB). \quad \text{(g, § 85; Def. I, § 76)}$$

In diesem Fall ist der Satz in Bezug auf die Einheit bewiesen.

2) Nehmen wir an, (AB) und (BC) seien beide endlich. Sind sie Vielfache desselben Segments (AA') nach den Zahlen m und n und zerlegt man (AB) und (BC) in ihre m bezüglich n (AA') gleiche Theile, so können wir davon zuerst n und dann nach dem Commutationsgesetz der Summe der Zahlen der Reihe (I) (§ 46) die übrig bleibenden m betrachten, ohne dass das Resultat (AC) sich ändere (Bem. I, II, § 80). Aber n und m consecutive (AA')

---

1) Das System der Rationalzahlen genügt z. B. dieser Bedingung ohne ein relatives Continuum zu sein.

2) Die Sätze über die Zahlen der Reihe (I) (§ 46), die wir bei dem Beweis von c und d' benutzten, lassen sich mittelst der in Kap. III bereits gegebenen Sätze leicht beweisen.

gleiche Theile ergeben bezüglich zwei mit (BC) und (AB) identische Segmente (Def. I und II, d, § 79). Mithin ist auch in diesem Fall der Satz bewiesen.

3) Es erübrigt der Fall, in welchem (AB) und (BC) nicht Vielfache desselben Segments sind, jedoch dieselbe Richtung haben.

$Y'\ C'_1\ C'\ X'\ B'\quad A\quad B\ X\ C\ Y$

Fig 9.

Betrachten wir von A an in der zu (AB) und daher auch zu (BC) entgegengesetzten Richtung die Segmente:

$$(1)\qquad (B'A) \equiv (AB),\ (C'B') \equiv (BC). \qquad (b', § 69)$$

Das Element B' ist nach der Construction in $(C'A) \equiv (C'B') + (B'A)$ (Def. I, § 72) enthalten. Man zerlege (AB) in n gleiche Theile (b) und (AA') sei einer derselben, welcher für ein hinreichend grosses n kleiner als (BC) sein wird (d). Es muss dann eine derartige Zahl $m > n$ geben, dass

$$(2)\qquad (AA')\,m < (AC) < (AA')\,(m+1). \qquad (\text{Def. II, § 82; c', § 81})$$

Das Element C ist mithin in dem $(m+1)^{\text{ten}}$ Theil enthalten, den wir mit (XY) bezeichnen und X liegt in (BC), weil nach der Construction $(AX) > (AB)$ ist. Man betrachte

$$(3)\qquad (Y'A) \equiv (AY),\ (X'A) \equiv (AX).$$

Das Element X liegt in dem Segment (AY) und mithin X' in dem Segment $(Y'A)$, weil $(AX) < (AY)$ und daher auch $(X'A) < (Y'A)$ ist. Nach dem zweiten in Betracht gezogenen Fall ist auch:

$$(4)\qquad (Y'B') \equiv (BY),\ (X'B') \equiv (BX).$$

(BY) ist nun grösser als (BC) und mithin auch $(Y'B')$ grösser als $(C'B')$ [(1)]. Aus demselben Grund ist $(X'B')$ kleiner als $(C'B')$; das Element C' liegt desshalb in dem Segment $(Y'X')$. Es ist

$$(5)\qquad (Y'X') \equiv (XY),$$

weil nach Fall 2):

$$(Y'X') + (X'A) \equiv (Y'A) \equiv (X'A) + (Y'X') \text{ und}$$
$$(AX) + (XY) \equiv (AY). \qquad [(3);\ g^{\text{III}}, § 73)]$$

Wenn C'_1 ein solches Element ist, dass

$$(6)\qquad (AC) \equiv (C'_1A),$$

so muss, da (AC) grösser als (AX) und kleiner als (AY) ist [(2)], auch (C'_1A) grösser als $(X'A)$ und kleiner als $(Y'A)$ sein [(6); (3); e, § 61], C'_1 liegt daher auch in dem Segment $(Y'X')$.

Wenn die Zahl n unbegrenzt wächst, so nimmt (XY) und mithin auch $(Y'X')$ unbegrenzt ab (d). Weil $(Y'X')$ unbegrenzt klein wird und C', C'_1 stets in diesem Segment enthalten sind, so müssen sie zusammenfallen (d, f, § 95). Es muss also:

$$(C'B') + (B'A) \equiv (C'A) \equiv (AC)$$

das heisst $(BC) + (AB) \equiv (AC)$ in dem oben angegebenen Sinn sein.

4) Nehmen wir nun an, (AB) und (BC) hätten entgegengesetzte Richtung,

betrachten aber in dem Resultat die beiden Segmente stets in derselben Richtung des Systems z. B. in der durch (AB) gegebenen. Der Satz sagt, dass wenn man von A an zuerst das Segment $(B'A) \equiv (CB)$ in der Richtung von (CB) und dann von B' aus das Segment $(B'A') \equiv (AB)$ in der Richtung von (AB) betrachtet, dass dann

$$(AA') \equiv (AC).$$

B' A C B
Fig. 10.

Ist $(CB) < (AB)$, so haben $(B'A)$, (AC), (AB) dieselbe Richtung (Def. III, § 67) und nach dem vorigen Beweis ist:

$$(B'C) \equiv (AB) \equiv (B'A'). \qquad \text{(c, § 68 und b, § 78)}$$

Geht man nun in der einen und in der andern Richtung von B' aus, so gibt es nur ein einziges mit einem gegebenen Segment identisches Segment (b', § 69); es fällt mithin das Element A' mit dem Element C zusammen, oder

$$(AA') \equiv (AC).$$

C A A' B
Fig. 11.

Ist dagegen $(CB) > (AB)$, so haben (CA) und (AB) dieselbe Richtung. Betrachtet man daher ein Segment (CA') in der Richtung von (CA), das mit (AB) identisch ist, so hat man nach Fall 3)

$$(CA) \equiv (A'B)$$

oder

$$(AB) + (BC) \equiv (BC) + (AB).$$

5) Der Satz hat auch Geltung, wenn man die Operation von einem beliebigen Element aus in einer beliebigen Richtung ausführt (a, § 78), womit das Theorem vollständig bewiesen ist.

e'. *Wenn ein Segment (AB) und eine Zahl m gegeben ist, so gibt es immer ein solches Segment (AC), dass*

$$(AC)\,m < (AB) < (AC)\,(m+1).$$

Wir setzen $m = n - 1$ und theilen (AB) in n gleiche Theile. Der letzte Theil sei $(B'B)$ und der erste (AA'). Wir wählen in $(B'B)$ ein Element C' und theilen $(B'C')$ in $n-1$ gleiche Theile; einer dieser Theile sei $(B'C'')$. Es möge $(A'C) \equiv (B'C'')$ sein, das Segment (AC) erfüllt die Bedingung des Satzes. Denn es ist

$$[(AA') + (A'C)]\,m \equiv \overset{1}{(AA')} + \overset{1}{(A'C)} + \cdots + \overset{m}{(AA')} + \overset{m}{(A'C)} \equiv$$
$$\equiv (AA')\,m + (A'C)\,m; \qquad \text{(e)}$$

nach der Construction ist aber:

$$(AA')\,m + (A'C)\,m < (AB),$$

mithin

$$[(AA') + (A'C)]\,m < (AB).$$

Dagegen ist, wenn

$$(AA')\,n \equiv (AB),$$
$$[(AA') + (A'C)]\,n \equiv (AA')\,n + (A'C)\,n > (AB). \qquad \text{(f, § 73)}$$

Bem. II. Der Satz e gilt nicht nur für das in der Position seiner Theile identische System (Def. I, § 70), sondern auch für das homogene System allein (Def. I, § 68).

Es ist ferner wichtig zu beachten, dass der Beweis des Satzes in allen Fällen und besonders im dritten unabhängig von der Hypothese VI über die Stetigkeit ist, so dass

er auch für alle homogenen discreten Systeme gilt (Def. I, § 96). Denn im dritten Fall enthält die Variabele $X'Y'$ bereits die constanten Elemente C', C'_1 und hat daher in Bezug auf die gegebene Einheit diese zusammenfallenden Elemente zur Grenze (g, § 95). Man muss jedoch in diesem Fall die Theilbarkeit eines jeden endlichen Segments in n gleiche Theile, auf welche sich der Beweis des Satzes stützt, voraussetzen. Diese Eigenschaft der Theilbarkeit schliesst noch nicht diejenige der Continuität in sich, wird aber mit Hülfe der letzteren bewiesen (b).

f. *Das Segment, welches Vielfaches nach einer Zahl m des n^{ten} Theils (AC) eines Segments (AB) ist, ist Factor nach der Zahl n eines Segments, welches Vielfaches von (AB) nach der Zahl m ist.*

Es ist also:

$$(1) \qquad (AC) \equiv \frac{AB}{n} \qquad \text{(Bez. I, § 79)}$$

und es sei:

$$(AD) \equiv (AC)\,m,$$

daher:

$$(AD) \equiv \frac{AB}{n}\,m. \qquad \text{(b, § 9)}$$

Es sei ferner:

$$(2) \qquad \frac{AB\ m}{n} \equiv (AD').$$

Wir wollen beweisen, dass

$$(AD) \equiv (AD').$$

Aus (1) folgt

$$(AC)\,n \equiv (AB) \qquad \text{(Def. II, § 79)}$$

und durch Substitution in (2)

$$\frac{(AC)\,n \cdot m}{n} \equiv (AD')$$

oder

$$\equiv \frac{(AC)\,m \cdot n}{n} \equiv (AC)\,m,$$

weil $(AC)\,m \cdot n$ das Vielfache von $(AC)\,m$ nach der Zahl n und mithin $(AC)\,m$ der Factor von $(AC)\,m \cdot n$ nach der Zahl n ist (Def. I, II, § 79).

Es ist aber $\qquad (AC)\,m \equiv (AD)$, mithin

$$(AD) \equiv (AD').$$

f'. $(AB)\frac{m}{n} \equiv \frac{AB \cdot m}{n}$.

Denn $(AB)\frac{m}{n} \equiv \frac{(AB)}{n}\,m$ (b, § 79) und mithin folgt aus Satz f die Relation f'.

g. *Ein beliebiges endliches Segment (AB) ist in Bezug auf die Masseinheit demselben Segment (BA) in entgegengesetzter Richtung durchlaufen gleich.*

Das heisst $\qquad (AB) \equiv (BA)$.

Wir beweisen zuerst, dass, wenn $(AB) \equiv (AB')$,

$$(BB') \equiv (B'B).$$

Fig. 12.

Die Segmente (AB) und (AB') haben entgegengesetzte Richtung, sonst würde B mit B' zusammenfallen (b', § 69); mithin sind $(B'A)$ und (AB) gleich gerichtet; man weiss aber nicht, ob (AB) mit $(B'A)$ identisch ist.

Man hat also:

$$(B'A) + (AB) \equiv (B'B) \qquad \text{(Def. I, § 72)}$$

aber:

$$(B'A) \equiv (BA),$$

weil

$$(AB) \equiv (AB') \text{ gegeben ist.} \qquad \text{(a, § 69)} \quad (1)$$

Ferner ist:

$$(BA) + (AB') \equiv (BB') \equiv (B'A) + (AB). \qquad \text{(a, § 78)}$$

Daher:

$$(BB') \equiv (B'B). \qquad (2)$$

(AB_1) liege nun in derselben Richtung wie (AB), und sei mit (BA) identisch. Es gibt dann in dem System in der zu (AB) entgegengesetzten Richtung von A an ein Segment

$$(AB'_1) \equiv (AB_1), \qquad \text{(a', § 70)} \quad (3)$$

woraus

$$(B_1A) \equiv (B'_1A). \qquad \text{(a, § 69)}$$

Aus (2) folgt weiter:

$$(B_1B'_1) \equiv (B'_1B_1) \qquad (4)$$

und nach der Voraussetzung ist

$$(BA) \equiv (AB_1). \qquad (5)$$

Da nach (1), (5), (3)

$$(B'A) \equiv (AB_1) \equiv (AB'_1), \qquad \text{(e, § 8 od. c, § 60)} \quad (6)$$

so folgt

$$(AB') \equiv (B_1A) \equiv (B'_1A). \qquad \text{(a, § 69)} \quad (6')$$

Es ist nun

$$(BA) + (AB') \equiv (BB') \equiv (AB') + (B'A), \qquad \text{[(5), (6') a, § 78]}$$

wenn man die beiden letzten Segmente als consecutive Segmente betrachtet. Aber

$$(AB_1) + (B'_1A) \equiv (B'_1A) + (AB_1) \equiv (B'_1B_1) \qquad \text{(e)}$$

das heisst

$$(BB') \equiv (B'_1B_1) \equiv (B_1B'_1). \qquad \text{(e, § 8 od. c, § 60)} \quad (7)$$

Wenn B_1 nicht mit B und mithin B'_1 nicht mit B' zusammenfiele, so wäre das Segment $(B_1B'_1)$ ein Theil von (BB') oder das letztere ein Theil des ersten und es wäre (BB') entweder $>$ oder $<$ als $(B_1B'_1)$ (d, § 73], was widersinnig ist (b', § 61). Folglich fällt B_1 mit B zusammen, d. h.

$$(AB) \equiv (BA).[1]$$

---

1) In den Lehrbüchern der Elementargeometrie und auch in vielen Abhandlungen über die Fundamente der Geometrie wird diese Eigenschaft als Axiom oder Postulat aufgestellt ebenso wie die Eigenschaften, die in unsrer Definition des in der Position seiner Theile identischen Systems enthalten sind (Def. I, § 70; Def. I, § 68), als Axiome unter verschiedener Form (und unter Benutzung des Satzes von der Bewegung der Gestalten ohne Deformation) gegeben werden. Der Satz b folgt aus der Definition I, § 68 des homogenen Systems in Verbindung mit der Theilung eines jeden Segments in n gleiche Theile im ersten Fall (Bem. I), während g aus der Def. I, § 70 des in der Position seiner Theile identischen Systems folgt. In den Elementen der Geometrie von *De Paolis* z. B. wird die Eigenschaft $(AB) \equiv (BA)$ aus den Postulaten II, Theil III, IV, X, XI abgeleitet, von denen das letzte die Continuität in dem Sinn des Satzes b', § 95 feststellt. Die übrigen Axiome, die für die Gerade allein gegeben werden, lassen sich mit Hülfe der Bem. I, § 81 vereinfachen.

Bem. II. Wir benutzen den Beweis des Satzes c und die dem Princip der Stetigkeit (Hyp. VI) vorhergehenden Sätze. Da aber der Satz e, wie bemerkt, von diesem Princip nicht abhängt, so ist auch Satz g von ihm unabhängig.

h. *Theilt man ein Segment (AB) in n gleiche Theile und die resultirenden Theile in n gleiche Theile und so weiter, so erhält man eine Gruppe von Elementen des gegebenen Segments die Enden einbegriffen, deren übrige Elemente Grenzelemente der gegebenen Gruppe in Bezug auf die Masseinheit sind.*

Man braucht den Beweis nur für $n = 2$ zu liefern, da das Verfahren für jedes beliebige endliche n dasselbe ist.

Das Segment (AB) sei gegeben und N_1 sei sein Mittelelement (Def. I). N_2 sei das Mittelelement des Segments (N_1B), N_3 dasjenige von (N_2B) und so fort. Man erhält:

$$\begin{aligned}
(N_1B) &\equiv (AB)\frac{1}{2}\\
(N_2B) &\equiv (N_1B)\frac{1}{2} \equiv (AB)\frac{1}{2^2}\\
(N_3B) &\equiv (N_1B)\frac{1}{2^2} \equiv (AB)\frac{1}{2^3}\\
&\vdots\\
(N_rB) &\equiv (N_{r-1}B)\frac{1}{2} \equiv \cdots \equiv (AB)\frac{1}{2^r}. \qquad (c', \S\ 79)
\end{aligned}$$

Bei unbegrenzt wachsendem r wird (N_rB), da jedes Segment (N_rB) ein Mittelelement hat, unbegrenzt klein (d'). B ist mithin das Grenzelement der Elemente N_r. Ebenso zeigt man, dass A das Grenzelement einer analogen Gruppe von Elementen N ist.

Es sei nun M ein beliebiges Element des Segments (AB), welches kein Mittelelement eines der durch die Halbirung erhaltenen Segmente ist. Es liegt entweder in dem Segment (AN_1) oder (N_1B). Nehmen wir an, es befinde sich im ersten und N_2 sei das Mittelelement von (AN_1); M ist dann entweder in dem Segment (AN_2) oder in (N_2N_1) enthalten. Ist es in (N_2N_1) mit dem Mittelelement N_3 gelegen, dann liegt es entweder in (N_2N_3) oder in (N_3N_1). Offenbar ist:

$$\begin{aligned}
(AN_1) &\equiv (AB)\frac{1}{2}\\
(AN_2) &\equiv (N_1N_2) \equiv (AN_1)\frac{1}{2} \equiv (AB)\frac{1}{2^2}\\
(N_3N_1) &\equiv (N_2N_3) \equiv (N_2N_1)\frac{1}{2} \equiv (AB)\frac{1}{2^3}.
\end{aligned}$$

Führt man so fort, so wird sich das Element M zwischen zwei Mittelelementen N_r und N_s derart befinden, dass

$$(N_rN_s) \equiv (AB)\frac{1}{2^n},$$

welches mit wachsendem n unbegrenzt klein wird (d') und mithin das gegebene Element M zum Grenzelement hat (g, § 95).

Damit ist der Satz bewiesen.

h'. *Die Theile (AX) eines als Einheit betrachteten Segments (AB), dessen Elemente X Elemente der successiven Halbirung von (AB) sind, können durch das Symbol*

$$(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}\right)$$

dargestellt werden, worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Null oder 1 gleich, aber nicht sämmtlich Null sind. Sind die Elemente X keine Theilungselemente, so können die (AX) durch das Symbol

$$\lim (AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$$

mit

$$\lim n = \infty$$

dargestellt werden.

Dies geht aus dem Beweis zu Satz h hervor.

Bem. IV. In dem Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \cdots = 0$ erhält man das Segment Null (Def. I, § 76).

h''. *In dem Fall, in welchem n in dem gegebenen Symbol keinen letzten Werth hat und wenn man sich die Operation ausgeführt denkt, können wir die Theile des Segments (AB) mit dem Symbol*

$$(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$$

$$n = 1, 2 \ldots m \ldots \quad (n = \infty)\ ^{1)}$$

bezeichnen.

In der That ist $(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$ ein unbegrenztes Segment, welches kein letztes Element hat und mithin das Element X nicht enthält; bei unsren Untersuchungen können wir übrigens dieses unbegrenzte Segment dem Segment (AX) substituiren, indem wir ihre Verschiedenheit nicht in Betracht ziehen (Def. III, § 9).

Bem. V. So kann auch ein Segment (AB), welches die Grenze einer Variabeln (AX) ist (es ist einerlei, ob die letztere immer wächst oder immer abnimmt, wenn sie nur die Bedingung erfüllt, dass die Differenz zweier successiven Zustände unbegrenzt klein wird), durch die ganze Reihe der Zustände von (AX) ersetzt werden, obwohl das Element B ausserhalb dieser Reihe liegt.

Analog verhält es sich, wenn (AB) das Grenzsegment zweier Reihen (AX) und (AX') ist, von denen die eine immer wächst, die andre immer abnimmt.

Def. II. Wenn $(AB)\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$ *ein Segment (AX) bestimmt, dessen Element X durch die successive Theilung des Segments (AB) in n gleiche Theile erhalten wird, so heisst das Symbol* $\left(\frac{\alpha_1}{2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\cdots\right)$ **rational**, *im andern Fall* **irrational**.[2]

---

1) ω nach *Cantor* (siehe Anm. § 90).

2) Will man sich auf das Endliche allein beschränken, so vereinfacht sich das Verfahren. Man braucht nach den in der Bem. II, § 81 gegebenen Definitionen nur die folgende Hypothese aufzustellen:

9.

Hypothese über die unendlich kleinen Gebiete der Segmente (VII). — Das absolute Unendlichkleine und die absolute Null. — Zerlegung der Segmente in eine gegebene unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Segmente. — Unbegrenzt klein in absolutem Sinn. — Endliche absolute variabele Segmente, die immer wachsen oder abnehmen. — Hypothese über das absolute Continuum (VIII). — Das absolute Discrete. — Absolute Grenzelemente einer Gruppe von Elementen auf der Grundform.

§ 100. *Bem. I.* Betrachtet man nun von Neuem die ganze Grundform und das Segment (AB), welches uns zur Construction der ersten Scala gedient hat (Def. I und Bem. I, § 80), so sind die folgenden Hypothesen möglich:

1) (AB) ist untheilbar (Def. V, § 62).

2) (AB) ist die Summe einer endlichen Anzahl untheilbarer Segmente.

3) (AB) ist in eine beliebige endliche Anzahl n zueinander endlicher Theile zerlegbar und ist in diesem Fall sowohl nach Def. I, § 68 als nach Hyp. VI ein relatives Continuum.

4) Es gibt in Bezug auf das ursprüngliche gegebene Segment (AB) ein letztes unendlich kleines Gebiet z. B. von der Ordnung η (Bem. III, § 91 und Def. VI, § 86). In diesem Fall hätte jedes bezüglich (AB) unendlich kleine Segment erster Ordnung ein letztes unendlich kleines Gebiet von der Ordnung $\eta - 1$. Es kann dann auch vorkommen, dass es in dem letzten bezüglich (AB) unendlich kleinen Gebiet von der Ordnung η ein letztes untheilbares Segment gibt, das heisst also, welches keine andern Elemente enthält (Def. V, § 62). In einem solchen Fall könnte die Grundform in diesem Gebiet nicht stetig sein (Hyp. VI).

5) Es kann auch sein, dass das Segment (AB) kein letztes unendlich kleines Gebiet enthält, so dass die Reihe der Ordnungen der unendlich kleinen Gebiete unbegrenzt ist, aber eine bestimmte unendlich grosse Zahl nicht übersteigt. Dies würde der Fall sein, wenn die Ordnungen der unendlich kleinen Gebiete durch die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n \ldots$, der Reihe (I) gegeben wären (§ 46).

In jedem dieser Fälle hätten die gegebenen Segmente der Grundform in Bezug auf ihre Zerlegung in unendlich kleine Gebiete nicht dieselbe Eigenschaft. Wir stellen mithin, um die Gleichmässigkeit der gegebenen Segmente in dieser Hinsicht zu wahren, die folgende Hypothese auf:

Hyp. VII. **Das Segment (AB), welches dazu gedient hat die erste Scala zu construiren (Def. I, § 80), enthält Unendlichkleine derselben Ordnung wie diejenigen eines jeden andern begrenzten Segments der Grundform, welches grösser als (AB) ist.**

a. *Die Hypothese VII ist von den früheren Hypothesen unabhängig.*

Es geht dies daraus hervor, dass Hyp. VII eine Eigenschaft widergibt, die in den früheren nicht enthalten ist. Sie kann desshalb aus ihnen nicht hervorgehen, wie sie durch dieselben auch nicht ausgeschlossen ist. In der That

---

Wenn ein beliebiges Segment (AB) des homogenen Systems gegeben ist, so gibt es in ihm immer ein von A und B verschiedenes Element C.

In diesem Fall braucht man die Masseinheit nicht zu berücksichtigen, da nur eine einzige vorhanden ist. Aus dieser Hypothese und den Definitionen des homogenen Systems leitet man die Sätze des § 95 ab. Man gibt dann die Hypothese VI und beweist auf dieselbe Art die Sätze in den §§ 96—99. Es würde dies im grossen Ganzen der Weg sein, den man in einem für die Gymnasien bestimmten Lehrbuch der Elementargeometrie einzuschlagen hätte, um die Eigenschaften der zuerst an sich betrachteten Graden festzustellen (siehe Anm. § 81, die Vorrede und die mit Römischen Lettern bezeichneten Anmerkungen in Theil I). Einige dieser Sätze z. B. h′ und h″ und die Def. II dieses Paragraphen sind nicht nöthig, wie man in den Fundamenten der Geometrie sehen wird.

haben wir über das ursprüngliche Segment (AB), welches uns zur Construction der ersten Scala diente (Def. I, § 80), überhaupt keine Hypothese gemacht (Bem. I, § 80), während die Hypothesen IV und V uns die Grundlage zur Construction derjenigen Segmente gaben, die in Bezug auf ein *Segment* unendlich gross sind, welches ebensogross oder grösser als (AB) ist, und während die Hypothese VI uns zur Definition der Stetigkeit der Segmente der Grundform in Bezug auf eine Einheit diente, das heisst, derjenigen Segmente, welche Unendlichkleine enthalten und mithin in Bezug auf diese den Hypothesen IV und V genügen. Wählt man ein Unendlichkleines von der Ordnung η in Bezug auf (AB), so kann man auf dasselbe als Grundeinheit die Hypothesen IV und V anwenden, wie man dieselben auf ein Unendlichkleines von der Ordnung η in Bezug auf jedes andre begrenzte Segment anwenden kann, welches grösser als (AB) ist. Dasselbe gilt folglich auch von der Hypothese VI.

b. *Jedes begrenzte Segment der Grundform genügt der Hypothese VII.*

Wenn ein beliebiges Segment (XY) gegeben ist, so gibt es in der Richtung der Scala immer ein einziges Segment (AC), welches (XY) gleich ist (b′, § 69).

Ist $(AC) \equiv (AB)$, so fällt der Satz mit der Hypothese selbst zusammen (b, § 60). Ist dagegen $(AC) > (AB)$ (b, § 73), so ist (AC) in Bezug auf (AB) entweder endlich oder unendlich gross (f, § 82) und es ist klar, dass, da (AB) Unendlichkleine von denselben Ordnungen, wie ein beliebiges Segment (DE) hat, um so mehr sie (AC) haben muss (Def. I, § 61).

Ist aber $(AC) < (AB)$, so ist (AC) in Bezug auf (AB) endlich oder unendlich klein (Def. II, f, § 82). Besteht die Eigenschaft b, wenn es unendlich klein ist, so besteht sie um so mehr, wenn es endlich ist (Def. I, § 61 und Def. II, § 82). Es sei unendlich klein von der Ordnung η und nehmen wir an, es habe keine Unendlichkleine, deren Ordnungen eine gegebene Zahl σ von (II) überschreiten (§ 91). Alsdann hätte (AB) keine Unendlichkleine von der Ordnung $\eta + \sigma$, die unendlich klein von der Ordnung σ in Bezug auf (AC) sind (Bem. III, § 91 und Def. III, § 86), während doch (AB) solche Unendlichkleine haben muss, weil es unendlich grosse Segmente z. B. diejenigen von der Ordnung $\eta + \sigma$ in Bezug auf (AB) gibt, bezüglich deren (AB) unendlich klein von der Ordnung $(\eta + \sigma)$ ist (Hyp. VII).

Bem. II. Aus der Hypothese selbst folgt, dass es kein letztes gegebenes untheilbares Segment (AB) *gibt,* das heisst, kein Segment (AB), welches kleiner als jedes gegebene Segment ist.

c. *Die Differenz zweier endlichen absoluten nicht identischen Segmente* (AB), (CD) *ist ein endliches absolutes Segment.*

Denn wenn $(AB) > (CD)$ und $(C'B)$ in (AB) identisch mit (CD) ist, so fallen, in (AB), A und C' nicht zusammen (Def. I, b, § 61). Mithin ist (AC') ein endliches absolutes Segment (Def. V, § 92).

Def. I. Wir haben kein Unendlichkleines in Bezug auf die absolute Einheit in dem bisher gebrauchten Sinn dieses Wortes, sonst gäbe es der Hypothese VII zuwider ein letztes Unendlichkleines. Doch *der Gleichförmigkeit der Ausdrucks-*

weise wegen können wir sagen, es gebe *ein absolutes Unendlichkleine,* dessen Enden wir mithin als ein einziges Element in absolutem Sinn (Def. III, § 57) auf Grund der früheren Sätze ansehen müssen, das heisst, *das absolute Unendlichkleine in Bezug auf die absolute Einheit* oder in Bezug auf jedes Segment (AB) als Masseinheit *ist Null* (Def. V, § 92).[1])

d. *Zwei Segmente, welche um ein absolutes unendlich kleines Segment differiren, sind in absolutem Sinn gleich.*

Sie sind in der That in absolutem Sinn gleich (Def. III, § 9), weil die Enden eines unendlich kleinen absoluten Segments für uns in absolutem Sinn zusammenfallen (Def. III, § 57 und Def. I).

e. *Jedes Segment* (AB) *der Grundform kann von* A *nach* B *hin in eine unendlich grosse bestimmte Anzahl* η *consecutiver unendlich kleiner Segmente successive von der Ordnung* $\eta, \eta - 1, \ldots, 1$ *zerlegt werden.*

Denn wählt man in (AB) ein unendlich kleines Segment (AC) von der Ordnung η (Bem. III, § 91) in Bezug auf (AB) (b), so sind die unendlich grossen Gebiete $1^{\text{ter}}, 2^{\text{ter}}, \ldots, (\eta - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung in Bezug auf (AC) unendlich klein von der Ordnung $\eta - 1, \eta - 2, \ldots 1$ in Bezug auf (AB) (f'', § 92; d, § 93). Wählt man mithin ein Element C' in dem unendlich kleinen Gebiet der Ordnung $\eta - 1$ aus, ein Element C'' in demjenigen der Ordnung $\eta - 2$ und so weiter und ein Element $C^{\eta-1}$ in dem unendlich kleinen Gebiet der ersten Ordnung, so wird dadurch das Segment (AB) in η consecutive Segmente

$$(AC), (CC'), (C'C''), \ldots, (C^{\eta-1}B)$$

in dem in der Uebereink. I des § 91 festgesetzten Sinn zerlegt.

Bem. III. Beschränkt man sich auf die Unendlichgrossen und Unendlichkleinen endlicher Ordnung, für welche die Hyp. V nicht nöthig ist, alsdann ist η eine endliche Zahl.

f. *In jedem Segment* (AB) *gibt es immer ein Segment, dessen Vielfaches nach der gegebenen Zahl* η *kleiner als* (AB), *und ein solches, dessen Vielfaches nach derselben Zahl grösser als* (AB) *ist.*

Ist η eine endliche ganze Zahl n, so gilt derselbe Beweis, wie bei Satz a', § 95.

Ist es unendlich gross, so sei μ die Ordnung des Unendlichgrossen von η. Alle Zahlen derselben Ordnung werden durch das Symbol ∞^{μ} dargestellt und sind von derselben Art (c, § 91 und a, § 86). (AB') sei ein Unendlichkleines dieser Ordnung. Sind nun die Scalen und mithin ihre Anfänge schon festgestellt, wie man bei der Vergleichung unendlich grosser Segmente voraussetzen muss (Bem. IV, § 91)[2]), und nimmt man die Vielfachen von (AB') nach den Zahlen dieser Ordnung von η und betrachtet nur diejenigen, die um eine Zahl derselben Ordnung differiren (wie z. B. ∞_1, $\infty_1 \cdot 2$ und nicht z. B. ∞_1, $\infty_1 \pm n$, die in Bezug auf die unendlich grosse Einheit erster Ordnung gleich

1) Aus der Definition selbst folgt, dass, wenn A das absolute Unendlichkleine ist, es keine Zahl der Classe II derart gibt, dass $A \cdot \eta$ einem beliebigen Segment mit verschiedenen Enden gleich käme oder es überrage. Es kann desshalb nicht, wie das Grundelement, für sich allein zur Construction der Grundform benutzt werden (§ 105).

2) Siehe § 103.

sind), so liegt (AB) zwischen zweien dieser Vielfache, wenn es nicht eines dieser Vielfache selbst ist, und ist mit ihnen endlich. Man erhält z. B. $(AB')\eta_1 \leqq (AB) < (AB')(\eta_1 + 1_\mu)$, wenn man hier unter 1_μ die unendlich grosse Einheit derselben Art wie die Zahlen η und η_1 versteht (1, § 92).

1) Ist $\eta_1 \geqq \eta$, alsdann ist

$$(AB')\eta \leqq (AB')\eta_1 \leqq (AB). \qquad \text{(g, § 92; d', § 61)}$$

In diesem Fall ist auch $\eta_1 + 1_\mu > \eta$ und gibt es eine endliche Zahl m der Art, dass $\eta m > \eta_1 + 1_\mu$, weil η und $\eta_1 + 1_\mu$ von derselben Ordnung und mithin untereinander endlich sind (c, § 91; a, § 86; c, § 81). Nimmt man daher ein Segment $(AB'') \equiv (AB')m$, so ist

$$(AB'')\eta > (AB),$$

da $(AB')(\eta_1 + 1_\mu) > (AB)$ (d, § 61).

2) Ist dagegen $\eta_1 < \eta$ und differiren η und η_1 um eine unendlich kleine Zahl z. B. $\eta = \eta_1 + \sigma$, so ist:

$$(AB')(\eta_1 + \sigma + 1_\mu) > (AB)$$

und wenn

$$(AB')(\eta_1 + \sigma) \leqq (AB),$$

so kommt man, weil σ in Bezug auf η unendlich klein und (AB) in Bezug auf $(AB')\eta_1$ endlich ist, wieder auf den vorigen Fall zurück.

3) Wenn ferner η und η_1 wenigstens um eine Einheit 1_μ oder $(AA_{\infty_1^\mu})$ differiren, alsdann ist offenbar $\eta \geqq \eta_1 + 1_\mu$, mithin

$$(AB')\eta > (AB).$$

Um in diesem Fall ein Segment zu erhalten, dessen Vielfaches nach η kleiner als (AB) ist, braucht man nur (AB') in eine Anzahl m consecutiver Segmente zu theilen (a, § 95), von denen z. B. (AB'') das kleinere ist. Man erhält:

$$(AB'')m\eta_1 < (AB). \qquad \text{(d'', § 79 und g, § 92)}$$

Ist nun m eine solche Zahl, dass $m\eta_1 > \eta$ ist, so ist:

$$(AB'')\eta < (AB'')m\eta_1 \qquad \text{(g, § 92 und d', § 60)}$$

und um so mehr

$$(AB'')\eta < (AB). \qquad \text{(d', § 61)}$$

Wenn im zweiten Fall $(AB')(\eta_1 + \sigma) > (AB)$ ist, so erhält man durch ein analoges Verfahren ein Segment (AB'') der Art, dass $(AB'')\eta < (AB)$. In diesem Fall genügt es $m = 2$ zu setzen.

Def. II. Von einem stets abnehmenden (Def. II, § 83) endlichen absoluten Segment (AX) (Def. V, § 92), welches kleiner als jedes absolute gegebene Segment wird, sagen wir, es werde *in absolutem Sinn unbegrenzt klein* oder *es strebe danach absolut unendlich klein zu werden* (Def. I) oder es habe dieses Unendlichkleine zur *Grenze.*

Wir schreiben

$$\lim_{\text{abs}} (AX) \equiv \text{abs. unendlich klein.}$$

Def. III. Von einem endlichen absoluten Segment (AX) der Art, dass sich X unbegrenzt in absolutem Sinn einem andern Element B nähert, sagt man, es habe das Segment (AB) zur *Grenze.* Man schreibt:

$$\lim_{\text{abs}} (AX) \equiv (AB).$$

Def. IV. Unter einer absoluten immer wachsenden oder immer abnehmenden Variabelen verstehen wir ein immer wachsendes oder immer abnehmendes variabeles Segment (§ 83) der Art, dass die Differenzen zwischen zwei willkürlichen Zuständen und einem beliebigen gegebenen Zustand der Variabelen nicht immer endlich zu einander bleiben oder nicht immer unendlich gross oder unendlich klein zu einander von einer Ordnung sind, welche kleiner ist als eine gegebene Zahl von (II) (§ 91).

g. *Ein endliches absolutes Segment (AX) mit dem variabelen Ende X, welches kleiner als jedes gegebene endliche absolute Segment wird, hat die absolute Null zur Grenze. Das heisst:*

$$\lim_{\text{abs}} (AX) \equiv 0.$$

Denn das absolute Unendlichkleine ist in Bezug auf die absolute Einheit Null (Def. I).

h. *Ein variabeles Segment (AX) kann in absolutem Sinn in der einen und der andern Richtung unbegrenzt klein werden.*

Der Beweis ist demjenigen zu Satz e, § 95 analog.

i. *Wenn sich die Elemente X und X' unbegrenzt in absolutem Sinn und entgegengesetzter Richtung einem gegebenen Element A nähern, so wird (XX') in absolutem Sinn unbegrenzt klein.*

Beweis wie zu Satz f, § 95.

l. *Ein Segment, welches in absolutem Sinn mit den variabelen Enden in entgegengesetzten Richtungen unbegrenzt klein wird und ein Element ausserhalb des Gebietes der Variabilität seiner Enden enthält, hat ein einziges Element zur Grenze* (Def. II, i und g).

m. *Wenn X sich in absolutem Sinn unbegrenzt einem Element X' nähert und dieses in derselben Richtung einem Element A, so nähert sich X in absolutem Sinn dem A.*

Der Beweis ist wie derjenige zu h, § 95.

n. *Wenn sich X und X' in absolutem Sinn unbegrenzt und in derselben Richtung einem Element A nähern, so wird (XX') oder $(X'X)$ in absolutem Sinn unbegrenzt klein.*

Der Beweis wie zu Satz i, § 95.

§ 101. *Bem. I.* Die Hypothese VI sagt uns, dass, wenn (XX') in Bezug auf jedes gegebene Segment (AB) als Einheit unbegrenzt klein wird, indem sich X und X' in entgegengesetzter Richtung nähern, das Segment (XX') immer wenigstens ein von X und X' verschiedenes Element Y enthält. Nach der Hypothese VII aber enthält es immer in Bezug auf (AB) Unendlichkleine. Wenn dagegen (XX') in absolutem Sinn unbegrenzt klein wird, so wird es kleiner als jedes gegebene unendlich kleine Segment (Def. II, § 100). Mithin sind die beiden Fälle verschieden und aus der Hypothese VI allein geht, wie wir

später (c, § 103) sehen werden, noch nicht hervor, dass (XX') im zweiten Fall ein Element ausserhalb des Veränderungsgebiets seiner Enden hat. Desswegen und auch wegen der Gleichförmigkeit, die, wie uns die Anschauung lehrt, zwischen den unbegrenzt kleinen Theilen des gradlinigen Gegenstandes in beschränktem Sinn besteht (§ 55), stellen wir die folgende Hypothese auf:

Hyp. VIII. **Jedes Segment (XX') mit in entgegengesetzten Richtungen veränderlichen Enden, welches in absolutem Sinn unbegrenzt klein wird, enthält ein Element ausserhalb des Veränderungsgebiets seiner Enden.**

a. *Es kann nur ein einziges Element in dem Segment (XX') geben, welches die Eigenschaft der Hyp. VIII besitzt.*

Denn, wenn es mehrere gäbe, so müssten sie in Bezug auf die absolute Einheit oder in absolutem Sinn in ein einziges Element zusammenfallen, sonst bliebe (XX') gegen die Hyp. VIII grösser als ein endliches absolutes gegebenes Segment (Def. II, § 100).

a'. *Wenn die immer wachsende Veränderliche (AX) und die immer abnehmende in derselben Richtung liegende (AX') gegeben sind und (XX') in absolutem Sinn unbegrenzt klein wird, so gibt es ein einziges Element Y derart, dass (AY) die Grenze der beiden veränderlichen Segmente und nicht ein Zustand der beiden Variabelen ist* (a).

Def. I. Das homogene System, welches der Hypothese VIII genügt, nennen wir *absolut stetig* und die andern *absolut discret.*

b. *Ein homogenes in absolutem Sinn stetiges System ist in Bezug auf jedes gegebene Segment als Masseinheit stetig oder in andern Worten: Wenn die Hyp. VIII erfüllt ist, so ist es auch die Hyp. VI in Bezug auf jede Einheit.*

Denn wenn das Segment (XX') in absolutem Sinn unendlich klein wird (Def. II, § 100), so wird es dies um so mehr in Bezug auf jedes Segment (AB) als Einheit (Def. I, § 95) und weil (XX') ein Grenzelement in absolutem Sinn hat, so hat es ein solches auch bezüglich der Einheit (AB) (b, § 96).

§ 102. a. *Wenn (AB) das Grenzsegment eines veränderlichen Segments (AX_η) ist, so hat man*

$$\lim (AX_\eta) \equiv (AB)$$

für

$$\lim \eta = \Omega. \qquad \text{(Def. VI, § 92)}$$

Denn mit wachsendem η nähert sich X_η unbegrenzt dem B, das heisst, (AX_η) nähert sich unbegrenzt dem (AB) (Def. III, § 100).

b. *Wenn die in absolutem Sinn stets wachsende (wachsende) Variabele (AX) und die abnehmende (stets abnehmende) Variabele (AX') derart gegeben sind, dass (AX) $[(AX')]$ stets kleiner (grösser) als jeder Zustand von (AX') $[(AX)]$ ist und jedes Segment (AY), welches grösser (kleiner) als jeder Zustand von (AX) $[(AX')]$ ist, der Variabelen (AX') $[(AX)]$ angehört, so wird das Segment (XX') in absolutem Sinn unbegrenzt klein.*

Wir können uns denken, die beiden Variabelen (AX) und (AX') wären in einem Segment (AB) enthalten und B ein Element X'. In dem auf die Einheit (AB) bezüglichen Sinn haben die beiden Variabelen (AX) und (AX') ein Grenzsegment (AY), welches Null ist, wenn sich (AX) immer unendlich

klein bezgl. (AB) hält (b, § 97 und b, § 96). In absolutem Sinn stellt Y ein unendlich kleines Gebiet (Y) erster Ordnung in Bezug auf (AB) dar (b, § 96). Solange X in dem ersten Fall ausserhalb des Gebiets (Y) bleibt, ist das Segment (XY) bezüglich (AB) endlich. Mithin können zwei successive Zustände von (AX) immer um ein endliches Segment differiren; denn, ist ein Segment (AX_1) gegeben, so gibt es in $(X_1 Y)$ immer ein solches Element X_2, dass $(X_1 X_2)$ ebenfalls endlich ist und (AX_2) der Variabelen (AX) angehört. (AX) ist aber nach der Voraussetzung eine absolute immer wachsende Variabele (Def. IV, § 100); das Element X muss daher in das Gebiet (Y) eintreten.

Die Veränderliche (AX) kann sich nicht über das ganze Gebiet (Y) in der gegebenen Richtung erstrecken; sonst könnte die Differenz zwischen zwei successiven Zuständen derselben immer unendlich klein von der ersten Ordnung sein. (AX) muss desshalb in einem Segment (AC), wenn C ein Element des genannten Gebiets ist, enthalten sein.

In (Y) muss es also nach der Voraussetzung Elemente X' geben.

Man kann in dem Gebiet (Y) dieselbe Schlussweise für ein durch zwei gegebene Elemente X und X' bestimmtes Segment wiederholen und erhält so ein bezügl. (AB) unendlich kleines Gebiet zweiter Ordnung; auf diese Art wird (XX') kleiner als jedes Unendlichkleine von beliebiger gegebener Ordnung. Für diesen Fall ist mithin der Satz bewiesen.

Wenn Y bezügl. (AB) z. B. mit A zusammenfällt, dann gibt es ein unendlich kleines Gebiet (Y) von bestimmter Ordnung σ, in welchem (AX) variirt. Wie oben zeigt man dann, dass in diesem Gebiet Elemente X' existiren und mithin die obige Schlussweise angewendet werden kann.

Aehnlich verhält es sich, wenn Y bezügl. der Einheit (AB) mit B zusammenfällt.[1])

c. *Das zwischen zwei successiven Zuständen* (AX_η) *und* $(AX_{\eta+\varrho})$ *der Variabelen liegende Segment* $(X_\eta X_{\eta+\varrho})$, *welches immer wächst; oder das Segment* $(X_{\eta+\varrho} X_\eta)$, *welches immer abnimmt, wird, wenn* (AB) *das Grenzsegment der Variabelen ist, bei unbegrenzt wachsendem* η *kleiner als jedes gegebene Segment.*

Der Beweis wie c, § 97.

d. *Ein veränderliches in absolutem Sinn immer wachsendes (oder abnehmendes) Segment* (AX) *hat immer ein und nur ein Grenzsegment, welches grösser (oder kleiner) als jeder Zustand der Veränderlichen ist.*

---

1) Wenn (AX) in Bezug auf eine Einheit immer endlich oder unendlich klein und (AX') immer unendlich gross ist, so erfüllt (AX) die Bedingung, dass es stets kleiner als (AX') sein soll und dass jedes Segment (AY), welches kleiner als alle unendlich grossen Segmente ist, einen Zustand der Veränderlichen (AX) vorstellt. In diesem Fall wird jedoch (XX') nicht kleiner als jedes gegebene Segment, weil es grösser als jedes endliche Segment bleibt.

Beschränkt man sich auf das Gebiet der endlichen und unendlich kleinen Segmente endlicher Ordnung, alsdann ist η eine endliche oder unendlich grosse Zahl endlicher Ordnung und wenn in diesem Fall die Variabele in absolutem Sinn stets abnimmt oder stets wächst, so genügt es, wenn die Unterschiede zwischen ihren Zuständen und einem bestimmten Zustand nicht immer endlich zu einander bleiben.

Der Beweis ist wie bei Satz d, § 97. Nur ist im ersten Fall zu beachten, dass wir hier nicht das Unendlichgrosse erster Ordnung, sondern das absolute Unendlichgrosse oder das ganze System in der Richtung der Variabelen von dem Anfang A an haben. Es genügt den Beweis auf die Sätze a', § 101 und b, statt auf die Sätze b', § 96 und b, § 97 zu stützen.

d'. *Wenn zwei in absolutem Sinn stets wachsende oder abnehmende Reihen bezüglich gleicher Segmente zwei Segmente* (AB) *und* $(A'B')$ *bestimmen, so sind diese Segmente in absolutem Sinn gleich.*

Wie der Zusatz d' in § 97.

Def. I. Ein Element A heisst *absolutes Grenzelement einer* nach einer Richtung der Grundform geordneten *Reihe von Elementen* $X_1 X_2 \ldots X_\eta \ldots \equiv (X_\eta)$, wenn es in jedem ganz beliebig kleinen aber gegebenen Segment (AB) ein Element der Reihe gibt.

e. *Wenn* (AB) *ein absolutes Grenzsegment eines veränderlichen Segments* (AX_η) *ist, so ist das Element* B *das absolute Grenzelement der durch die Elemente* X_η *gegebenen Reihe.*

Beweis wie für Satz a, § 98.

10.

Absolute Theilung eines Segmentes in n gleiche Theile. — Bestimmung der Scalen in Bezug auf ein als Grundeinheit gegebenes Segment. — Theilung eines Segments in η gleiche Theile. — Commutationsgesetz der Summe zweier oder mehrerer consecutiver Segmente. — Das Segment (AB) ist identisch mit dem entgegengesetzten Segment (BA). — Grenzelemente der durch die successive Theilung eines Segments in η gleiche Theile sich ergebenden Elementengruppe. — Andre Eigenschaften der absoluten Grenzelemente eines gegebenen Segments. — Symbole, welche die Theile und Elemente eines Segments darstellen. — Commensurabele Segmente erster und zweiter Art und incommensurabele Segmente.

§ 103. a. *Jedes Segment* (AB) *ist in absolutem Sinn auf eine einzige Art in* n *gleiche Theile zu zerlegen.*

Der Satz a, § 99 gilt auch absolut genommen; man braucht bei dem Beweis des Satzes nur anzunehmen, $(X_1 X_1')$ werde in absolutem Sinn, statt in Bezug auf eine Einheit, unbegrenzt klein.

Um den Beweis in absolutem Sinn zu führen, braucht man nicht zu sagen, X_n' habe einen Grenzpunkt Y, der mit X_n zusammenfällt, und vorauszusetzen, X_2'' habe einen von X_2 verschiedenen Grenzpunkt L; es genügt die Annahme X_2'' nähere sich nicht in absolutem Sinn unbegrenzt dem Element X_2. Man kann dann ein Segment $(X_2 L)$ derart auswählen, dass es in ihm keine Punkte X_2'' gibt. Es gilt alsdann derselbe Beweis in den beiden Fällen $(AX_1') \lessgtr (AX_1)$.

Ebenso ist es bei der Schlussfolgerung von $n-1$ auf n.

Bei der Umkehrung des Satzes ist zu beachten, dass $(X_n X_n')$ immer grösser als $(X_1 X_1')$ ist, weil falls $(AX_1') > (AX_1)$, und ähnlich wenn $(AX_1) > (AX_1')$ ist,

$$(AX_1') \equiv (AX_1) + (X_1X_1'),\ (AX_1')n \equiv (AX_1)n + (X_nX_n'). \qquad (d, § 79)$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$(AX_1')(n-1) + (AX_1') \equiv (AX_1)(n-1) + (AX_1) + (X_nX_n')$$

oder auch

$$(AX_1')(n-1) + (AX_1) + (X_1X_1') \equiv (AX_1)(n-1) + (AX_1) + (X_nX_n'); \quad (d, § 77)$$

es ist aber

$$(AX_1')(n-1) > (AX_1)(n-1), \qquad (d, § 79)$$

daher

$$(AX_1) + (X_1X_1') < (AX_1) + (X_nX_n') \quad (d, § 77;\ g^{v}, § 73)$$

und mithin

$$(X_1X_1') < (X_nX_n'). \qquad (f, § 73)$$

Der Beweis von a ist nun demjenigen des Satzes b, § 99 analog, wenn man den Satz a′, § 95 zu Grunde legt.

Bem. I. Es ist zu bemerken, dass dieser Satz mit b, § 99 nicht zusammenfällt, weil in letzterem das zweite Ende des n^{ten} Theils ein unendlich kleines Gebiet erster Ordnung vorstellt, während in a der n^{te} Theil ein einziges Segment in absolutem Sinn ist.

b. *Wenn ein irrationales Symbol α und ein beliebiges Segment (AB) gegeben ist, so bestimmt das Symbol in Bezug auf die Einheit (AB) eine Reihe unendlich kleiner Segmente erster Ordnung, aber nicht ein einziges Segment.*

Denn es bestimmt in relativem Sinn ein einzelnes Segment $(AC) \equiv (AB)\,\alpha$ (h″, § 99) und mithin stellt C absolut genommen ein unendlich kleines Gebiet erster Ordnung vor (b′ § 96).

Wenn nun (AX) ein Segment ist, dessen Ende X sich in diesem Gebiet befindet, so ist die Operation $(AX)\,n$ vollständig bestimmt und eindeutig. Führt man aber die umgekehrte Operation zu derjenigen aus, die durch das Symbol α angegeben wird, so erhält man aus (AX) nicht ein Segment sondern die ganze Reihe der Segmente, welche A mit B und mit allen übrigen Elementen des unendlich kleinen Gebiets erster Ordnung in der Umgebung von B in Bezug auf die Einheit (AB) bestimmt.

Bestimmung der Scalen in Bezug auf ein als Grundeinheit gegebenes Segment.

Bevor wir mit dem Studium der Eigenschaften eines Segments speciell in Beziehung auf seine Unendlichkleinen fortfahren, wollen wir zeigen, wie man die Scalen feststellen kann (Bem. IV, § 91), um die Segmente untereinander auf bestimmte Art vergleichen zu können und um die Beschaffenheit unsrer Grössen besser erkennen zu lassen.

Zuerst seien bei gegebenem Grundanfang A die Anfänge der unendlich grossen Gebiete gegeben, die mit den Zahlen ∞_1^{μ} bezeichnet werden, wobei μ eine Zahl unsrer Classe (II) (§ 91) mit Ausnahme der Null ist. Wir bemerken, dass, wenn der Anfang A_{∞_1} festgelegt ist, dann auch die Scala der Einheit (AA_{∞_1}) und um jedes Theilungselement die Scalen der Einheit (AA_1) bestimmt sind, welche mit derjenigen vom Anfang A in der gegebenen Richtung und von der Einheit (AA_1) identisch sind (c, d, § 69).

Ist der Anfang $A_{\infty_1^2}$ festgelegt, so sind die Scalen in dem unendlich grossen Gebiet zweiter Ordnung eindeutig bestimmt; denn betrachtet man z. B. ein Segment $(A_{\infty_1^2} B) \equiv (A A_{\infty_1})$ (b′, § 69), so ist (AB) ein Vielfaches von (AA_1) nach der Zahl $\infty_1^2 + \infty_1$ (Def. I, § 92) und in der Umgebung der Theilungselemente, die durch die unendlich grossen Symbole $\infty_1^2 n \pm \infty_1 n_1$, worin n und n_1 endlich sind, dargestellt werden, liegen die Scalen der Einheit (AA_1) in der einen Richtung und in der entgegengesetzten diejenigen der Einheit $(A_1 A)$.

Es reicht also aus anzunehmen, die Elemente oder die Anfänge A_{∞_1}, $A_{\infty_1^2}, \ldots, A_{\infty_1^m}, \ldots, A_{\infty_1^{\infty_1}}, \ldots, A_{\infty_1^\mu}$ seien gegeben, wenn μ eine gegebene Zahl der Classe (II) ist (§ 91).

Ebenso genügt es in den unendlich kleinen Gebieten von A angefangen, welche durch die Hypothese VII bestimmt sind und den in den §§ 86—92 bereits gefundenen Sätzen unterliegen, die Elemente oder Anfänge $A_{\frac{1}{\infty_1}}, A_{\frac{1}{\infty_1^2}}, \ldots, A_{\frac{1}{\infty_1^\mu}}$ in der Art festzusetzen, dass das Vielfache von $(AA_{\frac{1}{\infty_1^\mu}})$ nach der Zahl ∞_1^μ das Segment (AA_1) ist.

In den Umgebungen der bereits erhaltenen Theilungselemente seien dann die Scalen dieser Einheiten gegeben.

Dies reicht aber nicht aus. Wir haben gesehen, dass ein beliebiges begrenztes Segment z. B. (AA_1) in absolutem Sinn in n gleiche Theile getheilt werden kann (a). Um jedes der Theilungselemente M_r, die wir durch absolute Theilung z. B. eine beliebige Anzahl n von (I) mal ausgeführte Halbirung (§ 46) erhalten, construiren wir die Scalen der Einheiten $(M_r M_r') \equiv (AA_{\frac{1}{\infty_1}})$ und ebenso können wir um M_r und die Theilungselemente dieser Scalen die unendlich kleinen Gebiete beliebiger Ordnung mit den Einheiten $(AA_{\frac{1}{\infty_1^2}})$ und $(A_{\frac{1}{\infty_1^2}} A)$ u. s. w. construiren (b′, § 69). Nun wollen wir mit der Einheit $(M_r M_r')$ die absolute Halbirung eine beliebige endliche Anzahl n mal vornehmen und deren Elemente von M_r an mit dem Symbol

$$(M_r M_r')\left(\frac{\alpha'_1}{2} + \frac{\alpha'_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha'_n}{2^n}\right) \qquad \text{(h′, § 99)}$$

bezeichnen. Dem Satz b′, § 69 zu Folge sind die diesen Zeichen entsprechenden Elemente auch in jeder Einheit der Scalen mit dem Anfang M_r und der Einheit $(M_r M_r')$ und $(M_r' M_r) \equiv -(M_r M_r')$ (c′, § 77) und so für jedes Element M_r von (AA_1) vorhanden.

Von A ausgehend wird ein beliebiges der so erhaltenen Halbirungselemente in dem unendlich kleinen Gebiet erster Ordnung um M_r durch das Symbol:

$$(AA_1)\frac{m}{2^n} \pm (M_r M_r')\, m_1 \frac{m'}{2^{n'}} \; (m < 2^n,\ m' < 2^{n'}) \qquad (1)$$

worin m, m_1, m' und n' Zahlen von (I) sind (§ 46), ausgedrückt, wenn in absolutem Sinn

$$(AA_1)\frac{m}{2^n} \equiv (AM_r) \text{ ist.}$$

Das Symbol (1) kann auch geschrieben werden:

$$(AA_1)\left(\frac{m}{2^n} \pm m_1 \frac{m'}{2^{n'}\infty_1}\right).$$

Fährt man so fort, so erhält man die Elemente der absoluten Halbirung in der Grundeinheit (AA_1), die durch das Symbol:

$$Z = (AA_1)\left[\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n}\right) \pm\right.$$

$$\pm \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{2^{n_1}}\right) \pm \cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1{}^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{2^{n_r}}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m_{\infty_1 - r'}}{\infty_1{}^{\infty_1 - r'}}\left(\frac{\alpha_1^{(\infty_1 - r')}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n+\infty_1-r'}^{(\infty_1 - r_1)}}{2^{n+\infty_1-r'}}\right) + \cdots$$

$$\left.\cdots + \frac{m_\mu}{\infty_1{}^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{2} + \cdot \cdot + \frac{\alpha_\mu^{(\mu)}}{2^{n\mu}}\right)\right]$$

dargestellt werden, worin die α nicht alle Null aber entweder gleich Null oder gleich Eins sind, während n beliebig ist. Es versteht sich, dass r und r' endliche gegebene Zahlen sein müssen und daher bezieht sich das Unendlichkleine von der Ordnung $\infty_1 - r'$ auf das durch die vorhergehenden Klammern bestimmte Element u. s. w.

Jedes andre Element von (AA_1), das in Bezug auf (AA_1) kein Halbirungselement ist, wird in relativem Sinn durch das Symbol

$$(2) \qquad (AA_1)\left(\frac{\alpha^{(0)}}{2} + \frac{\alpha^{(0)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n}\right) \qquad (h'', \S\ 99)$$
$$n = \infty$$

gegeben.

Bestimmt dieses Symbol ein Element X der Art, dass (AX) ein n^{ter} Theil von (AA_1) ist, alsdann bestimmt (2) ein einziges Element in absolutem Sinn (a). Ist dies nicht der Fall oder wenn das Symbol

$$(2') \qquad \alpha = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n} + \cdots\right), n = \infty$$

irrational ist, alsdann bestimmt es nicht ein einziges Element, sondern ein Gebiet von Elementen (b). Wir legen mithin das Element in diesem Gebiet fest und wollen es in absolutem Sinn durch das Symbol α darstellen. Bei dem Festlegen der übrigen Elemente berücksichtigen wir nicht nur den Satz a, sondern lassen, wenn von A an die Segmente gegeben sind, die in absolutem Sinn den irrationalen Symbolen α und β, von denen auch eines rational sein kann, entsprechen, und z. B. $\alpha \geqq \beta$ ist, dem Symbol $\alpha \pm \beta$ das Segment entsprechen, welches die Summe oder Differenz der vorhergehenden Segmente und mithin vollständig bestimmt ist. Hat man nun ein Segment (AN) construirt, welches dem irrationalen Symbol α in absolutem Sinn entspricht, so denken wir uns von jedem in (AA_1) bereits gegebenen Element an die dem

Segment (AN) gleichen Segmente mittelst des Satzes b', § 69 und mit Hülfe der vorstehenden Operationen construirt. Um das Element N und die andern Elemente, die wir so erhalten, construiren wir die unendlich kleinen Gebiete und die Halbirungselemente.

Ebenso verfahren wir mit den Einheiten $(AA_{\frac{1}{\infty_1}}) \ldots (AA_{\frac{1}{\infty_1 \mu}})$. So wird z. B. ein Halbirungselement des unendlichkleinen Gebiets erster Ordnung um N mit dem Symbol

$$(AA_1)\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^n} + \cdots\right) + \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{2} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{2^{n_1}}\right)$$
$$n = \infty$$

bezeichnet. Beschränkt man sich auf die unendlich grossen Zahlen endlicher Ordnung allein, so kann man im Symbol Z bei der Zahl ∞_1^r stehen bleiben, wenn r eine beliebige Zahl von (I) ist. In diesem Fall muss sich jedes Element X von (AA_1) in den unendlich kleinen Gebieten erster Ordnung befinden, welche durch die erste Klammer von Z, wenn n endlich ist oder unbegrenzt wächst, bezeichnet werden. Denn jedes gegebene Element von (AA_1) ist entweder die Grenze der Gruppe von Elementen, die man durch die successive Halbirung erhält oder es ist selbst eines dieser Elemente (h, § 99). Mithin befindet sich X in dem unendlich kleinen Gebiet erster Ordnung eines der Punkte, die durch die erste Klammer von Z geliefert werden, vorausgesetzt dass n unendlich gross (∞) sein kann, wenn es nicht selbst eines der durch das Symbol Z dargestellten Elemente ist. Wie wir sehen, liegt also X in einem unendlich kleinen Gebiet erster Ordnung zwischen zwei Theilungselementen in einem Gebiet der Einheit $(AA_{\frac{1}{\infty_1}})$ z. B. zwischen $A_{n\frac{1}{\infty_1}}$ und $A_{(n+1)\frac{1}{\infty_1}}$, wenn $(AA_{m\frac{1}{\infty_1}}) \equiv (AA_{\frac{1}{\infty_1}})m$ für jedes beliebige m. X befindet sich daher, wenn man dieselbe Betrachtung wiederholt, in dem unendlich kleinen Gebiet r^{ter} Ordnung in der Umgebung eines durch das Symbol Z bereits erhaltenen Elements, falls $n, n_1, \ldots, n_r$ auch unendlich gross (∞) sein können und befindet sich zwischen zwei Theilungselementen N_ϱ, $N_{\varrho+1}$ dieses Gebiets, wenn $(N_\varrho N_{\varrho+1}) \equiv (AA_1)\frac{1}{\infty_1^r}$.

Bei unbegrenzt wachsendem r wird $(AA_1)\frac{1}{\infty_1^r}$, wenn man sich wie gesagt auf die unendlich grossen und unendlich kleinen Segmente endlicher Ordnung beschränkt, kleiner als jedes gegebene Segment ε. In der That muss ε in Bezug auf (AA_1) unendlich klein von gegebener Ordnung s sein (m, § 92). Man braucht nur $r = s + 1$ zu setzen; denn $(AA_1)\frac{1}{\infty_1^{s+1}}$ ist in Bezug auf jedes unendlich kleine Segment der Ordnung s unendlich klein von der ersten Ordnung (Def. II, § 86) und daher kleiner als ε (Def. II, § 82). Nach Hypoth. VIII, die auch in diesem speciellen Fall gültig ist (§ 100), ist X ein bestimmtes Element. Wenn also r in Z unbegrenzt wächst, so wird in diesem Fall ein Element der Form bestimmt.

Wenn man dagegen auch die Unendlichgrossen und Unendlichkleinen von unendlich grosser Ordnung in Betracht zieht, die mit den vorigen eine Gruppe im Sinn des Satzes m, § 93 bilden, so stellt das Element X, welches wie gesagt durch das Symbol Z bestimmt wird, ein unendlich kleines Gebiet von unendlich grosser Ordnung dar. Legt man die Elemente X, die den Symbolen Z bei unbegrenzt wachsendem jedoch stets endlichem r entsprechen, durch dasselbe Verfahren fest, welches wir oben für die irrationalen Symbole der Form (2') benutzt haben, so können wir andre Elemente des Systems bestimmen.

Def. I. Wir nennen *Elemente der absoluten successiven Halbirung* von (AA_1) diejenigen, welche man aus dem Symbol Z durch das obige Verfahren erhält, falls μ eine gegebene beliebige Zahl der Classe (II) ist, auch wenn die n und r unendlich gross (∞) sind.

Diese Theilung heisst *von der ersten Art*, wenn n, n_1, u. s. w. r, r', u. s. w. endliche Zahlen sind, dagegen *von der zweiten Art*, wenn ein Uebergang zur Grenze stattfindet.

Die so festgelegten Elemente der absoluten successiven Halbirung der Einheit (AA_1) sind es zugleich auch für jede andre Einheit $(A_n A_{n+1}) \equiv (AA_1)$ der Scala vom Anfang A und der Einheit (AA_1). Man hat dann dasselbe unter Befolgung der nämlichen Kriterien mit den Einheiten (AA_{∞_1}), $(AA_{\infty_1^2})$, $\ldots (AA_{\infty_1^\mu})$ zu thun und erhält so die Vielfachen der erhaltenen Segmente nach einer Zahl von (II). So denkt man sich, dass z. B. das Vielfache des durch Z dargestellten Segments nach der Zahl η mittelst derselben durch Z angegebenen Operation in dem Segment $(AA_\eta) \equiv (AA_1)\,\eta$ erhalten wird, welches auf diese Art vollständig bestimmt ist, ohne dass man mit den Sätzen d, § 79 und g, § 92 in Widerspruch tritt.

Bem. II. Die Zahlenclasse (II) ist durch das Hinzutreten der Symbole (Zahlen) für vervollständigt zu erachten, welche man durch die absolute successive Halbirung der unendlich grossen Einheiten in Uebereinstimmung mit Hyp. IV und den übrigen Hypothesen, aus welchen diese Theilung abgeleitet wird, erhält.[1]

c. *Wenn das durch die zwei Segmente (AX), (AX') gegebene Segment (XX') oder $(X'X)$ unbegrenzt klein wird, so wird das durch die zweiten Enden der Vielfachen von (AX) und (AX') nach derselben Zahl η gegebene Segment ebenfalls in absolutem Sinn unbegrenzt klein und umgekehrt.*

Jedes andre gegebene Element X_1 der Grundform ausser den Elementen der absoluten Halbirung liegt in dem unendlich grossen Gebiet einer gegebenen Einheit z. B. (AA_1) zwischen A_n und A_{n+1}. Wenn man ähnlich wie vorhin, als wir uns auf die unendlich grossen und unendlich kleinen Segmente endlicher Ordnung beschränkten, schliesst, so findet man, dass X_1 in einem Gebiet einer unendlich kleinen Einheit der unendlich grossen Ordnung μ zwischen den beiden Theilungselementen N_σ, $N_{\sigma+1}$ dieses Gebiets liegt, so dass $(N_\sigma N_{\sigma+1}) \equiv (AA_1)\,\frac{1}{\infty_1^\mu}$, wenn μ eine gegebene Zahl von (II) ist. Bei in

1) Siehe Beisp. 4, § 93 und die geometrische Darstellung in der Anm. § 105.

absolutem Sinn unbegrenzt wachsendem μ hat das Segment $(N_\sigma N_{\sigma+1})$ das Element X_1 zum absoluten Grenzelement und mithin ist auch X_η das Grenzelement des entsprechenden Segments $[(N_\sigma)_\eta (N_{\sigma+1})_\eta]$, wenn z. B.

$$[A(N_\sigma)_\eta] \equiv (AN_\sigma)\eta \text{ ist.}$$

Man kann in der That, wie früher für ein endliches μ, beweisen, dass $\frac{(AA_1)}{\infty_1{}^\mu}$ bei absolut unbegrenzt wachsendem μ kleiner als jedes gegebene Segment ε der Form wird (Hyp. VIII). Das Segment (AX_1) ist in diesem Fall durch das Symbol Z für $\mu = \Omega$ bestimmt; jedoch ist im Anfang $(AA_1)n$ hinzuzufügen, da X_1 zwischen A_n und A_{n+1} liegt.

Um zu beweisen, dass auch $[(N_\sigma)_\eta (N_{\sigma+1})_\eta]$ unbegrenzt klein wird, verfährt man folgendermassen. Das Segment $(N_\sigma N_{\sigma+1})$ kann bezüglich (AN_σ) endlich, unendlich klein oder unendlich gross sein.

In dem ersten Fall ist die Differenz zwischen $[A(N_{\sigma+1})_\eta]$ und $[A(N_\sigma)_\eta]$, wenn η von der Ordnung η' ist, bezügl. $(N_\sigma N_{\sigma+1})$ höchstens von der Ordnung η', weil dieselbe bezügl. $[A(N_\sigma)_\eta]$ höchstens endlich ist (c, § 91; a, § 86).

In dem zweiten Fall sind (AN_σ), $(AN_{\sigma+1})$ und mithin auch $[A(N_\sigma)_\eta]$, $[A(N_{\sigma+1})_\eta]$ untereinander endlich. Ihre Differenz ist daher bezügl. $(N_\sigma N_{\sigma+1})$ höchstens von der Ordnung η'.

Ist schliesslich $(N_\sigma N_{\sigma+1})$ bezügl. (AN_σ) unendlich gross von der Ordnung ϱ, so ist $(AN_{\sigma+1})$ bezügl. (AN_σ) unendlich gross von der Ordnung ϱ und also $[A \cdot (N_{\sigma+1})_\eta]$ bezügl. (AN_σ) unendlich gross von der Ordnung $\eta' + \varrho$ und bezügl. $[A(N_\sigma)_\eta]$ von der Ordnung ϱ. Die Differenz $[(N_\sigma)_\eta (N_{\sigma+1})_\eta]$ ist mithin bezügl. $[A(N_\sigma)_\eta]$ unendlich gross von der Ordnung ϱ und bezügl. (AN_σ) von der Ordnung $\eta' + \varrho$ und folglich bezügl. $(N_\sigma N_{\sigma+1})$ von der Ordnung η'.

Das Segment $[(N_\sigma)_\eta (N_{\sigma+1})_\eta]$ wird daher auf jeden Fall bei unbegrenzt abnehmendem $(N_\sigma N_{\sigma+1})$ d. h. bei in absolutem Sinn unbegrenzt wachsendem μ unbegrenzt klein.

Ist dagegen X_η gegeben und liegt dasselbe in dem genannten Segment, so ist das Element X_1 des Factors (AX_1) von (AX_η) nach der Zahl η zwischen N_σ und $N_{\sigma+1}$ enthalten (g, § 92).

Wenn sich das Element X_1' dem Element X_1 in absolutem Sinn unbegrenzt nähert, so tritt es in einem gegebenen Augenblick in das Segment $(N_\sigma X_1)$ oder $(X_1 N_{\sigma+1})$ ein und mithin auch X'_η in das Segment $[(N_\sigma)_\eta X_\eta]$ oder $[X_\eta (N_{\sigma+1})_\eta]$ (g, § 92) und wenn μ in absolutem Sinn unbegrenzt wächst, so hat X'_η das Element X_η zum Grenzelement (Def. I, § 102). Der umgekehrte Satz ist einleuchtend.

So beweist man für $(X_1 X_1')$, wenn X_1 und X_1' in absolutem Sinn variiren, analog wie bei Satz a, § 99, dass $(X_\eta X'_\eta)$ in absolutem Sinn unbegrenzt klein wird (Def. II, § 100) und umgekehrt; man bezieht sich dabei statt auf die Sätze h und i, § 95 auf die Hypothese VIII, den Satz b, § 162, die Sätze m, n, § 101 und auf den vorstehenden Beweis.

d. *Sind die Scalen festgestellt, so lässt sich jedes gegebene Segment* (AB) *auf eine einzige Art in eine beliebige unendlich grosse Anzahl* η *consecutiver gleicher Theile zerlegen.*

Der Beweis ist ähnlich wie bei Satz b, § 99, wenn man den vorigen Satz und d, § 102; Uebereink. § 91 zu Grunde legt.

d'. *Wenn die Grundform geschlossen ist, so kann man sie nach Feststellung der Scalen auf eine einzige Art in eine beliebige Anzahl* η *consecutiver gleicher Theile zerlegen.*

Man braucht nur anzunehmen, die Enden des in a und d betrachteten Segments fielen zusammen.

d''. *Ist ein Segment* (AB) *gegeben, so existirt immer ein Segment* $(AB)\frac{1}{\eta}$, *welches ein Factor des Segments* (AB) *von der Ordnung* η *ist.*

e. *Wenn* (AA') *der* η^{te} *und* (AA'') *der* η'^{te} *Theil von* (AB) *ist* $(\eta' > \eta)$, *so ist* (AA'') *kleiner als* (AA') *und wenn* η *in absolutem Sinn unbegrenzt wächst, so wird* (AA') *in absolutem Sinn unbegrenzt klein.*

Der erste Theil wird wie der analoge des Satzes d, § 99 bewiesen, indem man statt d, § 79 den Satz g, § 92 benutzt. Für den zweiten Theil nimmt man l, § 92 statt c' § 81 zu Hilfe.

§ 104. a. *Wenn man zu einem Segment* (AB) *von* B *aus ein Segment* (BC) *derselben oder entgegengesetzter Richtung addirt, so erhält man dasselbe Resultat wie wenn man zu dem Segment* (BC) *von* C *aus das mit* (AB) *identische Segment von derselben Richtung wie* (AB) *addirt. Das Resultat ist von dem Element, von welchem aus man beginnt die Operation auszuführen, unabhängig.*

Wir schreiben

$$(AB) + (BC) \equiv (AC), \quad (BC) + (AB) \equiv (AC).$$

Der Beweis ist demjenigen des Satzes e, § 99 analog. Wir stützen uns dabei auf dieselben Sätze § 69; Def. I, § 61; b, § 78, welche unabhängig von dem Begriff der Scala und mithin des Endlichen, Unendlichgrossen und Unendlichkleinen sind (Def. II, § 82), ferner statt auf c', § 81 auf Satz l, § 92 und statt auf g, § 95 auf Satz i, § 100.

Der erste Fall ist hier ausgeschlossen, weil es kein absolut unendlich kleines Segment (BC) mit verschiedenen Enden gibt (Def. I, § 100).

In dem zweiten Fall legen wir das Commutationsgesetz der Summe der Zahlen von (II) zu Grunde (d, f, § 93).

Man erhält in diesem Fall, wenn man dem Beweis des Satzes e, § 99 folgt:

$$(AA')\mu \cdot m < (AC) < (AA')\mu(m+1). \qquad (l, § 92)$$

Mithin stellt (XY) anstatt (AA') gleich zu sein, ein Vielfaches von (AA') nach der Zahl μ dar. Ebenso ist es mit $(X'Y')$, welches mit (XY) identisch ist Wenn die Zahl η unbegrenzt wächst, so nehmen nicht nur (AA') sondern auch $(AA')\ \mu$ (weil μ eine gegebene Zahl ist) in absolutem Sinn unbegrenzt ab. Der Satz ist also auch für den Fall 3) bewiesen; die Fälle 4) und 5) beweist man auf dieselbe Weise.

Bem. I. Die Identität wird hier in absolutem Sinn betrachtet (Def. III, § 9; Def. V, § 91).

Bem. II. Aehnlich wie Bem. I, § 99.

a′. *Ist ein Segment (AB) gegeben, so gibt es immer ein solches Segment (AC), dass*

$$(AC)\,\mu < (AB) < (AC)(\mu + 1).$$

Der Beweis ist ähnlich wie derjenige des Satzes e′, § 99. Es ist zu beachten, dass bezüglich des Commutationsgesetzes das Product $[(AA') + (A'C)]\,\mu$ dasselbe ist, als wenn $(A'C)$ einem Factor von (AA') gleich wäre und da in diesem Fall das Distributionsgesetz gilt (d, § 93), so gilt es auch, wenn von (AA') und $(A'C)$ nicht das eine ein Vielfaches des andern ist.

Bem. III. Um z. B. durch (AA_1) die Hälfte des durch das Symbol Z dargestellten Segments (AX) auszudrücken, genügt es die Hälfte der durch die Glieder des Symbols Z gegebenen Segmente zu nehmen und sie zu addiren; denn die Hälfte von $(AA_1)\frac{\alpha_n}{2^n}$ ist $(AA_1)\frac{\alpha_n}{2^n}\cdot\frac{1}{2} = (AA_1)\frac{\alpha_n}{2^{n+1}}$ (c und a, § 79). Daraus folgt, dass die Hälfte von (AX) durch das Symbol

$$\begin{aligned}(AA_1)\Big[\Big(&\frac{\alpha_1^{(0)}}{2^2} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{2^3} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{2^{n+1}} + \cdots\Big) \pm \\ &\pm \frac{m_1}{\infty_1}\Big(\frac{\alpha_1^{(1)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n+1}^{(1)}}{2^{n+1}} + \cdots\Big) + \cdots \\ &+ \frac{m_\mu}{\infty_1^{\mu}}\Big(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n\mu}^{(\mu)}}{2^{n\mu+1}} + \cdots\Big)\Big], \quad \mu = \Omega\end{aligned}$$

bestimmt ist. Will man ferner das dem Symbol $\left(\frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \cdots\right)$ in Bezug auf (AX) entsprechende Segment bestimmen, so führt man dieselbe Operation in Bezug auf sämmtliche Glieder dieses Symbols aus und addirt. Man erhält immer, wie man sieht, ein Symbol derselben Form wie Z, welches mithin bei unbegrenzt wachsendem n ein Element bestimmt, welches das zweite Ende des betrachteten Segments ist. U. s. w.

a″. *Sind die Scalen der Grundeinheit (AA_1) festgelegt, so sind die Scalen in Bezug auf jedes andre Segment als Grundeinheit von einem beliebigen gegebenen Element als Grundanfang aus vollständig bestimmt.*

Denn hat man wie vorausgesetzt die Scalen in Bezug auf die Einheit (AA_1) festgestellt so sind die Vielfachen und Factoren jedes Segments (AX) eindeutig und mithin die Scalen in Bezug auf dieses Segment (AX) von dem Element A als Grundanfang aus vollständig bestimmt, weil jede mit den obigen Symbolen in (AX) ausgeführte Operation sich auf eine analoge mit (AA_1) vorgenommene Operation reducirt. Die Eigenschaft gilt auch bezüglich eines andern beliebigen Punktes als Grundanfang (c, § 69).

b. *Das Segment, welches Vielfaches des η^{ten} Theiles (AC) eines Segments (AB) nach einer Zahl μ ist, ist Factor nach der Zahl η eines Segments, welches Vielfaches von (AB) nach der Zahl μ ist.*

Beweis analog wie bei f, § 99, wobei man sich auf die Bezeichnungen der Def. I, § 92, statt auf die Bez. I, § 79 bezieht.

b′. $$(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AB)\mu}{\eta},$$

denn $$(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AB)}{\eta}\mu. \qquad \text{(d, § 92)}$$

c. *Ein beliebiges Segment (AB) ist mit demselben Segment in entgegengesetzter Richtung durchlaufen identisch; d. h. $(AB) \equiv (BA)$.*

Beweis analog wie bei g, § 99, wobei man a, § 69; a, § 78; Def. I, und b, § 70, das Princip e, § 8, welche unabhängig vom Begriff der Scala mithin in absolutem Sinn gelten und den obigen Satz a statt e, § 99 zu Grunde legt.

d. *Theilt man ein Segment (AB) in η gleiche Theile und die sich ergebenden Theile in η gleiche Theile u. s. w., so erhält man eine Elementengruppe des gegebenen Segments die Enden einbegriffen, dessen übrige Elemente in absolutem Sinn Grenzelemente der gegebenen Gruppe sind.*

Wenn (AB) durch das Symbol Z gegeben ist (§ 103), so haben wir in dem Fall, dass die n endlich oder unendlich gross (∞) sind und dass μ gegeben oder $\mu = \Omega$ ist (Bem. II), gefunden, dass die Vielfachen und Factoren von (AB) nach den Zahlen von (II) mittelst der vorher festgelegten Scalen bestimmt sind und dass die Segmente, welche die Mittelelemente darstellen, mittelst der ursprünglichen Einheit (AA_1) gemäss der zur Bestimmung der Scalen (§ 103) aufgestellten Uebereinkunft bestimmt werden können. Es gilt daher für (AB), was für (AA_1) gilt (a″, § 103) und der Satz ist für $\eta = 2$ bewiesen.

Die Elemente von (AA_1) können durch das Symbol Z des § 103 bezeichnet werden, wenn man die successive Theilung in p gleiche Theile vornimmt. Auf ähnliche Weise wie vorher beweist man, dass dies auch für (AB) gilt. Der Satz besteht also auch für $\eta = p$.

Ist $\eta = \infty_1$, so bemerken wir, dass die erste Reihe in dem Symbol, welches die durch die Division mit ∞_1 erhaltenen Elemente angibt, die folgende ist:

$$(1) \qquad \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{\infty_1} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\infty_1^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{\infty_1^n} + \cdots\right),$$

worin n endlich ist und die α die Zeichen $0, 1, \ldots, n, \ldots, \infty_1\left(\frac{\beta_1}{2} + \cdots + \frac{\beta_n}{2^n}\right) \pm$ $\pm\, m \cdots \infty_1 - 1$ haben können ($\beta = 0$, 1, den Fall, dass alle $\beta = 0$ sind, ausgeschlossen). Wenn n unbegrenzt wächst und man beschränkt sich auf die unendlich grossen und mithin auch unendlich kleinen Zahlen endlicher Ordnung allein, alsdann muss man mit den ∞_1 bei dieser Reihe stehen bleiben. Sie bestimmt ein Grenzsegment (-zahl), welches durch das Symbol Z des § 103 ausgedrückt werden kann. Substituirt man z. B. dem $\alpha_1^{(0)}$ das Symbol $\infty_1\left(\frac{\beta_1^{(0)}}{2} + \right.$ $\left. + \cdots + \frac{\beta_n^{(0)}}{2^n} + \cdots\right)$, ($\beta = 0$, 1), und den übrigen α das Symbol 0, so erhält man genau eine beliebige in der ersten Klammer des Symbols Z des § 103 enthaltene Zahl. Wenn man der obigen Zahl $\pm\, m$ zufügt, so erhält man noch $\pm \frac{m}{\infty_1}$.

Wenn man dagegen auch unendlich kleine Segmente unendlich grosser Ordnung betrachtet, so muss man z. B. zu dem unendlich kleinen Gebiet der

Ordnung $\infty_1 - r_1$ übergehen und man erhält mithin von dem vorher auf die besprochene Art gegebenen Anfang an noch die Symbole:

$$
\begin{array}{l}
\pm \dfrac{m_1}{\infty_1^{\infty_1 - r_1}}\left(\dfrac{\alpha_1^{(1)}}{\infty_1} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{\infty_1^{n_1}}\right) \pm \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\pm \dfrac{m_2}{\infty_1^{2\infty_1 - r_2}}\left(\dfrac{\alpha_1^{(2)}}{\infty_1} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n_2}^{(2)}}{\infty_1^{n_2}}\right) \pm \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\pm \dfrac{m_s}{\infty_1^{s\infty_1 - r_s}}\left(\dfrac{\alpha_1^{(s)}}{\infty_1} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n_s}^{(s)}}{\infty_1^{n_s}}\right).
\end{array}
$$

Die Elemente, welche den einzelnen Gliedern entsprechen, wenn n_1, n_2, $\ldots$, n_s unbegrenzt wachsen ($\lim n = \infty$), werden auf dieselbe Weise, wie das dem Symbol (1) in absolutem Sinn entsprechende Element bestimmt.

Beschränkt man sich bei wachsendem s auf die unendlich grossen Zahlen von einer mit ∞^{∞_1} endlichen Ordnung, welche eine geschlossene Gruppe im Sinn des Satzes m, § 93 bilden, so stellt das obige Symbol ein Element oder ein Segment der Grundform vom Grundanfang A aus dar.

Ist η ein mit ∞_1 endliche Zahl, so ist es η^n auch und wir haben mithin für η in diesem Fall dasselbe Symbol, wenn man η an die Stelle von ∞_1 setzt.

Für die Zahl ∞_1^σ erhält man ein dem vorigen analoges Symbol; man braucht nur ∞_1^σ dem ∞_1 zu substituiren, wobei die α der Null und allen ganzen Zahlen von 1 bis $\infty_1^\sigma - 1$ und allen Zeichen, welche man durch die successive Halbirung in Bezug auf die Segmente $(AA_{\infty_1^\sigma})$, $(AA_{\infty_1^{\sigma-1}})$ u. s. w. als Einheit erhält (h′, § 99), gleich sind.

Ist η bezüglich ∞_1^σ endlich, so genügt es η an die Stelle von ∞_1^σ zu setzen und man erhält

$$
\begin{array}{l}
Z_1 = (AA_1)\left(\dfrac{\alpha_1^{(0)}}{\eta} + \dfrac{\alpha_2^{(0)}}{\eta^2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n^{(0)}}{\eta^n} + \cdots\right) \pm \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\pm \dfrac{m_1}{\infty_1^{\sigma\infty_1 - r_1}}\left(\dfrac{\alpha_1^{(1)}}{\eta} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{\eta^{n_1}} + \cdots\right) \pm \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\pm \dfrac{m_2}{\infty_1^{\sigma\infty_1 2 - r_2}}\left(\dfrac{\alpha_1^{(2)}}{\eta} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n_2}^{(2)}}{\eta^{n_2}} + \cdots\right) \pm \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\pm \dfrac{m_s}{\infty_1^{\sigma s\infty_1 - r_s}}\left(\dfrac{\alpha_1^{(s)}}{\eta} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n_s}^{(s)}}{\eta^{n_s}} + \cdots\right) \pm \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\pm \dfrac{m_\mu}{\infty_1^{\sigma\infty_1\mu - r_\mu}}\left(\dfrac{\alpha_1^{(\mu)}}{\eta} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{\eta^{n_\mu}} + \cdots\right).
\end{array}
$$

Die α können darin die Zahl 0, die ganzen Zahlen 1, 2, $\ldots$, $\eta - 1$ und die Zeichen, die man durch die successive Halbirung in Bezug auf die Segmente

$(AA\infty_1'')$ u. s. w. als Einheiten erhält, sein. Die n und s sind ganze endliche gegebene oder unbegrenzt wachsende Zahlen und die r ganze endliche gegebene Zahlen.

Def. I. Wenn μ eine gegebene Zahl ist, so liefert das Symbol Z_1 *ein Element*, welches wir *das Element der successiven Theilung von* (AA_1) *in* η *gleiche Theile* nennen.

Da jedes andre Element zwischen zweien von diesen Elementen, deren Segment gleich $\frac{1}{\eta^n \mu \infty_1^{\sigma\infty_1\mu - r_\mu}}$ ist, liegt, so ist das Element X bei einem in absolutem Sinn unbegrenzt wachsenden μ das Grenzelement der durch das obige Symbol angezeigten Operation — und der Satz d ist somit bewiesen.

Bem. I. Für die unendlich grossen Zahlen ist wie man sieht das Symbol Z_1 von dem Z des § 103, welches für endliche Zahlen gilt, etwas verschieden. Es ist leicht, den Grund einzusehen. Substituirt man nämlich z. B. in dem Symbol Z der 2 die Zahl ∞_1, so liefern die zweite Klammer und ebenso die folgenden bis zu derjenigen, die neben $\frac{m_{\infty_1 - r_1}}{\infty^{\infty_1 - r_1}}$ steht, Zahlen des Symbols (1).

d'. *Die Theile eines gegebenen Segments* (AB) *von* A *aus können durch das Symbol* Z *des* § 103, *in welchem an die Stelle von* 2 *eine beliebige ganze endliche Zahl* p *gesetzt werden kann, oder auch durch das Symbol* Z_1 *dargestellt werden.*

Dies geht aus dem Beweis des Satzes d hervor.

e. *Eine Gruppe einer unendlich grossen Anzahl* (Ω) *von Elementen* (X), *die in einem gegebenen Segment* (AB) *enthalten ist, hat wenigstens ein Grenzelement.*

Es genügt (AB) in η gleiche Theile zu theilen (d, § 103); wenigstens in einem derselben sind Ω Punkte der Gruppe (X), wenn man sich die Classe (II) im Sinn der Bem. II, § 103 vervollständigt denkt. $(A'B')$ sei dieser Theil. Man kann η_1 hinreichend gross wählen, so dass in $(A'B')$ wenigstens zwei Elemente A'', B'' der Theilung von $(AB)_0$ in η_1 gleiche Theile vorhanden sind, welche von A' und B' verschieden sind. In einem der Segmente $(A'A'')$, $(A''B'')$, $(B''B')$ müssen Ω Punkte X sein. Dasselbe ist der Fall, wenn in $(A'B')$ eine grössere Anzahl Punkte der Theilung in η_1 gleiche Theile fällt. Lässt man η_1 zunehmen, so gelangt man zur Construction einer Reihe von Segmenten von der Form $\frac{(AB)}{\eta}$, die successive das eine in dem andern enthalten sind und eine Anzahl Ω von Punkten enthalten. Bei unbegrenzt wachsendem η wird $\frac{(AB)}{\eta}$ unbegrenzt klein (e, § 103) und die genannte Reihe von Segmenten bestimmt mithin ein Element L derart, dass in jedes willkürlich kleine Segment $\frac{(AB)}{\eta}$, welches L enthält, Elemente X fallen; daraus ergibt sich e.

Bem. II. Für $\Omega = \infty$ gilt dieser Beweis auch bezüglich einer Einheit an Stelle des in § 98 gegebenen Beweises.

f. *Die Hypothese VIII ist von den früheren unabhängig.*

Diese Unabhängigkeit geht aus dem Symbol Z hervor. Um einen besseren Anhaltspunkt für die Vorstellung zu erhalten ohne die Allgemeinheit der Hypothese zu beeinträchtigen, wollen wir annehmen, nur die unendlich grossen und

unendlich kleinen Gebiete endlicher Ordnung seien gegeben, welche wie wir wissen der Eigenschaft der Hypothese VII genügen (m, § 93). Wir betrachten dann die geordnete Elementengruppe, die man aus dem Symbol Z erhält, wenn m eine beliebige gegebene Zahl ist. — Wir haben alle Halbirungselemente (Def. I, § 103). Es ist nun leicht einzusehen, dass diese Elementengruppe genau den der Hyp. VIII vorausgehenden Hypothesen entspricht, vorausgesetzt, dass die Hyp. V alsdann auf die genannten Gebiete beschränkt wird.

Denn betrachtet man zwei durch

$$Z' = (AA_1)\left[\left(\frac{\alpha'^{(0)}_1}{2} + \cdots\right) \pm \frac{m'_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha'^{(1)}_1}{2} + \cdots\right) \pm \cdots \pm \frac{m'_{r'}}{\infty_1^{r'}}\left(\frac{\alpha'^{(r')}_1}{2} + \cdots\right)\right]$$

$$Z'' = (AA_1)\left[\left(\frac{\alpha''^{(0)}_1}{2} + \cdots\right) \pm \frac{m''_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha''^{(1)}_1}{2} + \cdots\right) \pm \cdots \pm \frac{m''_{r''}}{\infty_1^{r''}}\left(\frac{\alpha''^{(r'')}_1}{2} + \cdots\right)\right]$$

gegebenen Elemente X' und X'', so stellt die Differenz zwischen Z' und Z'' gerade das Segment $(X'X'')$ dar (a) und jedes Halbirungselement von $(X'X'')$ ist ebenfalls in dem Symbol Z enthalten (§ 46), worin r eine gegebene Zahl von (I) ist (Seite 172). Wenn $(X'X'')$ unendlich klein z. B. von der Ordnung s ist $(s \geqq 0)$, so erhält man ein Element Y, welches derart ist, dass z. B. $2(X'Y) = (X'X'')$, aus Z', wenn man in der auf $\frac{m'_s}{\infty_1^s}$ folgenden Klammer die Hälfte der Differenz $(X'X'')$, welche durch das Symbol $Z''' = Z'' - Z'$ ausgedrückt wird, hinzufügt.

Wenn dagegen r unendlich gross (∞) ist oder wenn man Z während seines Entstehens bei unbegrenzt wachsendem r betrachtet, so erhält man ein Symbol, welches bei gegebenem r nicht auf Z zurückzuführen ist, wie das Symbol

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n}$$

bei unendlich grossem n sich nicht auf dieselbe Form wie bei endlichem n reduciren lässt. Denn bei zwei gleichen durch Z ausgedrückten Segmenten müssen die α, n und r bezüglich in der Ordnung, in der sie gegeben sind, gleich sein. Dies ist unmöglich, wenn r bei einem der Segmente eine gegebene Zahl von (I) ist (§ 46), bei dem andern dagegen grösser als jede gegebene Zahl wird.

§ 105. a. *Das Segment* $(AC)\frac{\mu}{\eta}$ *ist in Bezug auf* (AC)

1) *endlich, wenn* μ *und* η *endlich oder unendlich gross von derselben Ordnung sind;*

2) *unendlich gross von der Ordnung* $\mu_1 - \eta_1$, *wenn* μ *unendlich gross von der Ordnung* μ_1 *und* η *unendlich gross von der Ordnung* η_1 *und* $\mu_1 > \eta_1$ *ist;*

3) *unendlich klein von der Ordnung* $\eta_1 - \mu_1$, *wenn in dem zweiten Fall* $\eta_1 > \mu_1$ *ist.*

Denn η ist eine Zahl des Gebiets ∞^{η_1} und $\frac{(AC)}{\eta}$ mithin ein Unendlichkleines von der Ordnung η_1. Ein Vielfaches von $\frac{(AC)}{\eta}$ nach einer unendlich grossen

Zahl von der Ordnung η_1 ist in Bezug auf (AC) endlich (f', § 92) und wenn daher μ unendlich gross von der Ordnung $\mu_1 > \eta_1$ ist, so ist $(AC)\frac{\mu}{\eta}$ ein Unendlichgrosses von der Ordnung $\mu_1 - \eta_1$ (f'', § 92 und d, § 93). Aehnlich im dritten Fall.

Def. I. Zwei Segmente, welche einen Factor nach einer ganzen Zahl von (II) enthalten, heissen *commensurabel erster Art.* Zwei Segmente dagegen, von denen man das eine aus dem andern oder aus einem dritten durch die unbegrenzte Theilung in η gleiche Theile, die aber in absolutem Sinn nicht unbegrenzt ist, erhält, heissen *commensurabel von der zweiten Art.* Die beiden Arten nennt man *commensurabel in absolutem Sinn.*

In allen andern Fällen heissen die Segmente *incommensurabel in absolutem Sinn.*

Bem. I. Beschränkt man sich auf eine einzige Masseinheit, so fehlen die commensurabelen Segmente zweiter Art. [1])

b. *Segmente, die mit einem dritten commensurabel erster Art sind, sind unter sich commensurabel.*

Denn wenn sie einen dem dritten gleichen Factor enthalten, das eine nach der Zahl μ, das andre nach η und $\mu = \eta$, so haben sie einen gemeinsamen Factor. Ist dagegen $\mu > \eta$, so sind die Factoren nach der Zahl $\mu \cdot \eta$ des einen und des andern dem Factor des dritten nach derselben Zahl gleich.

Bem. II. Daraus folgt jedoch nicht, dass zwei mit einem dritten incommensurabele Segmente auch unter sich incommensurabel sind; vielmehr können zwei commensurabele Segmente mit einem dritten incommensurabel sein.

Def. II. Die den commensurabelen Segmenten erster und zweiter Art und den mit der Grundeinheit unmessbaren entsprechenden Symbole heissen bezüglich *absolute Rationalzahlen der ersten und zweiten Art und absolute Irrationalzahlen.*

c. *Sind zwei Segmente (AB) und (AC) und $(AB) < (AC)$ gegeben, so existirt immer eine solche Rationalzahl η, dass*

$$(AB)\eta \leqq (AC) < (AB)(\eta + 1)$$

ist, unter 1 die Grundeinheit verstanden.

Denn wenn (AB) in Bezug auf (AC) unendlich klein von der Ordnung ϱ ist, so gibt es immer eine Zahl η_1 von der Ordnung ϱ derart, dass

$$(AB)\eta_1 \leqq (AC) < (AB)(\eta_1 + 1_\varrho)$$

ist, wenn $1_\varrho = \infty_1{}^\varrho$ ist (1, § 92). Wir wollen dieses Vielfache von (AB), welches zwischen den beiden Vielfachen $(AB)\eta_1$ und $(AB)(\eta_1 + 1_\varrho)$ liegt, mit $(A_1'A_{x_1}\varrho)$ und den Theil von (AC), welcher in dem Segment $(A_1'A_{x_1}\varrho)$ enthalten ist, mit $(A_1'C_1)$ bezeichnen. Es genügt in $(AA_{x_1}\varrho)$ die Unendlichkleinen von der Ordnung ϱ zu betrachten, welche mit (AA_1), welches die

1) Für unsere Untersuchungen über die Fundamente der Geometrie haben wir nicht nöthig, die Existenz der in relativem oder absolutem Sinn incommensurabelen und mithin auch nicht der commensurabelen Segmente der zweiten Art zu beweisen. In beiden Fällen genügt uns die Hyp. VI oder VIII. Wir bedürfen übrigens auch der Hyp. V nicht, ebensowenig wie der Sätze, die von ihr abhängen, und der Symbole, welche die verschiedenen Segmente der Graden von einem Anfang aus und in Bezug auf eine gegebene Einheit darstellen.

Einheit 1 darstellt, endlich sind (a, § 86 und c, § 91). Wenn C_1 kein Element ist, das man durch die Zerlegung in gleiche Theile in den verschiedenen in Bezug auf $(A_1'A_{\infty_1}v)$ unendlich kleinen Einheiten 1ter, 2ter, ..., ϱ^{ter} Ordnung erhalten hat — in welchem Fall η eine absolute oder relative (Def. II) Rationalzahl und derart wäre, dass $(AB)\eta \equiv (AC)$ — so würde das Element C_1 dem unendlich kleinen Gebiet ϱ^{ter} Ordnung in der Umgebung eines Elements η_2 von $(A_1'A_{\infty_1}v)$ angehören, welches durch eine absolute oder relative Rationalzahl dargestellt wird. Weil man nun das unendlich kleine Gebiet um dieses Element η_2 dadurch erhält, dass man auf der einen oder andern Seite successive die Einheit 1 aufträgt, so sieht man, dass das Element C_1 zwischen zwei durch die Zahlen $\eta_2 + m$, $\eta_2 + (m+1)$ oder auch $\eta_2 - m$, $\eta_2 - (m+1)$ bezeichneten Elementen liegen muss.

d. *Als erste das absolute (relative) Continuum bildende Form kann man das in absolutem (relativem) Sinn unbegrenzt Kleine betrachten. Handelt es sich um das relative Continuum, so kann man in absolutem Sinn auch ein Unendlichkleines von bestimmter Ordnung als solche ansehen.*

Zuerst wollen wir das relative Continuum betrachten und (AB) sei ein endliches, (AA') ein unendlich kleines Segment erster Ordnung. Dann ist $(AA')\infty_1$ ein in Bezug auf (AB) endliches Segment (f, § 92). Und weil wir im Gebiet nur einer Einheit bleiben und keine andern unendlich grossen Gebiete betrachten, so kann man hier auch sagen, $(AA')\infty$ gäbe ein in Bezug auf (AB) endliches Segment.

Wir theilen nun (AB) in Bezug auf (AB) als Einheit in n gleiche Theile (b, § 99) und bezeichnen dieselben successive mit $p_1, p_2, \ldots, p_n$, während wir einen beliebigen dieser Theile p nennen. Es ist:

$$(AB) \equiv p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$$

oder auch

$$(AB) \equiv \sum_{m=1}^{m=n} p_m, \tag{1}$$

wenn wir mit $\sum_{m=1}^{m=n} p_m$ die Summe der n Theile p bezeichnen.

Lassen wir nun n unbegrenzt wachsen, so nimmt p seinerseits unbegrenzt ab (d, § 99) und man erhält

$$(AB) \equiv \sum_{m=1}^{m=\infty} p_m. \tag{2}$$

Hier wird also (AB) als eine Summe unbegrenzt kleiner Theile dargestellt.

Dasselbe gilt, wenn wir (AB) in Bezug auf die absolute Einheit betrachten (§ 92).

Denken wir uns nun ein Unendlichkleines (AA'), das z. B. η^{ter} Ordnung in Bezug auf (AB) ist. Dann ist z. B.

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty_1\eta} (AA')_\mu$$

ein in Bezug auf (AB) endliches Segment (f, § 91). Nimmt man (AA') zur Grundeinheit, so erhält man:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\eta_1\cdot m}(AA')_\mu \leqq (AB) < \sum_{\mu=1}^{\mu=\eta_1(m+1)}(AA')_\mu, \qquad (1, 92)$$

worin η eine ganze Zahl von (II) ist (Def. V, § 91) oder auch:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\eta}(AA')_\mu \leqq (AB) < \sum_{\mu=1}^{\mu=\eta+1}(AA')_\mu, \qquad (a)$$

worin η eine absolute Rationalzahl ist (c).

Bem. III. Wir bemerken jedoch, dass man in diesem Fall aus dem Gebiet der Einheiten derselben Art wie (AB) heraustreten muss (Def. I, § 86), da das Unendlichkleine nicht als Null betrachtet wird und die noch so oft wiederholte Null immer Null gibt. Es ist desshalb, wenn man in dem Gebiet nur einer Einheit bleibt, vorzuziehen, sich, wie es gewöhnlich geschieht, an den ersten Fall zu halten.

Es folgt daraus, dass eine Construction der absoluten Grundform mittelst des absoluten Unendlichkleinen, welches für uns die absolute Null ist, unmöglich ist (Def. I, § 100).[1])

---

1) *Geometrische Darstellung eines Theils des absoluten Continuums.*

Wir wollen zuerst das unendlich grosse Gebiet erster Ordnung und die Scalen auch in entgegengesetzter Richtung von dem Grundanfang aus betrachten. Die Zahlen von (II) lassen sich in die Serien $S_1^{(0)}, S_1^{(1)}, \ldots, S_1^{(m)}, \ldots$ gruppiren (1, § 93). Jedem Segment der Form $(AA_1)\frac{\infty_1}{n}$ entspricht eine Reihe $S_1^{\frac{1}{n}}$ und mithin jedem Segment von der Form

$$(AA_1)\infty_1\left(\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_m}{n^m}+\cdots\right),$$

wenn $\lim m=\infty$, $\alpha=0, 1, \ldots, n-1$ ist, eine Reihe S_1. Daraus geht hervor, dass, wenn man von den Unendlichkleinen in Bezug auf die Grundeinheit absieht und nur die unendlich grossen Segmente erster Ordnung betrachtet, man die Segmente dieses Theils der Grundform den Punkten der gewöhnlichen *Euclid*'schen Ebene (xy) entsprechen lassen kann, indem man nämlich die Werthe von y den Scalen S, deren Anfänge bezüglich mit 0, $\frac{\infty_1}{n}, \cdots\infty_1\cdots 2\infty_1\cdots\infty_1\left(\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\cdots+\frac{\alpha_m}{n^m}+\cdots\right)$ bezeichnet sind, und diejenigen von x den Segmenten der Reihen S selbst von ihren Anfängen aus entsprechen lässt. Um auch die negativen Werthe von y benutzen zu können, muss man die Scalen S_1, die man für die negativen Segmente des Grundcontinuums erhält, in Betracht ziehen (§ 112). Zwei unbegrenzt nahe Elemente liegen in diesem Continuum in einer Reihe S_1. Zweien solchen Elementen entsprechen zwei unbegrenzt nahe Punkte der Ebene; diese Eigenschaft darf jedoch nicht umgekehrt werden, weil die zwei entsprechenden Elemente in der Grundform zwei unbegrenzt nahen Reihen S_1 angehören.

Fig. 13.

Die zur Axe der x parallelen Graden, welche sämmtlich vom Grundanfang an dieselbe Richtung haben, stellen die Reihen S_1 dar, die ihren Anfang im Durchschnittspunkt mit der Axe der y haben. Wenn wir uns alle parallele Linien, die in der Ebene liegen, welche von den durch 0 und ∞_1 gezogenen Parallelen begrenzt wird, von 0 bis zum Punkt ∞_1 in derselben Richtung durchlaufen denken, so erhalten wir eine klare Vorstellung von dem endlichen und unendlich grossen Gebiet erster Ordnung. Dabei müssen wir uns aber denken, die Parallelen lägen nicht *übereinander* und seien voneinander unabhängig, sondern sie folgten *hintereinander* und würden die eine durch die andre bestimmt; das heisst also sie hätten nicht denselben gemeinschaftlichen Punkt im Unendlichen und bildeten ein untrennbares Ganze. Wenn man sich dann das Segment $(0\cdots\infty_1)$ in dem

11.

Proportionalitätszusammenhang zwischen den Segmenten einer oder mehrerer Grundformen.

§ 106. *Def. I.* Sind zwei Segmente (AC), $(A'C')$ zweier verschiedener oder zusammenfallender Grundformen gegeben (Hyp. I, II und Def. V, § 57), so kann man einen Zusammenhang zwischen ihren Elementen und den Elementen ihrer Vielfachen derart feststellen, dass den Enden A und C von (AC) die Elemente A' und C' von $(A'C')$ und den Enden der Vielfachen von (AC) oder der durch successive Theilung in eine gegebene Anzahl η gleicher Segmente (e, § 99 und d, § 103) aus (AC) erhaltenen Theile die Enden derselben Vielfachen oder derselben gleichen Theile von $(A'C')$ derart entsprechen, dass einem zwischen zwei der obigen Elemente der ersten Form gelegenen Element wenigstens ein zwischen zwei entsprechenden Elementen der zweiten Form gelegenes Element entspricht.

Einen solchen Zusammenhang nennen wir *Proportionalitätszusammenhang* zwischen den beiden Grundformen, in welchen die beiden Segmente (AC) und $(A'C')$ liegen und welche durch (AC) und $(A'C')$ bestimmt sind.

Die entsprechenden Segmente heissen *einander proportionale* Segmente.

a. *Wenn (BD) und (EF) mit (AC) commensurabele Segmente sind, die man durch die successive Theilung von (AC) in η gleiche Theile erhalten hat und $(B'D')$, $(E'F')$ sind die den beiden ersten in dem durch (AC), $(A'C')$ bestimmten Proportionalitätszusammenhang entsprechenden proportionalen Segmente, so ist, je nachdem $(BD) \gtreqqless (EF)$ ist, $(B'D') \gtreqqless (E'F')$.*

Denn es ist $(BD) \equiv (AC)\frac{\mu}{\eta^r}$ und $(EF) \equiv (AC)\frac{\mu_1}{\eta^{r_1}}$ und mithin auch $(B'D') \equiv (A'C')\frac{\mu}{\eta^r}$ und $(E'F') \equiv (A'C')\frac{\mu_1}{\eta^{r_1}}$ (Def. I). Je nachdem nun $(BD) \gtreqqless (EF)$, ist $(AC)\frac{\mu}{\eta^r} \gtreqqless (AC)\frac{\mu_1}{\eta^{r_1}}$ (Def. II, § 61) und auch $(AC)\frac{\mu\eta^{r_1}}{\eta^r\eta^{r_1}} \gtreqqless (AC)\frac{\mu_1\eta^r}{\eta^{r_1}\eta^r}$ (b', § 79; d, § 92) und daher $(A'C')\frac{\mu\eta^{r_1}}{\eta^r\eta^{r_1}} \gtreqqless (A'C')\frac{\mu_1\eta^r}{\eta^{r_1}\eta^r}$ (a, § 79 oder a, § 92; d, § 79 oder g, § 92), woraus man $(A'C')\frac{\mu}{\eta^r} \gtreqqless (A'C')\frac{\mu_1}{\eta^{r_1}}$ (b', § 79 und d', § 92) oder $(B'D') \gtreqqless (E'F')$ erhält (Def. II, § 61).

b. *Dem Grenzelement einer immer wachsenden oder abnehmenden Reihe von Segmenten, welche (in absolutem Sinn erster Art) commensurabel und durch die*

Segment (AB) condensirt denkt, so erhält man ein Continuum, dessen Grundeinheit $(1 \dots 0)$ ein actuelles Unendlichkleines ist. Auf dieselbe Weise können wir mit den unendlich grossen Gebieten der Ordnung $1, 2 \dots m$ verfahren und erhalten:

Wenn man von den in Bezug auf eine Grundeinheit Unendlichkleinen absieht, so kann man alle Segmente des endlichen und unendlich grossen Gebiets endlicher Ordnung m eindeutig und in derselben Ordnung in einem System paralleler Graden des Euclid'schen Raums zu m Dimensionen darstellen.

successive Theilung von (AC) in η gleiche Theile entstanden sind, in einer Grundform entspricht das Grenzelement der Reihe der proportionalen Segmente in einer andern oder derselben Grundform.

Wenn eine immer wachsende (oder abnehmende) Reihe (in relativem und absolutem Sinn) commensurabeler Segmente, welche Symbole von der Form $(AC)\frac{\mu}{\eta^r}$ haben und durch die successive Theilung in η gleiche Theile erhalten wurden, ein Grenzelement X hat, so ist die Reihe der entsprechenden Segmente $(A'C')\frac{\mu}{\eta^r}$ immer wachsend (oder abnehmend) (Def. I) und hat ebenfalls ein Grenzelement X' (a; d, § 97; oder d, § 102). Wir behaupten, dass X' und nur X' dem X entspricht und umgekehrt. Das Element X ist Grenzelement einer andern immer abnehmenden (oder immer wachsenden) Reihe commensurabeler Segmente von der Form $(AC)\frac{\mu}{\eta^r}$ (h, § 99 und d, § 104). Die entsprechende Reihe muss X' zum Grenzelement haben, denn hätte sie ein Grenzelement Y', das von X' verschieden ist, so gäbe es zwischen X' und Y' ein von X' und Y' verschiedenes Element Z' der successiven Theilung durch η (h, § 99 oder d, § 104), welchem ein von X verschiedenes zwischen den beiden oben genannten Reihen gelegenes Element Z entsprechen müsste (Def. I), was unmöglich ist (a; b, § 96 und a, § 101).

c. *Wenn (BD) und (EF) Segmente sind, denen bezüglich $(B'D')$ und $(E'F')$ in dem durch (AC), $(A'C')$ bestimmten Proportionalitätszusammenhang entsprechen, so ist, je nachdem $(BD) \gtreqless (EF)$ ist, $(B'D') \gtreqless (E'F')$.*

(AB') sei das in der Richtung von (AC) und in der Grundform von (AC) dem (BD) gleiche Segment (b', § 69 oder a', § 70 und Hyp. I u. II). Wenn $(AB') < (AC)$, so ist das Element B' in (AC) enthalten (c', § 68; b, § 36 und Def. I, § 61) und mithin auch die Reihe der commensurabelen Segmente, welche es von A aus bestimmt (b; h, § 99 oder d, § 104); folglich sind auch die Reihe proportionaler Segmente in der Grundform von $(A'C')$ und ihr Grenzelement in $(A'C')$ enthalten (b; d, § 97 oder d, § 102). Ist $(AB') > (AC)$, so liegt (AB') zwischen zwei successiven Vielfachen von (AC) nach den Zahlen μ und $\mu + 1$, wenn es nicht eines dieser Vielfachen selbst ist (c', § 81 oder c, § 105) und man kommt damit wieder auf den vorigen Fall zurück.

Ist $(BD) = (EF)$, so folgt also $(B'D') = (E'F')$ (b; Def. II, § 61 und Def. I). Wenn $(BD) > (EF)$ ist, so nimmt man die (BD) und (EF) gleichen Segmente (AB_1') und (AB'') in der Grundform von (AC) und bezeichnet ein Segment, welches sich unbegrenzt dem B_1' nähert, mit $(AC)\frac{\mu}{\eta^r}$ und ein Segment, welches sich unbegrenzt dem B'' nähert, mit $(AC)\frac{\mu_1}{\eta^{r_1}}$. Alsdann kann $(AC)\frac{\mu}{\eta^r}$ grösser als jeder Zustand $(AC)\frac{\mu_1}{\eta^{r_1}}$ des ersten variabelen Segments gewählt werden und es ist mithin in diesem Fall $(A'C')\frac{\mu}{\eta^r}$ grösser als jeder

Zustand des variabelen Segments $(A'C') \frac{\mu_1}{\eta^{r_1}}$ (a). Wir erhalten also $(A'B_1')$ oder $(B'D') > (A'B_1'')$ oder als $(E'F')$ (b). Der Satz ist damit bewiesen.

d. *Der Proportionalitätszusammenhang ist eindeutig und von derselben Ordnung.*

Denn jedes Element X der ersten Form ist entweder ein Element der Gruppen, die man durch die in relativem oder absolutem Sinn vorgenommene successive Theilung von (AC) oder der consecutiven (AC) gleichen Segmente in η gleiche Theile erhalten hat oder es ist die Grenze dieser Gruppen (h, § 99; c', § 81; d, § 104; c, § 105), woraus d folgt (Def. I und b; Def. III, § 42).

e. *Dem Grenzelement einer immer wachsenden oder abnehmenden Reihe beliebiger Segmente in der Grundform entspricht das Grenzelement der Reihe proportionaler Segmente in einer andern oder derselben Grundform.*

Das Grenzelement X der ersten Reihe kann als die Grenze einer Reihe commensurabeler Segmente betrachtet werden, die man durch die successive Theilung (in absolutem Sinn von der ersten Art) in η gleiche Theile erhalten hat (h, § 99; Def. I, § 105; Def. I, § 103 und d, § 104). Das Grenzelement der entsprechenden Reihe, die ebenfalls stets wächst oder abnimmt (a und c), ist die Grenze der entsprechenden Reihe commensurabeler Segmente. Denn wenn sich X_η unbegrenzt dem X nähert, so nähert sich das entsprechende Element X_η' unbegrenzt dem X', weil $(X_\eta X)$ oder (XX_η) und folglich auch das entsprechende Segment $(X_\eta' X')$ oder $(X'X_\eta')$ in Bezug auf $(A'C')$ kleiner als jedes commensurabele gegebene Segment werden muss (c).

e'. *Bei dem Proportionalitätszusammenhang entsprechen den Elementen, welche ein Segment (AB) in eine beliebige Anzahl μ gleicher Theile theilen, der Reihenfolge nach die Elemente, welche das entsprechende Segment in eine gleiche Anzahl gleicher Theile zerlegen* (e; h, § 99 oder d, § 104).

f. *Ist $(AC) \equiv (A'C')$, so ist der Proportionalitätszusammenhang derjenige der Identität.*

Denn der Identitätszusammenhang (b, Def. § 60) genügt der Def. I (d, d', § 79; d', § 97 oder g, g', § 92 und d', § 102).

g. *Bei dem Proportionalitätszusammenhang kann man einem beliebigen Segment (AB) ein Segment $(A''B'') \equiv (AB)$ substituiren.*

Denn jedes Vielfache oder jeder Factor von (AB) ist nach derselben Zahl auch Vielfaches und Factor von $(A''B'')$ (Def. I, II, § 79 oder § 92) und da der Proportionalitätszusammenhang durch die Vielfachen und Factoren von (AC) und $(A'C')$ bestimmt wird, so ist es klar, dass wir $(A''B'')$ an die Stelle von (AB) setzen können, auch wenn (AB) mit (AC) zusammenfällt.

Bem. I. Mit andern Worten: Bei dem Proportionalitätszusammenhang wird von den Positionsverhältnissen zwischen den Segmenten abgesehen (Bem. I, § 38).

Def. II. Der Satz: Die Segmente (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$ oder mit ihnen identische Segmente bilden eine Proportion oder *stehen in Proportion*, ist gleichbedeutend mit dem Satz: die Segmente (AB), $(A'B')$ sind in dem durch (AC) und $(A'C')$ bestimmten Zusammenhang proportional.

h. *Wenn die Segmentenpaare* (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$ *eine Proportion bilden, so thun es auch die Paare* $(A'B')$, $(A'C')$; (AB), (AC).

Denn den Elementen der ersten durch (AC) bestimmten Form entsprechen nach Def. I und Satz b eindeutig die in derselben Art durch $(A'C')$ bestimmten Elemente; diesen letzteren kann man daher eindeutig und in derselben Ordnung die ersteren entsprechen lassen (d), das heisst, in dem Proportionalitätszusammenhang kann man die durch (AC) und $(A'C')$ gegebenen Formen miteinander vertauschen.

i. *Wenn die Paare* (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$ *mit dem Paar* $(A''B'')$, $(A''C'')$ *in Proportion stehen, so bilden sie untereinander eine Proportion.*

Denn die durch (AC) und $(A'C')$ bestimmten Formen entsprechen nach Def. I eindeutig und in derselben Ordnung der durch $(A''C'')$ bestimmten Form (d) und entsprechen sich mithin in Folge der Def. I untereinander eindeutig und in derselben Ordnung (f, § 42).

i'. *Das Paar* (AB), (AC) *ist in Bezug auf den Proportionalitätszusammenhang dem Paar* $(A'B')$, $(A'C')$ *gleich.*

Denn in dem Proportionalitätszusammenhang kann das Paar (AB), (AC) in dem Zusammenhang mit dem Paar $(A''B'')$, $(A''C'')$ durch das Paar $(A'B')$, $(A'C')$ ersetzt werden (Def. VII, § 8; Def. IV, § 9).

l. *Die Segmente, welche Summen oder Differenzen proportionaler Segmente sind, sind ebenfalls proportional.*

Denn wenn (AB), $(A'B')$; (BD), $(B'D')$ zwei Paare proportionaler Segmente in dem durch (AC), $(A'C')$ gegebenen Zusammenhang sind, so werden die Segmente $(AD) \equiv (AB) \pm (BD)$ und $(A'D') \equiv (A'B') \pm (B'D')$ aus (AC) und $(A'C')$ durch die nämliche Operation abgeleitet, welche der Def. I und b oder e genügt.

m. *Wenn* (AB) *und* $(A'B')$ *in dem durch* (AC) *und* $(A'C')$ *bestimmten Zusammenhang proportional sind, so sind* (AC) *und* $(A'C')$ *in Bezug auf* (AB) *und* $(A'B')$ *proportional.*

Ist (AB) ein Vielfaches von (AC) oder eines Factors von (AC), so ist $(A'B')$ dasselbe Vielfache bezüglich $(A'C')$ und mithin sind nach Def. I (AC) und $(A'C')$ in dem durch (AB) und $(A'B')$ bestimmten Zusammenhang proportional.

Ist dies nicht der Fall, so kann man (AC) aus (AB) mittelst einer successiven Theilung von (AB) in η gleiche Theile erhalten (h, § 99 oder d, § 104) und die Reihen, welche aus (AB) das Segment (AC) und aus $(A'B')$ das Segment $(A'C')$ bestimmen, sind in dem durch (AB) und $(A'B')$ bestimmten Zusammenhang proportional. Mithin sind auch (AC) und $(A'C')$ in diesem Zusammenhang proportional (b).

Def. III. Ist ein Segment (AC) gegeben, so kann man jedes andre Segment (AB) der Grundform auf Grund des Satzes h, § 99 oder in absolutem Sinn mittelst des Satzes d, § 104 aus (AC) ableiten.

Bei dieser Construction vergleichen wir (AB) mit (AC) und die Beziehung

von (AB) zu (AC) bei diesem Vergleich (Def. IV, § 8) heisst das *Verhältniss* von (AB) zu (AC), welches mit dem Symbol $\frac{(AB)}{(AC)}$ bezeichnet wird.

Bem. II. Wenn das Paar (AB), (AC) gegeben ist, so ist durch dasselbe das Verhältniss von (AB) zu (AC) gegeben, das Verhältniss aber ist nicht das Paar selbst.

n. *Wenn die Paare* (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$ *in Proportion stehen, so sind ihre Verhältnisse gleich.*

Denn man erhält $(A'B')$ aus $(C'D')$ durch dieselbe Operation, durch welche man (AB) aus (CD) erhält. Die Verhältnisse der beiden Paare sind mithin gleich (Def. VII, § 8 oder Def. IV, § 9), weil sie nur von dieser Operation allein abhängen (Def. III; Def. I, II, § 11):

n'. *Wenn die Paare* (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$ *in Proportion stehen, so ist*

$$\frac{(AB)}{(CD)} = \frac{(A'B')}{(C'D')}. \qquad \text{(n, Def. III; b, § 9)}$$

Bem. III. Wir können hier das Zeichen $\equiv$ nicht setzen, weil es sich um eine relative Gleichheit zwischen den Paaren (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$ handelt, von denen wir noch andre Merkmale in Betracht ziehen (Def. I, § 88; Bem. II). Das Verhältniss ist das Merkmal, in Bezug auf welches die Paare bei dem Proportionalitätszusammenhang verglichen werden (§ 9).

n''. *Wenn*

$$\frac{(AB)}{(CD)} = \frac{(A'B')}{(C'D')},$$

so stehen die Paare (AB), (CD); $(A'B')$, $(C'D')$ *in Proportion.*

Denn die Gleichheit der Verhältnisse ergibt nach Def. III die Gleichheit der Operationen, mittelst welcher man (AB) und $(A'B')$ aus (AC) und $(A'C')$ erhält und diese Operationen sind dieselben, wie in Def. I und Satz e.

Die zwischen den Paaren (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$ bestehende Proportion können und werden wir mit dem Symbol

$$\frac{(AB)}{(AC)} = \frac{(A'B')}{(A'C')}$$

bezeichnen (n' und n'').[1])

---

1) Eigentlich ist es für die Lehre von den Proportionen nicht nöthig, den Begriff des Verhältnisses einzuführen, das Paar Segmente genügt vollständig; überdies ist das Verhältniss eine Beziehung zwischen (AB) und (AC) und nicht das Paar selbst, wohl aber ein Merkmal desselben. Das Verhältniss ist ferner unabhängig von dem Proportionalitätszusammenhang, weil es nur von der speciellen Operation abhängt, durch welche man (AB) aus (AC) erhält.

Das Verhältniss hängt nicht nur nicht von der relativen Position der Segmente (AB) und (AC) ab, sondern nicht einmal von den Segmenten einzeln genommen, weil Segmente, die (AB) und (AC) nicht gleich sind, dasselbe Verhältniss haben können (siehe auch Kap. VII, 2).

Euclid definirt das Verhältniss (ratio) als eine Beziehung zweier Segmente (oder homogener Grössen) hinsichtlich ihrer Quantität (Def. III, Buch V), er sagt aber nicht, was unter Quantität zu verstehen ist (siehe Anm. 2 zu § 38). Er definirt *die Gleichheit* zweier Verhältnisse (Def. V, Buch V). Allerdings dient bei *Euclid* die Definition der Gleichheit dazu diejenige des Verhältnisses (ratio) zu vervollständigen und bedeutet, dass man das eine Verhältniss dem andern substituiren kann, wenn beide die in Def. V geforderten Eigenschaften besitzen. Weil aber das Verhältniss, wie gesagt, unabhängig von einem andern Verhältniss existirt, so muss es unsrer Meinung nach vollständig definirt werden, ehe man es mit andern Verhältnissen vergleicht. Viele Autoren definiren zuerst die Proportion zwischen vier Grössen, von welchen je zwei homogen und die eine Vielfaches der andern ist, und

Bem. IV. Jedem Verhältniss $\frac{(AB)}{(CD)}$ entspricht nach Def. III ein Zeichen (eine Zahl), welches die Operation angibt, mittelst welcher man (AB) aus (CD) erhält und welches die Gestalt des Symbols in Satz h′, § 99 oder e′, § 105, wenn $(AB) < (CD)$ ist, hat. Ist dagegen $(AB) > (CD)$, so ist:

$$(CD)\mu \leqq (AB) < (CD)(\mu + 1) \qquad \text{(c}', \text{ § 81 oder c, § 105)}$$

und mithin:

$$(AB) \equiv (CD)\mu + (C_1 D_1),$$

worin $(C_1 D_1)$ kleiner als (CD) ist, und durch (CD) und eines der obigen Symbole ausgedrückt wird.

Def. IV. Dieses Zeichen oder diese Zahl heisst *das Mass* des Verhältnisses oder des im Proportionalitätszusammenhang stehenden Paares (AB), (AC).

Bem. V. Ohne die Hypothese VII in Bezug auf die Ordnungen des Unendlichkleinen eines beliebigen Segments (§ 100) zu machen, wäre der Proportionalitätszusammenhang in absolutem Sinn nicht möglich.

12.

Ausdehnung der Scalen. Endliches Gebiet, unendlich grosse und unendlich kleine Gebiete in der Umgebung eines Elements der offenen oder geschlossenen Grundform in Bezug auf eine Einheit.

§ 107. *Bem. I.* Die Sätze g, § 99 und c, § 104 erlauben uns bei dem Identitätsverhältniss von der Richtung, in welcher die identischen Segmente durchlaufen werden, wie

---

sagen dann, das Verhältniss der ersten zur zweiten sei dem Verhältniss der dritten zur vierten *gleich*. Sie führen dabei das Verhältniss als eine Art sich auszudrücken ein — wir wissen nicht, wesshalb sie nicht „ungleich" oder ein andres Wort benutzen statt sich des Zeichens = oder des Wortes „gleich", welches einen logisch bestimmten Sinn hat (§§ 8-11), zu bedienen, — und machen überdies das Verhältniss von der Proportion abhängig. Man könnte nach unsrer Definition und den Sätzen i und i′ auch sagen, das Paar (AB), (AC) im Proportionalitätszusammenhang heisse Verhältniss und würde es so auch vom Proportionalitätszusammenhang abhängig machen. Jedenfalls aber sind nach den Sätzen n, n′, n″ Verhältniss und Segmentenpaar, das im genannten Zusammenhang steht, gleichbedeutende Ausdrücke (siehe Anm. zu § 117 und Anm. 2, § 121).

Mittelst dieses Zusammenhangs können wir alle Eigenschaften der Verhältnisse der Segmente, wie wir es hier mit einigen gethan haben, wobei wir eigentlich nur die Def. I und den Satz b nöthig haben, entwickeln, um einen Satz zu beweisen, der den Grundeigenschaften der Ebene zur Basis dient. Man kann sagen

$$\frac{(AB)}{(AC)} \gtrless \frac{(AB_1)}{(AC)} \quad \text{wenn } (AB) \gtrless (AB_1),$$

weil man auf diese Weise die Verhältnisse den Segmenten oder den Elementen der Grundform in der Art eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen lässt, dass ein zwischen zwei gegebenen Elementen liegendes Element einem zwischen den zwei entsprechenden Verhältnissen liegenden Verhältniss entspricht. Handelt es sich um zwei Verhältnisse $\frac{(AB)}{(AC)}$, $\frac{(A'B')}{(A'C')}$, so ist das erste grösser oder kleiner als das zweite, je nachdem es grösser oder kleiner ist als das Verhältniss $\frac{(AB_1)}{(AC)}$, welches $\frac{(A'B')}{(A'C')}$ in dem durch (AC) und $(A'C')$ gegebenen Zusammenhang entspricht, weil dieser Zusammenhang eindeutig und in derselben Ordnung stattfindet (d).

Wir haben uns hier auf die Segmente einer oder mehrerer Grundformen beschränkt; man kann jedoch den Proportionalitätszusammenhang, weil er nur von der Construction abhängt, mittelst welcher die Segmente der Grundform aus (AC) abgeleitet werden (Def. I), auch zwischen Paaren von beliebigen Grössen feststellen, von denen sich die eine aus der andern auf die obengenannte Weise ableiten lässt.

wir es bisher nicht gethan, abzusehen. Bisher haben wir die Scalen verschiedener Einheiten von einem gegebenen Element als Grundanfang an in einer einzigen Richtung auf der offenen Grundform betrachtet (Bem. I, § 79 und Def. VII, § 92). Jetzt wollen wir sie auch in entgegengesetzter Richtung betrachten und da die Grundform in einer Richtung derselben Form in der entgegengesetzten Richtung identisch ist (a, § 70), so können ihre Elemente von A aus in einer Richtung mit denselben Zeichen versehen werden, wie diejenigen in der entgegengesetzten Richtung, indem man denselben Zeichen in den beiden Richtungen identische Segmente von A aus entsprechen lässt.

Hat man ein in Bezug auf (AA_1) unendlich grosses Segment (AC), so ist, weil $(CA) \equiv (AC)$ (c, § 104) auch (CA) unendlich gross von derselben Ordnung in Bezug auf (AA_1).

a. *Wenn B' und B gegebene Elemente der unendlich grossen Gebiete der Ordnung η in entgegengesetzten Richtungen (oder auf entgegengesetzter Seite) vom Anfang sind, so ist das Segment $(B'B)$, welches den Anfang enthält, ebenfalls unendlich gross von derselben Ordnung.*

Ist (AB') nicht gleich (AB), so gibt es in der Richtung von (AB) ein solches Element B_1, dass

$$(AB') \equiv (AB_1) \qquad \text{(a}', \text{ § 70)}$$

ist.

Da aber (AB_1) unendlich gross von derselben Ordnung wie (AB) ist, so ist es mit (AB) endlich (c, § 91 und a, § 86) und mithin auch die Summe $(AB') + (AB)$ (i, § 82); folglich ist diese Summe unendlich gross von derselben Ordnung (c, § 91; a, § 86). Es ist aber $(AB') \equiv (B'A)$ (g, § 99; c, § 104); daher ist $(B'A) + (AB) \equiv (B'B)$ endlich mit (AB) oder unendlich gross von derselben Ordnung wie (AB) (c, § 91 und a, § 86).

Def. I. Die endlichen Gebiete in Bezug auf eine gegebene Einheit in den beiden Richtungen der Form von einem beliebigen gegebenen Element X derselben an (Def. V, § 83) *bilden das endliche Gebiet in der Umgebung des Elementes* X in Bezug auf die gegebene Einheit.

Def. II. Die unendlich grossen Gebiete einer gegebenen Ordnung η in einer oder der andern Richtung von A aus bilden dagegen *das unendlich grosse Gebiet der Ordnung* η in Bezug auf die gegebene Grundeinheit (Def. II und Bem. III, § 91).

b. *Wenn B und B' Grenzelemente einer gegebenen Ordnung η von einem Element A aus in der einen und der andern Richtung sind, so ist in Bezug auf die Grundeinheit*

$$(AB') \equiv (AB).$$

Denn sie sind die durch die unendlich grossen Gebiete der Ordnung $\eta - 1$ bestimmten Grenzen, welche identisch sind (Def. I, a'', § 70 und Bem. III, § 86).

§ 108. *Bem. I.* Wenn die Grundform geschlossen ist, kann man sie auch als eine offene Form betrachten (b, § 68). In diesem Fall wäre zwischen den beiden Arten der Grundform durchaus kein Unterschied, weil diese Form, wenn sie geschlossen ist, als offene Form betrachtet würde.

a. *Wenn ein Segment (AB) der geschlossenen Grundform gegeben ist, so ist dasselbe in Bezug auf die ganze Form entweder endlich oder unendlich klein von bestimmter Ordnung η; es gibt desshalb in der Form keine in Bezug auf (AB) unendlich grossen Segmente von einer höheren Ordnung als η.*

Die geschlossene Grundform ist in Bezug auf ein beliebiges gegebenes Segment von ihr unendlich gross von bestimmter Ordnung.

In der Umgebung eines jeden Elements A gibt es in Bezug auf eine Grundeinheit (AB) ein endliches Gebiet und die unendlich grossen Gebiete 1ter, 2ter... η^{ter} Ordnung, wenn η die Ordnung des Unendlichgrossen der Grundform in Bezug auf (AB) ist.

Die unendlich grossen Gebiete der 1ten, 2ten, .., $(\eta-1)^{ten}$ Ordnung in der einen oder der andern Richtung fallen nicht zusammen, während die unendlich grossen Gebiete der η^{ten} Ordnung zusammenfallen.

Denn will man die geschlossene Form als einfache Form ansehen, so kann man sie von einem beliebigen A ihrer Elemente an als ein Segment betrachten, welches von zwei mit A zusammenfallenden Elementen begrenzt wird (a, § 63), während die einfachen Segmente dieselben Eigenschaften in Bezug auf ihre Unterabtheilung in unendlich kleine Theile und mithin auch in gleiche Theile behalten (Hyp. VII; a, d, § 103). Wählt man aber ein Segment (AB), welches in Bezug auf die ganze Form unendlich klein von der Ordnung η ist, so ist die letztere in Bezug auf (AB) unendlich gross von der Ordnung η (Def. III, § 86; Bem. IV, § 91) und es gibt in diesem Fall kein in Bezug auf (AB) Unendlichgrosses von höherer Ordnung, weil es grösser als die ganze gegebene Form sein müsste (Def. II, § 82 und Def. II, § 86).

Es ist dies der charakteristische Unterschied zwischen der geschlossenen und der offenen Grundform; denn in der offenen Grundform gibt es immer in der einen und der andern Richtung ein Segment, welches in Bezug auf jedes Segment unendlich gross von beliebiger gegebener Ordnung ist. Wählt man ferner auf der offenen Form das Segment (AB), so haben die unendlich grossen Segmente einer beliebigen Ordnung η in einer Richtung kein gemeinschaftliches Element, so dass also die unendlich grossen Gebiete der Ordnung η nicht zusammenfallen, während sie auf der geschlossenen Form in Beziehung auf das Element A sich decken, weil sie mit der Form selbst, welche von A an bis A ein unendlich grosses Segment von der Ordnung η ist, zusammenfallen. Jedes Element X daher, welches derart ist, dass (AX) in einer Richtung unendlich gross von der Ordnung η ist, ist in Bezug auf die ganze Form endlich; das Element X gehört einem der Gebiete an, die von A aus in entgegengesetzter Richtung liegen.

Die im Unendlichgrossen von der Ordnung η liegenden Grenzelemente, welche die in Bezug auf die unendlich grosse Einheit von der Ordnung $\eta-1$ im Unendlichgrossen von der ersten Ordnung liegenden Gebiete darstellen (Bem. III, § 86) fallen wie die Gebiete, die sie darstellen, zusammen, weil sie in absolutem Sinn Punkte sind, in welchen die im Unendlichgrossen von der Ordnung η liegenden Gebiete in der einen und der andern Richtung von A aus in Bezug auf die Einheit von der Ordnung $\eta-1$ zusammenfallen (Def. IV, § 86; Bem. III und Def. II, § 91).

Bem. II. Bei dem Uebergang von dem Gebiet einer Einheit auf dasjenige einer andren unendlich grossen Einheit muss man sich gegenwärtig halten, dass die Grenzelemente

in Bezug auf die neue Einheit keine bestimmten Elemente sind, sondern ein ganzes Gebiet von Elementen darstellen (i', § 85).

a'. *Jedes gegebene Element eines endlichen oder unendlich grossen Gebiets einer Ordnung, die kleiner als η ist, in der Umgebung eines Elements der geschlossenen Form theilt dieses Gebiet in zwei bezüglich der Einheit dieser Gebiete gleiche Theile* (a; a'', § 70).

13.

Weiteres über die absolute und relative Gleichheit zweier Formen.

§ 109. a. *Die Gleichheit zweier begrenzter Segmente der Grundform in Bezug auf die absolute Einheit bedeutet Gleichheit in absolutem Sinn.*

Denn sie können nicht um irgend ein gegebenes Segment (AB) differiren, auch wenn dieses unendlich klein von einer bestimmten noch so grossen Ordnung ist; wenn sie sich dagegen um ein absolutes unendlich kleines Segment unterscheiden, so fällt dieses mit der absoluten Null zusammen (Def. I, § 97).

a'. *Die Gleichheit in absolutem Sinn ergibt Gleichheit bezüglich jeder Masseinheit.*

Denn sind zwei Segmente in absolutem Sinn gleich, so sind sie es um so mehr in relativem Sinn (Def. III u. IV, § 9 oder b', § 91).

a''. *Die Gleichheit zweier gegebener endlicher Segmente bezüglich einer gegebenen Einheit kann als eine absolute Gleichheit angesehen werden, wenn nicht festgestellt ist, dass sie um ein Unendlichkleines in absolutem Sinn differiren.*

Die Elemente A, B, C, D stellen beim Uebergang zur absoluten Einheit jedes bezüglich der gegebenen Einheit ein unendlich kleines Gebiet vor. Man denke sich, dass A, B, C drei Elemente dieser Gebiete in absolutem Sinn bezeichnen und construire auf der Grundform, welcher (CD) angehört, das Element D' der Art, dass $(CD') \equiv (AB)$ in absolutem Sinn ist. Das Element D' fällt in das durch D dargestellte unendlich kleine Gebiet und in relativem Sinn ist $D' \equiv D$ (b', § 91). Geht man daher von der relativen Einheit zur absoluten über, so kann man annehmen, dass das absolute Element D gerade D' sei.

Wenn dagegen schon festgestellt ist, dass die Segmente (AB) und (CD) in absolutem Sinn ungleich sind und dabei bezüglich einer Einheit ihrer Art um ein Unendlichkleines differiren, so ist bezüglich dieser Einheit $(AB) \equiv (CD)$. In diesem Fall ist also die obige Schlussweise nicht mehr anwendbar.

b. *Die Gleichheit zweier bezüglich einer gegebenen Einheit unendlich grosser oder unendlich kleiner Segmente ist im Allgemeinen weder eine absolute noch eine Gleichheit in Bezug auf ihre Einheit, wenn sie von derselben Art sind.*

Denn zwei unendlich kleine oder unendlich grosse Segmente sind in Bezug auf die endliche Einheit gleich, während sie in Bezug auf eine unendlich kleine oder unendlich grosse Einheit ungleich sein können (i, h, § 85 und b', § 91).

c. *Zwei identische Formen müssen dies in absolutem Sinn und mithin auch in Bezug auf eine beliebige relative Einheit sein.*

Denn differirten sie in irgend Etwas, es sei denn in der Verschiedenheit der Position, so wären sie nicht mehr identisch (Def. III, Bem. III, § 9 und Bem. III, § 58).

VII. Kapitel.

Formen von mehreren Dimensionen. — Das Gebiet aller Formen. — Extensive und intensive Grösse einer Form und insbesondre der Grundform.

1.

Definition der Formen von mehreren Dimensionen und ihr Gebiet.

§ 110. *Def. I.* Wird ein System einer Dimension auf ein andres System einer Dimension a (Def. I, § 62) bezogen, indem man dieses als neues Element ansieht, so heisst es System oder Form *von zwei Dimensionen* in Bezug auf das Grundelement von a (Def. I, § 57).

Im Allgemeinen heisst ein System einer Dimension auf ein System von $\eta - 1$ Dimensionen als neues Element bezogen, ein System oder eine Form von η Dimensionen in Bezug auf das Grundelement.

Bem. I. Die vorstehende Definition setzt voraus, dass die Elemente eines Systems einer Dimension identisch sind (Def. I, § 62 und Def. I, § 57). Wir können annehmen, sie seien es nicht und behaupten:

Def. II. Wenn eine Form gegeben ist, welche durch mehrere Formen einer Dimension $a' \, a'' \, a''' \ldots a^{\mu}$ in Bezug auf das Grundelement bestimmt ist und wenn sich zwischen den Elementen von $a' \, a'' \, a''' \ldots a^{\mu}$ ein eindeutiger Zusammenhang von derselben Ordnung derart feststellen lässt, dass die sich entsprechenden Elemente ein System einer Dimension bestimmen, so heisst die gegebene Form auch *eine Form von zwei Dimensionen* in Bezug auf das Grundelement.

Auf diese Weise kann man Formen von einer beliebigen gegebenen Anzahl von Dimensionen definiren.

a. *Die Form, welche durch alle auf Grund der obigen Principien bestimmten Formen gegeben ist und in welcher die letzteren enthalten sind* (Def. I und Def. II, § 13), *hat keine bestimmte Anzahl von Dimensionen.*

In der That ist die Construction der Formen von mehreren Dimensionen unbegrenzt; denn, setzt man voraus, eine Form von η Dimensionen sei gegeben, so kann man eine solche von $\eta + 1$ Dimensionen construiren.

2.

Extensive und intensive Grösse der Formen und der Grundform.[1])

§ 111. *Def. I.* Extensive Grösse einer Form, welche nicht ein einziges Element ist (Def. IV, § 57), heisst die Form in den Beziehungen der Position zwischen ihren Theilen betrachtet und abgesehen von den übrigen Beziehungen der Gleichheit (Def. III, § 9) und der Ungleichheit mit andern Formen (Def. I, II, § 61).

Def. II. Unter intensiver Grösse oder Quantität einer Form, welche nicht ein einziges Element ist (Def. IV, § 57), versteht man die Form, insofern man sie als einer andern identischen Form in jeder Vereinigung (§ 29) mit andern Formen substituirbar betrachtet (Bem. III, § 58), abgesehen mithin von den Verhältnissen der Position.

a. *Wenn man bei einer Form die Verhältnisse der Position ihrer Theile unter sich, welche nicht ein einziges Element sind, nicht berücksichtigt, so ist die resultirende Form die intensive Grösse der gegebenen Form.*

Berücksichtigt man die Verhältnisse der Position der Theile unter sich nicht, so kann man den Theilen A und B u. s. w. der Form F zwei beliebige identische Formen A' und B' u. s. w. substituiren, das heisst also, man betrachtet nur die intensive Grösse dieser Theile (Def. II). Auf diese Weise kann man den Theilen A und B u. s. w. der Form F, die mit einer andern Form F_1 vereinigt ist, beziehungsweise die Theile A' und B' u. s. w. einer mit F identischen Form F' substituiren und da jede Form durch ihre Theile gegeben ist, kann man die Form F in ihrer Vereinigung mit F_1 durch die Form F' ersetzen; mithin u. s. w. (Def. II).

Bem. I. Der Begriff „grösser" und „kleiner" bezieht sich bei zwei Formen nach Def. I und II, § 61 nur auf die intensive Grösse der Formen (a, § 61 und Def. II).

Wenn man daher eine Form nur in den Beziehungen der Gleichheit und Ungleichheit zu andern Formen betrachtet (Def. I und II, § 61), so sieht man von ihren Verhältnissen der Position zu andern Formen oder zwischen ihren Theilen (a) ab und man erhält mithin die intensive Grösse der gegebenen Form.

b. *Die Eigenschaft des Satzes a kann als Definition der intensiven Grösse betrachtet werden.*

Denn aus ihr erhält man durch einen ähnlichen Beweis die Eigenschaft der Definition II.

c. *Eine Form hat nur eine intensive Grösse, während einer intensiven Grösse mehrere Formen entsprechen können.*

Der erste Theil des Satzes geht unmittelbar aus der Definition selbst hervor (Def. I, § 38). Für den zweiten Theil genügt die Bemerkung, dass alle identischen oder aus identischen Formen zusammengesetzten Formen dieselbe intensive Grösse haben.

Bez. I. Für die Gleichheit zweier intensiven Grössen benutzen wir das Zeichen $=$ und schreiben $A = B$ (Def. IV, § 9).

1) Von diesem Abschnitt wie von andern Sätzen machen wir in der Geometrie keinen Gebrauch(siehe die Vorrede), weil wir, statt uns von Anfang an auf zu viele allgemeine Begriffe zu stützen, es für besser halten, die Definitionen der intensiven Grösse und der stetigen Gebilde dann zu geben, wenn es uns nöthig oder nützlich scheint.

Def. III. Sind zwei intensive Grössen A und B der Art, dass $A > B$, so heissen sie *homogen*, wenn

$$B\eta > A \text{ ist,} \qquad \text{(Def. I, II, § 61)}$$

worin η eine beliebige bestimmte Zahl der Classe (II) der ganzen endlichen und unendlich grossen Zahlen ist (Def. V, § 91).[1])

Def. IV. Eine Form, welche dazu dient die intensiven Grössen zweier homogenen Formen A und B zu vergleichen, heisst *Masseinheit der Grössen A und B.*

d. *Für die intensiven Grössen* (AB), $(A'B')$ *zweier Segmente der Grundform ist*

$$(AB) + (A'B') = (A'B') + (AB) \qquad \text{(e, § 99 oder a, § 104).}$$

e. $(AB) = (BA)$.

Bem. II. Der erste Satz gibt uns das Commutationsgesetz der intensiven Grössen mit dem Unterschied, dass bei den Sätzen e, § 99 und a, § 104 die Segmente consecutiv sein müssen, während dies bei den intensiven Grössen nicht der Fall zu sein braucht (Def. II). Der zweite Satz sagt aus, dass die intensive Grösse eines Segments der Grundform von der Richtung der letzteren unabhängig ist.

Bem. III. Auch für die intensiven Grössen gelten die übrigen Sätze der §§ 99 und 103—104 und die für Vielfache und Factoren eingeführten Bezeichnungen.

f. *Zwei in intensiver Grösse gleiche Segmente sind identisch.*

Sind (AB) und (CD) zwei beliebige Segmente, so tritt einer der drei Fälle ein

$$(AB) \begin{smallmatrix} < \\ \equiv \\ > \end{smallmatrix} (CD). \qquad \text{(b, § 73; b, c, § 61)}$$

Ist $(AB) \equiv (CD)$, so sind die intensiven Grössen von (AB) und (CD) gleich (Def. III, IV, § 9 und Def. II). Ist $(AB) > (CD)$, so gibt es in (AB) ein Segment $(AB_1) \equiv (CD)$ (b', § 69), welches dieselbe intensive Grösse wie (CD) hat, während die intensiven Grössen von (AB_1) und (AB) um diejenige von (B_1B) differiren (Bem. I).

Wenn nun umgekehrt die zwei Segmente (AB), (CD) gleiche intensive Grösse haben, so müssen sie identisch sein, denn wäre nicht $(AB) \equiv (CD)$, so würden nach dem Vorstehenden die Segmente (AB) und (CD) in intensiver Grösse nicht gleich sein.

g. *Die intensive Grösse der Grundform und ihrer Theile ist von der Position ihrer gegebenen und verschiedenen Elemente aber nicht von dem unbegrenzt kleinen Segment unabhängig.*

(AB) sei ein gegebenes Segment mit verschiedenen Enden. Man kann (AB) in η gleiche Theile (AA') $(A'A'')$ $(A''A''')$ ... $(B'''B'')$ $(B''B')$ $(B'B)$ zerlegen und den Segmenten (AA') $(A'A'')$ ... $(B'B)$ beliebige andre identische Segmente $(A_1A'_1)$ $(A'_1A''_1)$ ... substituiren, die ausserhalb der gegebenen Form liegen (a). Die intensive Grösse ist mithin von der Position von A'', A''', u. s. w. B unabhängig, aber abhängig von derjenigen von A' in Bezug auf A,

---

1) Durch diese Definition soll nicht ausgeschlossen sein, dass η auch andern Classen möglicher Zahlen angehören kann (siehe Anm. zu § 4).

weil $(A_1 A'_1) \equiv (AA')$ sein muss. Wenn η wächst, so sieht man, dass in der intensiven Grösse A von A' unabhängig ist, während man ein immer kleineres Segment (AX) erhält; das heisst den gegebenen Elementen des Segments (AB) kann man von A aus andre ausserhalb dieses Segments liegende Elemente substituiren. Durch dieses Verfahren wird (AX) unbegrenzt klein (d, § 99 oder e, § 103). Es bleibt mithin immer das unbegrenzt Kleine übrig, von welchem die intensive Grösse abhängt, das heisst, sie hängt von der Position der Elemente im unbegrenzt Kleinen ab, wenn freilich auch diese Elemente für uns unbestimmt sind. Oder mit andern Worten: Lässt man auf die angegebene Art den Elementen der Grundform andre Elemente entsprechen, so müssen, damit sich die intensive Grösse nicht ändere, zweien unbegrenzt nahen Elementen der Grundform zwei unbegrenzt nahe Elemente einer andern oder derselben Grundform entsprechen.

Bem. IV. Es wäre mithin ein Irrthum, wollte man behaupten, die intensive Grösse eines Segments wäre von dem Unterschied in der Position ihrer sämmtlichen Elemente unabhängig, weil alsdann bei dem genannten Zusammenhang zweien unbegrenzt nahen Elementen zwei ebenfalls unbegrenzt nahe wenn auch unbestimmte Elemente auf der Grundform nicht zu entsprechen brauchten.

g'. *Ist die intensive Grösse eines Systems mit derjenigen der Grundform oder eines Theils von ihr homogen, so ist das unbegrenzt Kleine des Systems ein unbegrenzt Kleines der Grundform.*

Denn die Theile des Systems kann man in Bezug auf ihre intensive Grösse durch Segmente der Grundform ersetzen. Die intensive Grösse der Grundform aber hängt von dem unbegrenzt Kleinen derselben ab (g) und der intensiven Grösse wegen müssen zweien unbegrenzt nahen Elementen der Grundform zwei unbegrenzt nahe Elemente derselben oder einer andern Grundform entsprechen, wie aus der Definition der intensiven Grösse und dem Beweis des Satzes g hervorgeht. Daraus folgt g'.

Bem. V. Diese Eigenschaft besitzt jedes gegebene Segment, das man aus einer Anzahl η von Segmenten der Grundform, die nicht in einer dieser Formen liegen, erhält. Dabei können diese Segmente in absolutem oder relativem Sinn unbegrenzt abnehmen, wenn man nur in dem Gebiet einer einzigen Einheit bleibt. [1])

---

1) Die Definitionen *H. Grassmann's* von extensiver und intensiver Grösse sind den unsrigen im Grund ähnlich, wenn die seinigen auch dunkel sind. Er sagt (Ausdehnungslehre 1844 S. XXIV): „Die intensive Grösse ist das durch Erzeugung des Gleichen Gewordene, die extensive Grösse oder die Ausdehnung ist das durch Erzeugung des Verschiedenen Gewordene." Diese Sprache ist um so dunkler, als er vorher die Begriffe des Gleichen und Verschiedenen nicht vollständig erklärt hat; er macht jedoch seinen Begriff deutlicher, indem er sagt, die geometrische Linie sei zwar eine extensive Grösse, könne aber als intensive Grösse betrachtet werden, „wenn man von der Art, wie ihre Elemente auseinander sind, absieht". Er versteht unter Element (S. XXVII) einen unbegrenzt kleinen Theil (siehe Anm. 3 zu § 97), nicht wie wir ein Ding, welches nicht Theil des Continuums im Sinn des Satzes d, § 105 ist (Bem. I, § 76; Bem. IV, § 105), wenn es auch solche Theile in sich enthalten kann (Def. I, § 57).

Nach uns also muss man sagen: Das vornehmste Charakteristicum oder Merkmal der Linie wie der übrigen geometrischen Gebilde ist die Verschiedenheit der Position ihrer Punkte und mithin ihre extensive Grösse (Def. I); die Linie ist jedoch nicht nur eine extensive Grösse; denn sie hat auch eine intensive Grösse. Es ist ferner zu bemerken, dass bei *Grassmann* die extensive und intensive Grösse continuirlich sind (siehe die angeführte Anm.), während unsre Definitionen auch für discrete Formen gelten.

VIII. Kapitel.[1]

Reelle, relative und absolute, positive und negative Zahlen.

1.

Positive und negative Richtung der Grundform. — Positive und negative Segmente. — Unterscheidungsmerkmal zwischen den einen und den andern. — Uebereinkommen über die Zeichen + und —.

§ 112. *Bem. I.* Sind zwei Segmente (AB) und $(A'B')$ unabhängig von der Grundform, in welcher sie liegen, gegeben, so ist, wenn (AB) einen mit $(A'B')$ identischen Theil enthält

$$(AB) > (A'B'),\ (A'B') < (AB) \qquad \text{(Def. I, II, § 61)}$$

und weil

$$(A'B') \equiv (B'A') \qquad \text{(g, § 99 oder c, § 104)}$$

so ist auch

$$(AB) > (B'A'). \qquad \text{(Def. II, § 61)}$$

Bei diesem Kriterium von „grösser“ und „kleiner“ sowie bei demjenigen der absoluten Identität werden die Verhältnisse der Formen in einem beliebigen Ganzen, dem sie etwa angehören, nicht in Betracht gezogen, sondern nur die Formen abgesondert an sich (Bem. III, § 58 und a, § 61). Dies ist auch bei zwei Segmenten der Grundform der Fall. Es bedeutet nicht, dass der Begriff von „grösser“ und „kleiner“ sowie von „identisch“ nicht von der Ordnung der Theile der Formen selbst, welche verglichen werden und mithin ihrer Elemente abhänge, sondern es bedeutet, dass man nur ihre Ordnung an sich und nicht im Verhältniss zu andern Formen, denen sie angehören, betrachtet. Und wenn auch (AB) und $(A'B')$ der nämlichen Grundform angehören, wenn sie identisch sind, so sind sie es in Folge des Princips b, § 60 unabhängig von der Richtung des Systems.

Wollten wir aber festsetzen, auch die Richtung, in welcher die Segmente in der Grundform durchlaufen werden, sei ein Merkmal dieser Segmente, so schränken wir offenbar den Begriff der Identität zweier gesondert betrachteter Segmente sowie den Begriff von „grösser“ und „kleiner“ ein, indem wir ihnen ein Merkmal beilegen, welches ihnen an sich betrachtet nicht zukommt, weil es die Position und Ordnung in Bezug auf Elemente betrifft, die ausserhalb derselben liegen.[2] Man muss zusehen, ob man nicht das Merkmal von „grösser“ und „kleiner“ bei der Vergleichung von Segmenten entgegengesetzter Richtung ändern kann, ohne in Widerspruch mit dem obigen Merkmal zu gerathen, welches alsdann für die Segmente einer gegebenen Richtung der Form gelten muss.[3]

Def. I. Eine beliebige gegebene Richtung der Grundform, in welcher das früher festgesetzte Merkmal von „grösser“ und „kleiner“ gilt (Def. I, II, § 61), heisst *positive*, die entgegengesetzte *negative Richtung*. Die in der ersten Richtung durchlaufenen Segmente heissen *positive*, die in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen *negative Segmente*.

Def. II. Wenn wir sagen, zwei Segmente seien *ihrem absoluten Werth nach* gleich oder ungleich, so beziehen wir uns stets auf das oben angegebene Merkmal, das heisst, unabhängig von der Richtung der Form, in welcher sie durchlaufen werden.

1) Von diesem Kapitel machen wir in den Fundamenten der Geometrie keinen Gebrauch.
2) Es ist dies im Grunde genommen auch bei der Definition der Gleichheit zweier geometrischer Gebilde mittelst der intuitiven Vorstellung der Bewegung ohne Deformation in dem Raum S_3 (oder S_n) der Fall (siehe Vorrede und z. B. Theil I, Cap. I).
3) Siehe Bem. IV.

Bem. II. Es gibt also von einem Element A an in der positiven Richtung nur ein einziges Segment (AB), alle andern, die von A an in dieser Richtung liegen, sind grösser oder kleiner als (AB) (c, § 65; c', § 68; b, § 73).

Def. III. Bei der Vergleichung positiver und negativer Segmente halten wir uns an das Merkmal, dass, wenn man zu einem gegebenen Segment a zwei positive oder negative Segmente b und c addirt und wenn die resultirenden Segmente positiv und das eine grösser als das andre ist, von den beiden Segmenten b und c dasjenige das grössere ist, welches das grössere Resultat liefert (f, § 73).

a. *Die negativen Segmente sind kleiner als die positiven und von zwei negativen Segmenten ist im Vergleich mit den positiven dasjenige das grössere, welches in absolutem Sinn das kleinere ist.*

Es sei das Segment (AB) in positiver Richtung gegeben und man füge demselben in derselben Richtung ein beliebiges Segment (BC) hinzu, so ist

$$(AC) > (AB). \qquad \text{(Def. I, § 62)}$$

Hat man dagegen ein Segment (BC') von entgegengesetzter Richtung und in absolutem Sinn kleiner als (AB), so dass also C' in (AB) liegt (b, § 36 und c', § 68), so ist:

$$(AC') < (AB) \qquad \text{(Def. I, § 61)}$$

und mithin nach dem aufgestellten Merkmal (Def. III)

$$(BC') < (BC)$$

wenn auch (BC') in absolutem Sinn grösser als (BC) sein kann.

A_1 C'' A C' B C

Fig. 14.

Auf der andern Seite sei (BC'') ein dem absoluten Werth nach grösseres Segment als (AB) und in negativer Richtung gelegen, so dass also A in dem Segment $(C''B)$ liegt (b, § 36; Def. I, § 62; c', § 68). Wir suchen uns ein in positiver Richtung gelegenes Segment (A_1B) aus, welches C'' enthält. Nimmt man an, die Segmente (BC), (BC'), (BC'') würden dem positiven Segment (A_1B) hinzugefügt, so erhält man:

$$(A_1C'') < (A_1C') < (A_1C).$$

Damit ist der Satz bewiesen (Def. III).

Bem. III. Unter den Symbolen $+(AB)$, $-[-(AB)]$, oder einfach (AB) versteht man dasselbe Segment (AB) insofern es von A nach B hin durchlaufen wird (c, § 77).

Uebereink. I. Wir wollen nun in Bezug auf die positive und negative Richtung der Form die Uebereinkunft treffen, dass (AB) oder $+(AB)$ von A nach B in positiver Richtung durchlaufen werden muss und dass (AB), wenn es mit dem Zeichen — versehen ist, immer in negativer Richtung durchlaufen wird.

Von den beiden (AB) gleichen Segmenten, welche in der Form dasselbe Ende A haben (a' § 70), wird desshalb das eine, welches in positiver Richtung durchlaufen wird, mit $+(AB)$ oder (AB), das andre mit dem Symbol $-(AB)$ bezeichnet. Soll aber (AB) und $-(AB)$ dasselbe Segment bedeuten, so gibt $-(AB)$ an, dass das Segment in negativer Richtung nämlich von B nach A hin durchlaufen wird.

Bem. IV. Betrachtet man das in einer gegebenen Richtung einfach homogene System (Def. I, § 68) und nicht das in der Position seiner Theile identische System (Def. I, § 70), so können wir in Bezug auf positive und negative Segmente ähnliche Betrachtungen anstellen, obwohl die Segmente dieselbe Richtung haben. Setzt man der grösseren Einfachheit wegen eine offene Form voraus, so theilt ein Element A sie in zwei Theile (c, § 63). Der Theil, in welchem sich alle Elemente von A an in der Richtung des Systems befinden, heisst der *positive,* der andre der *negative* Theil.

Wir haben mithin von dem Anfang A an positive und negative Segmente. Ist z. B. (AB) positiv, so heisst das, dass B in Bezug auf A nach der positiven Seite zu liegt oder dass es das zweite Ende des von A aus in der Richtung des Systems gelegenen Segments ist. Ist (AB) negativ, so befindet sich B in dem negativen Theil und ist das erste Ende des Segments, welches in Bezug auf A in der gegebenen Richtung liegt.

Wenn wir ferner den Umstand, dass die Segmente auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite in Bezug auf A liegen, als Merkmal derselben ansehen, so sind die beiden Segmente $(B'A)$ und (AB), welche die Richtung des Systems haben und mit einem gegebenen Segment identisch sind (b', § 69), nicht länger gleich, wie es nach der vorigen Methode bei den beiden Segmenten (AB) und (AB') derart der Fall war, dass von B' aus in der Richtung des Systems $(B'A) \equiv (AB)$ war.

Weil aber die positiven Theile von zwei Elementen A und B aus einen gemeinsamen Theil haben, nämlich wenn A das erste der beiden Elemente in der Richtung des Systems ist, den ganzen von B aus in dieser Richtung gelegenen Theil $B\ldots$, so können wir von einem positiven oder negativen Theil der Form in Bezug auf ein gegebenes Element als Anfang sprechen, ohne dass eine Zweideutigkeit hinsichtlich der positiven und negativen Segmente möglich ist, sobald nur die Richtung des Systems gegeben ist. *Dabei werden die Segmente stets in derselben Richtung betrachtet.*

Die beiden Methoden unterscheiden sich also durch diese Eigenschaft, denn bei der ersten haben die negativen Segmente die entgegengesetzte Richtung wie die positiven. Aus dieser Bemerkung folgt, wie man in der Folge noch besser sehen wird, dass die Theorie der negativen und positiven Zahlen von der charakteristischen Eigenschaft des in der Position seiner Theile identischen Systems unabhängig ist. Die letztere eignet sich jedoch besser zur Aufstellung der Sätze über die positiven und negativen Segmente.

2.

Negative und positive Zahlen. — Grundoperationen mit positiven und negativen ganzen Zahlen.

§ 113. *Bem. I.* Wenn man auf der Grundform in einer und der andern Richtung die Scala der Einheit (AA_1) und die Scalen der in Bezug auf die Grundeinheit (AA_1) unendlich grossen und unendlich kleinen Einheiten mit dem Grundanfang A betrachtet (Def. VII, § 97), so stellen die Enden der consecutiven der Einheit in einer und der andern Richtung gleichen Segmente die Zahlen der Classe (II) dar, vorausgesetzt dass die Einheit (AA_1) die Einheit 1 der Zahl vorstellt.

Def. I. Wie wir im vorigen Paragraphen die Segmente der Form in positive und negative unterschieden und die in der ersten Richtung durchlaufenen mit dem Zeichen $+$, die der entgegengesetzten Richtung mit — versehen haben (Uebereink. I, § 112), so müssen wir den positiven und negativen Segmenten entsprechend die Zahlen, welche die ersten bezeichnen, von denen, welche die zweiten bezeichnen, unterscheiden und nennen daher die ersten *positive* die letzteren *negative Zahlen,* versehen sie mit den Zeichen + und — und schliessen sie wenn nöthig in Klammern. Es ist

$$(+a) = +a = a$$
$$(-a) = -a.$$

Und da wir die Zahlen der Classe (II) zum Unterschied von andern möglichen Zahlen ganze Zahlen genannt haben (Def. V, § 91), so ist mithin die Reihe der ganzen positiven Zahlen

$$+1, +2, +3, \ldots, +\eta, \ldots$$

oder auch

$$1\ 2\ 3 \ldots \eta \ldots \tag{II}$$

und diejenige der negativen Zahlen:

$$-1, -2, -3, \ldots, -\eta, \ldots \tag{II$_1$}$$

Def. II. Unter *absolutem Werth* einer Zahl verstehen wir wie bei dem Segment der Grundform (Def. II, § 112) die Zahl selbst unabhängig vom Zeichen. Daher heissen die Zahlen der Classe II (§ 91) auch *absolute* Zahlen, wenn man, wie wir bisher gethan haben, keinen Unterschied zwischen positiven und negativen Zahlen macht.

a. *Vergleicht man die positiven Zahlen mit den negativen, so sind die negativen Zahlen sämmtlich kleiner als die positiven und von zwei negativen Zahlen ist diejenige die grössere, welche dem absoluten Werth nach kleiner ist* (a, § 112).

Es ist z. B. $-7 < -3$, während $7 > 3$ ist.

a'. *Vertauscht man die Zeichen + und —, so muss man statt > das Zeichen < setzen.*

b. *Die beiden Classen der positiven und negativen Zahlen werden durch die Zahl Null getrennt.*

Der Grundanfang A der Scala ist das Trennungselement der beiden Scalen positiver und negativer Segmente von A aus und stellt sowohl in der einen wie in der andern Richtung das Segment Null dar (Bem. I und a, § 76).

Bem. II. Aus der Definition selbst geht hervor, dass die Operationen mit den positiven und negativen Segmenten (Def. I, § 112) uns die Operationen mit den positiven und negativen Zahlen liefern.

c. *Wenn b eine beliebige Zahl ist, so ist*

$$b = -(-b).$$

Es ist z. B. $(BC) = -(CB)$ (c', § 77); denn wenn (BC) die Zahl b darstellt, so stellt (CB) die Zahl $-b$ dar, weil unabhängig von der Richtung der Grundform $(CB) \equiv (BC)$ ist.

Bem. III. Wenn (vgl. Bem. IV, § 112) $(B'A) \equiv (AB)$ mit der Einheit identisch ist, so stellt B die Zahl 1 oder $+1$, B' die Zahl -1 oder (-1) in Bezug auf A dar. Man kann sich dann, um den Satz c zu beweisen, nicht auf den Satz $(CB) \equiv (BC)$ stützen, sondern hat zu beachten, dass (CB) dasselbe Segment wie (BC) ist, aber auf das Element C als Anfang bezogen und dass es mithin die Zahl $-b$ darstellt.

§ 114. *Addition und Subtraction.*

a. *Die Addition und Subtraction der ganzen negativen Zahlen werden so ausgeführt, als wären diese Zahlen absolut, und dem Resultat wird das Zeichen — gegeben.*

Die Addition mehrerer positiver oder negativer Zahlen wird dargestellt, indem man von dem Anfang an in positiver oder negativer Richtung mehrere consecutive Segmente (Def. VII, § 62; Uebereink. I, § 91), welche die Mass-

einheit so oft enthalten, als Einheiten der entsprechenden Zahlen vorhanden sind, addirt.

Die Subtraction zweier positiven Zahlen z. B. 3 von 7 wird durch eine Subtraction von Segmenten dargestellt, welche dieselbe Richtung haben oder durch Addition zweier entgegengesetzt gerichteter Segmente (Def. I, § 77). Weil nun

(1) $$7 - 3 = 4,$$

so stellt das resultirende Segment vom Anfang an in der positiven Richtung die Zahl 4 dar (Bem. II, § 80).

Wenn man die Subtraction in negativer Richtung ausführt, so muss man

(2) $$-7 + 3 = -4$$

erhalten, weil das resultirende Segment dem absoluten Werth nach dem ersteren gleich ist (Def. II, § 112) aber entgegengesetzte Richtung hat.

b. *Die Subtraction einer positiven Zahl von einer kleineren Zahl lässt sich ausführen; die resultirende Zahl ist dem Unterschied zwischen der kleineren und grösseren Zahl mit dem Vorzeichen — gleich.*

Sind beide Zahlen negativ, so erhält das Resultat das Zeichen +.

Es ist möglich ein grösseres Segment von einem dem absoluten Werth nach kleineren wegzunehmen; man erhält dann ein Segment, welches dem Unterschied zwischen dem ersten und dem zweiten gleich ist und die Richtung des grösseren hat (Def. I, Def. II, § 77). Wenn das kleinere Segment (AB) die Zahl 3 und das grössere (BC) die Zahl 7 darstellt, so stellt das Segment (AC) von A an $(AB) - (BC) \equiv (AC)$ die Zahl -4 dar. Es ist also:

(3) $$3 - 7 = -4.$$

Haben nun (AC) und (BC) die negative Richtung, so ist

(4) $$(-3) - (-7) = 4$$

oder auch

$$-3 - (-7) = 4.$$

c. *Von einer positiven oder negativen Zahl a eine positive (oder negative) Zahl b subtrahiren ist so viel, als zu der Zahl a die Zahl $-b$ (oder b) addiren.*

Denn es ist:

$$(AC) - (BC) \equiv (AC) + (CB) \equiv (AC) + [-(BC)] \quad (c'', \S\ 77)$$
$$(\pm a) - (\pm b) = (\pm a) + (\mp b) = (\pm a) + [-(\pm b)]$$

und erinnert man sich, dass:

$$(+a) = +a = a, \ (-a) = -a \qquad \text{(Def. I)}$$

ist, so erhält man:

$$\pm a - b = \pm a + (-b)$$
$$\pm a - (-b) = \pm a + b = \pm a + [-(-b)].$$

d. *Die Addition und Subtraction der positiven und negativen Zahlen sind dem Commutationsgesetz unterworfen, nämlich:*

$$\pm a \pm b = \pm b \pm a;$$

denn dieses Gesetz gilt für die Segmente der Grundform, welche diese Zahlen darstellen (e, § 99; a, § 104). Es ist in der That

$$-a+b=b+(-a),$$

aber

$$b+(-a)=b-a, \qquad (c)$$

woraus d folgt.

e. *Wenn man den beiden Seiten einer zwischen ganzen Zahlen bestehenden Gleichung dieselbe Zahl zufügt oder von ihnen wegnimmt, so erhält man gleiche Zahlen* (a′, § 78).

f. *Es gibt eine und nur eine einzige Zahl x, welche der Gleichung*

$$b \pm x = a$$

genügt, unter b und a beliebige Zahlen verstanden (b, § 78).

§ 115. *Multiplication.*

Def. I. Die Operation, mittelst welcher man das Vielfache $(AC)\eta \equiv (AD)$ eines Segments (AC) in positiver Richtung nach der ganzen Zahl η (Def. I, § 79 und Def. I, § 92) aus dem Segment (AC) erhält, heisst ***Multiplication*** des Segments (AC) mit der Zahl η, (AD) ***das Product***, (AC) ***der Multiplicand*** und η ***der Multiplicator***. Das Product wird auch durch das Zeichen $\times$ ausgedrückt, welches als Multiplicationszeichen für die Zahlen der Reihe (I) benutzt wurde (§§ 46 und 52), nämlich

$$(AC)\times\eta \equiv (AD). \qquad (b, § 9) \quad (1)$$

Bem. I. Wir haben früher gesehen, dass $\mu\times\eta=\eta\times\mu$ ist (b, § 52 und i, § 93). Wenn μ von dem Segment (AC) dargestellt wird, so können wir in Folge dieser Beziehung *das Vielfache von (AC) nach der Zahl η durch das Symbol $\eta(AC)$ wiedergeben.*

a. *Das Product zweier ganzen positiven Zahlen ist eine positive Zahl.*

Denn das Segment (AC) hat die positive Richtung und wenn η positiv ist, so liegt auch das Segment (AB) in der positiven Richtung.

Def. II. Ein Segment (AC) eine Anzahl $-\eta$ mal nehmen bedeutet das Vielfache von (AC) nach der Zahl η in der zu (AC) entgegengesetzten Richtung betrachten.

b. *Das Product einer ganzen positiven Zahl durch eine ganze negative Zahl ist negativ und ändert sich nicht, wenn man die Factoren vertauscht.*

Nimmt man das Segment (AC) in seiner Richtung von C an, welches die negative ist, η mal, so erhält man:

$$-(AC)\times\eta \equiv -(AD). \qquad (2)$$

Betrachtet man aber (AC) als Einheit, so entspricht dem Ende D die Zahl $(-\eta)$ oder $-\eta$ (Def. I, § 113), wir können daher auch sagen, wir nähmen den Theil (AC), der von A nach C hin positiv ist, $(-\eta)$ mal (Def. II) und erhalten mithin

$$(AC)\times(-\eta) \equiv -(AD), \qquad (3)$$

woraus sich

$$-(AC)\times\eta \equiv (AC)\times(-\eta) \qquad (b, § 9) \quad (4)$$

ergibt. Setzt man statt (AC) die Zahl μ, welche durch (AC) dargestellt wird, so ist:

$$\mu\times(-\eta) = -\mu\times\eta = -(\mu\times\eta) = -(\eta\times\mu), \qquad (5)$$

was zu beweisen war.

c. *Das Product zweier negativen Zahlen ist positiv und von der Ordnung der Factoren unabhängig.*

Betrachten wir das Segment (CA), das die negative Richtung von C nach A hin hat, und nehmen es $-\eta$ mal, so heisst dies: wir sollen es η mal in der zu seiner Richtung entgegengesetzten Richtung betrachten (Def. II), also in der positiven, und das Resultat ist mithin dasselbe, wie wenn wir das Segment (AC) von A an η mal in positiver Richtung nehmen; es ist also:

(6) $$(CA)\times(-\eta) = -(AC)\times(-\eta) = (AC)\times\eta = (AD).$$

Setzt man statt (AC) die Zahl μ, so erhält man

(6') $$(-\mu)\times(-\eta) = \mu\times\eta = \eta\times\mu = (-\eta)(-\mu).$$

§ 116. *Division.*

Def. I. Die zu der Multiplication umgekehrte Operation, mittelst welcher man aus dem Product eines Segments durch eine ganze Zahl η z. B. $(AC)\times\eta = (AD)$ die Zahl η oder das Segment (AC) erhält, heisst *Division;* das Resultat entspricht in dem ersten Fall *dem Verhältniss* von (AD) zu (AC) und ist das Mass des Verhältnisses $\frac{(AD)}{(AC)}$ (Def. IV, § 106). Im zweiten Fall heisst das Resultat *Quotient.*

Im letzteren Fall setzen wir

(1) $$(AC) = (AD):\eta$$

und nennen (AD) den *Dividend* und η den *Divisor.*

Es ist
$$\frac{(AD)}{\eta} = (AD):\eta. \quad \text{(Def. II, § 79 und Def. II, § 92; b, § 9)}$$

Setzt man statt (AC) und (AD), wenn sie positiv sind, ihre entsprechenden Zahlen, so erhält man aus (1)

(2) $$\mu = \mu\times\eta:\eta$$

und mithin auch

(2') $$\eta = \eta\times\mu:\mu.$$

Sind (AC) und (AD) negativ, so stellen sie die negativen Zahlen $-\mu$ und $-(\mu\times\eta)$ dar und es folgt aus (1)

(3) $$-\mu = -(\mu\times\eta):\eta; \quad -\eta = -(\eta\times\mu):\mu$$

und ähnlich

(3') $$-\mu = -(\eta\times\mu):\eta; \quad -\eta = -(\mu\times\eta):\mu.$$

Aus

(4) $$\frac{(AD)}{(AC)} = \eta,$$

wenn (AD) und (AC) positiv sind, ergibt sich dagegen

(5) $$\eta = \frac{\mu\times\eta}{\mu}$$

und analog

(5') $$\eta = \frac{\eta\times\mu}{\mu}.$$

Wenn man dann (AC) und (AD) in negativer Richtung betrachtet, so erhält man aus (2), § 115

$$\eta = \frac{-(\mu \times \eta)}{-\mu} \tag{6}$$

$$\eta = \frac{-(\eta \times \mu)}{-\mu}. \tag{6'}$$

Aus (6), § 115 folgt:

$$(CA) = (AD):(-\eta), \tag{7}$$

woraus

$$-\eta = \frac{(AD)}{(CA)} \tag{7'}$$

und aus (7) erhält man, wenn (AC) und (AD) die positive Richtung haben,

$$-\eta = (\mu \times \eta):(-\mu) \tag{8}$$

oder:

$$-\eta = (\eta \times \mu):(-\mu). \tag{8'}$$

Wenn (AC) und (AD) negativ gerichtet sind, so erhält man durch Vertauschung von μ mit η

$$\eta = -(\mu \times \eta):(-\mu) \tag{9}$$

$$\eta = -(\eta \times \mu):(-\mu). \tag{9'}$$

Aus (7') ergibt sich, wenn (AD) und (AC) in positiver Richtung betrachtet werden:

$$-\eta = \frac{\mu \times \eta}{-\mu} \tag{10}$$

$$-\eta = \frac{\eta \times \mu}{-\mu} \tag{10'}$$

und sind sie negativ gerichtet:

$$-\eta = \frac{-(\mu \times \eta)}{\mu} \tag{11}$$

$$-\eta = \frac{-(\eta \times \mu)}{\mu}. \tag{11'}$$

Aus den Beziehungen (2') und (9'), (3) und (8') erhält man:

a. *Wenn man bei der Division zweier ganzen Zahlen im Dividend und Divisor das Zeichen ändert, so behält der Quotient sein Zeichen.*

Aus den Gleichungen (2'), (9'), (3) und (8') folgt:

b. *Haben der Dividend und der Divisor dasselbe Zeichen, so ist der Quotient positiv, haben sie entgegengesetzte Zeichen, so ist er negativ.*

Aus (2) und (5); (3) und (11'); (6') und (9); (8) und (10) ersieht man, dass für ganze Zahlen das Zeichen : durch das Zeichen — des Verhältnisses, den Bruchstrich, ersetzt werden kann, oder mit andern Worten:

c. *Das Verhältniss* $\frac{(AC)}{(AD)}$ *entspricht einer Division zweier Zahlen, wenn* (AC) *und* (AD), *wie hier vorausgesetzt wird, ganze und durcheinander theilbare Zahlen sind.*

3.

Gebrochene Zahlen und die Grundoperationen mit ihnen.

§ 117. *Bem. I.* Das Symbol $(AC)\frac{\mu}{\eta}$ bedeutet, dass das Segment (AC) in η gleiche Theile zerlegt wurde und dass man das Segment (AB) gebildet hat, welches μ der η^{ten} Theile von (AC) enthält (b, § 99 oder d, § 103).

Def. I. Wenn (AC) zur Einheit genommen wird, so gibt das Zeichen $\frac{\mu}{\eta}$ das Segment (AB) in der Richtung von (AC) an und wie die bisher betrachteten Zahlen auch die Segmente der Grundform von A an bezeichnen, so nennen wir die Zeichen $\frac{\mu}{\eta}$ *gebrochene Zahlen oder Brüche*, während die übrigen Zahlen der Classen (I) und (II) ganze Zahlen hiessen (Def. V, § 91).

μ heisst *Zähler*, η *Nenner*.

Wie es ganze positive und negative Zahlen gibt, so gibt es auch gebrochene positive und negative Zahlen, je nachdem die Segmente, durch welche sie dargestellt werden, positive oder negative Richtung haben (Def. I, § 112).

Bem. II. Die Zahl $\frac{-\mu}{\eta}$ bedeutet, dass die Einheit (AC) in η gleiche Theile zerlegt wurde und dass man $(-\mu)$ von ihnen nimmt (Def. II, § 115).

Die Zahl $\frac{\mu}{-\eta}$ bedeutet dagegen, dass man (CA) in η gleiche Theile getheilt hat und μ dieser Theile betrachtet.

a. *Der Bruch $\frac{\mu}{\eta}$ gibt auch an, dass die Einheit μ mal genommen wurde und das Resultat in η gleiche Theile zerlegt wurde* (f, § 99 oder b, § 104).

Bem. III. Beschränkt man sich auf eine einzige Einheit, so genügt es nur die Brüche von der Form $\frac{m}{n}$, worin m und n Zahlen der Reihe (I) sind, zu betrachten (§ 46).

b. *Der Bruch $\frac{\mu}{\eta}$ ist, wenn μ und η*

1) *endlich oder unendlich gross von derselben Ordnung sind, endlich;*
2) *wenn μ unendlich gross von der Ordnung μ_1 und η unendlich gross von der Ordnung η_1 ist $(\mu_1 > \eta_1)$ unendlich gross von der Ordnung $\mu_1 - \eta_1$.*
3) *Wenn $\eta_1 > \mu_1$ ist, so ist die Zahl $\frac{\mu}{\eta}$ unendlich klein von der Ordnung $\eta_1 - \mu_1$* (a, § 105).

Bem. IV. Wie die Operation des Subtrahirens einer grösseren Zahl von einer kleineren ihre *volle Rechtfertigung* in der Grundform (welche ebenfalls eine abstracte Form ist) findet, so *rechtfertigen wir* auch mit Hülfe dieser Form *die Operation der Division einer kleineren Zahl durch eine grössere.*

Die Gleichheit und die Gesetze, welche die Grundoperationen mit den gebrochenen Zahlen regeln, müssen, wenn sie vollständig bestimmt sind, aus ihrer Definition hervorgehen und es ist nicht erlaubt, sie erst willkürlich festzusetzen.

c. *Zwei Brüche $\frac{\mu}{\eta}$, $\frac{\mu'}{\eta'}$ sind gleich, wenn sie dasselbe Segment der Grundform oder zwei identische Segmente darstellen.*

Wenn

$$(AB) \equiv (AC)\frac{\mu}{\eta} \equiv (AC)\frac{\mu'}{\eta'}, \tag{1}$$

so ist

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'}{\eta'}. \qquad \text{(b, § 9)}$$

Bei den Zahlen haben wir nicht nöthig eine andre Gleichheit in Betracht zu ziehen (Bem. I, § 9) und benutzen desshalb dasselbe Zeichen $=$, wie bei den ganzen Zahlen.

d. *Zwei Brüche* $\frac{\mu}{\eta}$ *und* $\frac{\mu'}{\eta'}$ *sind gleich, wenn* $\mu\eta' = \mu'\eta$.

Denn aus (1) folgt

$$\frac{(AC)}{\eta}\mu\eta' \equiv (AC)\mu' \qquad \text{(b, b', d, § 79 oder d, d', § 92)}$$

und

$$(AC)\mu\eta' \equiv (AC)\mu'\eta,$$

woraus

$$\mu\eta' = \mu'\eta.\ ^{1)} \tag{c}$$

---

1) Nachdem die Eigenschaften der Gleichheit (d, e, § 8) festgestellt sind und der Bruch vollständig definirt ist, muss die Bedingung der Gleichheit zweier Brüche aus der Definition des Bruches hervorgehen. Man gibt oft auch zuerst die Definition der Gleichheit und sagt dann:

Falls die natürliche Zahl a durch eine andre Zahl b nicht theilbar ist, so existirt ein und nur ein neuer Gegenstand, welcher mit dem Symbol $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ bezeichnet wird und der Gleichung genügt:

$$b\cdot(a:b) = (a:b)\ b = a.$$

Ferner als zweite Definition: Zwei von diesen Gegenständen $a:b$, $a':b'$ seien gleich, wenn $a\cdot b' = a'b$.

Setzt man ohne weitere Bedingung fest, $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ seien gleich, wenn $ab' = a'b$ ist, so heisst das, dass sie es, falls den Beziehungen der Gleichheit und Ungleichheit genügt werden muss, auch auf andre Weise sein können und man müsste, da die ganzen Zahlen auch in die Form von Brüchen gebracht werden können und mit diesen die Classe der rationalen Zahlen bilden, wenigstens zeigen, dass die obige Bedingung derjenigen der Gleichheit ganzer Zahlen nicht widerspricht.

Wenn man $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ als Symbole desselben Dings ansieht, alsdann kann man, da $\frac{a}{b}$ und $a:b$ in den Formeln sich einander substituiren lassen, die Bedingung finden, unter welcher sie dasselbe Ding bezeichnen oder gleich sind (b, § 9).

Setzt man

$$\frac{\alpha a}{a} = \left(\frac{\alpha}{a}\right)a = \frac{\alpha}{a}\cdot a = \frac{\alpha}{a}a = \alpha, \tag{1}$$

worin α eine ganze oder gebrochene Zahl ist, so erhält man für α als ganze Zahl:

$$\frac{a}{b}b' = \frac{ab'}{b}; \tag{2}$$

denn substituirt man in $\frac{ab'}{b}$ an der Stelle von a das Symbol $\left(\frac{a}{b}\right)b$, so folgt aus (1)

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)bb'}{b} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)b'b}{b} = \frac{a}{b}b'.$$

Wenn nun $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ist oder wenn $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dasselbe Ding bezeichnen, so ist:

$$\frac{a'}{b'}\cdot b = a$$

und mithin nach (2)

$$\frac{ba'}{b'} = a$$

und nach (1)

$$\frac{ba'}{b'}b' = ba' = ab'.$$

Bezeichnen mithin die beiden Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ ***dasselbe Ding, das heisst sind sie gleich, so ist***

$$b'a = ba'. \tag{3}$$

d'. *Für alle beliebigen positiven oder negativen μ und η ist*

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu\mu'}{\eta\mu'}.$$

Dies wird durch Satz d bewiesen (b, § 52).

d''. *Die Zahlen* $\frac{\mu}{\eta}$, $\frac{-\mu}{-\eta}$ *sind gleich* (b, § 115; d).

d'''. *Die Zahlen* $\frac{-\mu}{\eta}$, $\frac{\mu}{-\eta}$ *sind gleich* (c, § 115; d).

Bez. I. Die Zahlen $\frac{-\mu}{\eta}$, $\frac{\mu}{-\eta}$ bezeichnen wir auch mit dem Symbol $-\frac{\mu}{\eta}$.

§ 118. *Addition und Subtraction.*

Bem. I. Der Addition oder Subtraction zweier Theile eines Segments der Grundform (§§ 72, 74) entspricht die Addition oder Subtraction zweier Brüche, welche zu ihrer Bezeichnung in Bezug auf das gegebene Segment als Einheit dienen. Oder mit andern Worten:

Wenn umgekehrt die Beziehung (3) gilt, so sind die beiden neuen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ gleich. Denn aus (3) folgt:

$$b'a = \frac{ba'}{b'}b' \quad \text{oder auch} \quad ab' = \frac{ba'}{b'}b',$$

das heisst

$$a = \frac{ba'}{b'},$$

aus (2) aber

$$a = \frac{a'}{b'}b$$

oder

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Wenn dagegen $\frac{a}{b}$ einen Gegenstand bezeichnet und dieser Bruch heisst, während $\frac{a'}{b'}$ ein Zeichen für diesen Gegenstand ist, dann kann man den letzteren durch die Gleichung

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a'c}{b'}, \tag{4}$$

welche gilt, wenn $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl ist, definiren.

Die Operation c ist eindeutig und wird auf eine einzige Art ausgeführt (4) und wenn daher $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ verschiedene aber gleiche Gegenstände sind, so ist es so, als ob $\frac{a'}{b'}$ $\frac{a}{b}$ wäre (Bem. III, § 9) und die mit dem Gegenstand $\frac{a'}{b'}$ vorgenommene Operation c liefert alsdann ein dem ersten gleiches Resultat (a''', § 60), das heisst, $\frac{a}{b}c = \frac{a'}{b'}c$. Sind $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ nicht gleich, so sind $\frac{a}{b}c$, $\frac{a'}{b'}c$ ungleich (a^{IV}, § 60).

Dieselbe Eigenschaft hat die umgekehrte Operation und mithin erhält man aus $\frac{a}{b}c = \frac{a'}{b'}c$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}. \tag{5}$$

Dann beweist man wie oben, dass $ab' = a'b$ ist, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ist und umgekehrt.

Die Eigenschaften (3) und (5) gelten auch für Segmente (d, d', § 79), ohne dass man sie aber desshalb immer einander substituiren kann, wenn sie gleich sind; während man bei den Brüchen dies thun kann, weil bei ihnen keine Rücksicht auf die Verhältnisse der Position genommen wird.

Def. I. Unter Addition oder Subtraction zweier Brüche verstehen wir die Operation, mittelst welcher man die Zahl erhält, welche die Summe oder Differenz der Segmente der beiden ersten Zahlen darstellt.

Bez. I. Die Summe $(AD)\frac{\mu}{\eta} + (AD)\frac{\mu'}{\eta}$ drücken wir auch durch das Symbol $(AD)\left(\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta}\right)$ aus.

a. $(AD)\frac{\mu}{\eta} + (AD)\frac{\mu'}{\eta} \equiv (AD)\left(\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta}\right)$ (b, § 9) und $\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta} = \left(\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta}\right)$ (c, § 117).

b. *Um zwei Brüche, die denselben Nenner haben, zu addiren oder subtrahiren, addirt oder subtrahirt man die Zähler und gibt dem Resultat den gemeinsamen Nenner zum Nenner.*

Nehmen wir z. B. an, die beiden Segmente (AB), (BC) derselben Richtung wären derart, dass:

$$(AB) \equiv (AD)\frac{\mu}{\eta}, \quad (BC) \equiv (AD)\frac{\mu'}{\eta}.$$

$(AB) + (BC) \equiv (AC)$ enthält alsdann $\mu + \mu'$ mal den η^{ten} Theil des Segments (AD), mithin ist:

$$(AD)\frac{\mu}{\eta} + (AD)\frac{\mu'}{\eta} \equiv (AC) \equiv (AD)\frac{\mu + \mu'}{\eta},$$

folglich

$$\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta} = \frac{\mu + \mu'}{\eta}. \qquad \text{(c, § 117)} \quad (1)$$

Wenn dagegen (BC) die entgegengesetzte Richtung wie (AB) hat, so ist aus demselben Grund (Def. II, § 77):

$$\frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu'}{\eta} = \frac{\mu}{\eta} + \left(-\frac{\mu'}{\eta}\right) = \frac{\mu - \mu'}{\eta}. \qquad (2)$$

Bem. II. Um zwei Brüche mit verschiedenem Nenner zu addiren oder subtrahiren, multiplicirt man Nenner und Zähler eines jeden von ihnen mit dem Nenner des andern, wodurch die Zahlen selbst nicht geändert werden (d', § 117) und wendet den vorigen Satz an.

c. *Für die Addition und Subtraction der Brüche gilt das Commutations- und Associationsgesetz.*

Denn es ist immer, welches auch die Richtung von (AB) und (AC) sei,

$$(AB) + (BC) \equiv (BC) + (AB). \qquad \text{(e, § 99 oder a, § 104)}$$

Ebenso gilt das Associationsgesetz, in welcher Richtung man auch die Segmente durchlaufen mag (d, § 77).

§ 119. *Multiplication.*

Def. I. Ist das Segment $(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv (AD)$, so sagen wir, (AD) sei das Resultat der *Multiplication* von (AB) mit dem Bruch $\frac{\mu}{\eta}$.

Und unter *Multiplication* einer ganzen oder gebrochenen Zahl mit einer ganzen oder gebrochenen Zahl verstehen wir die Operation, mittelst welcher die Zahl abgeleitet wird, welche dem Product des die erste Zahl darstellenden Segments durch die zweite Zahl entspricht.

a. *Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren oder umgekehrt multiplicirt man den Zähler mit der ganzen Zahl und gibt dem Resultat den*

Nenner des Bruchs zum Nenner. In diesem Fall gilt die Regel über die Zeichen, welche für die Multiplication der ganzen Zahlen gilt.

Wenn das positive Segment (AB) in seiner eigenen Richtung μ' mal wiederholt wird, so ist

$$(AB) \times \mu' \equiv (D), \qquad \text{(Def. I, § 79 oder § 92 und Def. I, § 115)}$$

und wenn der η^{ten} Theil der Einheit (AC) in (AB) μ mal enthalten ist, so hat man:

$$(AB) \equiv (AC)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AC)\mu}{\eta} \qquad \text{(f, § 99 oder b, § 104)}$$

und mithin

$$(AD) \equiv \frac{(AC)\mu}{\eta}\mu' \equiv \frac{(AC)\mu\mu'}{\eta}. \qquad \text{(f, § 99 oder b, § 104)}$$

Das Segment (AD) enthält also $\mu\mu'$ dieser Theile und es ist folglich

(1) $$\frac{\mu}{\eta} \times \mu' = \frac{\mu\mu'}{\eta}. \qquad \text{(c, § 117)}$$

Als wir von der Multiplication eines Segmentes durch eine ganze Zahl handelten, haben wir schon die Bedeutung der Beziehungen

(2) $$\begin{aligned} -(AB) \times \mu' &\equiv -(AD) \\ (AB) \times -\mu' &\equiv -(AD) \\ -(AB) \times -\mu' &\equiv (AD) \end{aligned} \qquad [(2), (3), (6), \text{§ } 115]$$

erklärt; danach ist:

(3) $$-\frac{\mu}{\eta} \times \mu' = -\frac{\mu\mu'}{\eta}$$

(4) $$\frac{\mu}{\eta} \times -\mu' = -\frac{\mu\mu'}{\eta}$$

(5) $$-\frac{\mu}{\eta} \times -\mu' = \frac{\mu\mu'}{\eta}.$$

Wenn μ' Einheiten in (AB) enthalten sind, so findet man aus

$$(AB)\frac{\mu}{\eta} \equiv \frac{(AB)\mu}{\eta}$$

(6) $$\mu'\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'\mu}{\eta}$$

und mithin

(7) $$\mu'\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu}{\eta}\mu'.$$

b. *Das Product eines Bruches durch einen andern Bruch ist ein Bruch, dessen Zähler das Product der beiden Zähler und dessen Nenner das Product der beiden Nenner ist.*

Nehmen wir an, (AB) enthalte μ' mal den η'^{ten} Theil der Einheit (AC) oder es werde durch die Zahl $\frac{\mu'}{\eta'}$ dargestellt (Def. I, § 117). Wiederholt man dieses Segment μ mal, so erhält man ein Segment (AD), welches aus $\mu\mu'$ η'^{ten} Theilen der Einheit besteht und welches die Zahl $\frac{\mu\mu'}{\eta'}$ darstellt (a). Theilen wir das ganze Segment (AD) in η gleiche Theile, so enthält jeder derselben $\mu\mu'$ mal den $\eta\eta'^{\text{ten}}$ Theil der Einheit.

Denn $(AD) = \frac{(AC)\mu\mu'}{\eta'}$, wenn (AC) die Einheit ist (a) und mithin:

$$\frac{(AD)}{\eta} = \frac{(AC)\mu'\mu}{\eta'} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{(AC)\mu'\mu}{\eta'\eta}. \quad \text{(a, § 79 oder c, § 92)}$$

Es ist aber:

$$(AD) = (AB) \times \mu, \; \frac{(AD)}{\eta} = (AB) \times \frac{\mu}{\eta}, \quad \text{(f, § 99 oder b, § 104)}$$

daher:

$$\frac{\mu'}{\eta'} \times \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'\mu}{\eta'\eta} = \frac{\mu\mu'}{\eta\eta'} = \frac{\mu}{\eta} \times \frac{\mu'}{\eta'}. \quad \text{(c, § 117)} \quad (8)$$

Die Regeln über die Zeichen, die durch (3), (4), (5) gegeben sind, erstrecken sich auch auf diese Fälle und man erhält:

c. *Das Product zweier Brüche ist positiv oder negativ, je nachdem die beiden Zahlen dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen haben.*

d. *Für die Multiplication einer ganzen Zahl mit einem Bruch oder zweier Brüche gilt das Commutationsgesetz.*

Dies geht aus den Formeln (7) und (8) hervor.

e. *Für die Multiplication der Brüche gilt das Associationsgesetz.*

Denn es ist:

$$\left[(AB)\frac{\mu'}{\eta'}\right]\frac{\mu''}{\eta''} = \frac{(AB)\mu'}{\eta'} \times \frac{\mu''}{\eta''} = \frac{(AB)\mu'\mu''}{\eta'\eta''} = (AB)\frac{\mu'\mu''}{\eta'\eta''} = (AB)\left(\frac{\mu'}{\eta'} \times \frac{\mu''}{\eta''}\right).$$

(f, § 99 und a, § 79 oder b, § 104 und c, § 92)

f. *Für die Multiplication der Brüche gilt das Distributionsgesetz.*

Das heisst:

$$[(AB) + (BC)]\frac{\mu}{\eta} = (AB)\frac{\mu}{\eta} + (BC)\frac{\mu}{\eta}.$$

Es ist $(AB) + (BC) = (AC)$. Wenn wir (AB) und (BC) in η gleiche Theile zerlegen und auf den ersten Theil von (AB) den ersten von (BC) folgen lassen, was in Folge des Commutationsgesetzes der Summe mehrerer Segmente erlaubt ist (e, § 99 oder a, § 104), so erhalten wir η gleiche Theile von (AC) und mithin:

$$\frac{(AB)}{\eta} + \frac{(BC)}{\eta} = \frac{(AC)}{\eta}. \quad (9)$$

Aber:

$$[(AB) + (BC)]\mu = (AC)\mu = (AB)\mu + (BC)\mu, \quad \text{(e, § 99 oder a, § 104)}$$

setzt man also

$$(AB)\mu = (AB_1), \; (BC)\mu = (B_1C_1), \; (AC_1) = (AC)\mu,$$

so ist:

$$(AB_1) + (B_1C_1) = (AC_1),$$

woraus wegen (9)

$$\frac{(AB_1)}{\eta} + \frac{(B_1C_1)}{\eta} = \frac{(AC_1)}{\eta}$$

und da

$$\frac{(AB)\mu}{\eta} = (AB)\frac{\mu}{\eta}, \quad \text{(f, § 99 oder b, § 104)}$$

so erhält man durch Substitution in die vorige Gleichung:

$$(AB)\frac{\mu}{\eta} + (BC)\frac{\mu}{\eta} = (AC)\frac{\mu}{\eta} = [(AB) + (BC)]\frac{\mu}{\eta}.$$

Stellen (AB) und (BC) in Bezug auf die Einheit die Zahlen $\frac{\mu'}{\eta'}$, $\frac{\mu''}{\eta''}$ dar, so ist:

$$\left(\frac{\mu'}{\eta'} + \frac{\mu''}{\eta''}\right)\frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'\mu}{\eta'\eta} + \frac{\mu''\mu}{\eta''\eta}. \qquad \text{(c, § 117)}$$

§ 120. *Division.*

Def. I. Die Division eines Segments durch einen Bruch ist die Operation, mittelst welcher man aus dem Product $(AB)\frac{\mu}{\eta} = (AD)$ (Def. I, § 119), wenn (AD) gegeben ist, (AB) bestimmt. Man schreibt $(AB) = (AD) : \frac{\mu}{\eta}$.

Die Division einer ganzen oder gebrochenen Zahl durch eine ganze oder gebrochene Zahl ist die Operation, mittelst welcher man die Zahl ableitet, welche dem Segment entspricht, das man aus dem die erste Zahl darstellenden Segment durch Division mit der zweiten erhält.

a. *Ist* $(AB)\frac{\mu}{\eta} = (AD)$, *so ist, für jedes beliebige* (AD) *und* $\frac{\mu}{\eta}$, $(AB) = (AD)\frac{\eta}{\mu}$.

Denn:

$$(AB)\frac{\mu}{\eta} = \frac{(AB)\mu}{\eta} \qquad \text{(f, § 99 oder b, § 104)}$$

$$(AB)\frac{\mu}{\eta}\eta = \frac{(AB)\mu}{\eta}\eta = (AB)\mu\frac{\eta}{\eta} = (AB)\mu \qquad \text{(b u. b', § 79 oder d u. d', § 92)}$$

und daher:

$$(AB)\frac{\mu}{\eta}\frac{\eta}{\mu} = (AB), \qquad \text{(b' § 79 oder d', § 92)}$$

mithin

$$(AB) = (AD)\frac{\eta}{\mu}.$$

b. *Um eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren, multiplicirt man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs und gibt dem Resultat den Zähler des Bruchs zum Nenner; um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, bildet man einen neuen Bruch, dessen Zähler der Zähler des gegebenen Bruchs und dessen Nenner das Product des Nenners des gegebenen Bruchs mit der ganzen Zahl ist.*

Denn es ist:

$$(1) \qquad (AB) = (AD) : \frac{\mu}{\eta} = \frac{(AD)\eta}{\mu}. \qquad \text{(a)}$$

Stellt (AD) μ' Einheiten vor, so erhält man:

$$\mu' : \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'\eta}{\mu}.$$

Ist

$$(AB)\mu = (AD),$$

so ist:

$$(2) \qquad (AB) = \frac{(AD)}{\mu} = (AD) : \mu \qquad \text{(Def. I, § 116)}$$

und wenn:

$$(AD) = (AC)\frac{\mu'}{\eta'},$$

so ist:

$$(AB) = (AC)\frac{\mu'}{\eta'}\cdot\frac{1}{\mu} \qquad \text{(a, § 79 oder c, § 92)}$$

$$(AB) = \frac{(AC)\mu'}{\eta'\mu}. \qquad \text{(c, § 79 u. f, § 99 oder e, § 92; b, § 104)}$$

Und wenn (AC) die Einheit ist, so folgt aus (2)

$$\frac{\mu'}{\eta'} : \mu = \frac{\mu'}{\eta'\mu}. \qquad \text{(c, § 117)}$$

c. *Um einen Bruch durch einen andern zu theilen, multiplicirt man den Zähler des ersten mit dem Nenner des zweiten und gibt dem Resultat das Product des Nenners des ersten mit dem Zähler des zweiten zum Nenner.*

Denn wenn in (1) (AD) die Zahl $\frac{\mu'}{\eta'}$ darstellt, so ist:

$$\frac{\mu'}{\eta'} : \frac{\mu}{\eta} = \frac{\mu'}{\eta'}\cdot\frac{\eta}{\mu} = \frac{\mu'\eta}{\eta'\mu}. \qquad \text{(c, § 117 und b, § 119)}$$

Ferner folgt aus den Beziehungen

$$(AB) : -\mu = -(AD)$$

$$-(AB) : \mu = -(AD).$$

$$-(AB) : -\mu = (AD), \qquad \text{[(2), (3), (6), § 115 und Def. I, § 116]}$$

welche auch gelten, wenn μ ein Bruch ist:

d. *Der Quotient der Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch oder umgekehrt oder eines Bruches durch einen andern Bruch ist positiv oder negativ, je nachdem der Dividend und der Divisor gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.*

4.

Reelle, rationale und irrationale, absolute und relative Zahlen.

§ 121. a. *Zwei unter sich commensurabele Segmente erster Art lassen sich durch einen Bruch ausdrücken.*

Denn eines derselben ist Vielfaches des andern oder eines genauen Theiles des andern (Def. I, § 105).

Bem. I. Die absoluten rationalen Zahlen zweiter Art drücken unter sich commensurabele Segmente zweiter Art aus und diejenigen, welche die incommensurabelen Segmente ausdrücken, sind absolute Irrationalzahlen (Def. II, § 105).

Bezieht man sich auf eine einzige relative Einheit, so fehlen die rationalen Zahlen zweiter Art (Bem. II, § 105).

Def. I. Alle *rationalen* und *irrationalen* Zahlen heissen *reell, absolut,* wenn man sie in absolutem Sinn, *relativ,* wenn man sie in dem Gebiet einer einzigen Einheit betrachtet.

b. *Je nachdem man die Grundform als stetig in Bezug auf eine Einheit oder als absolut stetig betrachtet, erhält man Zahlen von verschiedener Beschaffenheit. In dem ersten Fall sind alle reellen Zahlen endlich, in dem zweiten dagegen*

gibt es auch unendlich grosse und unendlich kleine von einer beliebigen Ordnung, die in Bezug auf eine beliebige Zahl als Einheit gegeben ist.[1])

Es geht dies unmittelbar aus den Definitionen und den Eigenschaften der Segmente, welche diese Zahlen darstellen, hervor (Def. II, § 82).

Def. II. Wir sagen, die in absolutem oder relativem Sinn reellen Zahlen, welche zwischen den Zahlen α und β liegen, bildeten *das Zahlenintervall* $(\alpha \ldots \beta)$.

c. *Die absoluten oder relativen reellen Zahlen, welche in dem Intervall* (0 ... 1) *liegen, kann man eindeutig und in derselben Ordnung den Elementen eines beliebigen Segments* (*AB*) *in absolutem oder relativem Sinn entsprechen lassen.*

Denn in dem ersten Fall kann man als Masseinheit ein absolutes endliches Segment (Def. V, § 92) und im zweiten jedes relative endliche Segment in Betracht ziehen (Def. II, § 82). Es folgt dies übrigens auch aus dem Proportionalitätszusammenhang (Def. I und d, § 106).

c'. *Die reellen Zahlen, welche in dem Intervall* $(\alpha \ldots \beta)$ *liegen, kann man eindeutig und in derselben Ordnung den reellen Zahlen des Intervalls* (0 ... 1) *entsprechen lassen* (c; f, § 42).

c''. *Alle reellen Zahlen kann man eindeutig und in derselben Ordnung allen Elementen des Continuums von einem gegebenen Element als Grundanfang aus entsprechen lassen.*

Dies folgt aus der Definition der reellen Zahlen (Def. I und Def. II, § 105 und Def. III, § 42).

Def. III. Dem Satz c'' gemäss sagen wir mithin, alle reellen Zahlen derart geordnet, dass jede kleinere Zahl einer jeden andern, die grösser als sie ist, voransteht, bildeten *das absolute oder relative numerische Continuum.*

Bem. II. Die Gleichheit (oder Ungleichheit) der rationalen Zahlen zweiter Art oder der Irrationalzahlen ist durch die Gleichheit der Segmente gegeben, durch welche sie in Bezug auf ein gegebenes Segment als Einheit dargestellt werden, so wie sie dazu dienen, diese Segmente darzustellen. Beide können mithin in den numerischen Beziehungen, durch welche Beziehungen zwischen Segmenten dargestellt werden, einander substituirt werden.

Auch hier ist also die Gleichheit durch die Beschaffenheit der Dinge, welche die Rationalzahlen zweiter Art und die Irrationalzahlen sowie die übrigen ganzen und gebrochenen Zahlen darstellen, gegeben und ist nicht willkürlich, wie es sein muss, wenn die Zahlen an sich vollständig definirt sind.[2])

1) Da wir die Classe (*II*) unsrer ganzen unendlich grossen Zahlen, welche von der zweiten Mächtigkeit ist (4. Anm. zu § 93), allein in Betracht gezogen haben, so können wir mithin in Bezug auf die so erhaltene Grundform die Hypothesen III, IV u. s. w. wiederholen (Bem. IV, § 92). Wir kämen so zur Construction neuer Grundformen, welche die früheren enthalten würden und neuer Classen reeller Zahlen. Fährt man so unbegrenzt fort, so erhält man eine in Wirklichkeit absolute Grundform. Wie wir uns auf die Gruppe endlicher, unendlich grosser und unendlich kleiner Segmente endlicher Ordnung beschränken konnten (siehe Anm. 1 zu § 105), so betrachten wir auch hier nur die Classe (*II*) unendlich grosser Zahlen, theils weil wir in den Fundamenten der Geometrie nur die Sätze über die unendlich grossen und unendlich kleinen Segmente benutzen, theils um nicht neue Schwierigkeiten in Begriffe einzuführen, die an sich einfach sind aber gewöhnlich falsch verstanden werden.

2) Siehe die Anm. zu § 9 und die Anm. 2, § 48; 1, § 106 und § 117. Was wir von den Brüchen gesagt haben, gilt auch für die relativen wie für die absoluten Irrationalzahlen.

Cantor's Reihe (a_n) z. B. (Acta Math. Bd. 2 u. s. w.) bestimmt ein neues Ding, welches durch diese Reihe bezeichnet wird. Man sagt $(a_n) = (a'_n)$, wenn

Da, wie wir gesehen haben (h', § 99 oder e', § 104), verschiedene numerische Symbole oder Zahlen dasselbe Segment in Bezug auf die Masseinheit oder dasselbe Element von einem gegebenen Ursprung an vorstellen können, so *sind* alle diese Zahlen gleich (b, § 9).

Wenn wir die reellen positiven und negativen Zahlen von 0 an in Reihen ordnen und unter allen gleichen Zahlen nur eine einzige betrachten, wie es z. B. bei der Reihe (*I*) der natürlichen Zahlen (§§ 46 und 47) oder auch bei der Reihe (*II*) (§ 91) unsrer endlichen oder unendlich grossen Zahlen der Fall war und wenn wir dann zwei Zahlen betrachten, die einer der Zahlen der obigen Reihe gleich sind, so stellen sie dieselbe Zahl dar (b, § 47).

Alle Symbole, die von einem gegebenen Element A der Grundform an ein Element B in Bezug auf eine Einheit (AA_1) darstellen, stellen auch das Verhältniss $\frac{(AB)}{(AA_1)}$ dar (Def. IV und V, § 106), wie die Zahlen (Ziffern) von (*I*) (§ 47) die Zahlen der natürlichen Gruppen darstellen (Def. II, § 45 und Def. III, § 46).

Def. IV. Der Bem. II gemäss nennen wir das Verhältniss auch *Zahl.*

Wir können daher sagen, alle Symbole, welche dasselbe Element bezeichnen, stellten auch *dieselbe Zahl* dar, ohne dass desshalb die Zahl das gegebene Element der Grundform ist (Bem. II).

Bem. III. Zwischen dem Verhältniss als Zahl und dem Symbol (der Zahl), durch welches es dargestellt wird, ist desshalb derselbe Unterschied, wie zwischen der Zahl der Gruppe (Def. II, § 45) und dem Symbol, durch welches sie bezeichnet wird. Die Zahl, auch die rationale oder absolute irrationale, ist so unabhängig von der Form des Symbols gemacht, durch welches sie dargestellt wird. Wir erhalten mithin:

$$\lim (a_n - a'_n) = 0,$$
$$n = \infty.$$

Dieses „man sagt" drückt immer eine gewisse Willkür aus, während doch die beiden Zahlen in relativem Sinn, wenn die obige Beziehung stattfindet, gleich *sind*, wie aus Satz d', § 97 hervorgeht, der auch in dem Fall gilt, wenn die Reihe der Segmente (a_n) nicht immer wächst oder abnimmt (Bem. § 11).

Weil ferner in dieser Definition der Zahl (a_n) (wie in denjenigen von *Weierstrass* und *Dedekind*) die Zahlen der Reihe rational und endlich sind, so schliesst die Definition der Gleichheit zweier Zahlen die unendlich kleine Zahl aus. Siehe im Anhang die Anm. über die Unendlichgrossen und Unendlichkleinen.

Die Erklärung nun, dass eine solche Reihe (a_n) oder *Schnitt* $(A_1 A_2)$ nach *Dedekind* (Stetigkeit und irrationale Zahlen S. 21) eine Zahl bestimmt, entspricht, weil die letztere offenbar keine Zahl der Reihe selbst ist, der Hypothese über die Grenze der Reihe bei unbegrenzt wachsendem n (Bem. V, § 99).

Prof. *Pincherle* (Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni, Bologna 1844) zeigt, dass die Ordnungen des Unendlichgrossen zweier Functionen nach der einen Definition gleich nach der andern ungleich sein können. Jedenfalls muss man bei der Definition der Gleichheit, welche in diesem Fall dazu dient, die Definition der neuen in Betracht gezogenen Dinge zu vervollständigen, darthun, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\text{Wenn } A = B \text{ ist } B = A$$
$$A = B,\ B = C \text{ ist } A = C$$

und für die Ungleichheit:

$$\text{Wenn } A = B,\ B < C \text{ ist } A < C$$
$$\text{und wenn } A = B,\ B > C \text{ ist } A > C$$
$$A > B,\ B > C \text{ ist } A > C$$
$$A < B,\ B < C \text{ ist } A < C.$$

Siehe auch *Stolz* a. a. O. Bd. 1, S. 2 und 3 und z. B. Abschnitt VI und das Ende des IX. Ist aber in diesem Fall eine Definition der Gleichheit gegeben, so muss man zeigen, dass man noch andre geben kann, weil sonst die in dieser Definition gegebene Eigenschaft aus der Definition des Dinges selbst hervorgehen muss.

d. *Jede reelle positive Zahl kann durch das Symbol*

$$Z = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{p^2} + \cdots \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right) \pm \frac{m}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{p^{n_1}}\right) \pm \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{p^{n_r}}\right) \pm \cdots \pm \frac{m_{\infty_1 - r_1}}{\infty_1^{\infty_1 - r_1}}\left(\frac{\alpha_1^{(\infty_1 - r_1)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_{\infty_1 - r_1}}^{(\infty_1 - r_1)}}{p^{n_{\infty_1 - r_1}}}\right) \pm$$

$$\pm \cdots \pm \frac{m_\mu}{\infty_1^\mu}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{p^{n_\mu}}\right),$$

worin p eine beliebige endliche ganze positive Zahl ist, die α gleich $0, 1, 2 \ldots p - 1$, die n, r u. s. w. gegebene ganze positive endliche oder auch unendlich grosse ($n = \infty$) Zahlen sind und μ gegeben oder unendlich gross in absolutem Sinn ist ($\mu = \Omega$); oder auch durch das Symbol

$$\begin{aligned}
Z = &\left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{\eta} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\eta^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{\eta^n} + \cdots\right) \\
&\quad \vdots \\
&\pm \frac{m_1}{\infty_1^{\sigma\infty_1 - r_1}}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{\eta^{n_1}} + \cdots\right) \\
&\quad \vdots \\
&\pm \frac{m_2}{\infty_1^{\sigma 2\infty_1 - r_2}}\left(\frac{\alpha_1^{(2)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{n_2}^{(2)}}{\eta^{n_2}} + \cdots\right) \\
&\quad \vdots \\
&\pm \frac{m_s}{\infty_1^{\sigma s\infty_1 - r_s}}\left(\frac{\alpha_1^{(s)}}{\eta} + \cdots + \frac{\alpha_{n_s}^{(s)}}{\eta^{n_s}} + \cdots\right) \\
&\quad \vdots \\
&\pm \frac{m_\mu}{\infty_1^{\sigma\mu\infty_1 - r_\mu}}\left(\frac{\alpha_1^{(\mu)}}{\eta} + \cdots \frac{\alpha_{n_\mu}^{(\mu)}}{\eta^{n_\mu}} + \cdots\right),
\end{aligned}$$

dargestellt werden, worin η von der Ordnung σ ist, die α ganze Zahlen von 0 *bis η und alle z. B. durch Halbirung von ∞_1^σ, $\infty_1^{\sigma-1}$ u. s. w. erhaltene Zahlen sein können, die n und s gegebene positive ganze endliche oder unendlich grosse ($n = \infty$) Zahlen, die r endliche Zahlen sind und μ entweder eine gegebene Zahl, oder in absolutem Sinn unendlich gross ist ($\mu = \Omega$)* (d, § 104).

d'. *Handelt es sich um die relativen reellen Zahlen, so hat man nur das Symbol:*

$$Z' = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right)$$

und wenn es sich um reelle endliche und unendlich grosse und unendlich kleine Zahlen von endlicher Ordnung handelt, so erhält man:

$$Z'' = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{p} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{p^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{p^n}\right) \pm$$

$$\pm \frac{m_1}{\infty_1}\left(\frac{\alpha_1^{(1)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}^{(1)}}{p^{n_1}}\right) \pm \cdots$$

$$\cdots \pm \frac{m_r}{\infty_1^r}\left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{p} + \cdots + \frac{\alpha_{n_r}^{(r)}}{p^{n_r}}\right),$$

worin r endlich oder unendlich gross ist ($r = \infty$), oder auch

$$Z_1'' = \left(\frac{\alpha_1^{(0)}}{\eta} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\eta^2} + \cdots + \frac{\alpha_n^{(0)}}{\eta^n}\right),$$

worin η eine unendlich grosse Zahl von endlicher Ordnung und n gegeben und endlich oder unendlich gross ($n = \infty$) ist.

Beisp. Wenn wir das Unendlichkleine $\frac{1}{\infty_1 - m}$ betrachten, so sehen wir, dass es in Bezug auf das Unendlichkleine $\frac{1}{\infty_1}$ endlich ist, weil ∞_1 und $\infty_1 - m$ unendlich gross von der ersten Ordnung sind (Def. II, § 88). Die folgende Reihe drückt diese Zahl mittelst der Einheiten $\frac{1}{\infty_1}, \frac{1}{\infty_1^2}, \ldots, \frac{1}{\infty_1^\mu}$ aus:

$$\left(\frac{1}{\infty_1} + \frac{m}{\infty_1^2} + \cdots + \frac{m^n}{\infty_1^{n+1}}\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\infty_1 - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\infty_1 - n + 1}} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^{\infty_1}} + \cdots\right) + \cdots + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\mu - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\mu - n + 1}} + \cdots + \frac{m^{n+m_1+1}}{\infty_1^{\mu - n + m_1}} + \cdots\right)$$

$$\mu = \Omega.$$

Bleiben wir z. B. bei dem Glied $\frac{m^{2n+1}}{\infty_1^\mu}$ stehen, so haben wir

$$\left[\left(\frac{1}{\infty_1} + \frac{m}{\infty_1^2} + \cdots + \frac{m^n}{\infty_1^{n+1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\infty - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\infty - n + 1}} + \cdots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^{\infty_1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\mu - n}} + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^\mu}\right)\right](\infty_1 - m) = 1 - \frac{m^{2n+2}}{\infty_1^\mu} < 1,$$

während

$$\left[\left(\frac{1}{\infty_1} + \frac{m}{\infty_1^2} + \cdots + \frac{m^n}{\infty_1^{n+1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\infty_1 - n}} + \frac{m^n}{\infty_1^{\infty_1 - n + 1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^{\infty_1}} + \cdots\right) + \left(\frac{m^{n-1}}{\infty_1^{\mu - n}} + \cdots + \frac{m^{2n+1}}{\infty_1^\mu} + \frac{1}{2^n \infty_1^\mu}\right)\right](\infty_1 - m) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^n \infty_1^{\mu - 1}} - \frac{m}{\infty_1^\mu}\left(m^{2n+1} + \frac{1}{2^n}\right)$$

ist.

Der Unterschied zwischen beiden Zahlen ist: $\frac{1}{2^n \infty_1^{\mu - 1}}\left(1 - \frac{m^{2n+2}}{\infty_1}\right)$, welcher in absolutem Sinn unbegrenzt klein wird, wenn μ über jede gegebene Zahl der Classe (*II*) hinaus wächst.

Bem. IV. Nachdem wir die Grundoperationen für die Brüche definirt und die zwischen rationalen und irrationalen Zahlen geltenden Regeln bestimmt haben, lassen sich ähnlich wie *m*, § 93 die folgenden Sätze beweisen:

e. *Die reellen endlichen unendlich grossen und unendlich kleinen Zahlen bis zur Ordnung μ alle diejenigen einbegriffen, deren Ordnungen zu der Zahl μ endlich sind, bilden eine Gruppe, die sich durch die mit zwei beliebigen Zahlen der Gruppe vorgenommenen Grundoperationen in sich selbst umbildet.*

f. *Die Zahl (Zahlengrösse) ohne den Begriff der Masseinheit kann nicht dazu dienen, die intensive Grösse eines homogenen stetigen Systems einer Dimension zu bestimmen.*

Sollen zwei Segmente a und a' gleich sein, so müssen sie nicht nur durch dieselbe Zahl dargestellt werden, sondern auch die Masseinheit, auf die sie bezogen werden, muss die nämliche sein; denn wenn die Einheit nicht dieselbe ist und sie werden durch dieselbe Zahl dargestellt, so erhält man nicht die Gleichheit zwischen a und a' (c). Dies gilt nicht nur für zwei Segmente a und a' sondern auch für ihre intensiven Grössen, denn die Gleichheit der letzteren hat diejenige der ersteren zur Folge (f, § 111).

Bem. V. Einem beliebigen variabelen Segment der Grundform entspricht eine in absolutem und relativem Sinn variabele Zahl. Für die endlichen variabelen Zahlen gelten ähnliche Sätze wie in den §§ 95—99 und für die absoluten Zahlen ähnliche wie in §§ 100—105.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die reellen Zahlen die gemeinschaftliche Eigenschaft besitzen, dass sie die Elemente einer Gruppe darstellen, welche in dem Fall gebrochener Zahlen derart sein muss, dass sie — wollen wir die Operationen mit ihnen erklären — die Theilung in η (oder n) gleiche Gruppen, die aus dem Continuum selbst hervorgeht, zulässt (a, § 103 oder d, § 99). Für Irrationalzahlen muss die Gruppe stetig sein. Nur die Positionsverhältnisse der Elemente der Gruppe ausser ihrer Ordnung braucht man nicht in Rechnung zu ziehen.

Daraus geht klar hervor, dass das Continuum nicht von dem numerischen Continuum abhängt, sondern dass das letztere in dem allgemeineren der homogenen, stetigen Elementengruppe enthalten ist.

Indem wir uns auf unsre Hypothesen über das (relative und absolute) Continuum stützen, ändern wir den Charakter der Geometrie nicht, wenn wir der Grundform die Grade substituiren; wie man den Charakter der Analysis nicht ändert, wenn man die Theorie der reellen Zahlen von derjenigen der Elementengruppen abhängen lässt und auf diese Weise eine Methode befolgt, die weniger künstlich ist, als diejenige mit den Symbolen. Weil uns jedoch diese Theorien für die Fundamente der Geometrie nicht interessiren, so beschäftigen wir uns nicht weiter mit ihnen; wir haben übrigens über ihre Principien wie bei den ganzen Zahlen genug gesagt.

IX. Kapitel.

Letzte Betrachtungen über die Grundform.

1.

Zusammenfassende Hypothese über die Grundform. — Ihre Bestimmung. — Mögliche Grundformen.

§ 122. *Bem. I.* Die Grundform wurde den Hypothesen I—VIII, von denen die IV. die III. und die VIII. die VI. enthält, unterworfen (Bem. II, § 85 und b, § 101). Die bis jetzt entwickelten Eigenschaften der Grundform gelten für alle in der Position ihrer Theile identischen Systeme (Bem. IV, § 71). Wenn die Elemente einer Form gegeben sind, so ist die Form selbst gegeben oder bestimmt (Def. IV, § 57), so dass diese Elemente nicht sämmtliche Elemente zweier verschiedener durch dasselbe Gesetz erzeugter Formen sind (Def. II, III, § 58).

Def. I. Eine durch mehrere Elemente *bestimmte* Form bedeutet, dass es keine andre mittelst desselben Gesetzes erhaltene Form gibt, die dieselben ge-

gebenen Elemente mit der ersteren gemeinsam hat, ohne mit ihr zusammenzufallen (Def. V, § 57 und Def. II und Bem. III, § 58).

Bem. II. Bisher ist die Grundform als ein in der Position seiner Theile identisches System einer Dimension behandelt worden (Hyp. I). Um sie mithin von den andern in der Position ihrer Theile identischen Systemen einer Dimension zu unterscheiden, stellen wir die folgende Hypothese auf, welche auch die früheren zusammenfasst.

Hyp. IX. **Die Grundform ist das continuirliche in der Position seiner Theile identische System einer Dimension, welches durch die geringste Anzahl Elemente bestimmt ist.**

Bem. III. Wenn m Elemente gegeben sind, welche die Grundform bestimmen, so bedeutet dies im vorliegenden Fall, dass mit ihnen ohne weitere Bedingung alle Elemente der Form gegeben sind.

Die andern Formen dagegen werden mittelst der Grundform bestimmt oder construirt (Bem. III, § 71).

Bem. IV. Dass die Grundform durch zwei statt durch m Elemente bestimmt sein muss, geht durchaus nicht aus dem bisher Gesagten hervor, weil dieses sowohl in dem einen wie in dem andern Fall gilt. Am einfachsten ist es anzunehmen, sie sei durch zwei verschiedene Elemente bestimmt. Damit ist also die Hypothese nicht ausgeschlossen, das ursprüngliche in der Position seiner Theile identische System sei dagegen durch m Elemente ($m > 2$) bestimmt, auch wenn sich diese Hypothese nicht so fruchtbar wie die erste erweisen sollte und der Grundform der Geometrie, welches die Grade ist, nicht entspräche. Wir können hier sagen:

Das Gebiet der abstracten von uns definirten (§ 38) mathematischen Formen wird aus allen den Elementen gebildet, die wir uns auf Grund der aufgestellten Sätze und der sämmtlichen übrigen mathematisch möglichen Hypothesen über die Grundform und die Beziehungen zwischen mehreren Grundformen denken können.

Wir erhalten eine erste Classification der Systeme abstracter Formen nach der Anzahl der Elemente, welche die Grundform bestimmen.

Def. II. Die Wissenschaft, welche sich mit diesen Formen beschäftigt (Def. I, § 38), heisst die reine Mathematik oder Mathematik.[1])

2.

Betrachtungen über die Wahl der Grundform.

§ 123. Wenn ein in der Position seiner Theile identisches System durch m Elemente bestimmt ist, kann man, auch wenn m die in dieser Hinsicht geringste Zahl ist, behaupten, alle in der Position ihrer Theile identischen Systeme, die durch m Elemente bestimmt werden, seien identisch?

Vorausgesetzt man kenne keine andern Eigenschaften des Gebiets der Grundelemente als diejenige, dass sie ein Ganzes von Elementen sind, so ist es doch möglich sich vorzustellen es sei nicht der Fall, z. B. die Gruppen von m Elementen in einem der obigen Systeme seien mit den Gruppen von m Elementen des andern Systems nicht identisch; denn wären auch nur zwei identisch, so würden nothwendiger Weise nach dem Princip der Identität (a, § 60) auch die beiden Systeme identisch sein.[2])

---

1) Siehe zweite Anm., § 38.

2) Dies ist z. B. bei den Kreislinien in der Geometrie der Fall; drei nicht in grader Linie gelegene Punkte bestimmen auf eine einzige Art eine Kreislinie, aber nicht alle Kreislinien sind identisch.

Zwei in Bezug auf ihre extensive Grösse gleiche Formen, von denen jede durch m Elemente bestimmt wird und die nicht identisch sind, unterscheiden sich durch ihre intensive Grösse, weil sie in Bezug auf die übrigen Bestimmungsbedingungen gleich sind (Def. I, § 38 und Def. I, § 11; Def. I, II, § 111). Man kann ihre Differenz feststellen, wenn man annimmt, ihre intensiven Grössen liessen sich numerisch mittelst einer derselben oder eines Theils von einer derselben als Masseinheit ausdrücken. In diesem Fall muss man offenbar das numerische Continuum (Def. III, § 121) zu Grunde legen, welches, wie man weiss, von dem Unterschied der Position der Formen unabhängig ist (Def. V, f, § 121).

Zwei numerisch auf dieselbe Weise mit Hülfe der Masseinheit ausgedrückte Segmente würden im Allgemeinen nicht identisch sein. Das heisst die Gleichheit ihrer intensiven Grössen würde nicht die Identität in der Position ergeben und man könnte bei der Construction der identischen Formen, wenn man natürlich die Verschiedenheit der Position der beiden Segmente nicht berücksichtigt, das eine dem andern nicht substituiren (Bem. III, § 9 und Bem. III, § 58). Daraus geht hervor: Wenn das in der Position seiner Theile identische System durch die kleinste Anzahl Elemente bestimmt und auch derart ist, dass alle so bestimmten Systeme gleich sind, so hat man nicht nöthig, das numerische Continuum zu Hülfe zu nehmen, um ihre Differenz festzustellen, da sie ja gleich sind und wenn zwei gleiche Segmente zweier solcher Systeme gegeben sind, so kann man sie unter Berücksichtigung der obigen Bemerkungen einander bei der Construction der identischen Formen substituiren. Ein solches System würde als Grundform vorzuziehen sein.[1])

Aus dem Vorstehenden folgt, dass die Grundform nicht als intensive Grösse (oder Quantität) angesehen werden darf[2]) (a, § 111), wenn man bei den abstracten mathematischen Formen dem Positionsunterschied bei ihren Verhältnissen Rechnung trägt.

Dieser Begriff der intensiven Grösse, die, sagen wir, von zwei der Position nach verschiedenen und gegebenen Elementen bestimmt wird, ist nur dann gerechtfertigt, wenn die beiden Elemente ein oder mehrere identische Systeme bestimmen, deren Elemente verschiedene Position haben und wenn die durch diese beiden Elemente bestimmte intensive Grösse dieselbe, wie in diesem oder diesen Systemen ist (Def. II, Bem., § 111). Aber noch mehr. Wir haben eben gesehen, dass man sich denken kann, nicht alle z. B. durch zwei Elemente bestimmten Systeme seien identisch, auch wenn sie in der Position ihrer Theile identisch sind; man muss daher annehmen, ihre intensiven Grössen liessen sich mittelst einer als Einheit genommenen intensiven Grösse miteinander vergleichen. In diesem Fall kann man nicht sagen, zwei Elementepaare seien identisch, wenn sie dieselbe intensive Grösse bestimmen ohne vorauszusetzen, dass alle durch diese Elementepaare bestimmten Systeme gleich seien, das

---

1) Es ist dies in der Geometrie bei der Geraden der Fall (siehe Theil I, Buch I, Kapitel I).

2) Wie es in der That in der Geometrie der Fall ist.

heisst, dass auch die Gleichheit der Position vorhanden sei (a und f, § 111; Def. III und IV, § 9).

Nimmt man an, zwei Elementepaare, welche dieselbe intensive Grösse bestimmen (oder die Formen, deren Elemente dieselbe intensive Grösse bestimmen), seien identisch, so liegt darin schon die Voraussetzung, dass die durch zwei Elemente in ihrer Position bestimmten Systeme bezüglich identisch sind. Dies ist der Grund, wesshalb derselbe principielle Fehler, den man begeht, wenn man von der intensiven Grösse ausgeht, für die Theorie der Formen keine Folgen hat, da man ja die genannte Eigenschaft voraussetzt.[1]

Man könnte auch das Elementepaar als Grundform betrachten, indem man damit nicht die von ihnen bestimmte intensive Grösse meint, sondern die Gesammtheit aller Segmente der Formen einer Dimension, welche zu Enden die gegebenen Elemente haben. In diesem Fall kann man nur auf Grund der Def. VI, § 8 von identischen Paaren sprechen.[2]

Nimmt man aber an, alle Paare seien nicht identisch, so ist es nöthig auf irgend eine Art ihren Unterschied zu bestimmen: man kann z. B. festsetzen, ihr Unterschied sei derart, dass alle Paare sich numerisch durch eines von ihnen als Einheit ausdrücken lassen. Auch hier muss man sich auf die Eigenschaften des homogenen Continuums einer Dimension und auf die Eigenschaft $(AB) \equiv (BA)$ beziehen, wenn sie nicht in irgend einem andern Axiom enthalten ist, weil hier die Eigenschaft des in der Position seiner Theile identischen Systems (Def. I, § 70 und Bem. II, § 81), welche dazu dient diese Eigenschaft in relativem wie in absolutem Sinn zu beweisen, fehlt (g, § 99 oder c, § 104).

Jedenfalls lässt sich nicht sagen, ob ein Paar nach den Def. I, II, § 61 grösser oder kleiner als ein andres oder ob es ein Theil desselben ist oder nicht, weil wir den Begriff von Theil unabhängig vom Begriff der Gruppe nicht haben. Nehmen wir z. B. das Zahlencontinuum zu Hülfe, so sagen wir, das Paar A sei grösser als das Paar B, wenn die Zahl, die A darstellt, grösser ist, als die Zahl, die B darstellt.

Diese Methode würde den principiellen Fehler der ersten vermeiden; sie hat aber nicht nur keine einzelne Grundform, wie die unsrige ist, sondern leidet auch wie die erste Methode an dem Mangel, dass sie das Zahlencontinuum und wenigstens die Grundeigenschaften der stetigen Functionen zu Grunde legt und dass man mit diesen Methoden in der Geometrie in einer besondern Form von gegebenen Dimensionen arbeitet[3]), von der man doch die Definition

---

1) Auch in der Geometrie hat er keine Folgen, in welcher man von dem Begriff des Abstandes ausgeht, welcher die intensive Grösse des gradlinigen von zwei Punkten bestimmten Segments jedoch nicht das Punktepaar ist (siehe früher), weil der Abstand, wie er gewöhnlich sei es analytisch oder geometrisch definirt wird, genau die intensive Grösse des Segments oder des Punktepaares ist (Def. II, § 111). Siehe Vorrede und Anh.

2) Es würde dies in einem concreten Gebiet, z. B. in der Geometrie die Nothwendigkeit eines Axioms einschliessen, d. h. der Existenz identischer Paare.

3) Bei den Untersuchungen über die Fundamente der Geometrie benutzt man das Elementepaar (oder Intervall) ohne zu sagen was für ein Ding es ist und verwechselt es in der Regel mit Abstand. Doch dem ist, wie wir gesehen haben, leicht abzuhelfen. Es

geben muss. Unser Gebiet dagegen hat von Anfang an nur die einzige Eigenschaft, dass es eine Gesammtheit von Elementen ist und dass, wenn in ihm eine besondre Gesammtheit von Elementen von n Dimensionen gegeben ist, ausserhalb derselben immer noch ein andres Element existirt (Def. VI, § 13; Bem. IV, § 122).

Unsre Grundform ist (Hyp. IX) unabhängig von dem ganzen übrigbleibenden Gebiet und mit ihr construiren wir die andern Formen von einer oder mehreren Dimensionen.[1])

Wollten wir auf diese abstracte Art fortfahren, so müssten wir jetzt die Hypothesen in Bezug auf eine oder mehrere Grundformen aufstellen. Das abstracte System, mit welchem wir uns beschäftigen wollen, ist dasjenige, welches der Geometrie entspricht. Wir gehen mithin ohne Weiteres zur Behandlung dieses Systems über und halten uns dabei die Bedingungen gegenwärtig, denen die abstracten geometrischen Hypothesen und Axiome und die rein geometrische Methode genügen müssen.[2])

---

ist desshalb durchaus nicht intuitiv, dass man ohne den Begriff der graden Linie und mit dem Zahlencontinuum die Intervalle miteinander vergleichen könne. Zu sagen, man könne die Intervalle numerisch durch ein andres Intervall ausdrücken und sie den Zahlen des Zahlencontinuums entsprechen lassen, ist eine um so eher mögliche Hypothese, als sie durch die *schon bekannten* Untersuchungen über die Grade bestätigt wird, ist aber eine Hypothese, die ohne die Grade sich nicht auf die geometrische Anschauung stützt. Ueberdies muss man im Voraus eine Definition des Raums zu drei (oder n Dimensionen), mit dessen Geometrie man sich beschäftigen will, geben, sonst fehlt die Basis zur Construction der Ebene und der Graden mittelst der Kugel, wie es der Fall ist, wenn man von dem Punktepaar ausgeht (siehe Vorrede und Anh.).

1) Siehe Vorrede.

2) Siehe Vorrede.

Erster Theil.

Die Grade, die Ebene und der Raum von drei Dimensionen im allgemeinen Raum.

Buch I.

Die Grade und die gradlinigen Figuren im Allgemeinen.

I. Kapitel.

Die Grade und die gradlinigen Figuren im Allgemeinen. Axiome und Hypothesen.

1.

Der Punkt. — Axiom I. — Die Figur. — Der allgemeine Raum. — Die Geometrie. — Punktsysteme einer Dimension.

§ 1. *Emp. Bem.*[1]) An die Gegenwart der Körper ausser uns, die für uns mittelst der Sinne, besonders durch das Gesicht und das Gefühl in die Erscheinung treten, ist die Vorstellung dessen verknüpft, was sie enthält. Dieses heisst *äussere Umgebung oder auch Anschauungsraum* und in ihm nimmt jeder Körper einen bestimmten *Platz oder Ort* ein. Wenn wir einen Körper beobachten, so nimmt er einen bestimmten Platz ein; nehmen wir aber den Körper weg und halten mit dem Geist den von ihm besetzten Platz fest, so haben wir sofort die Anschauung, dass dieser Ort an sich unabhängig von dem Körper existirt. Auch wenn ein Körper sich nicht bewegt, wie z. B. das Buch auf dem Tisch vor uns, so können wir doch von demselben absehen und an den Ort denken, den es einnimmt.

Scheinbar ist dieser Ort, der vorher von dem sich bewegenden Körper oder dem ruhenden Körper, von dem wir aber abstrahiren, angefüllt war, offenbar *leer,* das heisst wir sehen ihn nicht und stellen ihn uns nicht von andern Körpern besetzt vor. Daraus folgt durchaus nicht, dass in Wirklichkeit *der absolut leere Raum* existire, das heisst eine Umgebung, welche nicht mit irgend einem Körper angefüllt ist; wenn wir uns aber denken, ein Körper (und darunter können wir auch einen materiellen Punkt verstehen) bewege sich und der von ihm in einem gegebenen Augenblick besetzte Raum werde von der ringsum befindlichen Materie nicht ausgefüllt, so erhalten wir den abstracten Begriff des absolut leeren Raums. Und mit der Vorstellung des leeren Raums erhalten wir auch die Vorstellung der *Unbeweglichkeit* des leeren Raums oder des Anschauungsraums.

Der Begriff (Einl. § 4) des Grundelements der Wissenschaft, von der wir jetzt die Grundzüge geben wollen (Einl. Def. I, § 57), welcher uns die Formen (Gegenstände) unsrer

1) Auf die empirischen Betrachtungen, welche uns zur Aufstellung der Axiome dienen, nehmen wir bei der Abfassung der Sätze und den geometrischen Beweisen durchaus keine Rücksicht und benutzen nur die Resultate, welche wir unabhängig von diesen Betrachtungen in den Axiomen feststellen.

Untersuchungen bestimmt (Einl. Def. IV, § 57), wird uns durch in Wirklichkeit ausser uns in der äusseren Umgebung existirende Gegenstände geliefert, z. B. durch das Ende eines Fadens oder des Gegenstandes der Fig. 1 (S. 52). Abstrahirt man von seinen physischen Eigenschaften, so erweckt das Ende des Fadens oder dasjenige, welches die Trennung zweier seiner consecutiven Theile angibt, in uns die Vorstellung von demjenigen, was wir als Grundelement ansehen, oder von dem Punkt.[1])

Andre Gegenstände, wie die Spur, die durch die äusserst feine Spitze eines Bleistifts auf dem Papier entsteht, erwecken oder erzeugen in uns denselben Begriff, woraus hervorgeht, dass der Punkt von der Materie des Gegenstandes unabhängig ist, welcher ihn uns liefert; denn die Anschauung des Punktes bezieht sich nicht so sehr auf den Gegenstand, als auf die Stelle, welche der Gegenstand in unsrer äusseren Umgebung einnimmt.

Def. I. Das Grundelement (Einl. Def. I, § 57), aus welchem sich die Formen zusammensetzen (Einl. Def. IV, § 57), ist durch die oben erwähnte besondere Vorstellung gegeben und heisst *Punkt.*[2])[1])

Emp. Bem. II. Die Identität der Punkte geht aus der Anschauung des Punktes hervor (Einl. Def. VI, § 8) und wir müssen daher das folgende Axiom aufstellen:

Ax. I. **Es gibt verschiedene Punkte. — Alle Punkte sind identisch** (Einl. Def. III und Bem. III, § 9; Def. II, III und Bem. II, § 57).[3])

Bem. I. Unabhängig von der Anschauung oder in rein abstractem Sinn bedeutet dieses Axiom, dass alle Grundelemente, denen man den Namen Punkt gibt, identisch sind. Daraus ergibt sich mithin eine abstracte Eigenschaft, die unabhängig von der Anschauung des Punktes ist.

---

1) Siehe auch Einl. § 55. Dadurch, dass wir das Wort „erwecken" gebrauchen, wollen wir nicht ausdrücken, dass die Vorstellung des Punktes a priori in uns vorhanden ist, denn mit dieser Frage beschäftigt sich der Mathematiker nicht (siehe Vorr.), sondern dass diese Vorstellung eine von denjenigen ist, die sich nach und nach in uns bilden oder entwickeln.

2) Dies ist eine rein nominelle Definition; wir wollen mit ihr nicht die Eigenschaften des Punktes definiren, sondern uns nur auf die in der emp. Bem. I oder § 55 der Einl. erklärte Vorstellung beziehen.

3) Wir lassen die Frage bei Seite, ob der Punkt an sich Theile hat oder nicht, wenn schon der Punkt nach dem, was wir in § 55 der Einl. über den Gegenstand der Fig. 1 gesagt haben, nicht nur kein Theil in Bezug auf diesen Gegenstand ist, wenn man den Theil in dem Sinn betrachtet, dass er zur Construction des Continuums nach Satz d, § 105 dient, sondern auch an sich betrachtet keine Theile hat (siehe Einl. Anm. 4 zu § 55). Der Punkt ist für uns eine constante Form (Einl. Def. VII, § 67).

---

[1]) In den mit Römischen Ziffern bezeichneten Anmerkungen werden wir, wie wir in der Vorrede angekündigt haben, die Geometrie in dem Gebiet einer einzigen Einheit, wie es gewöhnlich geschieht, behandeln, theils zu Lehrzwecken theils um zu zeigen, dass man denselben Principien unabhängig von unsern abstracten Hypothesen über das Unendlichgrosse und Unendlichkleine folgen kann, zu gleicher Zeit aber, um auch den Werth jener Hypothesen bei der Untersuchung der Eigenschaften des endlichen Gebietes selbst kennen zu lehren (siehe Vorr.). Macht man daher von der Einleitung keinen Gebrauch, so kann man den Punkt als einen Gegenstand definiren, aus welchem sich alle andern Gegenstände, die wir betrachten, zusammensetzen lassen oder besser als einen durch die obige Vorstellung gegebenen Gegenstand. In einem für Gymnasien bestimmten Elementarbuch muss man die kritischen Erörterungen wie z. B. in Bem. I vermeiden. Dies gilt für alle übrigen Anmerkungen. Ebenso muss man einige bekannte Dinge voraussetzen z. B. die Haupteigenschaften der ganzen Zahlen.

Zur Definition des Punktes wie zur Aufstellung der Axiome ist es auch in einem Elementarbuch von Vortheil empirische Betrachtungen zu Hülfe zu nehmen.

Wir bemerken, dass wir in diesen Anmerkungen nur die Möglichkeit zeigen wollen, unsern Principien in einem Elementarbuch zu folgen, ohne dass wir besonders im Anfang eine bestimmte Ordnung genau einhalten wollten.

Wir beschränken uns auf die Grade und Ebene, weil der Leser schon allein finden wird, welche Aenderungen an dem Text des Kap. I, Buch III angebracht werden müssen, wenn man in dem endlichen Gebiet nur einer Einheit bleibt.

§ 2. *Bem. I.* Wir wiederholen hier einige schon in der Einleitung für die Elementesysteme aufgestellte Definitionen und betrachten dabei den Punkt als Element. Wir beschäftigen uns jedoch augenblicklich nicht mit ihrer Existenz, welche durch die Axiome, welche wir später aufstellen, gegeben oder aus ihnen abgeleitet werden muss.

Def. I. Jede Form, deren Grundelement der Punkt ist (Einl. Def. IV, § 57 und Def. I, § 38), nennen wir *Figur* oder *geometrisches Ding oder Gebilde.*

Eine Figur A *gehört zu* einer Figur B, wenn die Punkte von A Punkte von B sind, und ist *ein Theil* von B, wenn es in diesem Fall Punkte von B gibt, die nicht zu A gehören, oder *ausserhalb* A liegen (Einl. §§ 13 und 26).

*Def. II.** *Der allgemeine Raum* ist durch ein System von Punkten gegeben, derart, dass, wenn eine beliebige seiner Figuren von n Dimensionen (Einl. § 110) in ihm gegeben oder construirt ist, es wenigstens einen andern Punkt ausserhalb dieser Figur gibt; seine nicht beweisbaren Eigenschaften werden theils aus der äusseren Beobachtung, theils aus abstracten Principien abgeleitet, die den Eigenschaften der unsrer äusseren Umgebung entsprechenden Figur (Emp. Bem.) nicht widersprechen.

Oder auch:

Der allgemeine Raum ist die Gesammtheit der Punkte, welche durch die nicht beweisbaren Eigenschaften definirt wird, die sich theils aus der äusseren Beobachtung theils aus abstracten Principien ergeben, welche den Eigenschaften der unsrer äusseren Umgebung entsprechenden Figur nicht widersprechen.

Def. III. Die Wissenschaft, die sich mit den Figuren (und daher mit dem allgemeinen Raum) beschäftigt, heisst *Geometrie.*

Bem. II. Dass man sich, nachdem eine Figur von n Dimensionen construirt ist, einen Punkt ausserhalb derselben vorstellen kann, geht aus der Operation a des § 37 der Einl. hervor. Dass man diesen Punkt aber alsdann denselben Axiomen und Hypothesen unterwerfen kann, lässt sich durch die Entwicklung der Geometrie selbst beweisen.[1]) Vorerst genügt es uns zu wissen, dass eine solche Definition möglich ist. Wir haben sie hier gebracht, um alsbald eine Vorstellung von dem ganzen Gebiet der Geometrie zu geben; man könnte sie aber auch weglassen, ohne dass dadurch eine Aenderung in der Behandlung der speciellen Räume, die wir betrachten werden[2]), nöthig würde; wir haben aus diesem Grund Def. II mit einem Stern versehen.

Bem. III. Die Figuren wie z. B. der Punkt, der unbegrenzte Anschauungsraum und der allgemeine Raum sind für uns geistige Dinge, welchen äussere Gegenstände entweder entsprechen oder von welchen angenommen wird, dass ihnen etwas thatsächlich ausser uns Existirendes entspreche oder von denen nicht einmal diese Annahme gemacht wird. Sie sind also diese äusseren Gegenstände selbst nicht. Die Geometrie als besondere Wissen-

---

1) Siehe Anhang Anm. I.

2) Unsre Axiome stellen nur die Existenz von Figuren von zwei Dimensionen fest, ohne diejenige von Figuren von mehr als zwei Dimensionen auszuschliessen; die übrigen Sätze dieses Kapitels gelten jedoch sowohl für die zwei Dimensionen, wie für den allgemeinen Raum, der eine thatsächliche unendlich grosse Anzahl von Dimensionen hat, und für die Räume von drei und mehr als drei Dimensionen.

Vor der Hand lässt uns die Def. des allgemeinen Raums nur dies erkennen: dass wir ein durch das Ax. I bestimmtes Punktesystem haben und dass ausserhalb jeder in ihm gegebenen oder construirten Figur von n Dimensionen wenigstens ein Punkt vorhanden ist. Für diesen letzten Satz bedarf es keines Axioms, weil er seinen Grund in der Freiheit unsres Gedankens (Einl. a, § 37) und in der Möglichkeit hat, jeden neuen Punkt denselben Axiomen und Hypothesen wie die übrigen Punkte zu unterwerfen; dagegen bedarf es eines Axioms, um festzusetzen, wieviel Dimensionen der Anschauungsraum hat, doch ist dieses Axiom, wie wir sehen werden, nur für die praktischen Anwendungen nöthig.

schaft des Gedankens findet ihren Zweck in sich selbst, jedoch ist auch die Untersuchung und Construction der concreten Figuren in dem Gebiet unsrer äusseren Beobachtung eine wesentliche Aufgabe für sie (Def. II, § 38).[1] II)

§ 3. *Def. I.* Ein Elementesystem einer Dimension, dessen Element der Punkt ist (Def. I, § 1 und Einl. Def. I, § 62), ist ein Punktesystem, welches *Figur einer Dimension* heisst.

Bem. I. Wie jedes System einer Dimension von einem beliebigen seiner Elemente an zwei entgegengesetzte Richtungen hat (Einl. §§ 62 und 63), so gilt dies auch von jedem Punktesystem einer Dimension.

Die Elemente eines Systems einer Dimension können als verschiedene Positionen eines Elements des Systems betrachtet werden (Einl. § 67) und wir können mithin ohne neue Principien einzuführen sagen, die Punkte eines Systems einer Dimension seien *verschiedene Positionen* eines Punktes, der sich in dem System bewegt. Aus demselben Grund können wir bei der Betrachtung der consecutiven Punkte $A\ A^{(1)}\ A^{(2)}\ldots$ des Systems sagen, die Segmente $(AA^{(1)})$, $(A^{(1)}A^{(2)})$ u. s. w. seien verschiedene Positionen des nämlichen Segments, welches sich auf dem System *bewegt* oder *läuft*, ohne dass daraus die Identität dieser Segmente oder die Continuität des Systems selbst hervorginge und ohne dass diese Ausdrücke von der wirklichen Bewegung der Körper abhingen (Einl. § 67).[2]

Ein Punktesystem einer Dimension ist *einfach geschlossen*, wenn ein Punkt, welcher sich in dem System bewegt, das ganze System in einer gegebenen Richtung durchläuft und dabei wieder in seine frühere Position zurückkehrt. Es ist *einfach offen*, wenn der Punkt, welcher es in einer oder der entgegengesetzten Richtung durchläuft, nicht zum zweiten Mal durch einen Punkt des Systems kommt und nicht zum Ausgangspunkt zurückkehrt (Einl. §§ 63 und 67).

Fig. 14.

Emp. Bem. Ein System einer Dimension stellen wir häufig durch eine Gruppe von Zeichen dar, die mit der Spitze eines Bleistifts auf das Papier aufgezeichnet sind und sich in einer durch einen oder den andern Pfeil angegebenen Richtung folgen, auch wenn alle Eigenschaften des Gegenstandes nicht Eigenschaften des Systems sind und umgekehrt (Fig. 14).

Jede Zeichnung, welche eine Figur darstellt, heisst auch Figur. Sie ist aber eine

1) Hier könnte man die Def. von extensiver und intensiver Grösse einer Figur geben (Einl. § 111); wir thun es nicht, um vor der Hand alle allgemeinen nicht nöthigen Sätze zu vermeiden. Der Unterschied zwischen den beiden Grössen zeigt, dass die Geometrie nicht die Wissenschaft der Extension ist, weil die Wissenschaft, welche sich mit der extensiven Grösse der abstracten Formen beschäftigt, die Wissenschaft der abstracten Extension und nicht der concreten Extension ist, welche letztere derjenigen des Anschauungsraums entspricht. Denn die Geometrie untersucht auch die intensive Grösse der Figuren und beschäftigt sich nicht blos mit dem Messen der Extension, wie oft definirt wird.

2) Siehe § 23.

II) Wenn man von der Einleitung keinen Gebrauch macht, kann man hier als Definition der Figur die Def. IV, § 57 der Einl. und dann Def. III geben und jede Definition des Raums, die für die Entwicklung der Geometrie nicht nöthig ist, auslassen; man braucht nur dem Ax. I gemäss anzunehmen, dass es ein Punktesystem gibt, dessen Eigenschaften durch die andren Axiome festgesetzt und abgeleitet werden.

Die in diesem Buch in den mit Römischen Ziffern bezeichneten Anmerkungen entwickelten Eigenschaften gelten nicht nur für die Ebene, sondern auch für den allgemeinen Raum und für die Räume von drei und mehr als drei Dimensionen.

In einem Elementarbuch der Geometrie muss man sich auf den Anschauungsraum beschränken, man hat aber theoretisch nicht nöthig ihn von Anfang an zu definiren, wenn man auch von der Anschauung Gebrauch macht.

Die Eigenschaft, dass es ausserhalb jeder Ebene einen Punkt gibt, kann als Axiom gegeben werden, wenn man den Raum von drei Dimensionen construirt (Buch III, Theil I) und dann das Axiom aufgestellt werden, dass der Anschauungsraum (Emp. Bem. I) drei Dimensionen hat. Dieses Axiom ist zwar nicht für die Entwicklung der Geometrie von drei Dimensionen, aber für die praktischen Anwendungen derselben in dem Gebiet unsrer äusseren Beobachtungen nöthig.

concrete Figur (Def. I, § 2 und Einl. Def. II, § 38) und nicht mit der entsprechenden abstracten Figur zu verwechseln, von welcher sie ein Bild oder eine Darstellung ist.[1] [III])

Def. II. Wenn zwei Punktesysteme einen Punkt A gemeinschaftlich haben (Einl. Def. VII, § 13), so sagen wir auch, *sie träfen sich oder schnitten sich* im Punkt A und A sei der *Durchschnittspunkt* derselben.

2.

Axiom II. — Erste Eigenschaften der Graden.

§ 4. *Emp. Bem. I.* Wir haben die vorstehenden Definitionen (§ 3) unter der Bedingung gegeben, dass die Dinge, auf welche sie sich beziehen, existiren; haben aber noch kein Princip aufgestellt, nach welchem ihre Existenz gegeben ist oder sich ableiten lässt. Wir wissen nur, dass wir ein Punktesystem haben (Ax. I; Einl. Def. I, § 13) und wissen mithin nicht, ob es stetige Figuren gibt und wenn es solche gibt, welches diejenige ist, die durch die geringste Anzahl Punkte bestimmt wird, und was für eine Anzahl dies ist. Wir können desshalb nicht entscheiden, ob zwei Punkte nothwendigerweise eine Figur unter denjenigen Figuren, welche die Punkte enthalten, bestimmen und wenn so, von welcher Beschaffenheit sie ist (Einl. § 122). Wir müssen uns daher umsehen, ob es nicht irgend einen äusseren Gegenstand gibt, der uns den Begriff einer durch zwei Punkte bestimmten Figur liefern kann.

Wenn wir den Gegenstand der Fig. 1 (S. 52) betrachten und von seinen physischen Eigenschaften abstrahiren, so erhalten wir den Begriff (Einl. § 4) eines durch zwei Punkte begrenzten Punktesystems einer Dimension. Diese Figur heisst *gradliniges Segment* oder kurz *Segment*, wenn man es nicht mit Segmenten andrer Systeme verwechseln kann. Die Anschauung des gradlinigen Segments wird auch durch einen an seinen Enden (im empirischen Sinn) gespannten Faden, die Kante eines Würfels, einen Sonnenstrahl, der durch eine kleine Oeffnung in ein dunkles Zimmer fällt, u. s. w. in uns geweckt.[2]) Das gradlinige Segment entspricht also wie der Punkt (Emp. Bem. I) nicht dem gespannten Faden und der Kante des Würfels oder ähnlichen Gegenständen, sondern vielmehr dem von diesen Gegenständen in der äusseren Umgebung eingenommenen Ort (Emp. Bem. 1).

Wir haben in § 55 der Einl. gesehen, dass uns die wiederholte Erfahrung zu der Annahme führt, das gradlinige Segment sei ein Theil eines andern gradlinigen Segments (Einl. Def. II, § 27 und Def. III, § 62) und sei mithin ein Theil eines Punktesystems einer Dimension, welches in einer und der andern Richtung unbegrenzt ist (Einl. § 32). Wenn es sich aber auch in der äusseren Umgebung nicht so verhielte, diese abstracte Hypothese steht nicht nur dem Studium der Eigenschaften des begrenzten Gebiets der Beobachtung nicht hindernd im Wege, sondern fördert dasselbe.

Das gradlinige System ist in der Position seiner Theile identisch (Einl. § 55; Def. I, § 70; Bem. II, § 81); ferner sind die wahrnehmbaren Theile des gradlinigen Gegenstandes der Fig. 1 (S. 52) in Bezug auf einen beliebigen von ihnen endlich (Def. II, § 82), das heisst,

---

1) Die Benutzung der auf das Zeichenpapier gezogenen Figuren ist bei den geometrischen Untersuchungen von grossem Vortheil (siehe Vorr.) und die Zeichnungen oder ähnliche Gegenstände sind zur Aufstellung der Axiome nöthig. Die Ableitung der Grundeigenschaften jedoch, besonders so lange noch nicht alle Axiome aufgestellt sind, muss von der Beobachtung oder der Anschauung der Figur unabhängig bleiben, damit man nicht von Anfang an noch nicht definirte Begriffe einführt oder auch eine Eigenschaft für bewiesen hält, die man nur aus der Beobachtung der Figur abgeleitet hat. Will man die grossen Vortheile, welche die Anschauung bietet, nicht aufgeben, so muss man diese Uebelstände, die dieselbe zur Folge haben kann, im Auge behalten.

2) Siehe Anm. I.

III) Will man nicht auf die Einleitung zurückgreifen (siehe Anm. I), so kann man die Betrachtung der Reihen von Dingen und der Ordnung sowie die Principien des § 2 der Einleitung über die Gleichheit zweier Dinge kurz innerhalb der in einem Elementarbuch gewöhnlichen Kenntnisse voranschicken. So kann man die Def. I, den Theil der Bem. I, welcher sich auf die Sprache der Bewegung bezieht, sowie die empirische Bem. und die Def. II geben.

wenn man zwei Theile (AB), (CD) hat und $(AB) < (CD)$, so gibt es eine ganze natürliche Zahl m derart, dass

$$(AB)m > (CD). \qquad \text{(c}', \text{ § 81 der Einl.)}$$

Die Einheit, auf welche diese Theile bezogen werden, nennen wir *gradlinige durch die Beobachtung wahrnehmbare Einheit* oder einfach *wahrnehmbare Einheit*.

Der gradlinige Gegenstand hat uns ferner zur Führung gedient bei der Aufstellung der Hyp. VI über das relative Continuum (Einl. §§ 55 und 96); mithin ist der gradlinige Gegenstand in Bezug auf die wahrnehmbare Einheit continuirlich. Dieser Gegenstand (Fig. 1) könnte, wenn er unter dem Vergrösserungsglas betrachtet wird, nicht continuirlich sein, der Ort aber, welcher in Bezug auf unsre Raumanschauung von ihm eingenommen wird, ist stetig (Einl. § 55).

Durch wie viele seiner Punkte wird dieses System in seiner Position bestimmt? Abstract geht aus der Eigenschaft, dass es eine in der Position ihrer Theile identische Figur einer Dimension und stetig ist, die Anzahl der Punkte, durch welche es bestimmt wird, nicht hervor (Einl. § 122); wir müssen mithin die Erfahrung zu Hülfe nehmen. Thun wir dies, so sehen wir, dass der von dem gradlinigen Gegenstand eingenommene Ort durch seine Enden bestimmt wird und wie das Segment das ganze System bestimmt, dieses durch zwei seiner Punkte bestimmt wird. Wir sehen, dass zwei beliebige verschiedene Punkte welche den Enden eines gradlinigen Gegenstandes in dem Bereich unsrer Beobachtung entsprechen, stets ein gradliniges Segment bestimmen; dieses reicht aber zu der Annahme hin, dass es nur durch zwei seiner Punkte bestimmt wird. Würde man diese Eigenschaft für alle Punktepaare geben, so würde dies soviel Axiome voraussetzen als es andre Punktepaare gibt.

Ueberdies, wenn das System durch die Punktepaare, welche den Enden gradliniger in dem Bereich unsrer Beobachtung gelegener Gegenstände entsprechen, bestimmt wird, so bedeutet dies nicht, dass es durch zwei beliebige seiner Punkte bestimmt wird. Denn mit Hülfe der Anschauung oder Beobachtung kann man nicht behaupten, dass diese Eigenschaft auch für die Paare von Punkten des Systems gelte, von denen wenigstens einer einem nicht in dem Bereich unsrer Beobachtung gelegenen Gegenstand entspricht. Dieses Gebiet ist auf dem gradlinigen Gegenstand ein in Bezug auf die wahrnehmbare Einheit gegenwärtig gegebener endlicher Theil und denkt man sich mithin den Gegenstand über dieses Gebiet hinaus verlängert, so kann man, wie gesagt, nicht länger behaupten, dass durch seine Enden nicht ein weiterer gradliniger Gegenstand geht.

Diese Frage wird sich uns unter anderem Gesichtspunkt wieder bieten und wir werden sehen, dass wir sie durch die Anschauung nicht entscheiden können. Abstract müssen wir also von Anfang an die Möglichkeit zugeben, dass zwei Punkte die Grade nicht bestimmen. Wir fassen mithin zusammen und geben das folgende Axiom:

Ax. II. a. **Es gibt ein in der Position seiner Theile identisches Punktesystem einer Dimension, welches durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt wird und stetig ist.**

Def. I. Dieses System heisst *grade Linie* oder *Grade*.

Bem. I. Durch zwei Punkte *bestimmt* heisst, dass zwei Grade diese beiden Punkte nicht gemeinsam haben (Einl. Def. VII, § 13) ohne zusammenzufallen (Einl. Def. V, § 57 und § 122).

Bem. II. Dieses Axiom gibt auch eine von der Anschauung unabhängige abstracte Eigenschaft; denn, wenn man von der Anschauung absieht, sagt es aus, dass ein in der Position seiner Theile identisches und stetiges Elementesystem einer Dimension existirt, welches durch zwei seiner Elemente bestimmt wird.

Was für ein Ding ein solches System ist, haben wir schon abstract, das heisst, ohne die nothwendige Benutzung der Anschauung in der Einleitung festgesetzt (Einl. §§ 62, 68, 70, 96 und Bem. II, § 81 u. § 99).

Bem. III. Das Axiom I versichert uns nur, dass es ein Punktesystem gibt, liefert uns aber keine andre Eigenschaft desselben, als dass alle Punkte gleich sind. Wenn ein specielles Punktesystem existirt, so folgt daraus nicht, dass es von einer Dimension sein muss, und wenn es das letztere ist, dass es auch in der Position seiner Theile identisch, stetig und dann durch zwei seiner Punkte bestimmt sei. Die Theile, in welche wir in der

Einleitung den Theil a) des Axioms II zerlegt haben, lassen sich also aus den vorhergehenden nicht ableiten (Einl. Bem. II, § 81; Anm. 8 zu § 99 und Bem. § 122).

Die Beobachtung selbst und die Geometrie bei ihrer weiteren Entwicklung zeigen uns, dass es in der Position ihrer Theile identische und stetige Systeme einer Dimension gibt, welche nicht durch zwei Punkte bestimmt werden.

Bem. IV. Wir geben ohne Weiteres die Axiome bezügl. einer der wahrnehmbaren Einheit entsprechenden Einheit (Emp. Bem.), ohne dass jedoch die Definition des allgemeinen Raums (Def. II, § 2) und die abstracten Hypothesen, die wir später aufstellen werden, mit ihnen im Widerspruch stehen und wir werden sehen, dass sie in Verbindung mit diesen abstracten Hypothesen oder mit der in Anm. XVI gegebenen Hypothese über die Parallelen ausreichen, um die Geometrie mit mehreren Arten gradliniger Einheiten oder nur in dem endlichen Gebiet einer Einheit und in einem beliebigen von uns construirten Raum zu entwickeln.

Bem. V. Wie man es macht, um ein einem gegebenen Segment gleiches Segment praktisch zu construiren, braucht man durch die Theorie nicht zu erfahren. Uns genügt die Existenz gleicher Segmente auf der Graden.[1]) Wenn zwei Segmente gleich sind, so haben sie an sich dieselben Eigenschaften, weil sich, was man von dem einen an sich betrachtet sagen kann, auch von dem andern sagen lässt (Einl. Def. VI, § 8; Def. III und Bem. IV, § 9).

Bem. VI. Für die Grade als ein in der Position seiner stetigen Theile identisches System gelten alle Eigenschaften dieses Systems wie auch diejenigen, die sich aus seiner Stetigkeit ergeben. Wir geben hier die wichtigsten, indem wir zugleich andre mit Hülfe des Ax. II. a aus ihnen ableiten.

Satz I. Die Grade ist einfach geschlossen oder einfach offen (Einl. c′, § 68).

Satz II. Wählt man einen Punkt X der Graden, so gibt es auf derselben nur zwei einem beliebigen andern Segment (AB) gleiche Segmente, welche das Element X zum gemeinschaftlichen Ende haben und gleich gerichtet sind (Einl. b′, § 69).

Satz III. Die Grade von einem ihrer Punkte aus in einer gegebenen Richtung ist der von einem beliebigen andern Punkt derselben in der gegebenen oder der entgegengesetzten Richtung betrachteten Graden gleich (Einl. a, § 70 und Uebereink. I, § 69).

Zusatz I. Wählt man einen beliebigen Punkt X der Graden, so gibt es in einer und der andern Richtung nur ein einem andern Segment (AB) derselben identisches Segment (Einl. a′, § 70).

Zusatz II. Ist die Grade offen, so theilt jeder ihrer Punkte sie in zwei gleiche Theile (Einl. a″, § 70).

Def. II. Wird die Grade durch zwei Punkte A und B bestimmt, so sagt man auch, sie *verbinde* die Punkte A und B. Enthält eine Grade einen Punkt A, so sagt man auch, *sie gehe* durch den Punkt A.

Bez. I. Wir bezeichnen die Graden in der Regel mit kleinen lateinischen Buchstaben oder mit dem Symbol AB, die Punkte dagegen im Allgemeinen mit grossen lateinischen Buchstaben.

Satz IV. Ist ein beliebiger Punkt auf der Graden gegeben, so gibt es wenigstens zwei Punkte, die mit ihm die Grade bestimmen, und von einem Punkt aus gibt es in der einen und der andern Richtung unendlich viele gleiche consecutive Segmente, deren beide Enden die Grade bestimmen.

---

1) Siehe den Abschnitt 23.

Nach dem Axiom II, a muss es zwei Punkte A und B der Graden geben, welche sie bestimmen und mithin auf ihr wenigstens ein einziges Segment bestimmen, welches die gegebenen Punkte zu Enden hat (Satz I, Einl. b und c, § 64). (AB) sei dieses Segment und X ein beliebiger andrer Punkt der Graden. Auf der Graden gibt es in einer und der andern Richtung ein mit dem Segment (AB) identisches Segment (XY) (Zus. I, Satz III) und mithin bestimmen die Punkte X und Y das Segment (XY) (Einl. Def. III und Bem. IV, § 9), das heisst, eine Grade, welche mit der gegebenen Graden zusammenfallen muss, weil sonst zwei Grade durch die beiden Punkte X und Y gingen, was gegen das Ax. II, a ist (Bem. I).

Satz V. Die Grade kann nicht durch einen einzigen Punkt bestimmt sein.

Nimmt man an, es gäbe, während die beiden Punkte A und B nöthig sind, um die Grade zu bestimmen (Ax. II, a), wenigstens einen Punkt C, der sie allein bestimme, so hätte A nicht dieselbe Eigenschaft wie der Punkt C. Es gibt in der Graden aber ein Segment $(CD) \equiv (AB)$ (Zus. I, Satz III) und wenn desshalb A nicht allein das Segment (AB) bestimmt, so bestimmt auch C nicht allein das Segment (CD) und also auch nicht die Grade, weil (AB) und (CD) identisch sind (Einl. Def. III und Bem. III, § 9) und mithin dieselben Eigenschaften haben, also auch diejenigen der bezüglich dieser Segmente sich entsprechenden Punkte (Einl. Bew. zu b, § 60).

Emp. Bem. II. Wir haben schon gesagt, dass zwei beliebige Punkte im Bereich unsrer Beobachtung ein einziges gradliniges Segment und mithin auch eine einzige Grade bestimmen; weil wir uns aber, wie in der Emp. Bem. I erwähnt, noch nicht darüber aussprechen können, ob es auf der Graden Punktepaare, die sie nicht bestimmen, gibt oder nicht, so vervollständigen wir das Ax. II durch die folgende Eigenschaft.

Ax. II. b. **Es gibt Punkte ausserhalb der Graden. Jeder Punkt, welcher nicht der Graden angehört, bestimmt mit jedem Punkt derselben eine andre Grade.**[1])

Bem. VII. Offenbar enthält dieses Axiom, wenn man von der Anschauung absieht, eine abstract gut definirte Eigenschaft.

Dass es den beiden vorigen Axiomen nicht widerspricht, geht aus der Erfahrung hervor und weiss man aus der Entwicklung der Geometrie. Man weiss auch, dass aus diesen beiden Axiomen, von welchen dem ersten auch durch die Punkte einer Graden allein genügt wird, nicht folgt, dass ausserhalb der Graden Punkte existiren oder nicht existiren. Ax. II, b kann daher als unabhängig von Ax. I und II, a angesehen werden.[IV]) .

1) Wir bezeichnen dieses Axiom mit II, b, weil es sich auf die Punktepaare bezieht, welche die Grade bestimmen.

[IV]) Wie wir gesagt haben (Anm. I und Einl., Bem. II und Anm. 1, § 81), muss man in einem für Gymnasien bestimmten Buch in dem Gebiet nur einer Einheit bleiben, was man durch Anwendung des Ax. V des *Archimedes* erreicht. In Bezug auf das gradlinige Continuum kann man den Sätzen der Einleitung mit passenden Aenderungen und Kürzungen folgen, wie sie in Bem. II, § 81 und Anm. 8 zu § 99 angegeben sind. Siehe auch die citirte Abhandlung des Verfassers: „il continuo rettilineo e l'assioma V d' *Archimede*". Auch wenn man aus didaktischen Gründen glaubt einige beweisbare Eigenschaften, wie z. B. diejenige des Satzes a, § 99 der Einleitung als an sich einleuchtend voraussetzen zu sollen, so würde dies der ganzen Methode keinen grossen Eintrag thun, da ja der Lehrer wüsste, dass diese Eigenschaften mittelst der vorausgehenden Axiome beweisbar sind. Aus didaktischen Gründen ist es auch, wie wir später sehen werden, vorzuziehen, das Axiom II durch das folgende zu ersetzen:

Bem. VIII. Wir hätten den ersten Theil des Ax. II, b weglassen und uns statt dessen auf Bem. II, § 2 stützen können, wenn derselbe uns nicht von Vortheil wäre, sei es nun, weil wir in den mit Römischen Zahlen bezeichneten Anmerkungen diese Bemerkung nicht benutzen (Anm. II), sei es um unsre abstracten Hypothesen besser aufstellen zu können.

Satz VI. Wenn zwei Punkte die Grade[1] *nicht bestimmen, so enthält jede Grade, die den einen Punkt enthält, auch den andern.*

X und Y seien die beiden Punkte und r sei eine Grade, die durch Y geht. Dieses ist möglich, weil nach Ax. II, a eine Grade existirt und Y daher, wenn es nicht in dieser Graden liegt, mit jedem Punkt derselben (Ax. II, b) eine Grade bestimmt, welche durch Y geht (Def. II, Ax. II, a). Wenn X der Graden r nicht angehört, so bestimmt es mit Y eine Grade (Ax. II, b), was gegen die Voraussetzung ist.

Zus. I. Wenn drei Punkte nicht in einer Graden liegen, so bestimmen sie zu je zweien drei Grade.

Denn würden zwei von ihnen nicht eine Grade bestimmen, so würde jede Grade, die durch den einen geht, auch durch den andern gehen und sie lägen mithin alle drei in einer graden Linie.

Zus. II. Die Punkte, welche mit einem gegebenen Punkt die Grade nicht bestimmen, bestimmen sie auch nicht unter sich.

Denn es seien B und C zwei Punkte, die mit einem Punkt A die Grade nicht bestimmen. Alsdann enthält jede Grade, die A enthält, auch B und C und ebenso geht jede Grade, die durch B oder C geht, auch durch A (Def. II, Satz VI); mithin enthält jede durch B gehende Grade, weil sie durch A geht, den Punkt C und folglich bestimmen B und C die Grade nicht (Ax. II, a und Bem. I).

Ax. II'. Zwei beliebige verschiedene Punkte bestimmen ein in der Position seiner Theile identisches und stetiges System, welches sie enthält und Grade heisst.

Es gibt Punkte ausserhalb der Graden.

Offenbar enthält das Axiom unter dieser Form eine grössere Anzahl von Eigenschaften als in der ursprünglichen Gestalt, weil wir in unserm Axiom II nicht voraussetzen, dass die Grade durch ein beliebiges Paar ihrer Punkte bestimmt sei und uns vorbehalten später darzuthun, ob und wann zwei beliebige Punkte die Grade nicht bestimmen, um das sogenannte *sphärische* System der Geometrie nicht auszuschliessen. Wissenschaftlich ist also das Ax. II vorzuziehen.

Aus diesem Grund geben wir die bei der Beschränkung auf ein endliches Gebiet an dem Text vorzunehmenden Aenderungen in den folgenden Anmerkungen sowohl für Ax. II als II' an, bis es nicht mehr nöthig ist auf ihren Unterschied Rücksicht zu nehmen, wie es bei der in diesen Anmerkungen versuchten Entwicklung des Euclid'schen Systems an einem bestimmten Punkt der Fall ist. Legt man Ax. II zu Grunde, so ist dieselbe Ordnung wie im Text einzuhalten — so lange der Begriff des absoluten Continuums nicht eingeführt wird —, wie im Text selbst oder in den Anmerkungen angegeben werden wird.

Will man zu didaktischen Zwecken die Eigenschaften des in der Position seiner Theile identischen Systems für die Grade geben, so sollte man beachten, dass diese Eigenschaften für alle diejenigen Figuren gelten, welche bezüglich des Punktes oder einer andern Figur als Element den Axiomen genügen, welche für die Grade unabhängig von ihrer Bestimmung mittelst zweier Punkte gegeben wurden. Man erhält so ebensoviele Eigenschaften des Büschels von Graden, Ebenen, der Kreislinie.

---

1) Statt zu sagen „eine einzige Grade“, sagen wir auch „die Grade“.

Satz VII. Wenn ein Punkt mit einem andern Punkt der Graden die Grade nicht bestimmt, so besitzt jeder Punkt der Graden diese Eigenschaft und es gibt von einem Punkt aus in der einen und der andern Richtung unendlich viele gleiche consecutive Segmente, deren Enden die Grade nicht bestimmen.

Der Beweis des ersten Theils ist ähnlich wie der zu Satz V. Jede Grade, die durch eines der Enden eines Segments der Reihe geht, geht auch durch alle übrigen Enden (Zus. II, Satz VI).

Satz VIII. Jedes gradlinige Segment (AB) *ist ein Theil einer einzigen Graden;* oder

Zwei Grade, welche ein Segment gemeinschaftlich haben, fallen zusammen.

r und r_1 seien die Graden, welche das Segment (AB) gemeinschaftlich haben. Die Punktepaare dieses Segments können die Grade nicht bestimmen (Ax. II, a, Bem. I), mithin enthält jede Grade, die durch einen ihrer Punkte z. B. B geht, auch alle andern Punkte des Segments und folglich auch das Segment (AB). Denken wir uns nun auf der Graden r ein Segment $(BC) \equiv (AB)$ und von derselben Richtung (Satz II). Das Segment (BC) hat dieselben Eigenschaften wie das Segment (AB) (Einl. Def. III, § 9) und jede andre Grade, welche B enthält, enthält auch alle andern Punkte des Segments (BC) (Satz VII). Also gehört das Gebiet der Scala von der Einheit (AB) in r (Einl. Def. III, § 80; Def. I, II, § 107) auch der Graden r_1 an oder mit andern Worten: weil jeder Punkt von r und r_1 in diesem Gebiet enthalten ist (Bem. IV und Einl, Bem. II, § 81), so fallen die Graden r und r_1 zusammen (Einl. Def. V, § 57).

Also würde jede durch A gehende Grade mit der Graden r zusammenfallen und mithin entweder A die Grade bestimmen, was widersinnig ist (Satz IV), oder es gäbe keine Punkte ausserhalb der Graden, was ebenfalls widersinnig ist (Ax. II, b oder Bem. II, § 2).

Zus. I. Ein beliebiges gradliniges Segment (AB) *bestimmt eine einzige Grade.*

Denn da es einer einzigen Graden angehört, so wird diese durch das gegebene Segment bestimmt.

Zus. II. Ein Punkt kann ein gradliniges Segment nicht bestimmen.

Denn er würde dann die durch das Segment selbst bestimmte Grade bestimmen, was widersinnig ist (Satz IV).

Zus. III. In jedem Segment (AB) *gibt es Punkte, welche mit einem beliebigen der Endpunkte oder mit andern Punkten desselben Segments die Grade bestimmen.*

Denn gäbe es in (AB) keinen Punkt, welcher mit A die Grade bestimmt mithin auch nicht B, so wäre das Segment (AB) in jeder durch A gehenden Graden gelegen, was widersinnig ist. Ist X ein Punkt von (AB), welcher mit A die Grade bestimmt, und man halbirt (AX) in dem Punkt M (Bem. IV; Einl. b, § 99), so bestimmt M mit A die Grade. Denn, wenn M mit A die Grade nicht bestimmte, so würde es, weil $(AM) \equiv (MX)$ ist, sie auch nicht mit X bestimmen und mithin würden auch A und X sie nicht bestimmen (Satz VII), was gegen die Voraussetzung ist. Dasselbe gilt für alle Punkte M, welche

(AX) in n gleiche Theile theilen (Einl. b, § 99). Um zu beweisen dass es in dem Segment (AB) Punkte gibt, die mit einem gegebenen Punkt X die Grade bestimmen, genügt es das Segment (AX) oder (XB) in Betracht zu ziehen.

Satz IX. Jeder Punkt liegt in mehreren verschiedenen Graden.

Nach Ax. II, a gibt es eine Grade r. Betrachtet man einen Punkt B ausserhalb der Graden r, was möglich ist (Ax. II, b), so bestimmt derselbe mit einem Punkt A von r eine Grade r', welche mit r nicht zusammenfällt (Einl. Def. V, § 57), nicht nur weil r und r' den Punkt B nicht gemeinschaftlich haben, sondern weil r' nicht alle Punkte eines beliebigen Segments von r und r nicht alle Punkte eines Segments von r' enthalten kann (Satz VIII). Wählt man einen andern beliebigen Punkt C von r, so erhält man die Grade BC, die mit r' nicht zusammenfallen kann, weil sonst r und r' die Punkte eines Segments dem Satz VIII zuwider gemeinsam hätten. Die Grade BC fällt aus demselben Grund wie r' nicht mit r zusammen.

Wählt man ausserhalb der auf diese Weise construirten Graden einen Punkt B_1, was erlaubt ist (Bem. II, § 2), so bestimmt B_1 mit B eine andre Grade (Ax. II, b) u. s. w.[1])

Zus. Wenn zwei Punkte die Grade nicht bestimmen, so liegen sie in mehreren verschiedenen Graden (Satz VI).

Satz X. Alle durch einen Punkt gehenden Graden bestimmen den allgemeinen Raum.

Denn es sei A der Punkt und f eine beliebige Figur. Die Punkte von f liegen in Graden, die durch A gehen, auch wenn sie mit A die Grade nicht bestimmen (Satz VI und IX). Ausserhalb f gibt es immer einen Punkt B (Def. II, § 2), welcher ebenfalls in einer Graden liegt, welche A enthält, womit der Satz bewiesen ist (Def. II, § 2).

Bem. IX. Dieser Satz ist ebenso wenig nothwendig wie die Definition des allgemeinen Raums, obgleich wir vorhaben stets in diesem Raum unsre Betrachtungen anzustellen.[2]) [v])

---

1) Der Satz IX lässt sich auch vor Satz VII beweisen, wenn man Satz V und Ax. II benutzt.

2) Weil die Grade die Eigenschaft besitzt, dass sie ein in der Position seiner Theile identisches System einer Dimension ist, so können wir von einem beliebigen Punkt derselben an in einer oder der andern Richtung eine Reihe gleicher Segmente betrachten. Diese Thatsache nun und nichts Anderes können wir auch so ausdrücken, dass wir sagen, die verschiedenen gleichen Segmente dieser Reihe seien verschiedene Lagen des nämlichen Segments, welches sich auf der Graden bewegt oder die Grade durchläuft, indem es sich immer selbst gleich bleibt (Bem. I, § 3 und Einl. § 67). Wir thun es hier jedoch nicht, um nicht den Glauben zu erwecken, wir wollten durch diese Ausdrucksweise das Princip der Bewegung ohne Deformation einführen, von dem später in Abschn. 23 die Rede sein wird.

---

v) Diese Sätze werden ebenso auf Grund des Ax. II (Anm. IV) gegeben, nur ist der letzte Theil des Beweises zu Satz IX, wenn man Bem. II, § 2 nicht benutzen will, wegzulassen. Legt man Ax. II′ zu Grunde, so genügen die Sätze I, II und Satz III mit seinen Zusätzen, die auf Grund der Betrachtungen der Bem. II, § 81 der Einl. zu entwickeln sind, während Satz IV und X ausgelassen werden. Die andern Sätze sind entweder Zusätze zu Ax. II′ oder überflüssig, insofern sie den Fall zweier Punkte, welche die Grade nicht bestimmen, betreffen.

3.

Die Länge eines gradlinigen Segments oder der Abstand zweier Punkte in einem gradlinigen Segment. — Das Segment oder der Abstand zweier Punkte auf der offenen oder geschlossenen Graden. — Entgegengesetzte Punkte der geschlossenen Graden. — Die Strahlen der Graden.[VI])

§ 5. *Def. I. Länge* eines Segments (AB) heisst das Segment, insofern es einem andern identischen Segment in jeder Vereinigung (Einl. § 29) mit andern Segmenten substituirt werden kann.

Oder auch:

Dasjenige, was man aus einem Segment erhält, wenn man von der gegenseitigen Lage seiner Theile, welche ebenfalls Segmente sind, absieht, heisst *Länge* des Segments (Einl. b, § 111).

Unter *Abstand* der Enden A und B eines Segments (AB) versteht man die Länge dieses Segments.

Sind z. B. die beiden Segmente $(AB) \equiv (A'B')$, $(A_1B_1) \equiv (A_1'B_1')$ gegeben, die auf derselben Graden liegen oder nicht, so kann im Allgemeinen das Paar (AB), (A_1B_1) dem Paar $(A'B')$ $(A_1'B_1')$ nicht identisch sein (Einl. Bem. III, § 58); betrachtet man aber nur die Länge der Segmente, so sind die beiden Längenpaare gleich.

Bem. I. Die Vereinigung zweier in ihrer Position gegebenen Segmente hängt von der gegenseitigen Position der beiden Segmente ab [1]), während dies bei der Summe ihrer Längen nicht der Fall ist; das heisst man berücksichtigt in letzterem Fall die gegenseitige Lage der beiden Segmente nicht und erhält für die Abstände dasselbe Resultat, wie wenn sie einander auf der nämlichen Graden in einer gegebenen Richtung unmittelbar folgten. Die Summe der zwei Längen $(A'B')$, $(A_1'B_1')$ ist daher der Summe der zwei Längen (AB), und (CD) zweier consecutiven Segmente gleich (Fig. 15). Wenn wir z. B. ein Segment (AB) betrachten und es in eine beliebige Anzahl Theile zerlegen und wir nehmen an, wir hätten ebenso viele diesen Theilen gleiche Segmente, die nicht in grader Linie liegen oder auf derselben Graden liegen aber nicht consecutiv sind, so ist die Summe ihrer Längen der Abstand der beiden Punkte A und B des gegebenen Segments aber ihre Gesammtheit ist nicht eine dem Segment (AB) identische Figur.[2])

Fig. 15.

---

1) So können z. B. im Raum zwei Paare gleicher Segmente nicht zwei identische Figuren bestimmen.

2) Die Länge ist weiter nichts als die intensive Grösse des Segments (Einl. Def. II und a, § 111). Die Figuren (AB), (CD); $(A'B')$, $(A_1'B_1')$ sind im Allgemeinen nicht identisch, sondern gleichwerthig (Einl. Def. IV, § 9).

Der Abstand zweier Punkte im Sinn der Def. I ist nicht das gradlinige Segment derselben, ebenso wie der Flächeninhalt einer ebenen oder das Volumen einer körperlichen Figur die Figuren selbst nicht sind (siehe Anm., § 11).

VI) Dieser Abschnitt kann auf Grund beider Axiome gegeben werden. Das Ax. II' setzt nicht fest, dass die Grade offen sein muss; man kann diese Eigenschaft, wie wir sehen werden, mittelst des Euclid'schen Postulats über die Parallelen, welches wir später geben werden, nachweisen. Will man diesen Unterschied nicht berücksichtigen, welcher im Uebrigen sehr einfach ist und auf welchen es zuweilen, wie wir sehen werden, ausreicht

Satz I. Wenn die Längen zweier Segmente der nämlichen Graden gleich sind, so sind die beiden Segmente gleich.

Oder auch:

Wenn die Abstände der Enden zweier Segmente auf der nämlichen Graden gleich sind, so sind die beiden Segmente gleich.

Der Beweis ist derselbe wie zu Satz f, § 111 der Einl.

§ 6. *Déf. I.* Unter *Segment zweier Punkte auf der offenen Graden* (Satz I § 4) verstehen wir das Segment, welches die beiden Punkte auf der Graden bestimmen (Einl. b, § 64) und unter *Abstand* zweier Punkte die Länge dieses Segments (Def. I, § 5).

Def. II. Unter *Segment zweier Punkte A und B auf der geschlossenen Graden* verstehen wir das kleinere der beiden Segmente (AB) und (BA), die dieselbe Richtung haben und von A und B auf der Graden bestimmt werden (Einl. c, § 64) und unter *Abstand* von A und B die Länge dieses Segments.

Bem. I. Wenn $(AB) = (BA)$ ist oder mit andern Worten, wenn A und B die Grade halbiren, so bestimmen sie auf der Graden zwei gleiche Segmente. Man kann alsdann die vorstehende Definition nicht länger anwenden. Dagegen bestimmen sie auf der Graden einen einzigen Abstand, weil die Segmente dieselbe Länge haben und bei dem Abstand die Differenz in der Lage der Segmente nicht in Betracht kommt.

Wir können also sagen, zwei Punkte bestimmten auf der geschlossenen Graden einen einzigen Abstand, welcher sich auf das durch die beiden Punkte bestimmte kleinere Segment bezieht oder auf das eine oder andre, wenn die beiden Punkte die Grade halbiren (Bem. IV, § 4; Einl. b, § 99).

Def. III. Zwei Punkte, welche die geschlossene Grade halbiren, heissen *entgegengesetzte oder Gegen-Punkte.*

§ 7. *Def. I.* Die Grade hat zwei Richtungen (Ax. II, a; Einl. Def. II, § 62). Die in einer Richtung durchlaufene Grade heisst auch *Strahl.* Eine Grade hat mithin zwei Strahlen, deren Punkte zusammenfallen. Die zu einer Grade gehörigen Strahlen heissen *entgegengesetzte Strahlen,* wie die Richtungen, in welchen sie durchlaufen werden.

Def. II. Wenn wir sagen, *zwei Strahlen fielen zusammen,* so meinen wir, sie lägen nicht nur auf derselben Graden, sondern sie hätten auch dieselbe Richtung wie die Grade (Einl. Def. III, § 67). Wenn wir dagegen sagen, *zwei Strahlen lägen in einer Graden,* so meinen wir, sie könnten die nämliche oder entgegengesetzte Richtungen wie die Grade haben.

4.

Ax. III. — Identität zweier Graden. — Gradlinige Figuren. — Das Dreieck.[VII])

§ 8. *Bem. I.* Wir stehen nun vor der Frage: Sind zwei beliebige Grade identisch oder nicht?

Die abstracten Betrachtungen, welche wir auf Grund der Ax. I und II anstellen

---

hinzuweisen, so müsste man das Postulat über die offene Grade sofort auf das Ax. II' selbst folgen lassen. Satz I, § 4 würde sich darauf beschränken festzustellen, dass die Grade eine einfache Linie ist.

[VII]) Dieser Abschnitt kann bei beiden Axiomen beibehalten werden.

können, erlauben uns nicht die Frage zu entscheiden, weil das Ax. II, a sich auf die Grade an sich bezieht und das Ax. I mit Ax. II und wenn man will auch mit der Definition des allgemeinen Raums zusammen dazu dient, die Existenz mehrerer verschiedener Graden festzustellen (Satz IX, § 4). Wir können aber die Beziehungen der Gleichheit und Ungleichheit zwischen zwei an sich betrachteten Graden (Einl. Def. III, u. Bem. III, § 9), auch wenn sie von zwei Punktepaaren bestimmt sind, nicht ableiten, weil, um ihre Identität auf Grund der Principien der Einleitung (Einl. §§ 8 und 60) darzuthun, die beiden Punktepaare identisch sein oder in den Graden einander identische Punktepaare, welche sie bestimmen, vorhanden sein müssten. Dieses ist in den vorstehenden Axiomen nicht enthalten und geht auch nicht aus ihnen hervor.[1])

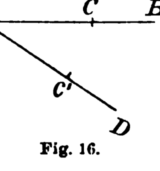


Fig. 16.

Emp. Bem. Prüft man zwei gradlinige Gegenstände (AB), (AD) (Fig. 16), so erhält man den Eindruck, dass, auch wenn sie einander nicht gleich sind, es doch in dem zweiten einen Theil (AC') gibt, welcher einem Theil (AC) des ersten gleich ist. Wir geben daher das folgende Axiom:

Ax. III. **Wenn zwei beliebige Grade einen Punkt A gemeinschaftlich haben, so ist einem beliebigen Segment (AB) der ersten ein Segment (AB') der zweiten und den Vielfachen von (AB) die Vielfachen von (AB') identisch.**

Bem. II. Dieses Axiom liefert uns in rein abstractem Sinn, das heisst unabhängig von der Anschauung, eine vollständig bestimmte Eigenschaft; es bedeutet nämlich, dass zwei beliebige Elementesysteme, welche durch die früheren Axiome bestimmt sind und ein Element A gemeinsam haben, der Bedingung (AB) (AB') genügen, wenn B und B' zwei andre ihnen bezüglich angehörige Elemente sind.

Satz I. Zwei beliebige Grade sind identisch.

Dies ist offenbar richtig, wenn sie einen Punkt A gemeinschaftlich haben (Ax. III, Satz IX, § 4); denn construirt man die Scalen mit den gleichen Segmenten (AB) und (AB'), so ist jedem Segment der einen ein Segment der andern gleich und daher sind die Gebiete der beiden Scalen, oder die beiden Graden einander gleich (Bem. IV, § 4; Einl. a, § 81).

Ist eine andre beliebige Grade EF gegeben, welche nicht durch den Punkt A geht, so ist die Grade AE (Ax. II, b) nach dem vorstehenden Beweis mit der Graden AB und der Graden EF identisch und mithin sind auch die Graden AB und EF identisch (Einl. e, § 8) (Fig. 16).

§ 9. *Def. I.* Unter *gradliniger Figur* eines Punktesystems oder mehrerer verschiedener Punktesysteme verstehen wir diejenige, welche durch die Segmente individualisirt wird, die die gegebenen Punkte zu Enden haben und durch die Segmente, welche durch die Punkte der vorigen Segmente bestimmt werden u. s. w.

Def. II. Die gradlinige Figur, welche durch drei nicht in einer Graden gelegene Punkte ABC bestimmt ist, heisst Dreieck, die drei Punkte A, B, C *Eckpunkte* und die drei Segmente (AB), (BC), (CA) *Seiten* des Dreiecks (Def. I u. II, § 6).

Wenn kein Irrthum entstehen kann, nennen wir auch die durch die drei Punkte zu je zweien bestimmten Graden *Seiten* (Zus. I, Satz VI, § 4).

Die Eckpunkte A, B, C heissen den Seiten (BC), (CA), (AB) bezüglich *gegenüberliegend* und umgekehrt.

Def. III. Wenn zwei Seiten z. B. (AB) und (BC) des Dreiecks einander

---

1) Zwei Kreislinien genügen dem Ax. II, nur dass sie durch drei nicht in grader Linie liegende Punkte statt durch zwei bestimmt werden und doch sind sie im Allgemeinen nicht identisch.

gleich sind, so heisst es *gleichschenklig* und die dritte Seite (AC) die *Basis* des Dreiecks.

Def. IV. Sind alle drei Seiten gleich, so heisst es ein *gleichseitiges* Dreieck.

5.

Grenzpunkt einer Punktgruppe im Allgemeinen. — Eigenschaften der Abstände eines Punktes von den Punkten einer Graden.

§ 10. *Def. I.* Unter Umgebung eines gegebenen Punktes A verstehen wir das Gebiet, welches durch alle von A ausgehenden Segmente (Satz IX, § 4), die einem beliebigen gegebenen noch so kleinen Segment ε gleich sind, bestimmt wird (Bem. IV, § 4). Der Abstand 2ε heisst die *Ausdehnung* der Umgebung von A.

Bem. I. Offenbar ist der Abstand eines jeden Punktes dieser Umgebung von dem Punkt A gleich ε oder kleiner als ε, weil er entweder der Endpunkt oder ein innerer Punkt eines der obengenannten Segmente ist.

Def. II. Ein Punkt L heisst *Grenzpunkt* einer Punktgruppe (X) oder einer Reihe von Punkten (X_n), wenn in jeder gegebenen Umgebung von L von beliebig kleiner Ausdehnung ein Punkt der Gruppe oder der Reihe liegt, falls n so gross genommen wird, dass jeder Punkt X_{n+r} in die genannte Umgebung fällt. Im Fall einer Reihe sagen wir auch, dass ein Punkt X der Reihe sich *unbegrenzt* dem Punkt L *nähert* oder dem Punkt L *zustrebt.*

Def. III. Der Ausdruck: ein *veränderliches* Dreieck oder ein Dreieck *mit veränderlichen Seiten* bedeutet so viel als eine Reihe von Dreiecken ABC, $A'B'C'$, u. s. w.

Bem. II. Wie aus den Def. II und III hervorgeht, wird die Ausdrucksweise der Bewegung (Bem. I, § 3 oder Einl. § 67) hier der grösseren Bequemlichkeit wegen gebraucht. Man könnte jedoch auch ohne sie auskommen; wird sie aber angewendet, so geschieht es immer in dem Sinn wie in der Einl. bei den rein abstracten Formen.

Bem. III. Von Interesse ist nunmehr die Frage, wie sich die Seiten eines Dreiecks ABC (Def. II, § 9) verhalten, wenn eine Seite z. B. (AC) unbegrenzt abnimmt (Bem. IV, § 4; Einl. Def. I, § 95). Sind die drei Punkte ABC in grader Linie und nähert sich C unbegrenzt dem A, so nähert sich das Segment (BC) unbegrenzt dem (BA) (Einl. Def. IV, § 95 und Ax. II, a). Sind aber ABC nicht in grader Linie, wie wir annehmen, dann wissen wir diese Eigenschaft aus den früheren nicht abzuleiten. Die Differenz der Segmente (AB) und (BC) könnte bei der Annäherung von C an A grösser als ein gegebenes Segment bleiben.[1] Wir nehmen daher die Beobachtung zu Hülfe (Fig. 17):

B
A C
Fig. 17.

Emp. Bem. Die Beobachtung zeigt uns, dass, wenn (AC) hinreichend klein ist, man $(AB) \equiv (BC)$ annehmen kann. Wir geben mithin das folgende Axiom:

Ax. IV. **Wenn eine Seite eines beliebigen Dreiecks unbegrenzt klein wird, so wird die Differenz der beiden andern Seiten ebenfalls unbegrenzt klein.**

---

1) Es ist aus der Theorie der Functionen einer oder mehrerer stetiger reellen Variabelen bekannt (siehe z. B. *Dini,* Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, Leipzig 1892), dass diese Functionen stetig oder unstetig sein können. Jeder Punkt C der Graden AC liefert nun mit B eine Grade und mithin ein Segment; (BC) ist folglich eine Function der Lage von C auf der Graden AC. Daraus aber, dass BC eine Function ist, folgt noch nicht, auch wenn C ein Continuum beschreibt, dass die Function stetig ist.

Zus. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks unbegrenzt klein werden, so nimmt auch die dritte Seite unbegrenzt ab.

Bliebe die dritte Seite grösser als ein gegebenes Segment ε, so würde die Differenz zwischen dieser Seite und einer der beiden andern bei dem unbegrenzten Abnehmen der übrig bleibenden Seite nicht unbegrenzt klein werden, was Ax. IV widerspräche (Einl. Def. IV, § 95).

Satz I. Wenn zwei Punkte A und B einen Punkt C zum Grenzpunkt haben, so strebt ihr Segment auf jeder durch sie gehenden Graden der Null zu.

Wenn A und B eine Grade bestimmen und mit C in grader Linie liegen, so fasst der Satz die Theoreme f, h, i, § 95 der Einl. zusammen (Ax. II, a und Bem. IV, § 4). Sind sie dagegen mit C nicht in grader Linie, so liefern sie mit C ein Dreieck (Zus. I, Satz VI, § 4 und Def. II, § 9) und der Satz ist nur ein Zusatz zu Ax. IV (Einl. d, § 95). Bestimmen A und B die Grade nicht, so können wir annehmen, sie bestimmten dieselbe mit C, weil wir den entgegengesetzten Fall schon untersucht haben (Satz VI, § 4). Es gibt also eine Grade und nach der Voraussetzung nur eine, welche durch die drei Punkte A B C geht (Zus. Satz IX, Ax. II, a und Bem. I, § 4) und für diese gilt der Beweis des ersten Falls. α sei das durch A und B auf einer andern Graden r_1, welche nicht durch C geht, bestimmte Segment (Def. I und II, § 6); wir wollen in diesem Segment uns einen beliebig nahe an A gelegenen Punkt D derart aussuchen, dass $(BD) > \alpha - \varepsilon$, $(AD < \varepsilon)$, ist (Bem. IV, § 4 und Einl. b, § 95). Der Punkt D bestimmt mit C immer eine Grade, weil C ausserhalb der Graden ABD liegt (Ax. II, b), und wenn A und B sich unbegrenzt dem C und D dem A nähert, so nähert sich auch D unbegrenzt dem C (Zus. Ax. IV). Mithin nähert sich B in dem Dreieck BCD unbegrenzt dem D (Zus. Ax. IV). Wenn daher A und B unbegrenzt dem C näher kommen, so nähert sich $(AD) + (DB)$ oder α unbegrenzt der Null (Einl. h, § 95 und Bem. IV, § 4).

Satz II. Wenn eine Punktreihe (X_n) einen Grenzpunkt L hat, so nimmt das Segment $(X_n X_{n+r})$ bei constantem r und unbegrenzt wachsendem n unbegrenzt ab.

Denn in jeder Umgebung von L von der Ausdehnung 2ε gibt es wenigstens einen Punkt X_n, wenn n hinreichend gross genommen wird (Def. II).

Die Enden der Segmente $(X_n X_{n+r})$ sind bei hinreichend grossem n in der gegebenen Umgebung enthalten; weil aber ε so klein sein kann, wie man nur will, so streben alle Punkte der Umgebung dem L zu und mithin auch X_n und X_{n+r} und mithin strebt ihr Segment auf jeder durch sie gehenden Graden bei unbegrenzt zunehmendem n der Null zu (Satz I).

Satz III. Der Punkt X_n der Reihe (X_n), welcher L zum Grenzpunkt hat, kann sich bei unbegrenzt wachsendem n nur dem Punkt L unbegrenzt nähern.

Nimmt man an, er nähere sich zwei verschiedenen gegebenen Punkten L und L', so würde, weil $(X_n L)$ und $(X_n L')$ der Null zustreben (Def. II und Einl. d, § 95) die Summe der Segmente $(X_n L)$ und $(X_n L')$ Null und zugleich auch ein gegebenes Segment (LL') zur Grenze haben, was unmöglich ist (Ax. IV).

Satz IV. Wenn der Abstand eines Punktes R von den Punkten X einer Graden unbegrenzt abnimmt, so gehört der Punkt R der Graden an.

Es ist vorerst erlaubt von nur einem Abstand des Punktes R von einem Punkt X der Graden zu sprechen, weil, wenn R ausserhalb der Graden liegt, R und X immer die Grade (Ax. II, b) und liegt R auf derselben stets einen einzigen Abstand bestimmen (Def. I u. II und Bem. I, § 6). Es ist leicht zu beweisen, dass es auf der Graden eine Reihe (X_n) gibt, welche R zur Grenze hat. Man braucht nur eine Umgebung von R, welche einem hinreichend kleinen Segment ε_1 entspricht, so zu wählen, dass ein Punkt X_1 der Graden in sie fällt (Def. II). Nimmt man dann ein andres Segment $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ (Ax. II, b), so gibt es in der entsprechenden Umgebung von R einen weiteren Punkt X_2 der Graden. Denkt man sich dieses Verfahren fortgesetzt und zu Ende geführt, so erhält man die gesuchte Reihe (Def. II).

Ist R ein Grenzpunkt einer Punktreihe (X_n) der Graden, so nimmt das Segment $(X_n X_{n+r})$ unbegrenzt ab (Satz III); die beiden Punkte X_n und X_{n+r} streben mithin dem R zu (Def. II). Falls die Punkte von (X_n) zu je zweien die Grade bestimmen, haben sie einen Grenzpunkt (Einl. b, § 98), der mit R zusammenfallen muss (Satz IV). Bestimmen sie dagegen die Grade nicht (diese Hypothese ist bis jetzt noch nicht ausgeschlossen), so muss, weil X_n und X_{n+r} dem R zustreben, ihr Segment in jeder durch sie gehenden Graden der Null zustreben (Satz I). Die Reihe (X_n) hat mithin auch einen Grenzpunkt auf der gegebenen Graden, der mit dem Punkt R zusammenfallen muss (Satz III).[VIII]

6.

Punktgruppen, welche zu je zweien die Grade nicht bestimmen können.

§ 11. *Satz I. Wenn eine Punktgruppe (A) der Graden derart gegeben ist, dass*

1) wählt man ein beliebiges Segment, dessen Enden Punkte der Gruppe sind, die Enden der consecutiven diesem Segment gleichen Segmente in einer gegebenen Richtung von jedem Punkt der Gruppe als Anfang an, der Gruppe selbst angehören,

2) ein Punkt A von (A) nicht einen ersten consecutiven Punkt der Gruppe in der gegebenen Richtung hat,

so gibt es in jedem willkürlich kleinen Segment der Graden (Bem. IV, § 4) *stets einen Punkt der Gruppe.*

a) Offenbar hat jeder Punkt der Gruppe (A) die zweite Eigenschaft des Satzes. Denn wenn der beliebige Punkt A_m der geordneten Gruppe in der gegebenen Richtung ein erstes consecutives Element A_{m+1} hat und man nimmt in der Gruppe (A) in der gegebenen Richtung das Segment $(AA_1) \equiv (A_m A_{m+1})$, so ist A_1 auch ein Punkt der Gruppe (1). A_1 ist aber nicht der erste Punkt,

---

[VIII]) Legt man Ax. II' zu Grunde, so hat man auch Ax. IV nöthig; die Beweise der Sätze vereinfachen sich, da man nicht nöthig hat, die noch nicht ausgeschlossene Möglichkeit, dass zwei Punkte die Grade nicht bestimmen, zu berücksichtigen; das Ax. IV kann man geben, wenn es nöthig scheint.

der auf A folgt [2)], folglich muss in dem Segment (AA_1) ein Punkt der Gruppe sein und also auch in $(A_m A_{m+1})$ [1)].

b) Wir wollen nun beweisen, dass es in jedem willkürlich kleinen Segment (AX) von (AA_1) einen Punkt der Gruppe (A) gibt, wenn A und A_1 beliebige Punkte der Gruppe sind. Ist X ein Punkt der Gruppe, so gibt es in AX einen Punkt der Gruppe (a). *Nehmen wir an, dieses sei nicht der Fall.* Es muss eine Zahl m geben derart, dass

$$(AX)m < (AA_1) < (AX)(m+1). \quad \text{(Bem. IV, § 4 und Einl. c', § 81)}$$

Denken wir uns, in der Richtung von (AX), m consecutive (AX) gleiche Segmente und bezeichnen sie mit (XX_1), (X_1X_2), ..., $(X_{m-1}X_m)$. Von AA_1 bleibt das Segment $(X_m A_1) < (AX)$ übrig. In (AA_1) muss sich ein Punkt A_1' der Gruppe (A) befinden (a), welcher mithin einem der Segmente, in welche (AA_1) getheilt wurde, (AX) nach der Voraussetzung ausgenommen, angehören muss. A_1' kann aber nicht in $(X_m A_1)$ liegen, weil sich alsdann, da $(A_1'A_1) < (AX)$, in (AX) ein $(A_1'A_1)$ gleiches Segment befände, welches zum ersten Ende A hätte (Satz II, § 4) und dessen zweites Ende ein Punkt von (A) sein würde [1)].

Der Punkt A_1' muss daher einem der Segmente $(X_r X_{r+1})$ z. B. dem letzten $(X_{m-1}X_m)$ angehören. In dieses Segment kann kein andrer Punkt A_2' von (A) fallen, denn sonst würde A_2' mit A_1' ein Segment bestimmen, das kleiner als $(X_{m-1}X_m)$ und mithin auch als (AX) ist, und es gäbe also in (AX) einen andern Punkt von (A) gegen die Voraussetzung [1)]. Uebrigens kann auch nicht $(A_1'A_2') \equiv (X_{m-1}X_m)$ sein, weil die beiden Punkte A_1' und A_2' in die beiden Punkte X_{m-1}, X_m fallen müssten und mithin auch X ein Punkt von (A) wäre [1)] gegen die Voraussetzung. Aber zwischen A und A_1' muss ein andrer Punkt A_1'' der Gruppe (A) liegen, welcher in eines der übrigen Segmente $(X_r X_{r+1})$ z. B. in das Segment $(X_{m-2}X_{m-1})$ fällt. Zwei Punkte von (A) können nicht in einem dieser Segmente liegen, weil alsdann nach dem, was wir eben von dem Segment $(X_{m-1}X_m)$ gesagt haben, auch einer der Voraussetzung zuwider in (AX) liegen müsste. Die Anzahl der Punkte in dem Segment (AA_1) wäre also höchstens m und A hätte mithin bei der obigen Voraussetzung einen ersten consecutiven Punkt in der gegebenen Richtung (Einl. Def. II, § 46 und b, § 35), was den Ausführungen in a widerspricht. In (AX) muss daher wenigstens ein Punkt der Gruppe (A) und mithin unendlich viele liegen (Bem. IV, § 4, und Einl. b, § 95).

c) Wir betrachten jetzt einen beliebigen gegebenen Punkt Y der Graden, welcher kein Punkt von (A) sein soll. Man kann sich immer denken, er läge zwischen zwei Punkten von (A); denn ist ein Segment (AA_1) der Gruppe gegeben, das kleiner als (AY) ist, so gibt es immer eine solche Zahl n, dass $(AA_1)n > (AY)$ (Bem. IV, § 4 und Einl. d, § 80); wir können daher ohne jede Einschränkung annehmen, Y gehöre dem Segment (AA_1) an, wie wir auch voraussetzen können, dass (AY) in der Richtung der Gruppe liegt [1)].

Wir wollen beweisen, dass in jedem beliebig kleinen Segment (YZ) stets ein Punkt der Gruppe (A) liegt. Wir nehmen zuerst an, (YZ) habe die

Richtung von (AA_1), und betrachten ein Segment $(AY') \equiv (YZ)$. Weil (YZ) beliebig klein ist, so können wir voraussetzen

$$(AY') < (AY). \quad \text{(Einl. b, § 95)} \quad (1)$$

A A′ $A'^{(q)}$ $A'^{(q+1)}$
Y′ Y Z

Fig 18.

In das Segment (AY') fällt stets ein Punkt der Gruppe (b) z. B. A', welcher auch der Punkt Y' selbst sein kann; man erhält daher:

$$(AA') \leqq (AY') \quad (2)$$

und mithin auch

$$(AA') \leqq (YZ) \quad \text{(Einl. d', Def. II, § 61)} \quad (3)$$

und nach (1)

$$(AA') < (AY). \quad \text{(Einl. d oder Def. II, § 61)} \quad (4)$$

Nun muss es eine solche Zahl q geben, dass

$$(AA')q < (AY) < (AA')(q+1). \quad \text{(Bem. IV, § 4 und Einl. c', § 81)}$$

Bezeichnen wir die zweiten Enden der Segmente $(AA')q$, $(AA')(q+1)$ mit $A'^{(q)}$, $A'^{(q+1)}$, so fällt das erste nicht in das Segment (YZ) aber wohl in das Segment (AY) und man erhält:

$$(A'^{(q)}Z) > (YZ). \quad (5)$$

Y dagegen liegt zwischen $A'^{(q)}$ und $A'^{(q+1)}$ und es ist mithin

$$(A'^{(q)}Y) < (A'^{(q)}A'^{(q+1)}). \quad (6)$$

Auf der andern Seite folgt aus (3)

$$(A'^{(q)}A'^{(q+1)}) \leqq (YZ) \quad (7)$$

und weil Y dem Segment $(A'^{(q)}A'^{(q+1)})$ angehört, so kann nach (7) Z nicht in dasselbe Segment fallen (Einl. Def. I, § 61 oder d, § 73); $A'^{(q+1)}$ muss daher in das Segment (YZ) fallen, was wir beweisen wollten.

Offenbar braucht man, wenn (YZ) die Richtung von (A_1A) hat, nur das Segment (ZY) zu betrachten und die vorige Schlussweise auf es anzuwenden.

Zus. Jeder Punkt der Graden, welcher nicht ein Punkt von (A) ist, ist Grenzpunkt der Gruppe (A).

Denn sucht man sich einen beliebigen Punkt X der Graden aus, so gibt es in einem willkürlich kleinen Segment (XY) einen Punkt der Gruppe.

Satz II. Jede Gruppe (X) von Punkten, welche zu je zweien die Grade nicht bestimmen, enthält ihre etwaigen Grenzpunkte.

Eine beliebige Grade r, welche durch einen Punkt X der Gruppe geht, muss alle Punkte der Gruppe enthalten (Satz VI, § 4). Wenn L ein Grenzpunkt dieser Gruppe ist, so muss derselbe auch in der Graden r enthalten sein (Satz V, § 10).

Satz III. Die Punkte eines Segmentes (AB), welche mit einem Ende desselben z. B. A die Grade nicht bestimmen, können nicht in unendlich grosser Anzahl vorhanden sein.

Wenn es in (AB) eine unendlich (∞) grosse Anzahl von Punkten gibt, welche mit A eine Grade nicht bestimmen, so hat die Gruppe dieser Punkte wenigstens einen Grenzpunkt L (Bem. IV, § 4 und Einl. b, § 98), das heisst,

es gibt eine Reihe (X_n) der Gruppe, welche L zum Grenzpunkt hat (der Beweis wird analog wie der erste Theil des Beweises Satz IV, § 10 geführt) und $(X_m X_{m+1})$ wird mithin unbegrenzt klein (Einl. c, § 97, oder Satz III, § 10). Ist aber ein Segment $(X_m X_{m+1}) < \varepsilon$ gegeben, so gibt es einen Punkt A', welcher dieser Gruppe angehört, derart, dass $(AA') \equiv (X_m X_{m+1})$ ist (Satz II, § 4; Satz VII, § 4). Dieses gilt für jeden beliebigen Punkt A der Gruppe. Das heisst also, jeder Punkt der Gruppe hat kein erstes consecutives bestimmtes Element in der geordneten Gruppe in der Richtung von (AB). In einem solchen Fall hat die Gruppe (A) von Punkten, welche mit A die Grade nicht bestimmen, die Eigenschaften der Gruppe des Satzes I. Jeder Punkt Y der Graden aber, welcher kein Punkt der Gruppe (A) ist, ist Grenzpunkt dieser Gruppe (Zus. Satz I) und ist ebenfalls ein Punkt der Graden (Satz II).

Das heisst also, es gäbe auf der Graden keinen Punkt, welcher sie mit A bestimmen würde, was widersinnig ist (Satz V, § 4). Ferner würden alle durch A gehenden Graden zusammenfallen, was mit Satz IX, § 4 in Widerspruch steht.

Satz IV. a) Die consecutiven Segmente der Reihe von Punkten, welche mit einem gegebenen Punkt die Grade nicht bestimmen, sind einander in jeder beliebigen Graden, welche die gegebene Reihe enthält, gleich

b) und die durch zwei beliebige Punkte der Reihe in zwei durch sie gehenden Graden bestimmten Segmente sind gleich.

a) Wenn die consecutiven Segmente $(A_m A_{m+1})$, $(A_{m+1} A_{m+2})$ der obigen Reihe (A) nicht gleich wären und es wäre z. B. $(A_m A_{m+1}) > (A_{m+1} A_{m+2})$, so gäbe es in dem ersten ein Segment $(A_m A'_{m+1})$, welches dem zweiten gleich (Satz II, § 4) und so beschaffen wäre dass A'_{m+1} mit A_m die Grade nicht bestimmte (Satz VII, § 4) und A_{m+1} wäre mithin nicht der consecutive Punkt von A_m in der Reihe (A), während A ein erstes consecutives Element in dieser Reihe hat (Satz III).

b) Es seien r und r_1 zwei durch die Punkte der Gruppe (A) gehende Graden. Wir wollen annehmen, die Punkte A_m und A_s von (A) bestimmten auf r und r_1 ungleiche Segmente $(A_m A_s)_r$, $(A_m A_s)_{r_1}$ und in diesen Segmenten zwei Segmente (YA_s), (ZA_s) derart auswählen, dass jeder Punkt derselben A_s ausgenommen mit A_s (Satz III) und folglich auch mit A_m die Grade bestimmt (Satz VI, § 4). Zwei beliebige von A_s verschiedene Punkte Y' und Z' der Segmente (YA_s), (ZA_s) bestimmen eine von r und r_1 verschiedene Grade, weil Y' ausserhalb r_1 liegt (Bem. I, § 4); sie bestimmen mithin mit A_s und mit A_m ein Dreieck (Def. II, § 9). Wenn aber Y' und Z' sich unbegrenzt dem A_s nähern, so nimmt $(Y'Z')$ (Zus. Ax. IV) und also auch die Differenz zwischen $(A_m Y')$ und $(A_m Z')$ in r und r_1 unbegrenzt ab (Ax. IV). Wenn aber $(A_m A_s)_r$ und $(A_m A_s)_{r_1}$ ungleich wären z. B. $(A_m A_s)_{r_1} > (A_m A_s)_r$, so würde die Differenz zwischen $(A_m Z')$ und $(A_m A_s)_r$ grösser als $(A_m Z) - (A_m A_s)_r = \varepsilon$ sein, da man Z so wählen kann, dass $(A_m Z) > (A_m A_s)_r$ ist (Satz I, § 8). $(A_m Z')$ bliebe also um ε grösser als das Segment $(A_m Y')$, welches kleiner als $(A_m A_s)_r$ ist. Dieses widerspricht aber den früheren Ausführungen. Es folgt also:

$$(A_m A_s)_r \equiv (A_m A_s)_{r_1}.$$

Bem. I. Man kann von dem consecutiven Punkt eines jeden Punktes A einer Gruppe, welche die Grade nicht bestimmt, sprechen, weil in jeder durch A gehenden Graden, A in einer gegebenen Richtung denselben consecutiven Punkt hat. Man kann von dem Abstand (Def. I, § 5) statt von den Abständen zweier Punkte sprechen, weil sie in jeder durch sie gehenden Graden nur einen Abstand bestimmen (Def. I u. II und Bem. I, § 6) und die Abstände in allen Graden, welche die Punkte enthalten, gleich sind. Man kann aber nicht von nur *einem* Segment zweier Punkte, welche die Grade nicht bestimmen, sprechen.[1])

Satz V. a) Zwei Punktgruppen, von denen jede die Grade nicht bestimmt, liegen in einer einzigen Graden.

b) Die Segmente, welche zu Enden zwei Paare consecutiver Punkte haben, welche die Grade nicht bestimmen, sind gleich.

a) Denn wenn $(A_1 A_2)$, $(B_1 B_2)$ zwei beliebige Paare zweier Gruppen (A) und (B) sind, welche die Grade nicht bestimmen, so bestimmen die Punkte A_1 und B_1 immer eine Grade, weil sonst A_1 und B_1 derselben Gruppe angehören würden (Satz VI, § 4). Diese Grade enthält alle übrigen Punkte von (A) und (B) (Satz VI, § 4).

b) Jeder Punkt X einer Graden, welche eine Gruppe (A) enthält, gehört einer Gruppe (X) an, welche die Grade nicht bestimmt und identisch mit (A) ist (Satz II und Satz VII, § 4). Die beiden Paare gegebener consecutiver Punkte liegen aber immer in einer Graden (Bem. I). Daraus folgt b.

Bem. II. Die Geltung dieser Sätze ist abhängig von der Existenz von Punktgruppen, welche die Grade nicht bestimmen — eine bis jetzt noch unentschiedene Frage, die wir uns mithin gegenwärtig halten müssen.[IX])

Satz VI. In einer beliebigen Gruppe (X), welche einen Grenzpunkt L hat, gibt es eine Reihe (X_n) von Punkten, welche L zum Grenzpunkt hat.

Auch wenn ein Punkt X und der Punkt L eine Grade nicht bestimmen, so ist doch ihr Segment auf einer beliebigen durch sie gehenden Graden constant (Satz IV) und kann daher nicht kleiner als jedes gegebene Segment δ sein (Satz III). Es lässt sich mithin der erste Theil des Beweises Satz IV, § 10 anwenden.

7.

Das gradlinige Grenzsegment einer Reihe gradliniger Segmente. — Einfache Linie. — Abstand eines Punktes von den Punkten einer einfachen Linie.

§ 12. *Def. I.* Ein gradliniges Segment (AB) oder die Grade AB heisst *Grenze* einer Reihe gegebener gradliniger Segmente (XY) oder von Graden XY, wenn die Punkte A und B Grenzpunkte der Punkte X und Y sind (Def. II, § 10), vorausgesetzt, dass die Punkte A und B die Grade bestimmen.

Satz I. Wenn (AB) das Grenzsegment eines veränderlichen Segments (XY) ist, so bestimmen die Punkte X und Y in hinreichend kleinen Umgebungen von A und B die Grade.

---

1) Dies zeigt klar, welcher Unterschied zwischen dem Abstand zweier Punkte und dem Segment derselben ist und dass man sie nicht immer ohne Weiteres einander substituiren kann.

IX) Legt man Ax. II' zu Grunde, so hat man diesen Abschnitt überhaupt nicht nöthig, weil alsdann die Existenz von Punktepaaren, welche die Grade nicht bestimmen, ausgeschlossen ist.

Wählt man eine willkürlich kleine Umgebung von B (Def. I, § 10), so muss in sie ein Punkt Y fallen (Def. I). Wenn A und Y die Grade nicht bestimmten, so lägen sie in derselben Graden r mit B (Satz VI, § 4); weil aber B Grenzpunkt von Y ist, so wird die Differenz zwischen (AB) und (AY) unbegrenzt klein (Einl. Def. IV, § 95) und es gäbe mithin in jedem Segment (BB') in AB in der Richtung von (AB) oder (BA) stets einen Punkt Y. Es würde also entweder Y mit B zusammenfallen oder B in AB zur Grenze haben, was ausgeschlossen ist, weil B mit A eine Grade bestimmt (Satz II, § 11). Bestimmt X nicht mit Y eine Grade, so liegen die Punkte A, X, Y in grader Linie (Satz VI, § 4) und das Segment (AX) in AY wird kleiner als jedes gegebene Segment, was nach dem Obigen widersinnig ist.

Satz II. Die Differenz zwischen dem variabelen Segment (XY) *und seinem Grenzsegment* (AB) *wird unbegrenzt klein.*

Denn dies gilt für die Segmente (AY) und (AB), das heisst, es gibt eine hinreichend kleine Umgebung von B, für welche die Differenz zwischen (AB) und (AY) ihrem absoluten Werth nach (Einl. § 112), welche wir mit $[(AB)-(AY)]$ bezeichnen wollen, kleiner als ein gegebenes Segment ε ist. So ist auch in einer hinreichend kleinen Umgebung von A die Differenz $[(AY)-(XY)]$ kleiner als ein willkürlich kleines Segment ε_1. Nun ist die Differenz oder die Summe dieser beiden Differenzen, d. h. also $[(AB)-(XY)]$ kleiner als die Differenz oder die Summe von ε und ε_1, jedenfalls aber nehmen, wenn ε und ε_1 unbegrenzt klein werden, $(\varepsilon-\varepsilon_1)$ und $(\varepsilon+\varepsilon_1)$ unbegrenzt ab (Einl. Def. I und h, § 95). Damit ist der Satz bewiesen.

Bem. I. Für den Grenzabstand einer Reihe von Abständen genügt die Def. IV, § 95 der Einl. (Bem. I, § 11), weil bei den Abständen der Unterschied in der Position der Segmente, auf die sie sich beziehen, nicht in Betracht kommt (Def. I, § 5).

Satz III. Wenn sich ein Segment $(X_n Y_n)$ *unbegrenzt dem* (AB) *nähert, so kann es sich nicht unbegrenzt einem andern von* (AB) *verschiedenen Segment* $(A'B')$ *nähern.*

Denn die Punkte X_n, Y_n müssten sich unbegrenzt bezüglich den Punktpaaren (von denen eines sich auf einen einzigen Punkt reduciren kann) A und A', B und B' (Def. I) nähern, was widersinnig ist (Satz III, § 10).

Satz IV. Wenn (AB) *die Grenze eines Segments* (XY) *ist, so kann sich jeder Punkt der Graden* XY *unbegrenzt einem Punkt der Graden* AB *nähern.*

Dies gilt vor Allem für die Punkte X und Y (Def. I; Def. II, § 10). Wir wollen annehmen, unbegrenzt kleinen Segmenten eines Zustandes von (XY) entsprächen unbegrenzt kleine Segmente in den successiven Zuständen, was man z. B. mittelst des Proportionalitätszusammenhangs zwischen den verschiedenen Segmenten erhält (Einl. § 106). Ebenso können wir nach Satz I voraussetzen, X und Y bestimmten die Grade. Es sei ein Punkt Z_n von (XY) gegeben, welcher sich bei der unbegrenzten Annäherung des X an A dem entsprechenden Punkt des Segments (AB) nicht unbegrenzt nähern könne. In dem Segment $(Z_n X)$ muss es ein hinreichend kleines Segment $(Z_n Z_{n-1})$ derart geben, dass die Punkte desselben dieselbe Eigenschaft wie der Punkt Z_n haben; denn

da $(Z_n Z_{n-1})$ beliebig klein sein kann, so würde, wenn ein Punkt dieses Segments sich unbegrenzt dem entsprechenden Punkt der Graden AB näherte, auch der Punkt Z_n diese Eigenschaft besitzen (Zus. Ax. IV).

Ist so $(Z_n Z_{n-1})$ gegeben, so können wir ein andres Segment $(Z_{n-1} Z_{n-2})$ immer auf $(Z_n X)$ construiren, welches dieselbe Eigenschaft wie $(Z_n Z_{n-1})$ besitzt. Die Punkte von $(Z_n X)$ zerfallen also nach der Voraussetzung in zwei Gruppen (Z) und (Z'), nämlich solche, welche die Eigenschaft von Z_n und solche, welche die Eigenschaft des Punktes X besitzen. Sie bestimmen von Z_n und X in dem Segment $(Z_n X)$ ausgehend zwei stets wachsende Reihen, welche bezüglich L und L' zu Grenzpunkten haben (Einl. d, § 79 und Bem. IV, § 4). Die Punkte L und L' haben dieselbe Eigenschaft wie die Punkte der bezüglichen Reihen. Denn in jedem beliebig kleinen Segment (LZ) in (XZ_n) und in der Richtung von (XZ_n) gibt es einen Punkt, welcher die Eigenschaft von Z_n besitzt und mithin hat nach dem vorstehenden Beweis auch L diese Eigenschaft. Ebenso wird bewiesen, dass L' die Eigenschaft des Punktes X besitzt. Die Punkte L und L' fallen aber zusammen (Einl. d'', § 97), was widersinnig wäre, wenn Z_n nicht dieselbe Eigenschaft wie X hätte.

Derselbe Beweis gilt auch für das Segment $(Z_n Y)$, wie auch, wenn der Punkt Z_n auf der Graden XY ausserhalb des Segments (XY) liegt.

Zus. I. Wenn (AB) die Grenze eines constanten Segments (AX) ist, so kann sich jeder Punkt der Graden AX unbegrenzt demjenigen Punkt der Graden AB nähern, welcher denselben Abstand wie er selbst von A hat.

Da (AX) constant ist, so benutze man statt des Proportionalitätszusammenhangs den Identitätszusammenhang.

Zus. II. Wenn (AB) die Grenze eines (AB) gleichen Segments (XY) ist, so kann sich jeder Punkt der Graden XY unbegrenzt einem Punkt der Graden AB nähern, dessen Abstände von A und B bezüglich den Abständen des gegebenen Punktes von X und Y gleich sind.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

§ 13. *Def. I.* Eine Punktgruppe heisst *isolirt*, wenn keiner ihrer Punkte ein Grenzpunkt der Gruppe ist (Def. II, § 10).

Bem. I. In Folge der Definition des Grenzsegments oder Grenzpunkts einer Gruppe oder einer Reihe von Segmenten oder Punkten eines einfachen Systems einer Dimension (Def. I, § 3 oder Einl. Def. II, § 63) gelten die Def. I, § 98 und Def. IV, § 95 der Einl., welche unabhängig von der Homogenität des Systems sind (Einl. Def. I, § 68).

Def. II. Wenn ein einfaches Punktsystem einer Dimension (Einl. Def. II, § 63) derart ist, dass

1) jeder seiner Punkte Y entweder Grenzpunkt einer stets zunehmenden Reihe (AX) und einer stets abnehmenden Reihe (AX') von Segmenten ist — welche Reihen im System in einer seiner Richtungen betrachtet werden (Einl. Def. II, § 62 und § 63) — oder Grenzpunkt einer einzigen dieser Reihen ist, wenn er der Endpunkt des Systems ist (Einl. Def. IV, § 62), und Y ferner Grenzpunkt der Reihen der Punkte X und X' unabhängig vom System ist (Def. II, § 10)

und umgekehrt jeder Grenzpunkt einer Gruppe von Punkten des Systems dem System angehört;

2) dieses System eindeutig und in derselben Ordnung einer Graden (oder einem Segment der Graden) entspricht (Einl. Def. III, § 42) mit etwaiger Ausnahme der Punkte einer isolirten Gruppe (Def. I) des Systems oder der Graden (des Segments), welchen keine Punkte der Graden (des Segments) oder des Systems entsprechen (und welche wir von unsern Betrachtungen ausschliessen), so heisst dieses System *einfache Linie.*

Bem. II. In der Folge betrachten wir nur den Zusammenhang mit der Graden, da wir andre Fälle nicht zu untersuchen brauchen.

Zus. I. Die Grade ist eine einfache Linie (Ax. II, a; Satz I, § 4; Satz IV, § 10; Satz I, § 8 und Einl. b, § 60).

Zus. II. Wenn in einem Segment (AB) *der einfachen Linie ein Punktesystem derart existirt, dass es in jedem beliebig kleinen Segment von* (AB) *einen Punkt des Systems gibt, so ist jeder andre Punkt* L *des Segments Grenzpunkt des Systems.*

Denn er ist es auf der Linie und unabhängig von ihr (Def. I).

Zus. III. Wenn der Abstand eines Punktes von den Punkten einer einfachen Linie unbegrenzt abnimmt, so liegt der Punkt auf der Linie.

Denn er ist Grenzpunkt einer Gruppe von Punkten auf der Linie (Def. I) und gehört mithin der Linie an (Def. I).

Satz I. Einem Segment (AB) *der Graden entspricht ein Segment* $(A'B')$ *der einfachen Linie und umgekehrt.*

Denn jedem Punkt X in dem Segment (AB) der Graden entspricht ein Punkt X', der zwischen den entsprechenden Punkten A' und B' in dem System enthalten ist (Def. I) und alle zwischen A' und B' liegenden Punkte des Systems bestimmen ein Segment der Linie, dessen Enden A', B' sind (Einl. Def. III, § 62).

Dass die Eigenschaft auch umgekehrt gültig ist, geht aus dem eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhang hervor.

Satz II. Einer stets wachsenden oder abnehmenden Reihe von Segmenten in einem Segment (AB) *auf der Graden entspricht eine stets wachsende oder abnehmende Reihe von Segmenten in dem entsprechendem Segment* $(A'B')$ *der einfachen Linie, und diese Reihe hat einen Grenzpunkt auf der Linie.*

Denn die entsprechende Reihe auf der Linie wächst in dem entsprechenden Segment $(A'B')$ im ersten Fall stets (Satz I und Def. I; Einl. Def. I, § 62 und Def. II, § 27 und Def. I, § 61). Die Reihe auf der Graden hat aber ein Grenzsegment (AL) (Bem. IV, § 4 und Einl. d, § 97), welchem ein Punkt L' auf der Linie entspricht, der zwischen A' und B' liegt (Def. I). Wenn $(A'L')$ nicht das Grenzsegment der obigen Reihe ist, so gibt es doch in $(A'B')$ eine immer wachsende Reihe von Segmenten, deren Grenzsegment $(A'L')$ ist (Def. I) und mithin gäbe es Punkte in derselben, die zwischen den Punkten der ersten Reihe und L' liegen (Bem. I), welchen Punkte der Graden entsprächen, welche zwischen den Punkten der entsprechenden Reihe und L liegen, was widersinnig

ist (Bem. IV, § 4 und Einl. d, § 97). Ebenso ist es, wenn die Reihe auf der Graden stets abnimmt.

Satz III. Eine stets wachsende oder stets abnehmende Reihe von Segmenten in einem Segment der einfachen Linie hat einen Grenzpunkt, welcher der Linie angehört.

Denn der Reihe auf der Linie entspricht eine analoge Reihe auf der Graden (Def. I), welche einen Grenzpunkt L hat (Bem. IV, § 4 und Einl. d, § 97). Diesem entspricht ein Punkt L' der Linie, welcher Grenzpunkt der entsprechenden Reihe ist (Satz II).

Zus. I. Wenn die Punkte eines Segments (AB) einer einfachen Linie in zwei Gruppen (X) und (X') derart zerfallen, dass (AX') immer grösser oder höchstens ebenso gross als ein Segment (AX) ist und jedes (AC), welches grösser als ein Segment (AX) und kleiner als ein Segment (AX') ist, entweder ein Segment (AX) oder (AX') ist, so haben die beiden Gruppen auf der Linie einen gemeinschaftlichen Grenzpunkt.

Der Beweis wird mit Hülfe des Satzes III analog wie bei Zus. d″ zu § 97 der Einl. geführt.

Satz IV. Wenn in einem Segment (AB) einer einfachen Linie eine Reihe von Punkten (X_n) gegeben ist, die einen Grenzpunkt L hat und wenn ein Punkt R mit jedem Punkt des Segments (AB) eine Grade bestimmt, so hat die Reihe der Segmente (RX_n), welche durch den Punkt R und die Punkte der gegebenen Reihe bestimmt werden, das Segment (RL) zum Grenzsegment.

Ist (RX_n) constant, so sind (RL) und (RX_n) gleich.

Denn wenn sich X_n unbegrenzt dem L nähert, so verringert sich der Unterschied zwischen (RL) und (RX_n) unbegrenzt (Ax. IV) und (RL) ist mithin das Grenzsegment der Reihe (RX_n) (Def. I, § 12).

Der zweite Theil des Satzes ist offenbar die Folge des ersten.

Zus. Für die Abstände gilt die Eigenschaft des Satzes IV, auch wenn R mit den Punkten des Segments (AB) nicht stets eine einzige Grade bestimmt.

Denn bezüglich des Abstandes zweier beliebiger Punkte A und B braucht man sich nicht davon zu überzeugen, ob sie eine Grade bestimmen oder nicht (Satz IV, § 11 und Def. I, § 5), wie man nicht nöthig hat den Unterschied in der Position der durch R und die Punkte des Segments (AB) bestimmten Segmente zu berücksichtigen. Für die Abstände ist es ebenso als ob die Segmente (RX_n) mit einem gemeinschaftlichen Ende in einer Graden lägen.

Satz V. Wenn die Abstände α und β eines Punktes R von den Enden A und B des Segments einer einfachen Linie ungleich sind $(\alpha < \beta)$, dann kann der Abstand zwischen R und den andern Punkten des Segments nicht constant sein und kann auch nicht stets grösser als β oder kleiner als α sein.

Wenn X ein in dem obigen Segment zwischen A und B liegender Punkt ist, so kann (RX) nicht constant z. B. gleich α sein, weil man B als Grenzpunkt einer Reihe Punkte (X) in (AB) ansehen kann (Bem. I und Def. II) und alsdann der Abstand (RX) den Abstand (RB) zur Grenze hat (Zus. Satz IV) und der Unterschied zwischen (RB) und (RX), wenn er constant d. h.

gleich $\beta - \alpha$ wäre, nicht unbegrenzt klein werden könnte (Def. I, § 5; Bem. I, § 11 und Einl. Def. IV, § 95).

Aus demselben Grund gilt auch der übrige Theil des Satzes.

Satz VI. Wenn die Abstände eines Punktes R von den Enden eines Segments (AB) einer einfachen Linie α und β sind $(\alpha < \beta)$, so gibt es in (AB) immer ein Segment $(A'B')$, für dessen Punkte, die Enden ausgenommen, der Abstand von R grösser als α und kleiner als β ist.

Würde kein Segment $(A'B)$ von (AB) existiren, für welches, X mag ein Punkt sein, welcher er will, $(RX) > \alpha$ wäre, so würde (RX) ebenso gross oder kleiner als α sein, was widersinnig ist, weil $\beta > \alpha$ ist (Satz IV). Wir können $(RA') < \beta$ voraussetzen. Wäre es nicht der Fall, so braucht man nur in $(A'B)$ ein Segment $(A''B)$ zu wählen, für welches (RA'') dieser Bedingung genügt (Zus. Satz IV).

Aus demselben Grund kann man in $(A'B)$ ein Segment $(A'B')$ derart wählen, dass für jeden Punkt X desselben $(RX) < \beta$ ist.

Das Segment $(A'B')$ kann dann so gewählt werden, dass (RA') und (RB') bezüglich α und β gleich sind. Denn wenn A nicht der einzige Punkt in (AB) ist, für welchen $(RA) = \alpha$ ist, so gibt es eine Reihe dieser Punkte X derart, dass (AX) in der Richtung von (AB) wächst und mithin ein Grenzsegment (AA') derart hat (Bem. IV, § 4 und Satz III), dass $(RA') = \alpha$ ist (Zus. Satz IV), während A' nicht mit B zusammenfallen kann. Analoges gilt für B' in dem Segment $(A'B)$.

Nehmen wir nun an, es gäbe in $(A'B')$ Punkte X', für welche $(RX') < \alpha$ und ordnen wir sie in der Richtung von $(A'B')$ (Einl. Bez. I, § 64). Die Reihe (X') ist entweder in der gegebenen Richtung von einem ihrer Punkte L begrenzt oder hat einen Grenzpunkt L ausserhalb der Reihe (Bem. IV, § 4 und Satz III). Der Abstand (RL) kann nach dem vorigen Beweis nicht gleich α und auch nicht grösser als α sein, da nach der Voraussetzung die Abstände $(RX') < \alpha$ sind (Zus. Satz IV). (RL) ist desshalb auch kleiner als α und L kann folglich nicht mit B' zusammenfallen.

Für jeden andern in dem Segment (LB') gelegenen Punkt X'' ist nach der Voraussetzung $(RX'') > \alpha$. Wählt man einen Punkt X'' in einem beliebig kleinen Segment (LL') von (LB'), so kann (RX'') von (RL) um jeden beliebig kleinen gegebenen und desshalb auch um einen kleineren Abstand als $\alpha - (RL) = \varepsilon$ differiren (Zus. Satz IV). Da aber $(RX'') > \alpha$ z. B. $(RX'') = \alpha + \varepsilon'$, so wäre für jedes beliebige (LL') der Unterschied zwischen (RX'') und (RL) immer grösser als ε, was dem Satz IV widerspricht.

Es ist desshalb die Annahme widersinnig, dass es solche Punkte X in $(A'B')$ gäbe, dass $(RX) < \alpha$ ist. Analog verfährt man für β.

Satz VII. Wenn die Abstände des Punktes R von den Enden A und B eines Segments der einfachen Linie α und β sind $(\alpha < \beta)$, so gibt es wenigstens einen Punkt X des Segments (AB) der Linie, für welchen (RX) einem beliebigen zwischen α und β liegenden Abstand γ gleich ist.

a) Vorerst gibt es in (AB) stets ein Segment $(A'B')$ [welches auch mit (AB) zusammenfallen kann] derart, dass $(RA') = \alpha$, $(RB') = \beta$ und für seine übrigen Punkte X das Segment (RX) grösser als α und kleiner als β ist. Es ist nicht möglich, dass jeder Abstand (RX) von $(A'B')$, der grösser als α ist, auch grösser als γ sei, der Unterschied zwischen (RX) und (RA) wäre sonst immer grösser als ein gegebener Abstand, d. h. als $\gamma - \alpha$, was dem Satz IV widerspricht. Ebenso ist es nicht möglich, dass jeder Abstand (RX), der kleiner als β ist, auch kleiner als γ sei.

b) Wir wollen alle Punkte X von $(A'B')$, für welche (RX) grösser als α und kleiner als γ ist, betrachten. Wenn wir die Punkte X in der Richtung von (AB) ordnen, so kann die entsprechende Reihe (RX) keinen grössten Werth (RX_1) haben, weil zwischen diesem und γ wie zwischen A' und B' immer wenigstens ein Segment läge, welches grösser als dieser grösste Werth und kleiner als γ wäre (a) und mithin der obigen Gruppe angehörte.

Wir können ferner annehmen, eine Reihe (X_n) von Punkten X sei in der Richtung von $(A'B')$ derart gegeben, dass, wenn $(A'X_n) > (A'X_m)$, auch $(RX_n) > (RX_m)$ ist.

Denn in dem Segment $(X_m B')$ existirt ein Segment $(X'_m B')$ derart, dass nur für den Punkt X'_m allein $(RX'_m) = (RX_m)$ ist, während für jeden andern Punkt X_n von $(X_m B')$ der Abstand grösser als (RX_m) ist (Satz VI). Die Reihe $(A'X_n)$ in der Richtung von $(A'B')$ geordnet hat einen Grenzpunkt Y (Satz III), für welchen (RY) grösser als jeder Zustand von (RX_n) ist, weil sonst Y, wenn $(RY) \leq (RX_n^{(1)})$ wäre, der obigen Construction zuwider nicht in dem Segment $(X_n^{(1)} B')$ läge. Es kann auch nicht $(RY) < \gamma$ sein, weil Y sonst ein Punkt X wäre und mithin in einem Segment $(A'X_n)$ läge, (RY) kann aber auch nicht grösser als γ sein, weil sonst die Differenz zwischen (RY) und (RX) stets grösser als $(RY) - \gamma$ wäre, was nicht der Fall ist (Def. I, § 12 und Zus. Satz IV).

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz VIII. Wenn gegeben ist eine Punktreihe (X_n) in einem Segment (AB) einer einfachen Linie und ein Punkt R, welcher mit den Punkten von (AB) eine Grade bestimmt, und wenn alsdann die Reihe der Segmente (RX_n) ein Grenzsegment hat, so hat die Reihe (X_n) auf der Linie einen Grenzpunkt L derart, dass (RL) das Grenzsegment von (RX_n) ist.

Wenn die Reihe (RX_n) ein Grenzsegment im Sinn der Def. I, § 12 hat, dann besteht (X_n) nicht aus einer endlichen Anzahl von Punkten und mithin hat (X_n) einen Grenzpunkt L auf der Linie (Satz III). Folglich ist (RL) das Grenzsegment der Reihe (RX_n) (Satz IV und Satz III, § 12).[x])

---

[x]) Legt man Ax. II zu Grunde, so muss man hier wenigstens die obigen Sätze für die Grade geben, lässt dagegen Def. I und die Sätze, welche die einfache Linie betreffen, aus.
Bei Ax. II' bringt man diesen Abschnitt nicht hier, sondern beweist die obigen Sätze für die Grade wie für den Kreisumfang erst, nachdem man den Kreisumfang definirt hat, aber auch nicht später, damit man die Eigenschaften, welche die Durchschnittspunkte einer Graden mit einem Kreisumfang und zweier Kreisumfänge betreffen, in aller Strenge beweisen kann. Siehe Anm. LVII.

8.

Jedes Punktepaar auf der offenen Graden bestimmt die Grade. — Nur zwei entgegengesetzte Punkte können die geschlossene Grade nicht bestimmen.[XI]

§ 14. *Satz I. Wenn die Grade offen ist, so bestimmt jedes Punktepaar die Grade.*

Wenn A_1, A_2 zwei Punkte sind, welche die Grade r nicht bestimmen, so können wir immer annehmen, in dem Segment (A_1A_2) gäbe es keine andern Punkte, welche mit A_1 und A_2 die Grade nicht bestimmten, weil A_1 in der Gruppe (A) der Punkte, welche eventuell mit A_1 die Grade nicht bestimmen, immer ein erstes consecutives Element hat (Satz III, § 11). Dasselbe gilt für A_2 (Satz VI, § 4). Ist daher das Segment (A_1A_2) gegeben, so existirt eine Reihe consecutiver (A_1A_2) gleicher Segmente in der einen wie in der andern Richtung, deren Enden der Gruppe (A) angehören (Satz VII, § 4). R sei ein Punkt ausserhalb der Graden r. Jeder Punkt A von r bestimmt mit R eine Grade r_1 (Ax. II, b), welche die Grade r in der Gruppe von Punkten schneiden muss, welche mit A die Grade nicht bestimmen (Satz VI, § 4). Der Punkt R liegt in r_1 zwischen zwei consecutiven Punkten der Gruppe (A); denn es muss in einer gegebenen Richtung von R an in r_1 einen ersten Punkt der Gruppe (A) geben, weil sonst R ein Grenzpunkt dieser Gruppe wäre und also der Graden angehören würde (Satz II, § 11). Dieses muss auch in der andern Richtung der Fall sein; denn wenn der erste Punkt in einer Richtung z. B. A_1 gegeben ist und man betrachtet das Segment (A_1A_2) in der Richtung von (A_1R) auf der Graden r_1, so muss in diesem Segment auch R enthalten sein, sonst wäre A_1 nicht das erste Element in der gegebenen Richtung.

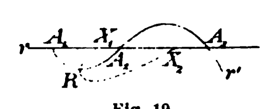


Fig. 19.

Wir können, ohne der allgemeinen Gültigkeit Eintrag zu thun, annehmen, R sei in dem Segment (A_1A_2) von r_1 enthalten (Def. I, § 6), welches dem Segment (A_1A_2) auf der Graden r und demjenigen einer jeden andern Graden, die durch A_1 und A_2 geht, gleich ist (Satz IV, § 11). Bezeichnen wir für den Augenblick mit α die constante Länge des durch die beiden Punkte A_1 und A_2 bestimmten Segments (Def. I, § 5). A_3 sei ferner der auf A_2 in der Richtung (A_1A_2) von r consecutive Punkt (Einl. Bez. I, § 64), A_4 der auf A_3 unmittelbar folgende Punkt u. s. w. der Gruppe (A) (Bem. I, § 11). Ist X_1 ein Punkt des Segments (A_1A_2), so kann das Segment (RX_1) weder ebensogross noch grösser als α sein. Denn wäre es ebensogross, so würde der Punkt R ein Punkt der Gruppe sein und der Graden r angehören (Satz VI, § 4), was gegen die Voraussetzung ist. (RX_1) kann auch nicht grösser als α sein, denn (RA_1) ist kleiner als α, weil R in dem Segment (A_1A_2) enthalten ist; es gäbe mithin wenigstens ein Segment (RY), das α gleich wäre (Satz VII, § 13) und R würde der Gruppe des Punkts Y oder der Graden r angehören.

[XI] Dieser Abschnitt wird bei Ax. II gegeben, bei Ax. II' ausgelassen.

Der Punkt X_1 bestimmt also mit R ein Segment, das kleiner als α ist und mithin ist der Punkt X_1 in einer gegebenen Richtung der erste Punkt der Gruppe (X) auf der Graden (RX_1) von R aus, wobei es gleichgültig ist, welches der Punkt X_1 auf dem Segment (A_1A_2) ist.

Der erste Durchschnittspunkt X'_2 der Graden X_1R mit der Graden r von R aus in der Richtung von X_1 nach R muss in dem Segment (A_2A_3) enthalten sein. Denn bei der unbegrenzten Annäherung von X_1 an A_1 in dem Segment (A_1A_2) nähert sich das Segment (RX'_2) unbegrenzt dem (RA_2), weil $(RX'_2) < \alpha$ ist. Mithin nähert sich X'_2 unbegrenzt dem A_2 in dem Segment (A_2A_3), da es sich ihm sonst in dem Segment (A_1A_2) nähern müsste; dies letztere ist aber nicht möglich, weil in (A_1A_2) alsdann ein andrer Punkt existiren würde, welcher mit X_1 eine Grade nicht bestimmte, was der im Anfang gemachten Hypothese widerspricht. Folglich fällt X'_2 mit X_2 zusammen.

Dieses ist aber unmöglich; denn da $(RA_3) \equiv (RA_2) + (A_1A_2)$ und $(RA_2) < (A_1A_2)$, so müsste (RX_2) wenigstens einmal (A_1A_2) gleich werden (Satz VII, § 13) und R würde also der Graden r gegen die Voraussetzung angehören. Es müsste folglich, wenn die Punkte A_1 und A_2 existiren, A_3 mit A_1 zusammenfallen, was im Fall einer offenen Graden ausgeschlossen ist (Satz I, § 4 und Einl. Def. II, § 63). Oder: Wenn X_1 sich unbegrenzt dem A_2 nähert, nähert sich X_2 unbegrenzt dem A_3 (Bem. IV, § 4; Einl. a, § 99) und der Unterschied zwischen (RX_2) und (RA_3) muss unbegrenzt abnehmen (Ax. IV), während $(RX_2) < \alpha$ und $(RA_3) = (RA_2) + \alpha$ ist, was nur dann möglich ist, wenn A_3 in A_1 fällt und man als (RA_3) das grössre der durch die Punkte R und A_3 auf der Graden bestimmten Segmente betrachtet (Bem. I, § 6).

Es ist mithin widersinnig anzunehmen, auf der offenen Graden gäbe es Punktpaare, welche diese Grade nicht bestimmen.

Zus. Wenn die Grade offen ist, so können zwei beliebige verschiedene Grade nicht zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Denn sonst gäbe es in ihnen ein Punktepaar, welches sie nicht bestimmt (Bem. I, § 4).

Satz II. Wenn die Grade geschlossen ist, so wird sie durch zwei beliebige ihrer Punkte bestimmt mit Ausnahme des möglichen Falles, dass diese Punkte entgegengesetzt sind.

Denn wenn in dem vorigen Beweis A_3 mit A_1 zusammenfällt, alsdann sind A_1 und A_2 entgegengesetzte Punkte der Graden (Def. III, § 6 und Satz IV, § 11), jedes andre Punktepaar der Graden bestimmt aber nach dem Beweis des vorigen Satzes die Grade.

9.

Identitätszusammenhang zwischen zwei Figuren. — Gradepaar. — Axiom V. — Sätze über die gleichen gradlinigen Figuren.[XII])

§ 15. *Satz I. Jede Figur gehört einer gradlinigen Figur an.*

Denn jede Figur ist durch ein System von Punkten gegeben (Def. I, § 2) und die Segmente, welche zu je zweien diese Punkte und diejenigen der so erhaltenen Segmente u. s. w. verbinden, bestimmen ja eine gradlinige Figur (Def. I, § 9), welche die gegebene Figur enthält (Def. I, § 2).

Bem. I. Jede gradlinige Figur wird nicht nur durch die Punktesysteme, die zu ihrer Construction dienen, sondern ausserdem durch alle ihre gradlinigen der Position nach gegebenen Segmente bestimmt, das heisst, ihre sämmtlichen Eigenschaften gehen aus den gegebenen Systemen und diesen Segmenten hervor (Def. I, § 9 und Einl. Def. I, § 11).

Bem. II. Wie wir gesehen haben (Einl. Bem. I, § 71), müssen wir uns wenigstens auf eine Grundform, mittelst welcher sich alle anderen Formen construiren lassen, beziehen, um aus der Construction selbst zweier anderen Formen entscheiden zu können, ob sie identisch sind oder nicht (Einl. Bem. III, § 71). Für diese Grundform muss man ferner die Identität der Theile ohne Construction annehmen und dabei nur die Def. VI, § 8 der Einl. zu Grunde legen, um nicht in eine petitio principii zu gerathen (Einl. Bem. I, § 71). Wir haben auch gesehen (Einl. § 123), dass es am vortheilhaftesten ist als Grundform das in der Position seiner Theile identische System, welches durch die kleinste Anzahl Elemente bestimmt wird, zu wählen; um so mehr, wenn zwei beliebige dieser Systeme identisch sind.

Die Grade besitzt alle diese Merkmale und ist mithin mehr als jede andre geometrische Figur dazu geeignet, als Grundfigur zu dienen. Daher:

Uebereink. I. Wir betrachten die Grade als *Grundfigur* der Geometrie.

Bem. III. Wie zwischen zwei abstracten identischen Formen ein Identitätszusammenhang besteht (Einl. Def. I, § 60) so gibt es auch einen solchen Zusammenhang zwischen zwei Figuren (Def. I, § 2). Daraus folgt:

Satz II. In zwei gleichen Figuren

$$\ldots ABC \ldots M \ldots \text{ und } \ldots A'B'C' \ldots M' \ldots$$

(worin die durch dieselben Buchstaben bezeichneten und nur durch die Striche unterschiedenen Punkte sich entsprechen) sind die durch Gruppen sich entsprechender Punkte bestimmten Figuren einander gleich (Einl. b, § 60; Def. III, § 9).

Zus. I. Die gradlinigen Segmente (und mithin auch die Abstände), welche durch Paare sich entsprechender Punkte zweier gleichen Figuren bestimmt werden, sind gleich (Satz II und Def. I, § 5).

Zus. II. Zwei durch zwei Gruppen von Punkten $\ldots ABC \ldots M \ldots$, $\ldots A'B'C' \ldots M' \ldots$ *bestimmte Figuren sind gleich, wenn die gradlinigen Figuren, welche diese Punkte bestimmen, gleich sind (wobei die durch dieselben Buchstaben bezeichneten und nur durch die Striche unterschiedenen Punkte sich entsprechen):*

[XII]) Dieser Abschnitt bleibt sowohl Ax. II als II'.
Wenn man es aus didaktischen Gründen in einem Elementarbuch für zweckmässiger hält, die Begriffe der Gleichheit nicht wie in der Einleitung zu entwickeln, so kann man als Definition beliebiger gleicher Figuren die Eigenschaft des Satzes III, § 15 geben, aus welcher der Satz II und seine Zusätze abgeleitet werden. Die Sätze VII und VIII können ausgelassen werden (siehe Anm. 1, § 17 und Anm. XXXIII).

Denn die beiden ersten Figuren sind sich entsprechende Figuren unter den zweiten (Satz I und II).

Bem. IV. In der Folge bedienen wir uns des Satzes II nur bei den gradlinigen sich entsprechenden Segmenten zweier gradlinigen identischen Figuren und legen, um die Identität andrer gradliniger sich entsprechender Figuren zu beweisen, andre Sätze zu Grunde.

Satz III. Zwei gradlinige durch andre gleiche Figuren bestimmte Figuren $\ldots ABC \ldots M \ldots, \ldots A'B'C' \ldots M' \ldots$ *sind gleich, wenn sich zwischen ihren Punkten ein eindeutiger Zusammenhang derart feststellen lässt, dass die gradlinigen Segmente (und mithin auch die Abstände) der entsprechenden Punkte der Reihe nach gleich sind.*

Die beiden Figuren werden eindeutig durch ihre gradlinigen Segmente bestimmt (Bem. I) und weil sowohl die Punktesysteme, die zur Construction der Figuren dienen (Def. I, § 9), als ihre Segmente der Reihe nach gleich sind, so sind die beiden Figuren gleich (Einl. a, § 60 und Def. III, § 9).

Beisp. Die gradlinige durch die beiden verschiedenen Punkte A, B bestimmte Figur ist durch das gradlinige Segment gegeben, welches durch die beiden gegebenen Punkte (Def. II, § 4) geht, wenn diese Punkte die Grade bestimmen und die Gleichheit der durch die Punktpaare A, B; A', B' bestimmten gradlinigen Figuren ist durch die Gleichheit der gradlinigen Segmente (AB), $(A'B')$ gegeben.

Wenn A und B eine Grade nicht bestimmen, dann sind die gradlinigen Segmente, welche A und B zu Enden haben, einander gleich (Satz IV, § 11 und Satz II, § 14) und die durch die zwei Punkte bestimmte gradlinige Figur ist durch alle gradlinige Segmenten gegeben, deren Enden die gegebenen Punkte oder zwei beliebige Punkte dieser Segmente u. s. w. sind. Die Figur ist gegeben, wenn alle diese Segmente gegeben sind und wenn mittelst eines eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhangs zwischen ihren Punkten die entsprechenden Segmente gleich sind, so sind die beiden Figuren gleich.

Bem. V. Es ist zu beachten, dass das Merkmal der beiden gradlinigen durch z. B. zwei andre gleiche Figuren bestimmten Figuren (Def. I, § 9) grade diese Figuren sind, die zu ihrer Bestimmung dienen und dass mithin möglicher Weise zwei gradlinige nicht identische Figuren identisch sein können, wenn man sie als durch das Punktesystem der beiden bestimmenden Figuren bestimmt ansieht, dabei aber von diesen Figuren abstrahirt (siehe Bem. II, § 16).

Uebereink. II. Wenn eine Figur ein Theil einer andern ist (Def. I, § 2) und die Eigenschaft des Satzes II statthat, alsdann sind die beiden Figuren nicht länger in absolutem Sinn gleich (Einl. Bem. IV, § 60 und Def. III, § 9); wir werden sie aber auch in diesem Fall, wenn wir diesen Unterschied nicht hervorzuheben brauchen, gleich oder identisch nennen, wie wir es in der Uebereink. I, § 69 der Einl. gethan haben.

Bem. VI. Der Satz III liefert uns das Princip, welches wir in der Folge bei der Entscheidung, ob zwei durch Construction erhaltene Figuren identisch sind oder nicht, zu Grunde legen. Wie wir aber gleich sehen werden, reicht dieses Princip allein für die weiteren Eigenschaften nicht aus.

Satz IV. Zwei Figuren, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich.

Es ist in andrer Form derselbe Satz wie e, § 8 der Einl. Lässt man jedoch diesen Satz nur für die gradlinigen Segmente gelten (Einl. Bem. I, § 71), so kann man wie bei den natürlichen Zahlen (Einl. Bem. V, § 47 und h, § 48) einen weiteren Beweis geben. (X) und (Y) seien die beiden Figuren, die einer dritten (Z) gleich sind. Die Figuren (X) und (Z), (Y) und (Z) entsprechen

sich eindeutig und in derselben Ordnung (Einl. Bew. b, § 60) und mithin auch (X) und (Y) (f, § 42). Nun entspricht dem Segment $(X_1 X_2)$, dessen Enden zwei Punkte X_1 und X_2 von (X) sind, in (Z) ein ihm gleiches Segment $(Z_1 Z_2)$ und diesem entspricht in (Y) ein ihm gleiches Segment $(Y_1 Y_2)$; mithin ist $(X_1 X_2) \equiv (Y_1 Y_2)$ (Einl. e, § 8). Die gradlinigen Figuren (X) und (Y) genügen daher dem Satz III und sind folglich gleich und also auch die beiden gegebenen Figuren (Zus. II, Satz II).

Def. I. Wir sagen m Punkte seien *unabhängig* von einander, wenn keiner von ihnen den von den $m-1$ übrigen Punkten bestimmten Figuren angehört.

Satz V. Wenn in einer Figur m Punkte unabhängig von einander sind, so müssen es auch die m entsprechenden Punkte einer ihr gleichen Figur sein.

Denn $A_1 A_2 \ldots A_m$ seien die m unabhängigen Punkte und wir nehmen an, die entsprechenden Punkte $A_1' A_2' \ldots A_m'$ der zweiten Figur seien derart, dass einer von ihnen z. B. A_1' in der durch die $m-1$ übrigen Punkte bestimmten Figur liege (Def. I), während A_1 ausserhalb der entsprechenden Figur liegt (Def. I, § 2).

Dies bedeutet, dass A_1' mit einem Punkt S' dieser Figur zusammenfällt (Einl. Def. III, § 57) und mit ihm ein Segment Null bestimmt (Einl. Def. I, § 76). Der S' entsprechende Punkt S der ersten Figur kann aber mit A_1 kein Segment Null liefern, weil A_1 ausserhalb dieser Figur liegt. Die beiden Figuren könnten mithin nicht identisch sein (Zus. Satz II).

Zus. Wenn drei Punkte einer Figur nicht in grader Linie liegen, so können drei entsprechende Punkte in einer gleichen Figur nicht in grader Linie liegen.

Satz VI. Wenn zwei Grade gegeben sind, so kann man ihren Identitätszusammenhang von zwei beliebigen ihrer Punkte als sich entsprechenden Punkten an in der einen und in der andern Richtung feststellen und einem Strahl der einen entspricht in jedem Identitätszusammenhang ein bestimmter Strahl der andern und dem entgegengesetzten Strahl der einen der entgegengesetzte Strahl der andern.

Auf der Graden selbst lassen sich vorerst unendlich viele Identitätszusammenhänge in einer und der andern Richtung feststellen; denn sieht man zwei gegebene Punkte von ihr als sich entsprechende Punkte an, so ist die Grade sowohl identisch, wenn man sie von jedem der beiden Punkte in derselben Richtung betrachtet, als auch in entgegengesetzter Richtung (Satz III, § 4 und Einl. Uebereink. I, § 69). Und wenn mithin in den beiden Graden, welche identisch sind (Satz I, § 8), einem Punkt A der einen ein Punkt A' der andern entspricht, so hat die Thatsache, dass die erste Grade von einem andern Punkt B von ihr an in einer gegebenen Richtung der Graden vom Punkt A an in derselben oder der entgegengesetzten Richtung gleich ist, zur Folge, dass man einen weitern Identitätszusammenhang auf den beiden Graden derart feststellen kann, dass dem Punkt B der ersten der Punkt A' der zweiten und einem bestimmten Strahl der ersten ein bestimmter Strahl der zweiten entspricht (Def. I, § 7).

Bem. VII. Wenn A und B, A' und B' zwei Paare sich entsprechender Punkte der beiden Graden sind und man nimmt für den Augenblick an, A und B und ebenso A' und

B' seien im Fall der geschlossenen Graden keine entgegengesetzte Punkte (Def. III, § 6), so entspricht dem durch A und B auf der Graden AB (Def. II, § 6) bestimmten Segment das Segment $(A'B')$ auf der zweiten Graden und mithin einem Punkt X des einen der Punkt X' des andern in der Art, dass $(AX) \equiv (A'X')$ (Satz II, Zus. II, Satz III, § 4) und mithin entspricht auch dem durch das Segment (AB) von A aus auf der ersten Graden bestimmten Strahl (Def. I, § 6 und Einl. f'', § 63) der auf der zweiten Graden durch das Segment $(A'B')$ von A' aus bestimmte Strahl.

Sind die Punkte A und B im Fall der geschlossenen Graden entgegengesetzt (Def. III, § 6), so würden es auch die Punkte A' und B' sein und um alsdann den Zusammenhang zwischen den beiden Graden festzustellen, muss man, nachdem der Punkt X auf der ersten Graden gewählt worden, bestimmen, in welchem der beiden Theile der zweiten Graden, welche durch A' und B' bestimmt wird, der Punkt X' liegen soll.

§ 16. *Def. I.* Die gradlinige durch zwei Grade bestimmte Figur (Def. I, § 9) nennen wir *Gradenpaar.*

Wenn die beiden Graden einen Punkt gemeinschaftlich haben, so nennen wir diesen Punkt den *Scheitelpunkt* des Paars.

Betrachten wir die Graden in einer bestimmten Richtung, so nennen wir, falls dieser Unterschied berücksichtigt werden muss, das Gradenpaar *Strahlenpaar.*

Bem. I. Wenn zwei Grade einen Punkt gemeinschaftlich haben, so ist im Fall der geschlossenen Graden noch die Annahme möglich, dass sie einen zweiten Punkt gemeinsam haben (Satz II, § 14), der ebenfalls ein Scheitelpunkt des Paars sein wird. Wir wollen uns vor der Hand auf die Betrachtung des Paars in der Umgebung des einen seiner Scheitel beschränken.

Bez. I. Sind a und b die Graden oder Strahlen des Paars, so bezeichnen wir dasselbe mit dem Symbol (ab).

Wenn die Strahlen des Paars durch zwei Segmente (AB), (AC) von ihrem gemeinsamen Ende A aus bestimmt sind, so bezeichnen wir das Paar auch mit dem Symbol $B\dot{A}C$ oder $C\dot{A}B$.

Satz I. Wenn zwei Gradenpaare mit den Scheitelpunkten A und A_1 gleich sind, so muss in ihrem Identitätszusammenhang erstens dem Scheitelpunkt des einen der Scheitelpunkt des zweiten entsprechen; zweitens entspricht einem Strahl oder einer Richtung der Graden des einen Paars ein bestimmter Strahl der Graden des zweiten Paars; drittens bestimmen zwei sich entsprechende Punktepaare gleiche Segmente.

AB, AC; $A'B'$, $A'C'$ seien die beiden Paare. In dem Identitätszusammenhang der beiden Paare muss A' dem A entsprechen, denn entspräche dem Scheitelpunkt A des ersten Paars z. B. ein auf der Graden $A'B'$ und nicht auf der Graden $A'C'$ gelegener Punkt A_1', so könnte dem Punkt A, insofern er der Graden AC angehört, nicht derselbe Punkt A_1' entsprechen, weil dieser ausserhalb der Graden $A'C'$ liegt (Zus. und Satz V, § 15) und weil der Identitätszusammenhang eindeutig ist (Einl. Def. I, § 60 und Def. II, § 42), so muss A_1' mit A' zusammenfallen. In dem Identitätszusammenhang muss einer Richtung von (AB) eine Richtung von $(A'B')$ und einer Richtung von (AC) eine Richtung von $(A'C')$ entsprechen (Satz VI, § 15 und Def. I, § 7).

Sind ferner zwei Paare sich entsprechender Punkte BC und $B'C'$ der beiden Gradenpaare gegeben, so ist $(BC) \equiv (B'C')$ (Zus. Satz II, § 15).

Def. II. Ist ein Strahlenpaar mit dem Scheitel A gegeben, so bestimmen

die entgegengesetzten Strahlen (Def. I, § 7) ein anderes Strahlenpaar (Def. I). Die beiden Strahlenpaare heissen *Scheitelpaare.*

Satz II. Wenn zwei Strahlenpaare gleich sind, so sind auch die Scheitelpaare gleich.

AXB, AYC; $A'X'B'$, $A'Y'C'$ seien die beiden gleichen Strahlenpaare; wir betrachten in den von A aus entgegengesetzten Strahlen des ersten Paares die Punkte X_1 und Y_1 z. B. in gleichem Abstand von A wie die Punkte X und Y. Betrachtet man X_1 und Y_1 als zu den beiden Strahlen des ersten Paares gehörig, so entsprechen ihnen in dem zweiten Paar zwei Punkte X_1' und Y_1', welche denselben Abstand von A' haben müssen, wie die den Punkten X und Y entsprechenden Punkte X' und Y'. Sie müssen desshalb von A' aus in dem Paar liegen, welches dem zweiten entgegengesetzt ist (Def. II). Es ist aber $(X_1 Y_1) \equiv (X_1' Y_1')$, wenn man X_1, Y_1; X_1', Y_1' als zu den gegebenen Paaren gehörig betrachtet (Satz I). Sieht man diese Punkte als zu den Gegenpaaren gehörig an, so folgt also, dass die Strahlen des einen den Strahlen des andern entsprechen (Satz VI, § 15) und das Segment der zwei beliebigen Punkte X_1 und Y_1 des einen dem Segment der entsprechenden Punkte gleich ist. Zwei beliebige Paare sich entsprechender Punkte der beiden ersten Strahlenpaare entsprechen sich also auch in den entgegengesetzten Strahlenpaaren und weil nach der Voraussetzung die Segmente sich entsprechender Punkte der beiden ersten Paare gleich sind, so sind die beiden entgegengesetzten Strahlenpaare gleich (Satz III, § 15).

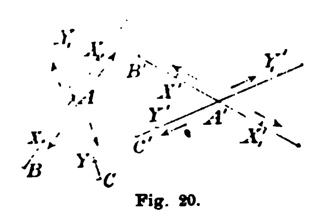


Fig. 20.

Satz III. Zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ sind gleich, wenn zwei Seiten und das durch sie bestimmte Paar bezüglich gleich sind.

Es sei $(BC) \equiv (B'C')$, $(AC) \equiv (A'C')$, $B\dot{C}A \equiv B'\dot{C}'A'$. Der Identitätszusammenhang zwischen den beiden Paaren $B\dot{C}A$, $B'\dot{C}'A'$ ist vollständig dadurch festgestellt, dass die Punkte A und A', B und B', C und C' sich entsprechen (Satz I). Es muss daher auch $(AB) \equiv (A'B')$ sein (Satz I).

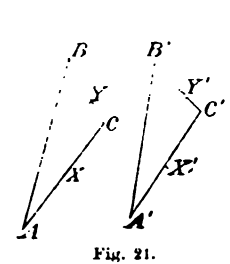


Fig. 21.

Wählt man zwei Punkte X und Y z. B. auf den Seiten (AC) und (BC), so sind sie Punkte des Paares AC, BC und mithin entsprechen in dem identischen Paare $A'C'$, $B'C'$ den Punkten X und Y die zwei Punkte X' und Y' derart, dass wegen der Identität der beiden Paare $(AX) \equiv (A'X')$, $(XC) \equiv (X'C')$, $(BY) \equiv (B'Y')$, $(YC) \equiv (Y'C')$ und mithin

$$(XY) \equiv (X'Y'). \qquad \text{(Satz I)}$$

Wie man sieht, ist jedes Segment des Dreiecks ABC (Def. II, § 9) ein Segment des Paares AB, AC und mithin sind die beiden Figuren ABC, $A'B'C'$ identisch (Satz III, § 15).

Zus. I. Die andern Paare der entsprechenden Graden und die übrigen Seiten der beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$, das heisst $A\dot{B}C$, $A'\dot{B}'C'$; $C\dot{A}B$, $C'\dot{A}'B'$ sind gleich.

Denn sie sind entsprechende Figuren der beiden Dreiecke (Satz II, § 15). Wendet man Satz II, § 15 nur auf gradlinige Segmente an (Bem. IV, § 15), so kann man sagen: Weil die Segmente des Dreiecks auch Segmente seiner Gradenpaare sind und weil die Graden identisch sind (Satz I, § 8), so sind die Paare sich entsprechender Graden der beiden Dreiecke gleich (Satz III, § 15).

Schliesslich kann man auch Ax. V zu Grunde legen, was man jedoch nicht nöthig hat (siehe Zus. Satz III, § 17).

Bem. II. In dem vorstehenden Beweis haben wir gesehen, dass jedes gradlinige Segment des Paars $B\dot{A}C$ auch ein gradliniges Segment des Dreiecks ist; desswegen ist aber das Dreieck nicht identisch mit dem Paar, weil das letztere durch die beiden Graden AB und AC, das Dreieck dagegen durch die drei Punkte A, B, C gegeben ist. Diese Verschiedenheit ist bei der Vergleichung gradliniger Figuren zu beachten (Def. I, § 9 und Bem. I, § 15).[1]

§ 17. *Bem. I.* Wir haben die vorstehenden Sätze in der stillen Annahme gegeben, dass die identischen Figuren existiren; wir wissen aber noch nicht, ob es ausser den Graden noch andre identische Figuren gibt (Satz I, § 8 und Satz IX, § 4).

Um den Satz III, § 15 für die Construction der identischen Figuren benutzen zu können, ist es nöthig, dass eine Figur $\ldots ABCD \ldots M \ldots$, wenn einige Segmente von ihr gegeben sind, durch diese vollständig bestimmt sei, so dass, wenn eine andre Figur $\ldots A'B'C'D' \ldots$ $\ldots M' \ldots$ gegeben ist und man lässt die Punkte, welche mit denselben Buchstaben versehen sind, einander in derselben Ordnung entsprechen und wenn dann die Segmente, welche einige entsprechende Punkte der beiden Figuren verbinden, gleich sind, diese beiden Figuren nothwendiger Weise einander gleich sein müssen.

Es seien z. B. zwei Gradenpaare AB, AC; $A'B', A'C'$ gegeben. Wir wissen, dass wenn sie identisch sind aus $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv (A'C')$ folgt $(BC) \equiv (B'C')$ (Satz I, § 16).

Wenn aber umgekehrt $(BC) \equiv (B'C')$ ist, kann man dann behaupten, dass die beiden Paare identisch sind? Wäre es nicht möglich, dass, auch wenn $(BC) \equiv (B'C')$ ist und

1) Um die Definition gleicher Figuren zu geben, nimmt man gewöhnlich das Princip der Bewegung der Figuren *ohne Deformation* zu Hilfe, von welchem wir schon in der Vorrede gesprochen haben. Man muss zwischen dem intuitiven Princip der Bewegung selbst und demjenigen der Bewegung ohne Deformation unterscheiden. Jeder Punkt einer Figur, welche sich im Raum bewegt, wird in einen andern Punkt des Raums versetzt. Der Zusammenhang zwischen der ersten und der zweiten Figur ist eindeutig, er kann aber sehr wohl nicht gegenseitig sein (Einl. Def. II, § 42). *Ohne Deformation* heisst, dass die gegenseitigen Verhältnisse zwischen den Punkten der Figur (denn die Figur wird als durch Punkte bestimmt angesehen) sich nicht ändern, nicht aber diejenigen in Bezug auf andre Figuren, weil sich sonst die Figur nicht bewegen könnte. Will man weiter auseinandersetzen, was dies bedeutet und will nicht sagen, zwei beliebige Lagen der Figur seien gleich (damit würde schon der Begriff der Gleichheit zweier Figuren vorausgesetzt), so kann man sich so ausdrücken: Wenn die Figur A aus der Lage A_1 in die Lage A_2 gekommen ist, so sind die Verhältnisse zwischen den Punkten von A in A_2 so, als ob die Figur sich nicht bewegt hätte oder als ob sie noch in A_1 wäre; man hat mithin, da A mit A_1 und A mit A_2 zusammenfällt, $A \equiv A_1$, $A \equiv A_2$, woraus $A_1 \equiv A_2$ folgt (Einl. e, § 8 oder c, § 60).

Wollen wir aber auch noch erklären, warum wir sagen, die Figur sei, wenn sie von A_1 nach A_2 übergeht so, als ob sie sich nicht bewegt habe, so muss man die Figur (oder den Körper abstrahirt von seinen physischen Eigenschaften) nach den Eindrücken, die sie (oder er) in seiner Bewegung auf uns macht, beurtheilen und sagen, die in uns bei zwei verschiedenen Lagen (welche mithin in der Zeit unterschieden sind) hervorgerufenen Eindrücke *seien gleich* und mithin $A_1 \equiv A_2$, das heisst, man benutzt den Begriff der Gleichheit zweier verschiedener Figuren (siehe Vorrede).

Jedenfalls geht aus der Definition gleicher Figuren mittelst des obigen Princips (welches, wie wir in der Vorrede sagten, den Begriff der Gleichheit einschränkt) hervor, dass die beiden Figuren sich eindeutig derart entsprechen, dass entsprechende Figuren auch einander gleich sind. Man braucht daher bei Satz III nicht das Paar ACB in Bewegung zu setzen bis es mit dem Paar $A'B'C'$ zusammenfällt, sondern es genügt zu sagen, dass $(AB) \equiv (A'B')$, wenn die Paare gleich sind und in diesen beiden Figuren die Punkte A, B, C bezüglich den Punkten A', B', C' entsprechen.

man construirt zwei Paare sich entsprechender beliebiger Punkte (XY), $(X'Y')$ auf den entsprechenden Graden der Paare, (XY) nicht identisch mit $(X'Y')$ wäre?

Die vorstehenden Sätze helfen uns, wie es scheint, nicht diese Frage zu lösen, weil sie entweder voraussetzen, dass die Figuren identisch sind oder dass, damit sie identisch seien, alle durch ihre Punkte zu je zweien bestimmten Segmente gegeben sind und diese Segmente mithin der Reihe nach in den beiden gegebenen Figuren gleich sind (Satz IV, § 15).

Emp. Bem. Wir nehmen daher unsre Zuflucht zu der Beobachtung. Und die Beobachtung führt uns dazu, die Eigenschaft, dass im Fall der beiden obigen Paare, wenn $(BC) \equiv (B'C')$, die beiden Gradenpaare identisch sind, für wahr zu halten. Wir stellen also das folgende Axiom auf.

Ax. V. **Wenn man in zwei beliebigen Strahlenpaaren AB, AC; $A'B'$, $A'C'$ zwei Punktpaare B und C, B' und C' derart auswählt, dass $(AB) \equiv (A'B')$; $(AC) \equiv (A'C')$ und wenn dann das Segment (BC) mit $(B'C')$ identisch ist, so sind die beiden Strahlenpaare identisch.**[1])

Bem. II. Dieses Axiom liefert uns in rein abstractem Sinn betrachtet eine Beziehung zwischen zwei Grundformen (Einl. § 71 und Uebereink. I, § 15), die ein Element gemeinschaftlich haben und in einer gegebenen Richtung liegen. Es stützt sich nicht nothwendiger Weise und in abstractem Sinn auf irgend ein empirisches Element.

Satz I. Das Strahlenpaar (ab) mit dem Scheitel C ist dem Paar (ba) gleich.

Wir wählen in den beiden Strahlen a und b zwei Punkte A und B, die denselben Abstand von C haben, und bezeichnen mit a_1 und b_1 dieselben Strahlen b und a und mit B_1 und A_1 die Punkte A und B. Die beiden Paare (ab), (a_1b_1) sind identisch, weil $(CB) \equiv (CB_1)$, $(CA) \equiv (CA_1)$ und $(AB) \equiv (A_1B_1)$ (Einl. g, § 99 und Ax. V).

(a_1b_1) ist aber (ba), mithin ist der Satz bewiesen (Fig. 22).

Fig. 22.

Satz II. Zwei Scheitelpaare von Strahlen sind gleich.

Wir bezeichnen in der nebenstehenden Figur mit a' und b' die a und b entgegengesetzten Strahlen und betrachten auf dem Strahl b den Punkt B und auf dem Strahl a den Punkt A' in der entgegengesetzten Richtung wie CA aber in demselben Abstand von C wie A. Den Punkten A' und B des Paares (ab) entsprechen die Punkte B' und A des Paares (ba), es ist mithin $(AB') \equiv$ $\equiv (B'A) \equiv (BA')$ (Satz I; Einl. g, § 99). Die Scheitelpaare (ba'), $(b'a)$ sind mithin gleich (Ax. V). Ebenso beweist man die Identität der beiden Scheitelpaare (ab) und $(a'b')$.

Zus. Wenn man auf den Graden eines Paares mit dem Scheitel C zwei Punktpaare A, A'; B, B', die bezüglich gleichen Abstand von C haben, betrachtet, so sind die Segmente (AB), $(A'B')$; (AB'), $(A'B)$ einander gleich.

Denn CA, CB; CA', CB' sind zwei Gegenstrahlenpaare, es ist also:

$$(AB) \equiv (A'B'); \; (AB') \equiv (A'B). \qquad \text{(Satz II, § 15) (Fig. 22)}$$

Satz III. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn ihre Seiten zu je zweien bezüglich gleich sind.

Denn, wenn ABC, $A'B'C'$ die Dreiecke sind und $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv$ $\equiv (A'C')$, $(BC) \equiv (B'C')$ ist, so sind die Gradenpaare AB, AC; $A'B'$, $A'C'$ gleich (Ax. V) und mithin auch die beiden Dreiecke (Satz III, § 16).

---

1) Siehe die folgende Anmerkung.

Zus. Die gradlinigen entsprechenden Paare der zwei Dreiecke sind gleich (Zus. I, Satz II, § 15 oder Ax. V).

Satz IV. Wenn die Summe der Abstände eines Punktes von zwei Punkten dem Abstand dieser beiden Punkte gleich ist, so liegen die drei Punkte in grader Linie.

Denn es seien ABC die drei Punkte und $(AB) + (BC) = (AC)$. Wählt man nun auf einer Graden drei Punkte $A'B'C'$ derart aus, dass $(AB) = (A'B')$, $(BC) = (B'C')$ und mithin $(AC) = (A'C')$ ist (Einl. c, § 68; Satz I, § 5), dann sind die beiden gradlinigen Figuren ABC, $A'B'C'$ identisch (Ax. V) und mithin liegen auch die Punkte ABC in grader Linie (Zus. Satz V, § 15).

Satz V. Wenn die Dreiecke ABC, ABD, ACD bezüglich den Dreiecken $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'C'D'$ gleich sind und die Punkte BCD liegen in grader Linie, so liegen auch die Punkte $B'C'D'$ in grader Linie.

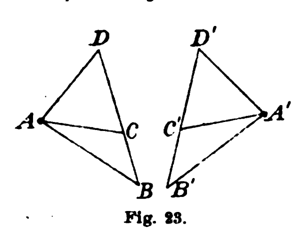


Fig. 23.

Denn aus der Identität der obigen Dreiecke folgt $(BC) \equiv (B'C')$, $(BD) \equiv (B'D')$, $(CD) \equiv (C'D')$. Wenn C dem Segment (BD) angehört, so ist $(BC) + (CD) \equiv (BD)$ und mithin auch $(B'C') + (C'D') \equiv (B'D')$. Das heisst die drei Punkte $B'C'D'$ liegen in grader Linie (Satz IV). Einer der Punkte B, C, D muss aber in dem Segment der beiden andern enthalten sein (Satz I, § 4; Einl. Def. I, § 62 und b, § 36); der Satz ist also bewiesen (Fig. 23).

Satz VI. Wenn zwei gleiche Segmente (AC), (BD) mit dem Segment (AB) gleiche Paare bilden, so sind

a) die von den beiden ersten Segmenten mit (CD) gebildeten Paare gleich;

b) die Grade, welche die Mittelpunkte E und F der Segmente (AB) und (CD), wenn diese Punkte verschieden sind, verbindet, bildet mit den Graden (AB) und (CD) gleiche Paare.

Denn die Dreiecke ABC, ABD sind gleich, weil sie AB gemeinschaftlich haben und $(AC) \equiv (BD)$, $B\dot{A}C \equiv A\dot{B}D$ gegeben ist; folglich ist $(BC) \equiv (AD)$ (Zus. Satz III, § 16).

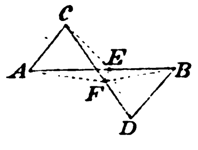


Fig. 24.

Die beiden Dreiecke ACD, BDC sind gleich, weil die Seite (CD) gemeinschaftlich ist und die beiden andern Seiten bezüglich gleich sind d. h. $(AC) \equiv (BD)$, $(AD) \equiv (BC)$, folglich sind die entsprechenden Paare $A\dot{C}D$, $B\dot{D}C$ gleich (Zus. Satz III) (Fig. 24).

Die Dreiecke ACF, BDF sind gleich, weil die Seiten (CF), (DF); (AC), (BD) und das von ihnen gebildete Paar gleich sind (a); mithin ist $(AF) \equiv (BF)$ (Zus. Satz III, § 16).

Aus demselben Grund sind die Dreiecke ACE, BDE gleich, folglich ist $(CE) \equiv (DE)$.

Die Dreiecke CFE, DFE sind gleich, weil ihre drei Seiten bezüglich gleich sind (Satz III), folglich sind die Paare $C\dot{F}E$, $D\dot{F}E$ gleich (Zus. Satz III).

Aus demselben Grund sind die Dreiecke AEF, BEF und mithin auch die Paare $A\dot{E}F$, $B\dot{E}F$ gleich, womit der Satz bewiesen ist (Fig. 24).

Def. I. Die durch vier nicht in grader Linie gelegene Punkte und durch die vier gradlinigen Segmente, welche diese Punkte zu je zweien verbinden, gebildete Figur heisst *einfaches Viereck oder Viereck.*

Die gegebenen Punkte sind *die Ecken,* ihre Segmente *die Seiten* des Vierecks. Unter Seiten verstehen wir auch die Graden, auf welchen diese Segmente liegen.

Satz VII. Die gradlinigen durch zwei Gruppen von m Punkten $ABCD \ldots M$, $A'B'C'D' \ldots M'$ bestimmten Figuren sind gleich, wenn die gradlinigen Segmente, welche die m gegebenen Punkte zu Endpunkten haben, der Reihe nach gleich sind.

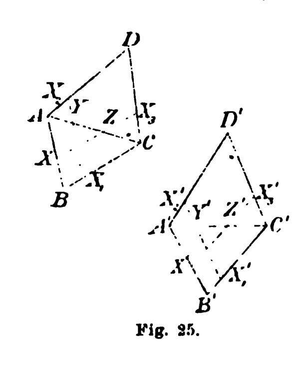


Fig. 25.

Es seien z. B. zwei Gruppen von vier Punkten $ABCD$, $A'B'C'D'$ gegeben, welche nicht in grader Linie liegen mögen. Wenn die Punkte der einen Gruppe sich nicht in einer graden Linie befinden, so gilt dies auch für diejenigen der andern (Satz IV). Die gradlinige Figur der Gruppe $ABCD$ erhält man, wenn man die vier Punkte durch Segmente verbindet und dann die durch die Punkte dieser Segmente bestimmten Segmente u. s. w. betrachtet (Def. I, § 9). Wir behaupten, dass alsdann der Identitätszusammenhang durch die Voraussetzungen des Satzes vollständig bestimmt ist.

Vorerst sind die entsprechenden Dreiecke, welche zu Eckpunkten drei gegebene Punkte der beiden Figuren haben, gleich, weil ihre drei Seiten gleich sind (Satz III).

1) Wählt man zwei Punkte X und Y auf einem der Segmente der vier Punkte $ABCD$ z. B. auf (AB) oder seiner Verlängerung, so sind die entsprechenden Punkte X' und Y' in $(A'B')$ Endpunkte eines (XY) gleichen Segments und die Segmente, welche sie mit A' und B' bilden, sind denjenigen gleich, welche durch die Punkte X und Y auf der Graden AB mit A und B bestimmt werden (Satz VI, § 15).

2) Wählt man dagegen zwei Punkte X und X_1 in den Segmenten (AB) und (BC) oder ihren Verlängerungen und construirt die beiden entsprechenden Punkte X' und X_1', so sind die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ und mithin die Strahlenpaare AB, BC; $A'B'$, $B'C'$ gleich und weil $(BX) \equiv (B'X')$; $(BX_1) \equiv (B'X_1')$, so ist

$$(XX_1) \equiv (X'X_1'). \qquad \text{(Zus. Satz III, § 16 oder Satz II, § 15)}$$

Ebenso folgt aus der Identität der Dreiecke ADB, $A'D'B'$; BDC, $B'D'C'$

$$(DX) \equiv (D'X'); \; (DX_1) \equiv (D'X_1').$$

Die beiden Dreiecke XDX_1, $X'D'X_1'$ sind gleich, weil ihre drei Seiten gleich sind, mithin ist

$$X\dot{D}X_1 \equiv X'\dot{D}'X_1'. \qquad \text{(Zus. Satz III)}$$

Wählt man auf (DX) und (DX_1) zwei Punkte Y und Z und auf den entsprechenden Segmenten $(D'X')$, $(D'X_1')$ die entsprechenden Punkte Y', Z', so ist aus demselben Grund $(YZ) \equiv (Y'Z')$.

3) Sind die zwei Punkte X_2 und X_1 auf den Segmenten (AD) und (BC) oder ihren Verlängerungen und die entsprechenden Punkte $X_2'X_1'$ auf den Graden $A'D'$, $B'C'$ gegeben [1)], so ist $(AX_1) \equiv (A'X_1')$ [2)], mithin sind die Dreiecke ADX_1, $A'D'X_1'$ gleich, weil ihre drei Seiten gleich sind (Satz III).

Ebenso sind die Dreiecke X_2AX_1, $X_2'A'X_1'$ identisch, weil sie zwei Seiten und das durch sie in A und A' gebildete Paar gleich haben, mithin ist $(X_2X_1) \equiv (X_2'X_1')$. Werden nun ein Punkt X_3 der Graden CD und der entsprechende Punkt X_3' in $C'D'$ [1)] und zwei Punkte Y_1Z_1 auf den Graden X_1X_2, XX_3 und die entsprechenden Punkte $Y_1'Z_1'$ in $X_1'X_2'$, $X'X_3'$ gegeben, so sind die durch die vier Punkte $XX_1X_2X_3$ bestimmten Segmente nach den obigen Beweisen bezüglich den Segmenten der entsprechenden Punkte $X'X_1'X_2'X_3'$ gleich und mithin $(Y_1Z_1) \equiv (Y_1'Z_1')$.

Daraus ersieht man, dass die durch die Punkte $ABCDXX_1X_2X_3$ gebildeten Segmente bezüglich den Segmenten der Punkte $A'B'C'D'X'X_1'X_2'X_3'$ gleich sind. Sind zwei weitere Punkte YZ in einem oder zweien dieser Segmente oder ihrer Verlängerungen gelegen, so bieten sich die Fälle 1), 2), 3). Man kann also die entsprechenden Punkte $Y'Z'$ derart construiren, dass $(Y'Z') \equiv (YZ)$. Betrachtet man z. B. Y und einen der bereits construirten Punkte $ABCDXX_1X_2X_3$ z. B. A als Punktepaar, so folgt aus demselben Grund

$$(YA) \equiv (Y'A').$$

Die Punkte Y und Z, Y' und Z' haben daher bezüglich dieselben Abstände von den entsprechenden so construirten Punkten.

Sind zwei beliebige Punkte V und V_1 der ersten Figur gegeben, so liegen sie entweder in entsprechenden schon construirten Segmenten oder ihrer Verlängerungen [1)] oder in entsprechenden schon construirten Segmenten oder ihrer Verlängerung, deren Grade einen Punkt gemeinsam haben [2)], oder schliesslich in schon erhaltenen Segmenten oder ihrer Verlängerung, deren Grade keinen Punkt gemeinsam haben [3)]. Jedenfalls ist $(VV_1) \equiv (V'V_1')$.

Wenn sich bei der obigen Construction zwei Grade einer Figur schneiden, so müssen sich auch die entsprechenden Graden treffen. Wir wollen annehmen, die beiden Paare sich entsprechender Segmente (YZ), (Y_1Z_1) und $(Y'Z')$, $(Y_1'Z_1')$ seien construirt und die Graden der beiden ersten Segmente schnitten sich in einem Punkt P, die Graden der beiden andern dagegen nicht. P' und P_1' seien die P entsprechenden Punkte in den beiden Segmenten $(Y'Z')$ und $(Y_1'Z_1')$. Die Paare YZ_1P, $Y'Z_1'P_1'$ sind gleich, denn wir haben schon früher wie für die Punkte $XX_1X_2X_3$, $X'X_1'X_2'X_3'$ bewiesen, dass die Abstände der Punkte YY_1ZZ_1, $Y'Y_1'Z'Z_1'$ gleich sind. Es ist also $(YP) \equiv (Y'P_1')$. Ebenso erhält man $(ZP) \equiv (Z'P_1')$. Die drei Punkte $Y'P_1'Z'$ müssten daher in einer graden Linie liegen d. h. durch die beiden Punkte $Y'Z'$ würden zwei Grade gehen und die Punkte Y und Z würden, da die Segmente (YZ) und $(Y'Z')$ gleich sind, eine Grade nicht bestimmen. Dieser Fall kann dadurch

leicht ausgeschlossen werden, dass man als Punkt Z auf der Graden YZ einen andern Punkt nimmt, der mit Y eine Grade bestimmt. Es ist mithin die Annahme, $Y'Z'$ und $Y_1'Z_1'$ schnitten sich nicht, widersinnig.

Der so construirte Zusammenhang ist folglich eindeutig und die Segmente, welche entsprechende Punkte verbinden, sind gleich und n unabhängigen Punkten der einen Figur entsprechen mithin n unabhängige Punkte der andern (Satz V, § 15). Die beiden Figuren sind daher gleich (Satz III, § 15).

Derselbe Beweis gilt offenbar auch, wenn es sich um eine beliebige Anzahl m von Punkten handelt, weil man successive die Gleichheit der Abstände der entsprechenden Punkte unter sich und von den schon construirten Punkten beweist (Uebereink. II, § 15).

Bem. III. Dieser Satz ist mit Satz III, § 15 nicht zu verwechseln; der letztere ist unabhängig von Ax. V, der erstere aber nicht.

Satz VIII. Die gradlinige Figur, welche von m sich im Punkt X treffenden Strahlen gebildet wird, ist der gradlinigen von den entgegengesetzten Strahlen gebildeten Figur gleich.

Es seien XA_1, XA_2, ... XA_m durch die Segmente (XA_1), (XA_2), ... (XA_m) von X aus bestimmt. Auf den entgegengesetzten Strahlen betrachten wir die Punkte A_1', A_2', ... A_m', welche derart sind, dass

$$(XA_1) \equiv (XA_1');\ (XA_2) \equiv (XA_2'),\ \dots\ (XA_m) \equiv (XA_m').$$

Wir lassen X sich selbst und die Punkte A_r den Punkten A_r' entsprechen. Da die Strahlengegenpaare XA_r, XA_s'; XA_r', XA_s' gleich sind (Satz II), so ist $(A_rA_s) \equiv (A_r'A_s')$ (Zus. Satz III, § 16) und mithin sind die durch die m Punkte $A_1A_2 \dots A_m$ bestimmten Segmente den Segmenten der entsprechenden Punkte $A_1'A_2' \dots A_m'$ gleich. Die zwei gradlinigen Figuren $A_1A_2 \dots A_m$, $A_1'A_2' \dots$ $\dots A_m'$ sind identisch (Satz VII) und mithin auch die Figuren $XA_1A_2 \dots A_m$, $X'A_1'A_2' \dots A_m'$, womit der Satz bewiesen ist (Satz VII).

Einer Graden einer Figur entspricht eine Grade der zweiten (Zus. Satz VI, § 15) und wenn daher drei Punkte A_r, A_s, A_t in grader Linie liegen, so ist es auch so mit den drei entsprechenden Punkten A_r', A_s', A_t'.[1])

---

1) Von diesen beiden letzten Sätzen geben wir in jedem besonderen Raum, den wir betrachten (auch die Ebene eingeschlossen), einen weiteren Beweis. Die hier gegebenen Beweise haben den Vortheil, dass sie unabhängig von der Anzahl der Dimensionen des Raums sind und mithin für den allgemeinen Raum (Def. II, § 2) wie für jeden andern speciellen Raum gelten.

Das Ax. V ist der Existenz gradliniger, identischer Paare untergeordnet. Die Sätze dieses Paragraphen liefern uns die Existenz identischer Figuren im allgemeinen Raum.

In Uebereinstimmung mit dem, was wir in der Vorrede und der Anm. 1 zu § 16 gesagt haben, bemerken wir noch das Folgende: Wie wir sehen werden, sind im allgemeinen Raum zwei Figuren, welche durch zwei Systeme von je n entgegengesetzten durch denselben Punkt begrenzten Strahlen gebildet werden, auch dann gleich, wenn man als Kriterium der Gleichheit zweier Figuren annimmt, dass sie sich mittelst der Bewegung ohne Deformation zur Deckung bringen lassen müssen. Wenn man gewöhnlich sagt, zwei Scheiteldreikante seien im gewöhnlichen Raum nicht gleich, so kommt dies daher, dass man den Begriff der Gleichheit einschränkt (Einl. Bem. III, § 9 und Bem. III, § 58), wie man sieht, wenn man wie hier die Geometrie unabhängig von den Dimensionen des Raums oder im allgemeinen Raum abhandelt (Bem. III, § 2 und Bem. IX, § 4). Siehe den letzten Abschnitt dieses und die analogen Abschnitte der folgenden Kapitel.

10.

Hypothese I und II über die absolute Grade.[XIII])

§ 18. *Bem. I.* Bis jetzt haben wir stillschweigend die Grade nur in Bezug auf eine einzige der wahrnehmbaren Einheit entsprechende Einheit betrachtet (Bem. IV und emp. Bem. I, § 4) und haben die bezüglich dieser Einheit geltenden Axiome aufgestellt.

Wie wir es in der Einleitung mit den Hyp. III, IV, V, VII, VIII gemacht haben, so wollen wir auch hier gewisse Hypothesen aufstellen, welche den schon gegebenen Axiomen ebensowenig wie sich selbst untereinander widersprechen und welche uns nicht nur erlauben, das Gebiet der Geometrie zu erweitern, sondern uns auch dazu dienen, die Eigenschaften des endlichen Gebietes selbst in Bezug auf eine Einheit von einem allgemeineren Gesichtspunkt zu betrachten. [1])

In den mit römischen Ziffern bezeichneten Anmerkungen geben wir genau den Weg an, dem man zu folgen hat, wenn man sich nicht auf diese Hypothesen stützen will.

Hyp. I. **Die Grade ist ein in der Position seiner Theile identisches stetiges absolutes und durch zwei verschiedene seiner Punkte bestimmtes Punktesystem einer Dimension.**

Bem. II. Dass diese Hypothese dem Ax. II, a, welches sich stillschweigend auf die wahrnehmbare Einheit bezieht (Bem. IV, § 4), nicht widerspricht wurde schon in der Einleitung gezeigt. Ueberdies setzt Ax. II, a nicht fest, die Grade könne nicht in absolutem Sinn stetig sein, so dass Hyp. I in dem Ax. II, a von Anfang an enthalten sein könnte, wenn man den Zusatz zu dem Ax. macht, die Grade sei stetig und absolut (Einl. Def. I, § 101). Die Hyp. I widerspricht auch nicht den übrigen Axiomen, welche sich auf das ausserhalb der Graden Liegende und nur auf das endliche Gebiet einer Einheit (Bem. IV, § 4) beziehen. Aus der Hyp. I geht vielmehr hervor, dass die Grade in Bezug auf jedes ihrer Segmente als Einheit stetig ist (Einl. b, § 101).

Die Hyp. I widerspricht auch nicht der Anschauung, welche sich auf das endliche Gebiet der wahrnehmbaren Einheit beschränkt in dem Sinn, dass das Unendlichkleine bezüglich dieser Einheit Null ist (Emp. Bem. I, § 4 und Einl. b' § 91) nicht aber in dem Sinn, dass ein unendlich kleines und unendlich grosses Segment gleichzeitig intuitiv wären. Aus diesem Grund hat das durch Hyp. I gegebene absolute System nur eine abstracte Bedeutung und insofern geometrischen Werth, als es uns mit den übrigen Hypothesen, die wir später geben, zusammen bei der Untersuchung des endlichen Gebiets bezüglich jeder Einheit unterstützt und wir auf Grund der successiven Hypothesen die Anschauung in jedem Gebiet bezügl. einer beliebigen Einheit benützen können.

Bem. III. Die Sätze I—V des § 4, welche nur von Ax. II, a abhängen, gelten offenbar auch in absolutem Sinn.

Hyp. II. **Zwei Grade fallen in absolutem Sinn zusammen, wenn sie das Gebiet bezüglich einer beliebigen Einheit von einem jeden Punkt als Anfang aus gemeinschaftlich haben** (Einl. Def. I, § 107).

Bem. IV. Das Zusammenfallen zweier Graden in dem endlichen Gebiet bezüglich der wahrnehmbaren Einheit kann, wenn nicht festgesetzt ist, dass die Punkte der Graden in absolutem Sinn nicht zusammenfallen, als absolutes Zusammenfallen gelten (Einl. Def. III und V, § 57 und z. B. a'', § 109) und die erste Hypothese, die sich bietet, ist, dass die Graden, wenn sie in dem Gebiet der wahrnehmbaren Einheit zusammenfallen, es auch in absolutem Sinn in ihrer ganzen Ausdehnung thun (Einl. Def. I, § 82).

Die Operationen, welche zur Erzeugung der absoluten Grundform dienen, können wir auf die Grade selbst in dem Gebiet einer Einheit derart anwenden, dass wir sie als eine Anzahl aufeinander gelegter aber verschiedener Graden in dem in Anm. 1, § 93 und Anm. 1, § 85 der Einl. angegebenen Sinn betrachten. Wenn alsdann zwei absolute Grade das Ge-

1) Siehe Vorrede und Anm. IV im Anhang.

XIII) Dieser Abschnitt ist selbstverständlich wegzulassen.

biet einer Einheit z. B. der wahrnehmbaren Einheit gemeinschaftlich haben, so fallen sie zusammen.

§ 19. *Bem. I.* Für unseren Zweck genügt es, wenn wir die Grade auf die endlichen, unendlich grossen und unendlich kleinen Segmente endlicher Ordnung in Bezug auf eine Grundeinheit beschränken (Def. VII, § 92), welche, wie wir wissen, eine geschlossene Gruppe im Sinn des Satzes m, § 93 der Einl. bilden und welche mithin die Betrachtungen über die unendlich grossen und unendlich kleinen Segmente (und daher auch Zahlen) von unendlich grosser Ordnung entbehrlich machen. Wir werden uns in der Folge sogar auf die Gebiete von nur zwei Einheiten beschränken.

Wir geben hier einige Sätze der Einleitung wieder, die wir im Folgenden hauptsächlich benutzen werden oder die uns die Beschaffenheit der Linie im absoluten Sinn am Besten kennen lehren.

Satz I. Die im Unendlichgrossen in einer gegebenen Richtung liegenden Punkte fallen in Bezug auf ein beliebiges endliches Einheitssegment in einen einzigen Punkt zusammen (Einl. i, § 85).

Bem II. Wenn wir ohne besonderen Zusatz von im Unendlichgrossen in Bezug auf eine Einheit liegenden Punkten sprechen, so meinen wir in absolutem Sinn die Punkte des unendlich grossen Gebiets erster Ordnung (Einl. Def. IV und Bem. IV, § 86).

Satz II. Auf der offenen Graden gibt es in der Umgebung eines Punktes als Anfang ein endliches Gebiet in Bezug auf ein gegebenes Segment als Einheit und unendlich grosse und unendlich kleine Gebiete von beliebiger Ordnung n. Die im Unendlichgrossen 1ter, 2ter, ... *n*ter *Ordnung liegenden Grenzpunkte stellen in Bezug auf die Grundeinheit die im Unendlichgrossen derselben Ordnung liegenden Gebiete dar* (Bem. I; Bem. III, § 18; Einl. Hyp. IV; Def. II und III, § 86 und i′, § 85).

Bem. III. Der Ausdruck „Grenzpunkte“ z. B. erster Ordnung wird gebraucht, wenn man aus dem endlichen Gebiet nicht heraustritt; in absolutem Sinn kann man aber von im Unendlichgrossen in Bezug auf eine gegebene Einheit liegenden Grenzpunkten nicht sprechen (Einl. f, Bem. III und IV, § 86).

Satz III. Ein auf der geschlossenen Graden gegebenes Segment (AB) *ist in Bezug auf die ganze Grade entweder endlich oder unendlich klein von bestimmter Ordnung n und mithin gibt es in der einfach betrachteten Graden in Bezug auf* (AB) *keine unendlich grossen Segmente von einer höheren Ordnung als n.*

Die geschlossene Grade ist in Bezug auf ein beliebiges gegebenes Segment von ihr endlich oder unendlich gross von bestimmter Ordnung.

In der Umgebung eines jeden Punktes gibt es in der geschlossenen Graden in Bezug auf jede Einheit (AB) *ein endliches Gebiet und die unendlich grossen Gebiete* 1ter, 2ter, ..., *n*ter *Ordnung. Die im Unendlichgrossen* 1ter, 2ter, ..., ($n-1$)ter *Ordnung in Bezug auf die Grundeinheit* (AB) *in den beiden Richtungen von dem Anfang an liegenden Gebiete haben keinen Punkt gemeinschaftlich; die unendlich grossen Gebiete n*ter *Ordnung dagegen fallen zusammen* (Bem. I; Einl. a, § 108 und i, § 85).

Zus. I. In Bezug auf die Einheit (AB) *gibt es in der einen und der anderen Richtung in der geschlossenen Graden zwei im Unendlichgrossen* 1ter, 2ter, ..., ($n-1$)ter *Ordnung liegende Grenzpunkte und nur einen Grenzpunkt n*ter *Ordnung* (Bem. I; Einl. f, § 86 und i′, § 85).

Zus. II. Die Grenzpunkte einer gegebenen Ordnung in der einen und der andern Richtung in Bezug auf den Anfang A bilden in der offenen wie in der geschlossenen Graden gleiche Segmente in Bezug auf die gegebene Einheit (Einl. b, § 107).

Bem. IV. Es ist zu beachten, dass beim Uebergang von einer Einheit (AB) zu einer Einheit der n^{ten} Art (Bem. I; Einl. Def. I, § 94) die entsprechenden Grenzelemente in Bezug auf die neue Einheit keine bestimmten Elemente sind, sondern das ganze im Unendlichgrossen n^{ter} Ordnung liegende Gebiet darstellen.

Zus. III. Betrachtet man auf der geschlossenen Graden das endliche und unendlich grosse Gebiet 1ter, 2ter, ..., $(n-1)^{ter}$ *Ordnung in Bezug auf eine unendlich kleine Grundeinheit von der* n^{ten} *Ordnung bezüglich der ganzen Graden, so theilt jeder Punkt der Gebiete diese Gebiete in zwei gleiche Theile* (Einl. a', § 108).

Satz IV. Das endliche Gebiet (und jedes unendlich grosse Gebiet der n^{ten} *Ordnung) in der Umgebung eines Punktes in Bezug auf eine auf der Graden gegebene Einheit ist auch in Bezug auf jedes Segment derselben Art wie die gegebene Einheit von demselben Anfang an oder von einem beliebigen Punkt des endlichen Gebiets an endlich (und unendlich gross von derselben Ordnung)* (Einl. e, § 86).

Satz V. Ein unendlich grosses Segment einer gegebenen Ordnung n (Ist $n=0$, *so ist das Segment endlich) kann in Bezug auf ein unendlich grosses Segment höherer Ordnung vernachlässigt werden.*

Ein unendlich kleines Segment einer gegebenen Ordnung n kann in Bezug auf ein unendlich kleines Segment niedrigerer Ordnung vernachlässigt werden (Einl. b und b', § 91).

Bem. V. Ein Strahl der Graden (Def. I, § 7) hat in Bezug auf eine Grundeinheit von einem Punkt als Grundanfang an (Einl. Def. VII, § 92) nur einen im Unendlichgrossen 1ter, 2ter, ... n^{ter} Ordnung liegenden Grenzpunkt sowohl, wenn die Grade offen als wenn sie geschlossen und n die Ordnung des Unendlichkleinen in Bezug auf die ganze Grade ist.

11.

Das Dreieck mit einer unendlich kleinen Seite. — Das endliche Gebiet, die unendlich grossen und unendlich kleinen Gebiete in Bezug auf eine Einheit in der Umgebung eines Punktes. — Endliches absolutes Gebiet. — Hypothese III und IV.[xiv])

§ 20. *Satz I. Wenn eine Seite* (AB) *eines Dreiecks* ABC *endlich ist, so können die übrigen Seiten nicht beide unendlich klein sein.*

Denn in Bezug auf die endliche Einheit müsste der Eckpunkt C mit A und mit B zusammenfallen, was widersinnig ist, weil A und B zwei in Bezug auf die Einheit (AB) verschiedene Punkte sind (Einl. b', § 91 und b, § 81).

Zus. I. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks endlich sind, so kann die dritte Seite nicht unendlich gross sein.

[xiv]) Auch dieser Abschnitt ist auszulassen.

Denn die beiden ersten Seiten würden in Bezug auf die dritte unendlich klein sein (Einl. Def. III, § 86).

Zus. II. In einem Dreieck kann nicht die eine Seite endlich, die zweite unendlich gross und die dritte unendlich klein sein.

Betrachtet man die zweite Seite als endlich, so wären die beiden andern unendlich klein (Einl. e, § 82).

§ 21. *Def. I.* Wenn wir alle Graden, welche einen Punkt S enthalten, betrachten und in jeder dieser Graden S zum Grundanfang mit der Grundeinheit s nehmen (Einl. Def. VII, § 92), so bestimmen alle Punkte in endlicher Entfernung von S in diesen Graden in der einen und der andern Richtung das, was wir *das endliche Gebiet in der Umgebung des Punktes S in Bezug auf die Einheit s* nennen.

Bem. I. Stillschweigend beziehen wir uns hier auf einen Punkt S des endlichen Gebiets, in Bezug auf welchen wir die früheren Axiome aufgestellt haben (Bem. IV, § 4). Das endliche Gebiet in Bezug auf einen Punkt S reducirt sich nicht auf eine einzige Grade (Satz IX, § 4) und dies gilt um so mehr in absolutem Sinn (Einl. Def. III und V, § 57).

Def. II. Wenn man in allen obigen Graden von S an in der einen und der andern Richtung alle unendlich kleinen Segmente n^{ter} Ordnung in Bezug auf die Einheit s betrachtet, so bestimmen diese Segmente *das unendlich kleine Gebiet n^{ter} Ordnung in der Umgebung von S in Bezug auf die Grundeinheit s* (Bem. I, § 19).

Bem. II. Das endliche Gebiet enthält (Def. I, § 2) die unendlich kleinen Gebiete des Punktes S und wenn wir daher von den Punkten des endlichen Gebietes des Punktes S sprechen, so verstehen wir in absolutem Sinn darunter auch die Punkte der unendlich kleinen Gebiete von S; das heisst, wenn wir in absolutem Sinn ohne weiteren Zusatz sagen, ein Punkt gehöre dem endlichen Gebiet des Punktes S an, so meinen wir nur, er sei, in Bezug auf die gewählte Grundeinheit, nicht unendlich weit von S entfernt. Muss angegeben werden, dass der Abstand endlich und nicht unendlich klein oder umgekehrt ist, so werden wir es, wenn es nicht schon aus dem Zusammenhang hervorgeht, ausdrücklich sagen.

Def. III. Wenn die Grade offen ist, so haben wir um den Punkt S auf jeder Graden die unendlich grossen Gebiete $1^{ter}, 2^{ter}, \ldots, n^{ter}$ Ordnung in Bezug auf die Grundeinheit s von S an (Satz II, § 19) und mithin in der Umgebung von S im allgemeinen Raum (Def. II, § 2 und Satz X, § 4) *unendlich grosse Gebiete $1^{ter}, 2^{ter}, \ldots, n^{ter}$ Ordnung in Bezug auf die gegebene Grundeinheit.*

Die im Unendlichgrossen auf den Graden in der Umgebung von S liegenden Grenzpunkte geben *die im Unendlichgrossen $1^{ter}, 2^{ter}, \ldots, n^{ter}$ Ordnung liegenden Grenzgebiete.*

Bem. III. Wenn die Grade geschlossen und die gegebene Einheit s unendlich klein von der ersten Ordnung in Bezug auf die ganze Grade ist, so gibt es nur das unendlich grosse Gebiet erster Ordnung, welches wir alsdann auch in absolutem Sinn nur unendlich gross nennen, weil es keine andern Unendlichgrossen gibt.

Ist dagegen die gegebene Einheit unendlich klein von der Ordnung n in Bezug auf die ganze Grade (Bem. I, § 19), so hat diese Grade von S an zwei verschiedene Grenzpunkte $1^{ter}, 2^{ter}, \ldots (n-1)^{ter}$ Ordnung und zwei zusammenfallende Grenzpunkte n^{ter} Ordnung (Zus. I, Satz III, § 19). Alsdann gibt es in der Umgebung von S ein im Unendlichgrossen $1^{ter}, 2^{ter}, \ldots, n^{ter}$ Ordnung in Bezug auf die gegebene Einheit liegendes Gebiet.

Def. IV. Die ganze von den durch den Punkt S gehenden Graden bestimmte Figur nennen wir *das endliche absolute Gebiet* in der Umgebung des Punktes S (Einl. Def. IV, § 92).[1])

§ 22. *Hyp. III.* **In dem endlichen absoluten Gebiet in der Umgebung eines Punktes S gelten die Axiome II, b; III, IV und V.**

Bem. I. Wir gehen von dem Gebiet aus, welches in Bezug auf die Grundeinheit s endlich ist, die der wahrnehmbaren Einheit, für welche die Axiome gelten (Bem. I, § 21), entspricht. Lässt man die Hyp. III zu, so thut man damit der Gültigkeit dieser Axiome auf dem obigen Gebiet keinen Eintrag. Lässt man Ax. II, b in relativem Sinn gelten, so ist nicht ausgeschlossen, dass die verschiedenen durch S in dem Gebiet der Einheit s gehenden Graden nicht in Bezug auf eine unendlich grosse oder unendlich kleine Einheit zusammenfallen. Dagegen ist es nach Hyp. II ausgeschlossen, dass sie in absolutem Sinn zusammenfallen; es könnte mithin der erste Theil des Ax. II, b, welcher in dem Gebiet der Einheit s gilt, in einem unendlich kleinen oder unendlich grossen Gebiet in Bezug auf diese Einheit nicht gültig sein. Dies ist denn auch der Grund, wesshalb die Gültigkeit des Ax. II, b in absolutem Sinn ausgedehnt wird.

Bestehen die Ax. III, IV und V in absolutem Sinn, so gelten sie um so mehr in dem endlichen Gebiet einer Einheit, sei es, weil die absolute Gleichheit die relative Gleichheit in sich schliesst (Einl. Def. III und IV, § 9) wie bei den Ax. III und V, sei es, wie bei IV, weil ein Segment, welches in absolutem Sinn unendlich klein wird, dies auch in relativem Sinn wird (Einl. Def. II, § 100 und Def. I, § 95).

Wie man die Hyp. I als in dem Ax. II, a enthalten ansehen kann (Bem. II, § 18), so kann man die Hyp. III als in den Ax. III, IV und V enthalten betrachten, wenn man diese Axiome in absolutem Sinn und nicht, wie wir stillschweigend gethan haben, in relativem Sinn auffasst (Bem. IV, § 4). Dasselbe gilt auch von Ax. II, b; nur müsste man dem ersten Theil zufügen, dass er auch in dem Gebiet bezüglich einer jeden Einheit s gilt, wie wir eben gesagt haben.

Wir konnten also, wenn wir die Hyp. I, II und III in die betreffenden Axiome eingeschlossen hätten, die Geometrie von Anfang an in absolutem Sinn behandeln.

Ebenso sieht man, dass bei der in Bem. IV, § 18 angedeuteten Vorstellung der absoluten Graden die Ax. II, b, III, IV und V gelten können.

Satz I. Jeder Punkt X muss in einem der endlichen Gebiete in der Umgebung des Punktes S liegen.

Denn wählt man eine durch S gehende Grade aus und der Punkt X liegt ausserhalb dieser Graden, so bestimmt er mit S eine Grade (Ax. II, b und Hyp. III).

Satz II. Zwei beliebige Punkte X und Y gehören einem endlichen Gebiet in der Umgebung von S an.

Denn durch X und Y gehen die beiden Graden SX, SY und wenn $(SY) \geqq (SX)$ ist (Def. I, II, § 6) so braucht man nur das Segment (SY) zur Einheit des endlichen Gebiets zu nehmen (Bem. II, § 21).

Bem. II. Auf dieselbe Art lässt sich nachweisen, dass die Sätze VI nebst Zusätzen VII, IX und X, § 4 in absolutem Sinn gelten. Der Satz VIII, § 4 folgt aus Hyp. II.

Satz III. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks endlich sind und die dritte unendlich klein ist, so sind die beiden ersten Seiten in Bezug auf jede Einheit gleich und fallen in Bezug auf die endliche und jede unendlich grosse Einheit zusammen.

ABC seien die Ecken des Dreiecks, (AC) die unendlich kleine Seite.

1) Siehe Bem. I, § 19 und Einl. Bem. IV, § 92.

In Bezug auf die endliche Einheit fallen A und C zusammen, weil (AC) im Vergleich mit jedem endlichen Segment vernachlässigt werden kann (Satz V, § 19).

A und B aber bestimmen nur eine Grade, sonst würden die drei Punkte ABC nicht ein Dreieck bilden (Def. II, § 9 und Satz VI, § 4 und Bem. II) und da A und C in Bezug auf die endliche Einheit zusammenfallen, so fallen in Bezug auf dieselbe Einheit auch die Segmente (AB) und (AC) zusammen und sind daher immer bezüglich dieser Einheit gleich.

Dasselbe gilt um so mehr für jede unendlich grosse Einheit (Satz V, § 19). Für jede unendlich kleine Einheit von derselben Ordnung wie (AC) mit A oder C als Anfang fallen A und C nicht zusammen, weil (AC) bezüglich dieser Einheit endlich ist (Bem. I, § 19 und a, § 86). Die Segmente (AB) und (BC) sind bezüglich dieser Einheit unendlich gross und sind daher in Bezug auf sie gleich (Satz I, § 19 und Satz I, § 8).

Das nämliche kann man in Bezug auf eine unendlich kleine Einheit von geringerer Ordnung als (AC) behaupten (siehe Fig. 17 Seite 239).

Zus. I. Ist in einem Dreieck eine Seite endlich und eine andre unendlich gross von der n^{ten} Ordnung, so ist auch die dritte Seite unendlich gross von derselben Ordnung und die beiden letzten Seiten fallen in Bezug auf jede unendlich grosse Einheit zusammen.

Denn es sei (AB) unendlich gross von der n^{ten} Ordnung und (AC) endlich d. h. (AC) sei in Bezug auf (AB) unendlich klein von der n^{ten} Ordnung (Bem. I, § 19; Einl. Def. III, § 86). Alsdann fallen bezüglich (AB) als Einheit die Punkte A und C und die Segmente (AB) und (BC) zusammen; d. h. (BC) ist bezüglich (AB) endlich oder bezüglich (AC) unendlich gross von der n^{ten} Ordnung (Bem. I, § 19; Einl. a, § 86).

Oder auch: Wenn (BC) unendlich gross von einer höheren oder geringeren Ordnung als (AB) wäre, so würde dies dem Satz I, § 20 widersprechen.

Nachdem der erste Theil des Zus. bewiesen, ist der zweite Theil in andrer Gestalt der Satz III selbst.

Zus. II. Ist in einem Dreieck eine Seite unendlich klein und eine andre endlich, so ist auch die dritte Seite endlich.

Dies ist eine andre Form des Zus. I.

Zus. III. Wenn eine Seite eines Dreiecks endlich ist und die beiden andern unendlich gross, so fallen diese letzteren in Bezug auf eine unendlich grosse Einheit zusammen.

Die beiden unendlich grossen Seiten müssen von derselben Ordnung, d. h. untereinander endlich sein (Zus. I). Bezüglich dieser beiden Seiten ist daher die dritte Seite unendlich klein (Einl. Def. II, § 82), womit der Zusatz bewiesen ist.

Bem. III. Aus Satz III folgt jedoch nicht, dass, wenn (AC) ein endliches Segment wie die Seiten (AB) und (BC) ist, die beiden letzteren nicht in Bezug auf die endliche Einheit zusammenfallen können; es würden dann die drei Punkte ABC bezüglich dieser Einheit kein Dreieck bilden, was in absolutem Sinn wohl möglich wäre.

Def. Wir sagen, zwei Grade, welche einen Punkt X gemeinschaftlich haben, lägen sich in einem endlichen Gebiet in der Umgebung dieses Punktes in absolutem Sinn *unendlich nahe*, wenn es auf den beiden Graden in endlichem Abstand von X zwei Punkte gibt, die sich in Bezug auf die gegebene Einheit unendlich nahe sind.

Satz IV. Wenn man auf zwei Graden, welche einen Punkt A gemeinschaftlich haben und sich in Bezug auf eine gegebene Einheit unendlich nahe liegen (und mithin zusammenfallen) zwei Punkte B' und C in endlichem Abstand von A jeden ausserhalb der anderen Graden nimmt und wenn die Grade $B'C$ dann nicht mit der einen oder andern der beiden gegebenen Graden zusammenfällt, so muss $(B'C)$ in Bezug auf die gegebene Einheit unendlich klein sein.

Wenn die Grade $B'C$ mit der einen oder anderen der beiden Graden zusammenfällt, so fallen diese Graden selbst in Bezug auf die gegebene Einheit zusammen.

Fig. 26.

Ein Punkt jeder der beiden Graden fällt bezüglich der gegebenen Einheit mit einem Punkt der andern Graden zusammen d. h. er ist diesem unendlich nahe (Def. und Satz III); mithin haben die Punkte B' und C auf den beiden Graden jeder auf der andern Graden und bezüglich in demselben Abstand von A die ihnen unendlich nahe liegenden Punkte B und C' (Satz III). Die Punkte BCB' bestimmen in absolutem Sinn ein Dreieck, weil andernfalls der Punkt B' gegen die Voraussetzung auf der Graden BC läge.

Wenn (BC) endlich ist, so muss es auch die Seite (CB') sein, weil sie nicht unendlich klein (Satz I, § 20) und auch nicht unendlich gross (Zus. II, Satz I, § 20) sein kann. Die Grade CB' muss daher bezüglich der Einheit mit den beiden Graden zusammenfallen, weil in dem Dreiek $CB'B$ die beiden Seiten (BC), (CB') endlich und (BB') unendlichklein ist (Satz III).

Ebenso muss, wenn man voraussetzt, dass (CB') endlich ist, die Grade CB' mit den beiden Graden bezüglich der endlichen Einheit zusammenfallen.

Denn die beiden gegebenen Graden sind einander unendlich nahe und die Punkte B' und C liegen den Punkten B und C', von denen jeder auf der andern Graden sich befindet, unendlich nahe, mithin muss (BC) auf der gegebenen Graden AC endlich sein, weil es nicht unendlich klein sein kann, da $(B'C)$ endlich und (BB') unendlich klein ist (Satz I, § 20) und auch nicht unendlich gross (Zus. II, Satz I, § 20). Alsdann aber fällt, wie oben gezeigt worden ist, die Grade $B'C$ mit den gegebenen Graden in Bezug auf die endliche Einheit zusammen. Ist also $(B'C)$ endlich, so fällt die Grade $B'C$ mit den gegebenen Graden zusammen.

$(B'C)$ kann nicht unendlich gross sein, weil (BC) höchstens endlich und (BB') unendlich klein ist (Zus. II, Satz I oder Satz I, § 20); wenn daher vorausgesetzt wird, die Grade $B'C$ falle nicht mit den gegebenen Graden zusammen, so muss das Segment $(B'C)$ unendlich klein sein; denn wäre es endlich (Einl. f, § 82), so würde die Grade $B'C$ ja mit den beiden gegebenen Graden zusammenfallen.

Damit ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Wenn nun zwei gegebene Grade AB', AC derart sind, dass die Punkte B' und C die Bedingung des Satzes erfüllen und die Grade $B'C$ mit einer der beiden Graden z. B mit AC zusammenfällt, so heisst dies, dass der Punkt B' einem Punkt von AC unendlich nahe liegt (Def. I und Satz III) und mithin fallen die beiden Graden AB' und AC in Bezug auf die gegebene Einheit zusammen (Satz III) (Fig. 26).

Zus. I. Wenn zwei Strahlen, welche einen Punkt A gemeinschaftlich haben, bezüglich einer Einheit zusammenfallen, so fallen auch die Gegenstrahlen zusammen.

Jeder gegebene Punkt eines Strahls ist ein Punkt der Graden, welche ihn enthält (Def. I, § 7) und mithin fällt jeder Punkt der Graden eines Strahls mit einem Punkt der Graden des andern Strahls zusammen d. h. die beiden Graden haben dieselben Punkte gemeinschaftlich oder fallen zusammen (Def. I, § 2 und Einl. Def. V, § 57). Ein Strahl hat aber nur einen entgegengesetzten Strahl auf der Graden (Def. I, § 7), mithin fallen auch die beiden den zusammenfallenden entgegengesetzten Strahlen zusammen (Def. II, § 7).

Satz V. Wenn man auf zwei Graden, welche einen Punkt A gemeinschaftlich haben und in einem endlichen Gebiet in der Umgebung von A und in Bezug auf die Einheit dieses Gebiets verschieden sind, zwei beliebige Punkte B und C in endlichem Abstand vom Punkt A annimmt, so bestimmen diese Punkte ein endliches Segment einer von den gegebenen Graden verschiedenen Graden.

Denn (BC) kann nicht unendlich gross (Zus. I, Satz I, § 20) und auch nicht unendlich klein sein, weil sonst die beiden Graden zusammenfielen und nicht bezüglich der Einheit des genannten Gebiets verschieden wären (Satz III). Die Grade BC kann auch nicht in Bezug auf die obige Einheit mit einer der beiden Graden zusammenfallen, weil sonst bei dieser Einheit auch die beiden gegebenen Graden zusammenfielen (Satz IV).

§ 23. *Bem. I.* In der Bem. I, § 22 haben wir auf die Möglichkeit hingewiesen, dass die durch einen Punkt S gehenden Graden, welche bezüglich der der wahrnehmbaren Einheit entsprechenden Grundeinheit s verschieden sind (Bem. I, § 21), in Bezug auf eine unendlich grosse oder unendlich kleine Einheit zusammenfallen können. Alsdann würde der erste Theil des Ax. II, b in dem endlichen Gebiet in der Umgebung von S in Bezug auf die letzte Einheit nicht gelten. Wir können daher eine Hypothese auswählen, welche den ersten Theil dieses Axioms in dem Gebiet jeder Einheit in der Umgebung von S unverändert lässt und zugleich den früheren Hypothesen d. h. auch den durch diese Hypothesen in jedem endlichen Gebiet um den Punkt S gegebenen Axiomen nicht widerspricht. Da wir gesehen haben (Bem. I, § 22), dass in der Umgebung von S in einem endlichen Gebiet verschiedene Grade in absolutem Sinn nicht in jedem unendlich grossen oder unendlich kleinen Gebiet zusammenfallen können, so kommt man bei Berücksichtigung der obigen Bedingung ganz von selbst auf die folgende Hypothese:

Hyp. IV. **Zwei beliebige in einem endlichen Gebiet in der Umgebung eines Punktes S verschiedene und durch S gehende Graden sind auch in jedem unendlich grossen oder unendlich kleinen Gebiet in Bezug auf die Einheit dieser Gebiete verschieden.**

Bem. II. Wir setzen voraus, das endliche Gebiet in der Umgebung von S sei dasjenige der Grundeinheit s, für welche der erste Theil des Ax. II, b gilt (Bem. I, § 21).

Die Hyp. IV widerspricht den Hyp. I und II nicht, weil die erstere die Grade an sich betrachtet und die zweite durch unsre Hypothese bestätigt wird, da aus II gerade die Eigenschaft der Hyp. IV in absolutem Sinn hervorgeht (Bem. I, § 22). Sie widerspricht der Hyp. III in Bezug auf Ax. II, b nicht, da sie im Gegentheil darthut, dass dieses Axiom in jedem Gebiet in der Umgebung von S und, wie wir sehen werden, auch in der Umgebung eines jeden andern Punktes in Bezug auf eine beliebige Einheit (Satz II, § 31) gilt. Sie widerspricht schliesslich der Hyp. III auch nicht in Bezug auf die Ax. III, IV und V, da diese vielmehr mittelst Hyp. IV auch auf die unendlich grossen und unendlich kleinen Gebiete angewendet werden können. Bei der Vorstellungsweise in Bem. IV, § 18 und am Schluss der Bem. I, § 22 gilt Hyp. IV.

Satz I. Das endliche Gebiet in der Umgebung eines Punktes A in Bezug auf eine Einheit ist das endliche Gebiet in der Umgebung eines beliebigen andern Punktes B des ersteren Gebiets und in Bezug auf dieselbe Einheit.[1]

Man braucht nur zu beweisen, dass die in endlichem Abstand von A befindlichen Punkte, wenn sie nicht in Bezug auf die gegebene Einheit zusammenfallen, in endlicher Entfernung von einander sind. B und C mögen zwei solcher Punkte sein. Sind sie mit A in grader Linie, so ist der Abstand (BC) endlich, weil die Differenz (BC) zwischen den beiden endlichen Segmenten (AB) und (BC), wenn B und C nicht zusammenfallen, endlich ist (Einl. h, § 85). Liegen B und C nicht mit A in grader Linie, so bestimmt jeder der beiden Punkte mit A und beide unter sich eine Grade (Zus. I, Satz VI, § 4 und Bem. II, § 22), und die drei Punkte bilden mithin ein Dreieck (Def. II, § 9). Da aber (AB) und (AC) endlich sind, so kann (BC) nicht unendlich gross sein (Zus. I, Satz I, § 19).

Der Satz würde auch dann gelten, wenn die durch A gehenden Graden bezüglich der Einheit des obigen Gebiets zusammenfielen (was, wie wir später sehen werden, nicht der Fall ist).

Zus. I. Wenn die Grade geschlossen ist und man die ganze Grade oder einen endlichen Theil derselben zur Masseinheit nimmt, dann ist das endliche Gebiet ein endliches Gebiet für jeden gegebenen Punkt.

Denn jeder Punkt (des allgemeinen Raums) ist ein Punkt wenigstens einer Graden, die durch einen gegebenen Punkt A geht (Bem. II, § 22 und Satz X, § 4).

Satz II. Das im Unendlichgrossen von beliebiger Ordnung in der Umgebung eines Punktes A liegende Gebiet liegt für jeden beliebigen Punkt des endlichen Gebiets des gegebenen Punktes im Unendlichgrossen derselben Ordnung.

Denn wenn sich der Punkt C in unendlich grossem Abstand von der Ordnung n von A befindet, so ist, weil (AB) endlich ist, (BC) unendlich gross von derselben Ordnung (Zus. I, Satz III, § 22).

Def. I. Wenn wir von der *Einheit des endlichen Gebiets* sprechen, so wollen wir die Einheit auf jeder Graden von einem Punkt des endlichen Gebiets selbst als Grundanfang an in Betracht gezogen wissen; im andern Fall

1) Bleibt man in dem endlichen Gebiet, so muss man, wie schon gesagt, das Axiom des Archimedes von Anfang an für die gradlinigen Segmente gelten lassen (Anm. IV). Hier sehen wir, dass es eigentlich ausreicht, seine Gültigkeit für die einen Punkt A enthaltenden Graden anzunehmen; man kann dann nachweisen, dass es auch für die durch einen andern beliebigen Punkt B des endlichen Gebiets gehenden Graden gilt, indem man die Betrachtung über das Unendlichgrosse und Unendlichkleine zu Hülfe nimmt.

gebrauchen wir den Ausdruck *endliche Einheit*. Ist keine Zweideutigkeit möglich, so verwechseln wir auch die beiden Ausdrücke miteinander.

Bem. III. Wenn wir in Zukunft von dem endlichen Gebiet oder den endlichen Gebieten sprechen, so meinen wir damit immer diejenigen des Punktes S oder eines andern Punktes des endlichen Gebiets von S (Satz I) in Bezug auf eine beliebige gegebene Einheit, es sei denn, wir bezögen uns auf die Gebiete in der Umgebung verschiedener Punkte.

Bez. Im Allgemeinen bezeichnen wir die Punkte des endlichen Gebiets mit einfachen grossen und die Graden, welche Punkte in dem endlichen Gebiet haben, mit kleinen Buchstaben. Die Punkte, welche im Unendlichgrossen von der Ordnung n liegen (Bem. I, § 19), bezeichnen wir mit Buchstaben, denen wir das Symbol ∞_n beifügen. Dasselbe gilt für die Graden. In der Folge werden wir jedoch nur das Symbol ∞ anzuwenden haben, mit welchem wir auch einen beliebigen in Bezug auf eine Grundeinheit im Unendlichgrossen liegenden Punkt bezeichnen werden.

Def. II. Eine Grade, welche Punkte im endlichen Gebiet hat, heisst auch *Grade des endlichen Gebiets.*

Satz III. Wenn die Grade geschlossen ist und das endliche Gebiet bezieht sich auf eine unendlich kleine Einheit erster Ordnung in Bezug auf die ganze Grade, so hat jede durch einen Punkt des endlichen Gebiets gehende Grade nur einen Grenzpunkt im Unendlichgrossen.

Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen I, II und Satz III, § 19.

Satz IV. Das Ax. II, b gilt für jeden beliebigen Punkt X in Bezug auf die Einheit (SX) und die in Bezug auf (SX) unendlich grossen Einheiten.

Ist ein Punkt X gegeben, so gehört derselbe dem endlichen Gebiet um S mit der Einheit (SX) an (Satz I, § 22) und dieses Gebiet ist auch das endliche Gebiet von X bezüglich derselben Einheit (Satz I). Ist (SC) ein endliches Segment in diesem Gebiet in einer Graden, welche X nicht enthält, und liegen die Graden SC und SX sich nicht unendlich nahe (Def. § 22 und Hyp. IV) d. h. ist X nicht einem Punkt der Graden SC unendlich nahe (Satz V, § 22), so sind (SC), (XC), (SX) endlich (Satz V, § 22); mithin sind die Graden XS, XC in Bezug auf dieselbe Einheit verschieden (Satz IV, § 22) und folglich gilt in dem obigen Gebiet um X das Ax. II, b in Bezug auf die Einheit (SX).

Jedes unendlich grosse Gebiet einer gegebenen Ordnung n von A in Bezug auf die obige Einheit ist auch für X das unendlich grosse Gebiet derselben Ordnung (Satz II). Betrachtet man nun dieses Gebiet als endlich in Bezug auf die entsprechende unendlich grosse Einheit von der Ordnung n, so gilt auch für dieses der vorige Beweis.

Was den zweiten Theil des Ax. II, b anlangt, so beachte man, dass jeder Punkt A mit einem beliebigen Punkt B einer Graden, welche A nicht enthält, in absolutem Sinn eine Grade bestimmt (Hyp. III) und dass diese Eigenschaft um so mehr für die Einheit (AB) gilt.

Bem. IV. Aus Satz IV geht hervor, dass sowohl das endliche Gebiet um X in Bezug auf die Einheit (SX), als die unendlich grossen Gebiete in Bezug auf ihre entsprechenden Einheiten sich nicht auf eine einzige Grade reduciren (Bem. I, § 22); denn nach dem Beweis des Satzes IV käme diese Eigenschaft auch dem endlichen Gebiet der Einheit (SX) oder

den unendlich grossen Gebieten um S zu, was widersinnig ist (Hyp. III und Bew. I, § 21). Wir wissen jedoch noch nicht, ob das Ax. II, b auch in den unendlich kleinen Gebieten um X und bezüglich der Grundeinheit (SX) gilt und ferner ob die Hyp. IV bedingungslos für jedes Paar durch den Punkt X gehender Graden in Bezug auf die Einheit (SX) und die unendlich grossen Einheiten gilt.[1] *So lange wir aber diese Eigenschaft noch nicht nachgewiesen haben, beziehen wir uns immer, wenn wir ohne Weiteres von den unendlich kleinen Gebieten sprechen, auf diejenigen des Punktes S, welcher nach Hyp. IV noch ein vor den übrigen Punkten ausgezeichneter Punkt ist.*

Satz V. Bestimmen zwei beliebige Punkte B und C eine Grade nicht in absolutem Sinn, so bestimmen sie dieselbe auch nicht in dem auf die Einheit (BC) bezüglichen Sinn.

Wir wollen in einer durch den Punkt S gehenden Graden ein Segment $(SC') \equiv (BC)$ betrachten. Welches auch die Einheit (SC') sein mag, es gibt in dem Gebiet dieser Einheit um S und in Bezug auf dieselbe verschiedene durch S gehende Graden (Bem. I, § 21 und Hyp. IV), die in absolutem Sinn um so mehr verschieden sind (Einl. Def. III u. V, § 57). Diese Graden gehen mithin durch C' (Bem. II, § 22 und Satz VI, § 4). Folglich bestimmen S und C' die Grade in Bezug auf die Einheit (SC') nicht (Bem. I, § 4) und mithin auch B und C bezüglich der Einheit (BC) nicht (Bem. II, § 22; Satz VII, § 4; Hyp. III und Satz I, § 8).

Satz VI. Zwei beliebige verschiedene Punkte, die der offenen Graden oder einem in Bezug auf die ganze Grade als Einheit unendlich kleinen Gebiet der geschlossenen Graden angehören, bestimmen die Grade in absolutem Sinn.

Nur zwei in absolutem Sinn entgegengesetzte Punkte der geschlossenen Graden können die Grade nicht bestimmen.

Sind X und Y die beiden gegebenen Punkte, so gehören sie einem endlichen Gebiet des Punktes S an (Satz II, § 22). Bestimmten sie die Grade nicht in absolutem Sinn, so würden sie dieselbe auch nicht in Bezug auf die Einheit (XY) bestimmen (Satz V), was widersinnig ist (Satz I u. II, § 14).

Bezüglich der Einheit von derselben Art wie die ganze Grade (Einl. Def. I, § 94) wissen wir, dass zwei entgegengesetzte Punkte die Grade nicht bestimmen können (Satz II, § 14). Wenn zwei Punkte die Grade in absolutem Sinn nicht bestimmen, so können sie den unendlich kleinen Gebieten der Punkte A und B, welche letztere in Bezug auf die obige Einheit nicht entgegengesetzt sind, nicht angehören, weil durch diese Punkte auch in Bezug auf diese Einheit mehrere verschiedene Grade gehen würden (Satz IV u. V). Wenn daher zwei Punkte in absolutem Sinn die Grade nicht bestimmen, so müssen sie in den unendlich kleinen Gebieten von A und A' liegen, wenn A' entgegengesetzt zu A ist. Nehmen wir nämlich an, es gebe in einem unendlich kleinen Gebiet der Ordnung n um den Punkt A' auf der Graden einen Punkt A'', der von A' verschieden ist und mit A eine Grade nicht bestimmt. Betrachten wir das Segment $(A''A''') \equiv (AA'')$ in der Richtung $AA''A'$ (Einl. d, § 64). Der Punkt A''' gehört dem unendlich kleinen Gebiet derselben Ordnung um A an, weil (AA'), (AA'') nur um ein Unendlichkleines der Ordnung n differiren und

1) Siehe Satz II, § 31.

die Differenz der doppelten Segmente ein Unendlichkleines von derselben Ordnung ist, da sie das Doppelte der ursprünglichen Differenz ist (Einl. d, § 104 und i, § 82 und b', § 86). A und A''' müssten aber die Grade nicht bestimmen (Satz VI, § 4 und Bem. II, § 22). Dies ist nach dem, was früher bewiesen wurde, widersinnig.

Satz VII. Verschiedene im Unendlichgrossen einer Graden des endlichen Gebiets liegende Punkte geben mit dem Punkt S in Bezug auf die endliche Einheit zusammenfallende Grade, vorausgesetzt dass diese Graden im Fall der geschlossenen Graden die gegebene Grade nicht in einem im endlichen Gebiet liegenden Punkte treffen.

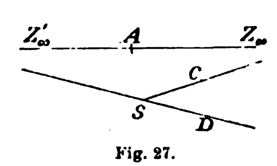


Fig. 27.

$Z'_\infty A Z_\infty$ sei die gegebene Grade und der Punkt S liege ausserhalb derselben. Die im Unendlichgrossen in Beziehung auf die Einheit (SA) liegenden in absolutem Sinn verschiedenen Punkte liefern verschiedene Grade, weil, wenn sie zusammenfielen, die beiden Punkte Z_∞ und Z'_∞ (Bez. I) die Grade nicht bestimmen würden. Dies ist aber unmöglich, wenn die Grade offen ist; ist die Grade dagegen geschlossen, so müssten es entgegengesetzte Punkte sein (Satz VI) und mithin bestimmen zwei andre im Unendlichgrossen liegende nicht entgegengesetzte Punkte mit S die Grade.

Nehmen wir nun an, die beiden Punkte Z_∞, Z'_∞ lieferten in dem endlichen Gebiet um S zwei verschiedene Grade. Betrachtet man alsdann das Gebiet um S in Bezug auf die Einheit (SZ_∞), so muss die Grade $Z'_\infty A$ bezüglich dieser Einheit mit der Graden $Z'_\infty S$ (Satz III, § 22) und mithin auch mit der Graden $Z_\infty S$ zusammenfallen (Satz IV, § 22). In Bezug auf die unendlich grosse Einheit müssen also die beiden Graden SZ'_∞, SZ_∞ zusammenfallen, während sie nach der Voraussetzung verschieden sein müssten (Hyp. IV); die Annahme, SZ_∞, SZ'_∞ seien verschieden, ist mithin widersinnig.

Wenn einer der Punkte z. B. Z_∞ im Unendlichgrossen von der Ordnung n liegt und Z'_∞ im Unendlichgrossen von der Ordnung m (Bem. I, § 19), so fallen die Graden SZ_∞; SZ'_∞ in Bezug auf die unendlich grosse Einheit erster Ordnung mit der Graden AZ_∞ zusammen und aus demselben Grund können mithin SZ_∞ und SZ'_∞ in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets um S, welches auch dasjenige um A in Bezug auf die Einheit (AS) ist (Satz I, § 23), nicht verschieden sein (Fig. 27).

Die Bedingung, die durch S und einen im Unendlichgrossen der Graden AZ_∞ liegenden Punkt gehende Grade dürfe im Fall der geschlossenen Graden die Grade AZ_∞ nicht in einem andern Punkt des endlichen Gebiets z. B. in A treffen, was noch möglich ist (Satz II, § 14; Satz VI, § 23), ist gestellt worden, weil alsdann die Punkte ASZ_∞ nicht länger ein Dreieck bilden würden und man dann im Allgemeinen nicht länger behaupten kann, die Graden AS und AZ_∞ fielen in Bezug auf die unendlich grosse Einheit zusammen; denn sonst würden alle durch A gehenden Graden in Bezug auf die unendlich grosse Einheit zusammenfallen, was ausgeschlossen ist (Satz IV und Bem. IV, § 23).

Zus. Die durch zwei Punkte, welche im Unendlichgrossen zweier verschiedenen durch S gehenden Graden des endlichen Gebiets liegen, bestimmte Grade liegt ganz im Unendlichgrossen.

Denn wäre es eine Grade des endlichen Gebiets (Def. I), so würde sie in Bezug auf die unendlich grosse Einheit mit den beiden gegebenen Graden zusammenfallen (Satz III, IV, § 22); diese beiden Graden würden mithin in Bezug auf die unendlich grosse Einheit zusammenfallen und könnten der Hyp. IV zuwider nicht verschieden sein.

Bem. V. Falls bei der geschlossenen Graden die Einheit des endlichen Gebiets in Bezug auf die ganze Grade unendlich klein von der ersten Ordnung ist, so hat jede Grade des endlichen Gebiets nur einen einzigen Grenzpunkt im Unendlichgrossen (Satz III) und da zwei verschiedene Grenzpunkte durch verschiedene durch S gehende Grade gegeben sind, so fällt eine Grade, welche zwei im Unendlichgrossen liegende Grenzpunkte verbindet (d. h. in absolutem Sinn eine Grade, welche zwei im Unendlichgrossen liegende Punkte der beiden verschiedenen Graden, welche diese Punkte zu Grenzpunkten haben, verbindet), in das Unendlichgrosse.

12.

Grade, welche einen Punkt des endlichen Gebiets mit Punkten verbinden, die im Unendlichgrossen liegen.[xv]

§ 24. *Satz I. Ist eine beliebige Grade AZ_∞ des endlichen Gebiets gegeben, so fallen die Graden, welche den ausserhalb derselben gelegenen Punkt S mit den im Unendlichgrossen liegenden Punkten der gegebenen Graden in einer gegebenen Richtung verbinden, in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets miteinander, in Bezug aber auf eine unendlich grosse Einheit irgend einer Ordnung mit der Graden AZ_∞ selbst zusammen; immer vorausgesetzt, dass im Fall der geschlossenen Graden die durch S gehenden Graden die Grade AZ_∞ nicht in einem andern Punkt des endlichen Gebiets treffen.*

Denn die Graden, welche den Punkt S (Def. I, § 21; Bem. III u. IV, § 23) mit den im Unendlichgrossen der Graden AZ_∞ bezüglich der Einheit (SA) liegenden Punkten verbinden, fallen in eine einzige Grade (Satz VII, § 23) aber nicht mit der Graden AZ_∞ zusammen; die Graden AZ_∞ und SZ_∞ sind vielmehr verschieden, weil der Punkt S ausserhalb der Graden AZ_∞ liegt (Fig. 27).

In Bezug auf eine unendlich grosse Einheit z. B. erster Ordnung und mithin auch höherer Ordnung (Einl. Def. II, § 86) ist (AS) unendlich klein und mithin fallen alle Graden, welche durch S und die im Unendlichgrossen auf der Graden AZ_∞ von A an in der betrachteten Richtung liegenden Punkte gehen, in Bezug auf die neue Einheit mit der Graden AZ_∞ zusammen (Satz III, § 22).

Satz II. Wenn zwei Strahlen, welche den Punkt S gemeinschaftlich haben, in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets zusammenfallen und man wählt auf ihnen zwei in unendlich grosser Entfernung erster Ordnung von S liegende Punkte B_∞ und C_∞ und wenn dann die Grade $B_\infty C_\infty$ eine von der Graden der

---

[xv]) Dieser Abschnitt ist wegzulassen.

beiden zusammenfallenden Strahlen verschiedene Grade r des endlichen Gebiets ist, so liegen die Punkte B_∞ und C_∞ von einem beliebigen Punkt A des endlichen Gebiets an auf der Graden r in derselben Richtung.

Denn wenn B_∞ und C_∞ von A aus in entgegengesetzter Richtung lägen, so würden, da die Graden der Strahlen SB_∞, SC_∞ (Def. I, § 7) bezüglich der Einheit des endlichen Gebiets zusammenfallen (Satz VII, § 23), B_∞, C_∞ von S aus in entgegengesetzten Richtungen liegen und mithin wären die beiden Strahlen entgegengesetzt und fielen nicht zusammen (Def. II, § 7).

Satz III. Wenn die Strahlen SZ_∞, SZ'_∞ den Punkt S mit den im Unendlichgrossen erster oder im Fall der offenen Graden beliebiger Ordnung liegenden Punkten einer Graden $Z_\infty AZ'_\infty$ verbinden und man betrachtet auf den zu SZ_∞ und SZ'_∞ entgegengesetzten Strahlen die beiden Punkte C und D, die sich in endlicher Entfernung von S befinden, so ist das Segment (CD) unendlich klein oder die beiden Graden SZ_∞, SZ'_∞ fallen in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets aber nicht in absolutem Sinn zusammen.

Bei der geschlossenen Graden gilt dies für eine bezüglich der ganzen Graden unendlich kleine Einheit zweiter oder höherer Ordnung. Bei einer in Bezug auf die ganze Grade unendlich kleinen Einheit erster Ordnung fallen die Graden SZ_∞, SZ'_∞ zusammen und können in absolutem Sinn zusammenfallen, wenn es ausgeschlossen ist, dass die Graden SZ_∞, SZ'_∞ die Grade AZ'_∞ in einem Punkt des endlichen Gebiets treffen.

Bei der offenen Graden kann (CD) nicht unendlich gross sein (Satz I, § 20), sondern muss wenigstens unendlich klein sein, weil die beiden Graden SZ_∞, SZ'_∞ in Bezug auf die gegebene Einheit zusammenfallen (Satz VII, § 23). Sie können nicht in absolutem Sinn zusammenfallen, weil sonst die Punkte Z'_∞ und Z_∞ die Grade nicht bestimmen würden, was widersinnig ist (Satz VI, § 23).

Dies gilt auch in den angegebenen Fällen für die geschlossene Grade. Ist die Einheit unendlich klein von der ersten Ordnung, so können die Punkte Z_∞, Z'_∞, wenn sie entgegengesetzt sind, die Grade nicht bestimmen (Satz II, § 14 und Satz VI, § 23); in diesem Fall können die Graden SZ_∞, SZ'_∞ in absolutem Sinn zusammenfallen.

§ 25. *Satz I. Bestimmt ein im Unendlichgrossen liegender Punkt X_∞ mit einem Punkt A des endlichen Gebiets die Grade, so bestimmt er mit jedem ausserhalb der Graden AX_∞ liegenden Punkt B dieses Gebiets eine Grade.*

Denn, wenn B und X_∞ eine Grade nicht bestimmten, so müsste die Grade AB auch durch X_∞ gehen (Satz VI, § 4 und Bem. II, § 22) und mithin ginge entweder durch A nur eine einzige Grade oder B müsste auf der Graden AX_∞ liegen, was gegen die Voraussetzung ist.

Satz II. Ist die Grade geschlossen und bestimmen zwei entgegengesetzte Punkte in ihr eine Grade nicht, ist ferner die Einheit des endlichen Gebiets in Bezug auf die ganze Grade unendlich klein von der ersten Ordnung und ist alsdann eine Grade AB gegeben, so gibt es mehrere Punkte im Unendlichgrossen in beiden Richtungen von AB, welche mit jedem Punkt des endlichen Gebiets die Grade bestimmen.

Wir haben schon gesehen, dass zwei entgegengesetzte Punkte die geschlossene Grade nicht bestimmen können (Satz II, § 14 und Satz VI, § 23). Soll nun ein Punkt X_∞ mit jedem Punkt des endlichen Gebiets um den Punkt A im Fall der geschlossenen Graden und einer in Bezug auf die ganze Grade unendlich kleinen Einheit erster Ordnung eine Grade bestimmen, so muss man diesen Punkt X_∞ ausserhalb des in Bezug auf dieselbe Einheit endlichen Gebiets um den zu A entgegengesetzten Punkt A' auswählen, weil es sonst auf der Graden AX_∞ in dem endlichen Gebiet um A einen Punkt X' derart gäbe, dass $X'X_\infty$ der Hälfte der Graden gleich käme d. h. X' und X_∞ entgegengesetzte Punkte wären (Satz VI, § 23).

Uebereink. I. Solange wir uns noch nicht über das System schlüssig gemacht haben, in welchem zwei entgegengesetzte Punkte die geschlossene Grade bestimmen, setzen wir fest, dass wir unter einem im Unendlichgrossen liegenden Punkt, wenn die Einheit in Bezug auf die ganze Grade unendlich klein von der ersten Ordnung ist, immer einen keinem Punkt des endlichen Gebiets entgegengesetzten Punkt verstehen.

Satz III. Ein im Unendlichgrossen liegender Punkt bestimmt mit einem Punkt des endlichen Gebiets eine Grade und eine Richtung oder einen Strahl dieser Graden (Uebereink. I).

Dieser Satz gilt offenbar, wenn die Grade offen ist oder wenn die Einheit des endlichen Gebiets im Fall der geschlossenen Graden unendlich klein von einer höheren Ordnung als der ersten in Bezug auf die ganze Grade ist, immer vorausgesetzt, dass man unter Punkten im Unendlichgrossen bezüglich einer Einheit die in dem unendlich grossen Gebiet erster Ordnung in Bezug auf diese Einheit liegenden Punkte versteht (Einl. Bem. IV, § 86).

In der That bestimmen die Punkte z. B. A und X_∞, falls die Grade offen ist, stets und falls sie geschlossen ist, auch dann ein Segment, wenn die Einheit unendlich klein von der ersten Ordnung ist (Uebereink. I); mithin bestimmt der Punkt X_∞ in dem Segment (AX_∞) die Richtung der Graden von A aus.

13.

Parallele Strahlen und Graden.

§ 26. *Def. I.* Ein Strahl des endlichen Gebiets (Bem. III, § 23; Def. I, § 7 und Def. II, § 23) heisst einem andern Strahl dieses Gebiets *parallel*, wenn ein im Unendlichgrossen erster Ordnung liegender Punkt des zweiten Strahles auf dem ersten liegt, vorausgesetzt jedoch dass der im Unendlichgrossen liegende Punkt mit jedem Punkt des endlichen Gebiets die Grade bestimmt, falls die Grade geschlossen und die Einheit des endlichen Gebiets in Bezug auf die ganze Grade unendlich klein von der ersten Ordnung ist (Uebereink. I, § 25).

Satz I. Ist ein Strahl einem zweiten parallel, so ist der zweite dem ersten parallel.

Denn AX_∞ sei der gegebene Strahl und BX_0 der ihm parallele. Der Punkt X_∞ liegt auch in Bezug auf den Punkt B im Unendlichgrossen erster

Ordnung (Satz II, § 23) und bestimmt mit B, auch wenn die Grade geschlossen ist, einen einzigen Strahl (Def. I).

Zus. Zwei einem dritten parallele Strahlen sind unter sich parallel.

Denn r und r' seien die dem dritten Strahl r'' parallelen Strahlen. Ein Punkt X_x von r'' liegt in r und r' und weil X_x im Unendlichgrossen erster Ordnung in r und r' liegt (Satz II, § 23), so sind r und r' parallel (Def. I).

Def. II. Die Graden, welchen zwei parallele Strahlen angehören, heissen in der durch die beiden Strahlen bestimmten Richtung *parallel* (Def. I, § 7).

Satz II. Zwei parallele Graden haben in dem endlichen Gebiet keinen Punkt gemeinschaftlich.

Dies ist offenbar der Fall, wenn die Grade offen ist, weil alsdann zwei Grade nicht zwei Punkte gemeinschaftlich haben können (Zus. Satz I, § 14 und Satz VI, § 23) und gilt auch für die geschlossene Grade, wenn die Einheit des endlichen Gebiets in Bezug auf die ganze Grade unendlich klein von der zweiten oder einer höheren Ordnung ist (Satz II, § 14 und Satz VI, § 23). Ist die Einheit unendlich klein von der ersten Ordnung bezüglich der ganzen Graden, so können sie sich nicht in einem Punkt C des endlichen Gebiets schneiden, weil sonst die Punkte X_x und C der Def. I zuwider die Grade nicht bestimmen würden.

Satz III. Die durch den Punkt S mit einem Strahl parallel gezogenen Strahlen fallen in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets in einen einzigen Strahl zusammen.

Und zwei parallele Strahlen fallen bezüglich jeder unendlich grossen Einheit zusammen (Def. I, Satz I und Satz I, § 24).

Zus. Von dem Punkt S kann man, wenn die Grade offen ist oder wenn im Fall der geschlossenen Graden die Einheit des endlichen Gebiets wenigstens unendlich klein von der ersten Ordnung in Bezug auf die ganze Grade ist, bezüglich der endlichen Einheit nur eine einzige Grade ziehen, die einer gegebenen Graden in einer gegebenen Richtung parallel ist (Satz III, § 24, Def. II).

Satz IV. Wenn die Grade offen ist, so kann man von dem Punkt S aus, welches auch die Einheit des endlichen Gebiets sei, zwei einer gegebenen Graden parallele Graden ziehen, welche in Bezug auf die endliche Einheit aber nicht in absolutem Sinn zusammenfallen (Satz III, § 24 und Def. II).

Bem. I. Ist die Grade geschlossen, so kann man durch einen Punkt des endlichen Gebiets, dessen Einheit die ganze Grade ist und das um einen Punkt A liegt, überhaupt keine Parallele zu einer gegebenen Graden ziehen.

Denn alsdann hat die Definition paralleler Strahlen und Graden keine Gültigkeit mehr, weil in Bezug auf die gegebene Einheit kein im Unendlichgrossen liegender Punkt existirt.[XVI])

[XVI]) In dem endlichen Gebiet *Euclid*'s kann die zu einer Graden Parallele unabhängig von der Ebene in folgender Art definirt werden:

Def. Wenn in zwei gleichen Dreiecken zwei Paar Seiten entgegengesetzt sind, so heissen die diesen Paaren gegenüberliegenden Seiten *parallel*.

RAB (siehe Fig. 39), $RA'B'$ seien die beiden gleichen Dreiecke mit zwei Paaren entgegengesetzter Seiten, welche möglich sind (Satz II, § 17 und Satz III, § 16). Nimmt man alsdann auf der Seite (AB) einen Punkt C und ist auf dem zu (RC) entgegengesetzten

14.

Die zwei allgemeinen Systeme der Geometrie. — Die Systeme Euclid's, Lobatschewsky's und Riemann's. — Hypothese V.

§ 27. *Emp. Bem.* Auf Grund der bisher gegebenen Axiome kann man zwei Systeme der Geometrie, dasjenige der offenen und dasjenige der geschlossenen Graden, sowohl in auf eine Einheit bezüglichem als in absolutem Sinn entwickeln (Satz I, § 4; Bem. III, § 18). Um in dieser Hinsicht eine Entscheidung zu treffen, müssen wir zu der Beobachtung unsre Zuflucht nehmen, da wir abstract genommen die Geometrie sowohl in dem einen wie in dem andern Fall weiter behandeln können. Auch die Definition des allgemeinen Raumes (Def. II, § 2) nöthigt uns zu bestimmen, welchen Weg wir einschlagen wollen und da hier Schlussfolgerungen nicht möglich sind, so bleibt uns nur die Erfahrung übrig.[1])

Beschränken wir unsre Beobachtung auf den gradlinigen Gegenstand, so scheint uns der der Graden entsprechende Gegenstand, welchen man erhält, wenn man sich einen gespannten Faden in der einen oder andern Richtung unbegrenzt verlängert denkt (Emp. Bem. I, § 4), auf den ersten Blick offen d. h. der Art sein, dass ein Punkt, der von einer Anfangslage A auf ihm in einer gegebenen Richtung ausgeht, niemals wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Diese Eigenschaft ist in der That vorhanden innerhalb des Gebiets unsrer Beobachtung auf diesem Gegenstand, welches einem Theil des endlichen Gebiets um den Punkt, an welchem sich der Beobachter befindet, entspricht (Def. I, § 21); damit ist aber durchaus nicht gesagt, dass sie auch für die ganze Grade gelten muss. Denn die Grade kann, wie wir bis jetzt annehmen müssen, eine einfach geschlossene Linie sein. Wir wollen uns nun einen Gegenstand denken, der einer solchen Linie entspricht (Fig. 28), und voraussetzen, der Beobachter könne nur den Theil (AB) untersuchen, der in der Zeichnung durch eine doppelte Linie markirt ist. Wenn der Beobachter sich nur an

---

Strahl der Punkt C' in demselben Abstand von R gegeben, so sind die Dreiecke ARC, $A'RC'$; BRC, $B'RC'$; ARB, $A'RB'$ identisch (Satz II, § 17 und Satz III, § 16) und weil die Punkte ABC in grader Linie liegen, so liegen daher auch die Punkte $A'B'C'$ in grader Linie (Satz V, § 17).

Wählt man eine andre Grade z. B. AC' und verbindet den Mittelpunkt R' von (AC') mit einem beliebigen Punkt von AB z. B. C und bestimmt dann in gleichem Abstand von R' wie C den Punkt C'_1, so folgt nicht, dass der Punkt C_1' auf der Graden $A'B'$ liegen muss.

Wir wenden uns an die Erfahrung, welche uns zeigt, dass dies annähernd der Fall ist und stellen das folgende Axiom auf:

Ax. VI. Durch einen Punkt geht nur eine Grade, welche zu einer gegebenen Graden parallel ist.

Liegt Ax. II' zu Grunde, so zeigt man, dass zwei parallele Graden sich nicht schneiden können, weil die Grade RX, wenn X ihr Durchschnittspunkt ist, die beiden Graden noch einmal in einem andern gemeinschaftlichen Punkt X' in derselben Entfernung von R schneiden müsste. Mithin hätten die beiden Graden, wenn X und X' verschieden sind, dem Ax. II' zuwider zwei Punkte gemeinschaftlich.

Aber auch wenn X und X' zusammenfallen, so müssten sie doch in gleicher Entfernung von R und nach Ax. VI auch von R' liegen, was unmöglich ist (Einl. Def. I, § 61 und Satz I, § 4). Liegt Ax. II zu Grunde, so bleibt es dagegen noch unbestimmt, ob zwei Grade im Fall der geschlossenen Graden zwei entgegengesetzte Punkte gemeinschaftlich haben können, aber auch dann können die beiden parallelen Graden nach dem eben gegebenen Ax. VI sich nicht schneiden, weil die Punkte X und X' gleichen Abstand von R und R' haben müssten (Satz II, § 14), was widersinnig ist.

Es bleibt mithin immer noch sei es bei Ax. II oder II' zu beweisen, dass die Grade offen ist. Wir werden in einer der folgenden Anmerkungen diese Eigenschaft beweisen, welche in den Elementarbüchern gewöhnlich vorausgesetzt wird, indem man das Postulat aufstellt, die Grade würde durch einen ihrer Punkte in zwei Theile zerlegt, während doch bei der geschlossenen Graden zwei solche Punkte nöthig sind (siehe Anm. VI). Wir müssen uns in den folgenden Anmerkungen, bis dieser Beweis geliefert ist, gegenwärtig halten, dass die Grade offen oder geschlossen sein kann und dass bei geschlossener Graden und wenn Ax. II zu Grunde liegt, zwei entgegengesetzte Punkte die Grade nicht bestimmen können (Satz II, § 14).

1) In der Folge werden wir noch weitere Beweise dafür beibringen, dass die obigen Axiome in beiden Fällen gelten.

dasjenige hält, was er sieht, so kommt er offenbar zu der Ansicht, der Gegenstand sei offen, während er in der Wirklichkeit geschlossen ist. Hält er an dieser Ansicht fest und betrachtet ein Segment als Einheit, welches in Bezug auf das Gebiet seiner materiellen Beobachtung auf dem Gegenstand endlich ist, und gibt ferner nicht zu, dass es ein Unendlichgrosses bezüglich seiner wahrnehmbaren Einheit gebe, alsdann muss der Gegenstand endlich sein. Der Denker dagegen, welcher abstract das Unendlichgrosse zulässt, wie wir es gethan haben, ohne damit die wirkliche Existenz desselben in der äusseren Welt einräumen zu müssen, kann sich ohne Widerspruch vorstellen, der Gegenstand sei in dem ganzen endlichen Gebiet, welches man vom Punkt C an auf demselben construirt, offen, die entsprechende Linie dagegen sei, abstract genommen, geschlossen. Alsdann wird seine wahrnehmbare Einheit in Bezug auf die ganze Grade unendlich klein und von einer beliebigen gegebenen Ordnung sein (Satz III, § 19). Nimmt er an, das wahrnehmbare Gebiet sei von einem beliebigen Punkt der Graden als Anfang an unendlich klein von der ersten Ordnung, so wird die Grade unendlich gross von der ersten Ordnung in Bezug auf die wahrnehmbare Einheit sein und einen einzigen im Unendlichgrossen liegenden Grenzpunkt haben (Zus. I, Satz III, § 19). Hielte er die Grade dagegen bezüglich der wahrnehmbaren Einheit für unendlich gross zweiter Ordnung, dann hätte dieselbe von einem beliebigen Punkt als Anfang an in ihren beiden Richtungen zwei verschiedene im Unendlichgrossen erster Ordnung liegende Grenzpunkte. Dasselbe wäre der Fall, wenn der Denker annähme, die ganze Linie sei in Bezug auf die wahrnehmbare Einheit des Beobachters unendlich gross von der Ordnung n (Bem. I, § 19).

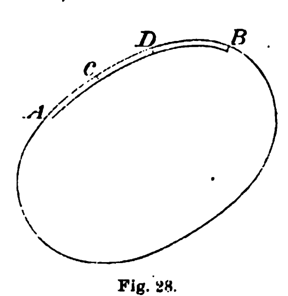


Fig. 28.

Wenn er dann auch die concrete Existenz des Unendlichgrossen nach den in der Einleitung aufgestellten Hypothesen zugibt, was *geometrisch* keinen Widerspruch in sich schliesst und auch weder gegen die Anschauung noch gegen die Erfahrung verstösst, falls er die Eigenschaften des Anschauungsgebiets unverändert lässt (Def. II, § 2) und wenn er ferner die Existenz eines andern Wesens voraussetzt, dessen wahrnehmbare Einheit unendlich gross von der n^{ten} Ordnung in Bezug auf die unsrige ist, so wird diese Linie für den neuen Beobachter nicht mehr unendlich gross sein (Einl. c, § 91; a, § 86 und Zus. I, Satz III, § 19). Und wenn der zweite Beobachter ohne sich zu widersprechen nur die Existenz des ersten als Denker voraussetzen könnte und wenn er die in Kap. I der Einleitung entwickelten Sätze gelten liesse, so würde er dieselben Hypothesen über die endlichen und unendlich grossen Segmente aufstellen.

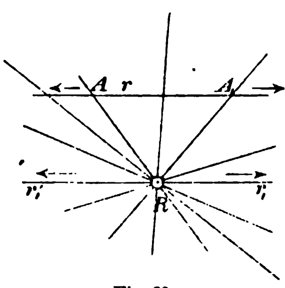


Fig. 29.

Die Beobachtung an dem gradlinigen der Graden entsprechenden Gegenstand gibt uns mithin keinen Anhalt zur Entscheidung der Frage, ob die Grade offen oder geschlossen ist.

Nehmen wir nun andre Beobachtungen zu Hilfe. Es sei der bekannte gradlinige Gegenstand gegeben (Fig. 29). Beobachtet man ihn mit blossem Auge oder durch das Vergrösserungsglas oder verlängert ihn mit Hilfe des Fernrohrs, wir sehen stets, dass jedes Segment (AA_1) desselben in Bezug auf jedes andre begrenzte Segment, welches wir beobachten können, endlich ist (Einl. Def. II, § 82).[1])

Die Figur der Graden, welche die Punkte einer Graden r mit einem Punkt R verbinden, der ausserhalb r in dem endlichen um den Punkt S liegenden (Bem. III, § 23) der wahrnehmbaren Einheit entsprechenden Gebiet liegt (Emp.

1) Wir sagen nicht, alle *vorstellbaren* Segmente wären endlich. Ueber das Wort *Vorstellung* herrscht nicht geringe Verwirrung nicht nur was das Unendlichkleine angeht, sondern auch in Bezug auf die Figuren von mehr als drei Dimensionen (über diese letzteren siehe den Anhang und speciell den Theil II). Nach den Sätzen unsrer Einleitung kann man sich das unendlich kleine Segment unabhängig von den endlichen Segmenten als ein wahrnehmbares Segment vorstellen, so dass sich auch auf die unendlich kleinen oder unendlich grossen Gebiete auf der Graden die Raumanschauung anwenden lässt. Diese Raumanschauung können wir vollständig in jedem unendlich kleinen oder unendlich grossen Gebiet zu drei Dimensionen um einen Punkt anwenden, weil wir nach unsern Hypothesen I—IV und nach den Eigenschaften, die wir in der Folge entwickeln werden, wenigstens in einem kleinen

Bem. I, § 4), wird theilweise durch die gradlinigen Gegenstände dargestellt, die R mit den Punkten des Gegenstandes r verbinden (Fig. 29). Angenommen, die gradlinigen Gegenstände, welche durch R gehen und r schneiden, würden unbegrenzt verlängert, so kann die Figur derselben ganz oder zum Theil dieselbe Figur sein, die man erhält, wenn man alle gradlinigen durch R gehenden (ebenfalls der Voraussetzung nach unbegrenzt verlängerten) Gegenstände auf dem Papier der Zeichnung zieht.

Wir wollen annehmen, es wäre auf dem hinreichend verlängerten Gegenstand r eine Scala von der Einheit (AA_1) von A an in der einen oder der andern Richtung gegeben oder construirt (Einl. Def. I, § 80). Es kann so kommen, dass auf die Strahlen, die in der Zeichnung die Grade r rechts von A treffen, ein *erster* Strahl folgt, welcher r nicht trifft, so dass jeder andre zwischen diesem und einem beliebigen der ersteren auf dem gehörig verlängerten Papier liegender Strahl die Grade r in einem Punkt des Gebiets der obigen Scala schneidet (Einl. Def. III, § 80). Denn wenn es unter den Strahlen, welche die Grade r rechts von A in dem Gebiet der Scala nicht treffen, nicht einen ersten Strahl gäbe, dann könnte sich ein beliebiger Strahl, welcher die Grade r in dem obigen Gebiet trifft, nicht unbegrenzt einem beliebigen der ersten Strahlen nähern (Def. I, § 12); die Beobachtung des Papieres um den Punkt R zeigt aber, dass dies immer möglich ist.

Wenn es möglich wäre auf dem Papier der Zeichnung einen ersten gradlinigen durch den Punkt R gehenden Gegenstand r_1 zu construiren, der rechts vom Beobachter verlängert, den verlängerten Gegenstand r in einem Punkt des obigen Gebiets rechts von A nicht träfe, so würde der Gegenstand r_1 genau den von R aus nach rechts parallel gezogenen Strahl oder alle Strahlen darstellen, welche von R in absolutem Sinn parallel zu der Graden r gezogen sind (Def. I und II und Satz III, § 26).[1]

Annähernd wird dieser Strahl in der Zeichnung durch den Gegenstand r_1 dargestellt, wenn man denselben in der Richtung des Pfeiles rechts durchläuft. Wir sagen „annähernd", weil wir kein Mittel haben einen Gegenstand, welcher genau der Parallelen entspricht, zu bestimmen. Denn zwischen dem Gegenstand, welcher dem parallelen Strahl entspricht, und einem gradlinigen Gegenstand, welcher hinreichend verlängert die Grade r in einem sehr weit entfernten Punkt ausserhalb des Gebiets unsrer Beobachtung trifft, kann man mit blossem Auge so wenig wie mit den uns zur Disposition stehenden Instrumenten irgend einen wahrnehmbaren Unterschied entdecken. In dem begrenzten Theil des Papiers der Zeichnung ersetzt der zweite Gegenstand annähernd den parallelen Strahl. Und was wir von dem Gebiet des Zeichenpapiers sagen, gilt offenbar auch für das ganze Gebiet unsrer äusseren Beobachtung, welches nicht der gesammte geometrische Anschauungsraum ist.

Was für die Richtung rechts von A auf der Graden r gesagt wurde, kann man auch für die Richtung nach links wiederholen. Da wir nun auf dem Papier einen Gegenstand r'_1, der genau der von R in der Richtung nach links der Graden r Parallelen entspräche, nicht ziehen können, so kann uns die Beobachtung nicht sagen, ob die beiden Graden oder die von R aus zu der Graden r parallel gezogenen Strahlen zusammenfallen oder verschieden sind oder überhaupt nicht existiren, wie es der Fall wäre, wenn die Grade in dem endlichen Gebiet geschlossen wäre. Wir nehmen nur wahr, dass in dem Gebiet unsrer Beobachtungen die Hypothese, dass die Strahlen r_1 und r'_1 existiren und zusammenfallen, der Wahrheit sehr nahe kommt. Diese Hypothese ist mithin für die praktische Anwendung den beiden anderen vorzuziehen. Es ist aber möglich, dass dies, wenn es mit grosser Annäherung in dem beschränkten Gebiet unsrer Beobachtungen stattfindet, für ein ausgedehnteres Gebiet nicht mehr gilt; wie es auch möglich ist, dass jeder gradlinige Gegen-

---

Theil derselben die Eigenschaften unsres Beobachtungsgebiets wiederfinden. Wir können sagen, es fehlte uns die Stetigkeit der Vorstellung beim Uebergang von den endlichen zu den unendlich kleinen und unendlich grossen Segmenten und es wäre aus diesem Grund das thatsächlich Unendlichkleine oder Unendlichgrosse in Bezug auf das Endliche nicht vorstellbar, was übrigens auch von der endlichen Grösse, welche kleiner als jede gegebene Grösse wird, wenigstens in Bezug auf ihre sämmtlichen Zustände gilt (siehe Einl. Anm. zu § 105).

1) Wir werden in Kurzem sehen (Satz II, § 31), dass der Satz III, § 26 wie die vorhergehenden nur für den Punkt S bewiesenen Sätze (Hyp. IV) für alle anderen Punkte gelten. Wir werden in der Folge auf Grund unsrer Def. I, § 26 beweisen, dass der parallele Strahl des *Euclid*'schen Systems der Grenzstrahl derjenigen Strahlen ist, welche die Grade r auf der Rechten treffen. Dieses ist bisher noch nicht geschehen.

stand r_1 auf dem Zeichenpapier, wenn er hinreichend verlängert wird, mit dem Gegenstand r in dem endlichen Gebiet einen Punkt gemeinschaftlich hat.

Die drei Hypothesen dürfen nun, um geometrisch möglich zu sein, den Daten der Erfahrung innerhalb des Beobachtungsgebiets nicht widersprechen (siehe Vorrede); das heisst also sie müssen in einem sehr kleinen aber endlichen und constanten Gebiet um einen Punkt S annähernd dieselben Resultate liefern, was man eben beweisen kann.

Die erste Hypothese, welche die einfachste ist, ist mithin auch in dieser Hinsicht den beiden anderen für die praktische Anwendung vorzuziehen.

Eine Vorstellung von dem, was in dem Anschauungsraum möglich ist (Emp. Bem., § 1), bekommen wir auf der Oberfläche gewisser Körper, z. B. der Erde. Man weiss, dass die Erde eine Kugelgestalt hat, bekannt ist, was die Meridiane, die Parallelkreise u. s. w. sind. Denken wir uns nun auf dem Boden durch einen Punkt des beschränkten Beobachtungsgebiets einen Meridian gezogen, so fällt dieser Meridian offenbar in diesem Gebiet sehr annähernd mit der Graden zusammen und wir wissen doch auf anderem Weg, dass er keine Grade ist. Wenn wir dann auf der Erde durch zwei Punkte an dem Ort, an welchem wir uns befinden, in einem hinreichend kleinen Gebiet zwei Meridiane ziehen, so verwechseln wir sie mit zwei parallelen Graden, während sie sich doch, wie man weiss, in den beiden Polen der Erde schneiden.[XVII] [1])

Def. I. Die Hypothese, nach welcher es zwei durch einen Punkt R in einem endlichen Gebiet gehende zu einer Graden r desselben Gebiets parallele Strahlen gibt (Def. II, § 23), welche auf derselben Graden liegen (Def. II, § 7), heisst *Hypothese, Axiom* oder auch *Postulat Euclid's*.

Die Hypothese, nach welcher die beiden Strahlen verschieden sind, heisst *Hypothese Lobatschewsky's*. [2])

Diejenige endlich, nach welcher die Grade geschlossen ist und mithin die parallelen Strahlen nicht existiren, heisst *Hypothese Riemann's*.

Die verschiedenen Systeme der Geometrie in dem endlichen Gebiet einer Einheit, welche sich aus diesen Hypothesen in Verbindung mit den vorstehenden Axiomen I—V ableiten lassen, werden nach *Euclid*, *Lobatschewsky* und *Riemann* benannt.

Bem. II. Bei unseren Hypothesen über die absolute Geometrie ist das System *Lobatschewsky*'s in dem endlichen Gebiet jeder Einheit (Satz IV, § 26) ausgeschlossen und nur

---

1) Wie wir sehen werden, hat der Umstand, dass die Parallele eindeutig bestimmt ist, in Verbindung mit den andern Axiomen zur Folge, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt, während in der sphärischen Geometrie die Summe der Winkel eines aus Hauptkreisen gebildeten Dreiecks grösser als zwei Rechte ist. In einem beschränkten Beobachtungsgebiet auf der Oberfläche der Erde beträgt nun die Summe der Winkel eines Dreiecks mit grosser Annäherung zwei Rechte; wollte man dies für die ganze Erde gelten lassen, so käme man zu dem Schluss, dass sie eine Ebene ist, wie die Alten geglaubt haben.

Nimmt man an, die Ebene sei gegeben und definirt die Parallele als diejenige Linie, deren Punkte gleichen Abstand von einer in der Ebene gegebenen Graden haben, so enthält auch diese Definition ein Axiom, welches mit grosser Annäherung in dem Gebiet unsrer äussern Beobachtung sich bewahrheitet. Denn dehnt man dieses Gebiet aus, so ist es möglich, dass die obige Linie keine Grade ist, sondern eine andre Linie, die in dem Gebiet unsrer Beobachtung von der Graden nicht zu unterscheiden ist.

2) Siehe Anhang.

XVII) Um das Axiom über die Parallelen in Anm. XVI zu rechtfertigen, stellt man andre empirische Betrachtungen an. Denn in unsrer Definition, die sich besser für Untersuchungen eignet, die sich auf das *Euclid*'sche System beschränken, erscheint der parallele Strahl nicht als Grenzstrahl zwischen zwei Strahlenbündeln, welche die dirigirende Grade schneiden und nicht schneiden. Diese Eigenschaft wird später bewiesen (siehe Def. I, § 30).

dasjenige *Euclid*'s und *Riemann*'s möglich. Das letztere ist es nur dann, wenn die Grade in absolutem Sinn geschlossen ist. [1])

Wir befassen uns daher nicht damit uns für das *Euclid*'sche oder *Riemann*'sche oder auch *Lobatschewsky*'sche System, falls dieses letztere möglich gemacht wird, zu entscheiden, sondern haben uns für die in absolutem Sinn offene Grade oder für die geschlossene zu erklären. Theils weil nun die geschlossene Grade mit unsern Hypothesen I—IV die beiden Systeme *Riemann*'s und *Euclid*'s in sich schliesst, theils der Anwendungen wegen, welche wir speciell von dem ersten System bei dem Studium des letzteren machen, wählen wir die folgende Hypothese:

Hyp. V. **Die Grade ist eine geschlossene Linie.** [XVIII])

Def. II. Das absolute System, welches sich aus der geschlossenen Graden ergibt, heisst *das absolute System Riemann*'s. Wenn man bei der in absolutem Sinn offenen Graden durch jeden Punkt ausserhalb derselben nur eine Parallele zu ihr ziehen kann, so erhält man *das absolute Euclid'sche System.*

Bem. III. Mit unsern Hypothesen I—V ist das *Lobatschewsky*'sche System in absolutem sowenig wie in relativem Sinn möglich. Wir haben anderswo die Gründe angegeben (Bem. II, § 18), aus welchen wir uns nur in soweit mit dem absolutem System beschäftigen, als es uns bei dem Uebergang von dem System der verschiedenen endlichen Gebiete um einen Punkt und speciell bei dem Uebergang von dem *Euclid*'schen zu dem *Riemann*schen System und umgekehrt hilft.

Def. III. Das System einer Dimension (Einl. Def. I, § 62), das durch die Graden gegeben ist, welche die Punkte einer Graden r mit einem Punkt R ausserhalb derselben verbinden in Bezug auf die Grade als Element und deren Richtungen durch diejenigen der Graden r gegeben sind, heisst *Gradenbüschel*, von welchem R *das Centrum* und r *die Directrix* ist.

Bez. Das Büschel mit dem Centrum R und der Directrix r bezeichnen wir mit (Rr).

15.

Erstes praktisches Axiom oder Postulat Euclid's. — Richtung der weiteren Untersuchungen und die Grundeinheit.

§ 28. *Bem. I.* Die früheren Axiome und Hypothesen reichen zwar zur Entwicklung der Geometrie des *Euclid*'schen und *Riemann*'schen Systems aus, genügen aber nicht um zu bestimmen, welchem der beiden Systeme das Gebiet unsrer Beobachtungen entspricht oder mit andern Worten welcher Einheit der Graden die auf dem gradlinigen Gegenstand für uns wahrnehmbare Einheit entspricht. Eine solche Frage geht die Geometrie an sich Nichts an; weil aber andrerseits die Anwendung auf das Studium der Körper ein Hauptzweck der Geometrie ist (Def. III und Bem. IV, § 2), so entscheiden wir die Frage durch das folgende Axiom, welches dem *Euclid*'schen Postulat entspricht (Def. I, § 27).

Prakt. Ax. I. **In dem Gebiet unsrer actuellen Beobachtungen gilt mit sehr grosser Annäherung die Eigenschaft, dass durch einen Punkt nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Graden geht.** [XIX])

---

1) Siehe Vorrede und Kap. III, Buch II in diesem Theil.

XVIII) Selbstverständlich sind nach dem in Anm. XVI gegebenen Axiom *Euclid*'s die Hyp. I—V nicht nöthig, mag man Ax. II oder II′ zu Grunde legen (Anm. IV).

XIX) Auch dieser Abschnitt kann nach dem Axiom über die Parallelen in Anm. XVI sowohl bei Ax. II als II′ wegfallen (siehe Vorrede).

Bem. II. Im Hinblick auf dieses Axiom lassen wir von nun an nicht nur den Fall der offenen Graden in absolutem Sinn bei Seite, sondern *stecken uns* für die geschlossene Grade *als Hauptziel die Behandlung des Euclid'schen Systems in der Umgebung eines Punktes.* Und obwohl wir gleichermassen das *Riemann*'sche System behandeln theils der Geometrie im absoluten Sinn wegen, theils um die Grundeigenschaften dieses wichtigen Systems zu entwickeln, so gehen wir doch auf die Einzelheiten desselben näher ein, damit es uns bei der Behandlung des *Euclid*'schen von Nutzen sei.

Auch mit der Ebene *Lobatschewsky*'s werden wir uns beschäftigen, wobei wir Gelegenheit erhalten weitere Betrachtungen über die obigen geometrischen Systeme anzustellen, ohne dass wir jedoch dadurch in dem Studium der beiden Systeme *Euclid*'s und *Riemann*'s unterstützt würden. [1])

Uebereink. Als *Grundeinheit* auf der geschlossenen Graden (Einl. Def. VII, § 97) betrachten wir die bezüglich der ganzen Graden unendlich kleine Einheit erster Ordnung. Und wenn wir ohne Weiteres von Punkten und Figuren des endlichen Gebiets sprechen, so verstehen wir darunter das *Euclid*'sche mit der genannten Einheit.

Def. I. Die Grundeinheit nennen wir *Euclid'sche Einheit* und die Einheit des unendlich grossen oder *Riemann*'schen Gebiets *Riemann'sche Einheit.*

16.

Die vollständige Grade.[xx])

§ 29. *Def. I.* Da die Grade in dem *Euclid*'schen System um einen Punkt nur ein Theil der Graden ist, so nennen wir die ganze Grade: *vollständige Grade.*

Bem. I. Ist dieselbe geschlossen (Hyp. V), so stellen wir sie durch einen auf dem Papier gezogenen Strich wie in Fig. 30 dar, ohne dass desshalb dieser Gegenstand alle Eigenschaften der Graden haben müsste.

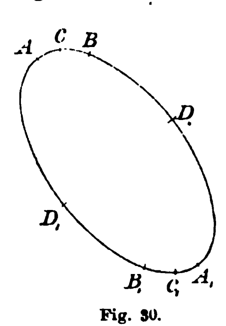


Fig. 30.

Def. II. Zwei Segmente (AB), (A_1B_1), deren Enden entgegengesetzte Punkte (Def. III, § 6) sind, heissen *entgegengesetzte Segmente.*

Satz I. Zwei entgegengesetzte Punkte werden durch zwei andre entgegengesetzte Punkte von einander getrennt.

Es seien AA_1, BB_1 die beiden Paare entgegengesetzter Punkte auf der vollständigen Graden. Wenn B in einem der beiden Theile der durch die Punkte A und A_1 bestimmten Graden liegt, so muss B_1 in dem entgegengesetzten Theil liegen; denn sonst würden die Punkte B und B_1 auf der Graden ein Segment bestimmen, das kleiner als die Hälfte derselben ist (Einl. Def. I, § 61 und d, § 73). A und A_1 werden also in der einen wie in der andern Richtung der Graden durch B und B_1 von einander getrennt (Ax. II, a, Hyp. I, Einl. Def. II, § 62 und § 23).

Def. III. Zwei Segmente, welche summirt die Hälfte der vollständigen Graden geben, heissen *Supplementärsegmente.*

1) Siehe Kap. III, Buch II.

xx) Dieser Abschnitt ist natürlich für das endliche Gebiet nicht nöthig, wenn man auch bei Ax. II wie II' wissen muss, ob die Grade offen oder geschlossen ist und im letzten Fall bei Ax. II, ob sie durch zwei entgegengesetzte Punkte bestimmt wird oder nicht (siehe Anm. XVI).

Sind sie zugleich consecutiv, wie (AB) und (BA_1), so werden sie *nebeneinander liegend* genannt.

Def. IV. Ein Segment, welches der vierte Theil der Graden ist, heisst *Quadrant oder rechtes Segment* (Einl. b′, § 99 oder a, § 103).

Satz II. Zwei gleiche Supplementärsegmente sind beide rechte.

Dies geht unmittelbar aus den Def. III und IV hervor.

Def. V. Complementär sind diejenigen Segmente, die addirt ein rechtes Segment geben.

Satz III. Zwei entgegengesetzte Segmente sind gleich und haben von entgegengesetzten Enden aus dieselbe Richtung.

Denn es seien A und A_1, B und B_1 zwei Paare entgegengesetzter Punkte auf der Graden AB (Fig. 30). Sie theilen die Grade in die vier consecutiven Segmente von derselben Richtung:

$$(AB),\ (BA_1),\ (A_1B_1),\ (B_1A)$$

derart, dass

$$(AB) + (BA_1) \tag{1}$$

$$(B_1A_1) + (A_1B) \tag{2}$$

der Hälfte der Graden gleich sind. Aus (1) und (2) folgt

$$(AB) + (BA_1) \quad (BA) + (AB_1)$$

$$(AB) + (BA_1) \equiv (B_1A_1) + (A_1B).$$

Es ist aber

$$(BA_1) \equiv (A_1B),\ (B_1A_1) \equiv (A_1B_1) \qquad \text{(Einl. g, § 99 oder c, § 104)}$$

mithin:

$$(AB) \equiv (B_1A_1) \quad (A_1B_1). \qquad \text{(Einl. g}^{\text{IV}}\text{, § 73)}$$

Offenbar haben (AB) und (A_1B_1) dieselbe Richtung z. B. von A und von A_1 aus; denn B liegt in der einen und B_1 in der andern entgegengesetzten von A und A_1 bestimmten Hälfte (Satz I); die vier Punkte A, A_1, B, B_1 folgen sich also in der Ordnung ABA_1B_1 oder AB_1A_1B (Einl. f, f′, f″, f‴, § 63 und § 23).

Satz IV. Wenn ein Punkt C eines Segments (AB) dasselbe derart theilt, dass (AC) der n^{te} Theil von (AB) ist, so liegt der entgegengesetzte Punkt C_1 in dem entgegengesetzten Segment (A_1B_1) und (A_1C_1) ist der n^{te} Theil von (A_1B_1).

Die Punkte $ACBA_1B_1A$ folgen sich in der Reihenfolge der Buchstaben. Wir wissen, dass A und A_1, B und B_1 in jeder Richtung der Graden sich von einander trennen müssen (Satz I). Der Punkt C liegt in den Segmenten (B_1ACB), $(ACBA_1)$; C_1 muss daher in den entgegengesetzten Segmenten, das heisst (BA_1B_1), (A_1B_1A) liegen. Er kann aber nicht in dem ersten zwischen B und A_1 gelegen sein, weil er sonst im Segment (ABA_1) läge und nicht in dem entgegengesetzten; er muss also in dem zu (AB) entgegengesetzten Segment (A_1B_1) liegen.

Der zweite Theil folgt aus Satz III (Fig. 30).

Zus. Die Mittelpunkte entgegengesetzter Segmente sind entgegengesetzt (Einl. e, § 99 oder a, § 104).

Satz V. Die Mittelpunkte der vier consecutiven in derselben Richtung liegenden durch zwei Paare entgegengesetzter Punkte bestimmten Segmente theilen die Grade in vier rechte Segmente.

AA_1, BB_1 seien die beiden Paare entgegengesetzter Punkte. Die von ihnen bestimmten consecutiven Segmente sind

$$(AB),\ (BA_1),\ (A_1B_1),\ (B_1A).$$

Die Mittelpunkte von (AB) und (A_1B_1) seien C und C_1, von (BA_1) und (B_1A) seien D und D_1 (Hyp. I und Einl. b', § 99 oder a, § 103). Es ist dann

$$(1) \qquad (CB) + (BD) \equiv (CD) \qquad (DA_1) + (A_1C_1) \equiv (DC_1)$$

weil

$$(BD) \equiv (DA_1) \text{ gegeben und } (CA) \equiv (A_1C_1) \equiv (CB)$$

(Satz III) und

$$(CB) + (BD) \equiv (BD) + (CB) \qquad \text{(Einl. e, § 99 oder a, § 104)}$$

ist.

$(CD) + (DC_1)$ ist aber die Hälfte der Graden und weil $(CD) \equiv (DC_1)$ (1), so sind die Segmente (CD) und (DC_1) und mithin auch (C_1D_1) und (D_1C) rechte Segmente (Def. IV und Satz III).

17.

Hypothese VI. — Entgegengesetzte Punkte und Figuren.

§ 30. *Bem. I.* Aus Satz II, § 14 und VI, § 23 geht hervor, dass es auf der vollständigen Graden Punktepaare geben kann, welche die Grade nicht bestimmen und dass ein solches Punktepaar möglicher Weise auch nicht existiren kann.

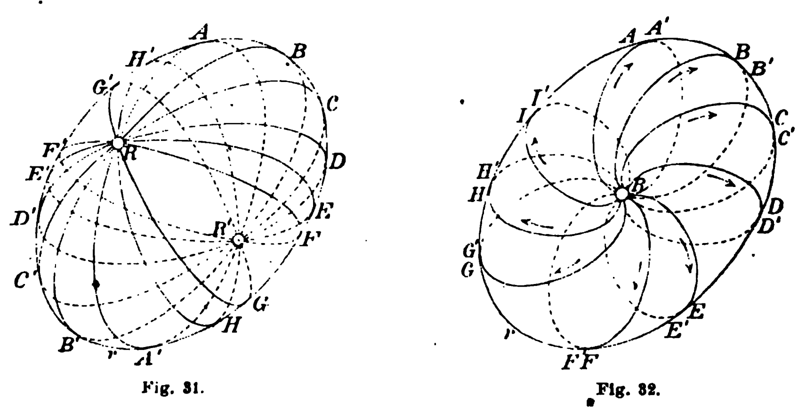


Fig. 31.   Fig. 32.

Ist ein Büschel (Rr) gegeben (Def. I, § 27) und durchläuft der Punkt X die Grade r in einer gegebenen Richtung und kehrt dann in seine ursprüngliche Lage zurück (Bem. II, § 3 oder Einl. § 67), so durchläuft die Grade RX das ganze Büschel in dem zweiten Fall nur einmal, im ersten zweimal.

Die beiden Fälle werden durch die Fig. 31 und 32 bezüglich der Durchschnittspunkte der Graden des Büschels vom Centrum R mit der Directrix r dargestellt. In der ersten Figur treffen sich alle durch R gehenden Graden in dem entgegengesetzten Punkt R' und schneiden die Grade r in zwei entgegengesetzten Punkten. Die beiden Figuren entsprechen dem thatsächlichen Strahlenbüschel nur sehr mangelhaft, weil sie das Ganze auf einem beschränkten Theil des Papiers das heisst des Gebiets unsrer Beobachtungen darstellen.

Satz I. Wenn die entgegengesetzten Punkte der Graden r die vom Centrum ausgehenden Strahlen der Graden eines Büschels bestimmen, so bestimmen sie in Bezug auf den Strahl als Element ein einfach geschlossenes System einer Dimension und die Strahlen des Büschels entsprechen den Punkten der Directrix eindeutig und in derselben Ordnung.

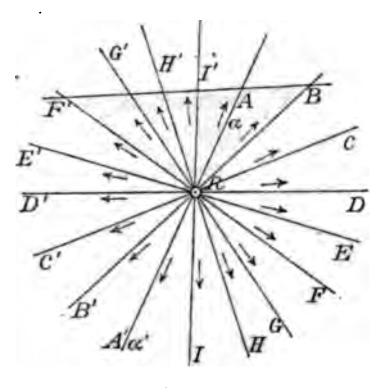


Fig. 33.

Denn wenn der veränderliche Punkt X von A aus auf der Directrix r an dem entgegengesetzten Punkt A' ankommt, so fällt die Grade RX (Ax. II und Hyp. III) mit der Graden AR aber in der entgegengesetzten Richtung von R aus zusammen und die Strahlen der Graden des Büschels bilden daher ebenfalls ein einfach geschlossenes System einer Dimension, weil durch jeden Punkt von r ein einziger Strahl geht und umgekehrt.

Def. I. Ein solches Strahlensystem heisst *Strahlenbüschel* oder einfach *Büschel mit dem Centrum R und der Directrix r. Die Richtungen* des Büschels sind durch diejenigen der Directrix gegeben.

Hat das Strahlenbüschel und das Gradenbüschel dieselben Eigenschaften, so verwechseln wir auch beide.

Bem. II. Der zweite Fall reducirt sich auf den ersten, wenn man die Grade r so betrachtet, als wäre sie doppelt und als stelle jeder Punkt zwei verschiedene Punkte vor, so dass der Punkt X, nachdem er von A aus (Fig. 32) die ganze einfache Grade r durchlaufen hat, die Lage des Punktes A' einnimmt und noch einmal die ganze einfache Grade durchlaufen muss, um zu dem Punkt A zurückzukehren.

Soll der zweite Fall mit der Beobachtung in dem Gebiet selbst übereinstimmen, so muss er der Fig. 33 entsprechen; das Strahlensystem muss daher auch in diesem Fall ein einfach geschlossenes System sein (Einl. Def. II, § 63). Man muss daher annehmen, dass, wenn der Punkt X die ganze einfache Grade r durchlaufen hat und nach A zurückkehrt, der Strahl RA in die entgegengesetzte Richtung fällt, sonst würde das Strahlensystem, wie man nach Fig. 32 glauben könnte, in zwei einfach geschlossene Strahlensysteme zerfallen.

Wollen wir in diesem Fall den Strahlen des Büschels die Punkte der Graden r entsprechen lassen, so müssen wir die Grade als doppelt betrachten. Da wir im Allgemeinen die Betrachtung der ganzen Graden dem Studium des Euclid'schen Systems unterordnen (Bem. II, § 28), so ist überdies die Grade in diesem Gebiet offen und die zwei Theile, in welche sie durch einen Punkt zerlegt wird, haben keinen Punkt gemeinschaftlich (Zus. I, Satz III, § 19 und Uebereink. § 28). Mit Rücksicht darauf ist daher die Annahme vorzuziehen, dass jedem Strahl in dem Büschel (Rr) bezüglich der unendlich grossen oder Riemann'schen Einheit (Uebereink. § 28) ein einziger Punkt der Directrix entspricht und umgekehrt.

Wenn man dagegen auch das im Unendlichgrossen des endlichen Euclid'schen Gebiets liegende Grenzgebiet in Betracht zieht, so reducirt sich der erste Fall in Bezug auf die Euclid'sche Einheit auf den zweiten, weil die Grade in Bezug auf diese Einheit einen einzigen im Unendlichgrossen liegenden Punkt hat (Satz III, § 23 und Uebereink. § 28). Wir dürfen daher die folgende Hypothese aufstellen:

Hyp. VI. **Auf der Graden gibt es Punktepaare, welche sie nicht bestimmen.**

Bem. III. Dies ist für das Euclid'sche System mehr ein Uebereinkommen als eine Hypothese; denn auch der zweite Fall liefert für es dieselben Resultate. In absolutem Sinn dagegen ist es eine richtige Hypothese.

Satz II. Bei der vollständigen Graden bestimmen zwei entgegengesetzte und nur zwei entgegengesetzte Punkte die Grade nicht (Hyp. VI, Satz II, § 14 und Satz VI, § 23).

Zus. I. Zwei Grade, die sich in einem Punkt schneiden, schneiden sich auch in dem ihm entgegengesetzten Punkt (Satz VI, § 4; Bem. II, § 22).

Def. II. Jedem Punkt X entspricht ein Punkt X', welcher X in allen Graden, die X enthalten, entgegengesetzt ist (Zus. I, Satz II).

Die Punkte X und X' heissen unabhängig von den Graden, in welchen sie liegen, *entgegengesetzte oder Gegen-Punkte.*

Figuren, die durch entgegengesetzte Punkte bestimmt werden (Def. I, § 2), heissen *entgegengesetzte Figuren.*

Satz III. Zwei entgegengesetzte Figuren sind einander gleich.

Denn wählt man zwei Punkte X und Y und die entsprechenden entgegengesetzten Punkte X' und Y', so ist $(XY) \equiv (X'Y')$ (Satz III, § 29).

Bem. IV. In § 6 haben wir gesehen, dass zwei Punkte A und B auf der Graden zwei Segmente bestimmen, von denen im Allgemeinen das eine kleiner als das andere ist. Wir konnten damals aber noch nicht von Segmenten und Abständen sprechen, die durch zwei beliebige Punkte [im allgemeinen Raum (Def. I, § 2)] bestimmt werden, weil wir noch nicht wussten, wie sich die Segmente verhalten, die zwei Enden gemeinschaftlich haben. Jetzt können wir die Bem. I, § 11 vervollständigen und behaupten, dass zwei Punkte, wenn sie nicht entgegengesetzt sind, ein einziges Segment bestimmen, indem wir darunter das kleinere auf der von ihnen bestimmten Graden und mithin einen einzigen Abstand verstehen. Und wenn die beiden Punkte die Grade nicht bestimmen, so haben sie einen einzigen Abstand, da jede durch sie gehende Grade von ihnen in gleiche Theile zerlegt wird.

Die Gleichheit der Abstände bei zwei Segmenten liefert die Gleichheit der Segmente; wenn daher (AB) und $(A'B')$ die Abstände zwischen den Punkten A und B, A' und B' sind und wenn $(AB) = (A'B')$ ist, so gilt auch für die Segmente $(AB) \equiv (A'B')$ (Satz I, § 5 und Satz I, § 8).[XXI]

18.

Grade, deren Punkte rechte Segmente mit einem Punkt bestimmen. — Die Hypothese IV gilt für jeden Punkt.[XXII]

§ 31. *Satz I. Alle Punkte einer Graden, welche zwei nicht entgegengesetzte Punkte verbindet, von denen jeder mit einem beliebigen Punkt A ein rechtes Segment bestimmt, sind von dem Punkt A gleichweit entfernt.*

X und Y seien die beiden gegebenen nicht entgegengesetzten Punkte, die eine Grade r bestimmen (Satz VI, § 23). Da sie keine entgegengesetzte Punkte sind, so bestimmen sie in r ein Segment (XY) (Def. II, § 6), welchem in r_∞ ein Segment $(X'Y')$ entgegengesetzt und gleich ist (Satz III, § 29). Wir be-

[XXI]) Die Eigenschaft, dass der Strahl als Element des Büschels angesehen werden kann und dass in Bezug auf den Strahl als Element das Büschel ebenfalls ein einfach geschlossenes System ist und dass jede Grade des Büschels dasselbe mithin in zwei Theile zerlegt, lässt sich aus der Eigenschaft ableiten, dass die Grade in dem Euclid'schen System offen ist, wie in der Anm. zu § 46 gezeigt werden wird.

[XXII]) Ist ebenfalls auszulassen. Siehe Bem. III, § 2.

haupten, dass jeder Punkt Z der Graden r in absolutem Sinn von A gleichweit absteht. Nehmen wir zuerst an, Z liege innerhalb des Segments (XY). Dem Punkt Z ist ein Punkt Z' in dem Segment $(X'Y')$ entgegengesetzt, der denselben Abstand von X' und Y' hat, wie der Punkt Z von X und Y (Satz III, § 29) und die Grade ZA geht durch den Punkt Z' (Zus. I, Satz II, § 30). Die beiden Dreiecke AXY, $AX'Y'$ sind identisch (Hyp. III und Satz III, § 17) und es ist mithin

$$(AZ) \equiv (AZ'), \qquad \text{(Satz II, § 15)}$$

Fig. 34.

weil Z und Z' zwei entsprechende Punkte sind oder auch weil die beiden Dreiecke AYZ, $AY'Z'$ gleich sind, da sie zwei Seiten und das von ihnen eingeschlossene Paar gleich haben (Satz III, § 16). Es ist mithin

$$(AZ) \equiv (AZ') \equiv (AX) \equiv (AY).$$

Ebenso verhält es sich, wenn der Punkt Z ausserhalb des Segments (XY) in der Graden r fällt. Mithin u. s. w.

Satz II. Die Hyp. IV gilt für jeden Punkt.

Wählt man einen beliebigen Punkt A, so gehört derselbe zu einem endlichen Gebiet des Punktes S, auf welches wir uns bis jetzt immer bezogen haben (Bem. III, § 23). Es gibt Grade, die durch A gehen und in Bezug auf die Einheit des genannten endlichen Gebiets und auch auf die unendlich grossen Einheiten, wenn diese existiren (Satz III, § 19), verschieden sind (Satz IV, § 23).

Zwei Grade r und r_1, die durch A gehen und in Bezug auf die Einheit eines beliebigen Gebiets um A verschieden sind, sind in absolutem Sinn auch dann verschieden, wenn sie in einem unendlich kleinen oder unendlich grossen Gebiet um A in Bezug auf die Einheit dieses Gebiets zusammenfallen (Bem. I, § 22).

Wählt man zwei Punkte X und Y, von denen jeder mit A ein rechtes Segment auf den Graden r und r_1 bestimmt, so haben alle Punkte der Graden XY gleichen Abstand von A (Satz I). Wir lassen nun durch S eine Grade r' gehen und betrachten eine durch einen Punkt X' in r', welcher mit S ein rechtes Segment bestimmt, gelegte Grade s', deren Punkte gleichen Abstand vom Punkt S haben, was möglich ist (Hyp. IV und Satz I). Wählt man dann in s' ein Segment $(X'Y') \equiv (XY)$, so sind die beiden Dreiecke XAY, $X'SY'$ identisch, weil sie drei Seiten gleich haben (Hyp. III und Satz III, § 17); die beiden Gradenpaare $X\dot{A}Y$, $X'\dot{S}Y'$ (Def. I, § 16) sind daher identisch.

Jedem Paar von Graden r und r_1 mit dem Scheitel A (Def. I, § 16) kann man daher ein Gradenpaar mit dem Scheitel S entsprechen lassen, welches dem ersten in absolutem Sinn gleich ist. Weil aber zwei verschiedene beliebige Grade, die durch S gehen, in jedem unendlich kleinen oder unendlich grossen Gebiet um S verschieden sind (Hyp. IV), so gilt dieselbe Eigenschaft auch für die Graden r und r_1 (Satz II, § 15).

Bem. Bei diesem Satz können wir uns auf die Gebiete um jeden Punkt (des allgemeinen Raums) beziehen, in deren Umgebung alle aufgestellten Sätze und Hypothesen und daher auch die daraus abgeleiteten Eigenschaften Geltung haben; für einen beliebigen Punkt

A gelten folglich auch Satz VII mit Zus. in § 23, die Sätze I, II, III, § 24 u. III, IV, § 26. Solange wir nicht das Euclid'sche System behandeln, wollen wir uns daher auf das Gebiet um einen beliebigen gegebenen Punkt beziehen.

19.

Absolute und relative parallele Graden und Strahlen. — Absolutes Grenzgebiet um einen Punkt des endlichen Euclid'schen Gebiets.[XXIII])

§ 32. *Bem. I.* Wir wollen wieder das Euclid'sche Gebiet um den Punkt A (Bem. § 31, Uebereink. § 28) und eine Grade r oder $X'_\infty A X_\infty$ betrachten. Wenn wir auf dieser Graden einen Punkt X_∞ wählen, der dem endlichen Euclid'schen Gebiet um den zu A entgegengesetzten Punkt A' nicht angehört, so muss er mit einem beliebigen Punkt B des endlichen Gebiets um A eine Grade bestimmen (Satz VI, § 23). Die Graden, welche einen Punkt B mit allen im Unendlichgrossen liegenden Punkten der Graden r mit Ausnahme der zu A entgegengesetzten Punkte und der Punkte des endlichen Gebiets um A' verbinden, fallen in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets in eine einzige Grade zusammen (Satz III u. IV, § 26; Uebereink. § 28 u. Bem. § 31) und sind der Graden r parallel (Def. II, § 26).

Def. I. Wir nennen diese parallelen Graden *relative Parallelen.*

Bem. II. Eine durch B gehende relative parallele Grade schneidet die Grade r in zwei in entgegengesetzten Richtungen von A aus liegenden bestimmten Punkten X_∞, X'_∞, welche in absolutem Sinn auf der vollständigen Graden entgegengesetzte Punkte sind (Zus. Satz II, § 30). Die Punkte X_∞ und X'_∞ müssen von den entgegengesetzten Punkten A und A' getrennt sein (Satz I, § 29). Eine Hälfte der durch die beiden Punkte X_∞ und X'_∞ bestimmten Graden enthält den Punkt A und ist diejenige, die zum Theil in dem endlichen Gebiet um A liegt. Damit ist aber nicht gesagt, dass A der Mittelpunkt des Segments $(X_\infty X'_\infty)$ ist.

Def. II. Die Grade, welche sich von einem Punkt B aus in dem Euclid'schen Gebiet parallel zu einer durch den Punkt A gehenden Graden r ziehen lässt und welche die Grade r in zwei in absolutem Sinn und mithin auch in Bezug auf die unendlich grosse Einheit (Uebereink. § 28 und Satz II, § 30) in gleichem Abstand von A liegenden entgegengesetzten Punkten X_∞, X'_∞ schneidet, heisst *absolute Parallele.* Die Punkte X_∞, X'_∞ heissen *absolute Grenzpunkte der Graden r in Bezug auf den Punkt A.*

Zus. I. Die absoluten Parallelen, welche von den Punkten einer Graden, die zu einer gegebenen Graden absolut parallel ist, gezogen werden, fallen bezüglich der endlichen und unendlich grossen Einheit zusammen.

Es geht dies unmittelbar aus der Definition hervor (Satz I, § 24 und Bem. § 31).

Satz I. Jedem Punkt einer Graden r entspricht in dem endlichen Gebiet eine verschiedene von demselben Punkt B zu der Graden r absolut Parallele.

Dies folgt unmittelbar aus der obigen Definition; denn wählt man einen andern Punkt A_1, der dem Punkt A auch unendlich nahe liegen kann, so sind die beiden absoluten Grenzpunkte in absolutem Sinn verschieden (Ax. II, a, Hyp. I; Einl. Def. I, § 61 und d, § 73).

Zus. I. Eine durch A gehende Grade r ist im Allgemeinen der Graden

---

[XXIII]) Auch dieser Abschnitt ist, wenn man nur das endliche Gebiet behandelt, auszulassen.

r_1 nicht absolut parallel, die durch einen Punkt B absolut parallel zu der Graden r geführt wird.

Denn wäre sie es, so müssten die absoluten Grenzpunkte in Bezug auf A in r auch absolute Grenzpunkte in Bezug auf B in r_1 sein, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Def. III. Der durch einen absoluten Grenzpunkt von A auf der Graden r z. B. X_∞ und durch den Punkt B bestimmte Strahl (Def. I, § 7) heisst *der* dem Strahl (AX_∞) von A aus *absolut parallele Strahl.*

Zus. II. In einem Strahl sind ein Punkt und sein absoluter Grenzpunkt Enden eines rechten Segments.

Denn da $(X_\infty X'_\infty)$ die Hälfte der Graden und A der Mittelpunkt von $(X_\infty X'_\infty)$ ist (Def. II), so sind (AX_∞) und (AX'_∞) rechte Segmente (Def. IV, § 29; Hyp. I und Einl. b', § 99 und a, § 103).

Satz II. In Bezug auf die endliche und unendlich grosse (Euclid'sche und Riemann'sche) Einheit fallen die Graden, die von jedem Punkt B zu einer Graden absolut parallel gezogen werden, zusammen.

In Bezug auf dieselben Einheiten fallen die Graden, die von den Punkten einer Graden r zu einer zu r absolut Parallelen absolut parallel gezogen werden, mit der Graden r zusammen.

Es fallen nicht nur diejenigen Graden zusammen, die von einem Punkt B zu der Graden r in Bezug auf ihre im endlichen Gebiet liegenden Punkte absolut parallel gezogen werden, sondern alle relativen Parallelen (Def. II und I; Satz I, § 24; Uebereink. § 28 und Bem. § 31).

Aus dem ersten Theil des Satzes geht auch der zweite hervor; denn wenn $X_\infty AX'_\infty$ die Grade r und $X_\infty BX'_\infty$ die in Bezug auf den Punkt A absolute Parallele (Def. II) ist, so ist $X_\infty AX'_\infty$ der Graden $X_\infty BX'_\infty$ relativ parallel (Def. I; Satz III und IV, § 26 und Bem. § 31). Wählt man mithin einen Punkt A' in r, so ist die Grade r der Graden $X_\infty BX'_\infty$ relativ parallel und da alle von A' aus zu $X_\infty BX'_\infty$ relativ parallel gezogenen Graden, unter denen sich auch die in Bezug auf einen beliebigen Punkt des endlichen Gebiets von $X_\infty BX'_\infty$ absolute Parallele befindet, in eine einzige d. h. in die Grade r zusammenfallen (Def. I; Satz III, IV, § 26 und Bem. § 31), so ist damit der Satz bewiesen.

Zus. I. Bezüglich der endlichen und unendlich grossen Einheit fallen die von einem Punkt aus zu einem gegebenen Strahl absolut parallel gezogenen Strahlen zusammen.

Bezüglich derselben Einheiten fallen die von den Punkten eines Strahls zu einem andern demselben absolut parallelen Strahl absolut parallel gezogenen Strahlen, mit dem ersteren Strahl zusammen (Def. III).

Def. IV. Wir nennen *absolutes Grenzgebiet des Euclid'schen Gebiets um jeden Punkt X des endlichen Gebiets* dasjenige, welches durch alle absoluten Grenzpunkte der durch den Punkt X gehenden Graden gegeben ist, welche in Bezug auf die endliche und unendlich grosse Einheit verschieden sind (Satz IV, § 23 und Satz II, § 31).

Satz III. Zwei absolute Grenzpunkte eines Punktes X, welche nicht entgegengesetzt sind, bestimmen eine Grade, die ganz in dem absoluten Grenzgebiet von X liegt.

Dieser Satz ist eine andere mittelst Def. IV erhaltene Form des Satzes II, § 31.

Satz IV. Die absoluten Grenzgebiete zweier beliebiger Punkte des endlichen Gebiets fallen in absolutem Sinn zwar nicht zusammen, jedoch bezüglich der endlichen und unendlich grossen Einheit.

Denn wenn X_∞ ein absoluter Grenzpunkt eines Punktes A ist, so ist (AX_∞) ein rechtes Segment. Ist B ein Punkt des endlichen Gebiets, so ist im Allgemeinen (BX_x) in absolutem Sinn kein rechtes Segment (Zus. I, Satz I); dagegen besteht für die endliche und unendlich grosse Einheit die Identität $(AX_x) \equiv (BX_x)$ (Einl. i, § 85 und b', § 91; Satz III, § 22).

20.

In derselben oder der entgegengesetzten Richtung parallele Strahlen und Segmente.[xxiv])

§ 33. *Def. I.* Ein Punkt X_x des absoluten Grenzgebiets eines Punktes A bestimmt mit A ein rechtes Segment und zwei entgegengesetzte Punkte dieses Gebiets zwei rechte Segmente mit dem gemeinsamen Ende in A (Def. II, § 32). Wir nennen diese beiden Segmente *entgegengesetzte Seiten oder Theile* der Graden r um den Punkt A in Bezug auf das Euclid'sche Gebiet.

Bem. I. In dem Euclid'schen Gebiet können die entgegengesetzten Seiten bezügl. der Einheit dieses Gebiets auch als Strahlen angesehen werden, die von den Grenzpunkten und dem Punkt A begrenzt werden (Zus., Satz III, § 19).

Satz I. Jeder absolute Grenzpunkt X_∞ von A bestimmt mit jedem Punkt des endlichen Gebiets nur einen Strahl und mithin auf der durch X_∞ und den gegebenen Punkt bestimmten Graden von diesem Punkt aus eine Richtung.

B sei der gegebene Punkt, der auch mit A zusammenfallen kann. Der Punkt X_x bestimmt mit B ein Segment, welches kleiner als die Hälfte der Graden ist, weil in Bezug auf die unendlich grosse Einheit $(AX_x) \equiv (BX_\infty)$ ist (Satz III, § 22) und sie mithin in absolutem Sinn höchstens um ein Segment differiren, welches in Bezug auf die unendlich grosse Einheit, die bezüglich der vollständigen Graden endlich ist, unendlich klein ist (Def. I, § 29 und Uebereink. § 28). Weil auf diese Weise auf der Graden BX_x nur ein einziges Segment bestimmt wird (Def. II, § 6), so ist auch seine Richtung von B aus bestimmt (Einl. Bez. I, § 64 und Hyp. I).

Zus. I. Wir können behaupten, dass zwei Strahlen, die denselben absoluten Grenzpunkt im Unendlichgrossen haben, dieselbe Richtung in Bezug auf die endliche Einheit haben.

[xxiv]) Dieser Abschnitt wird, wenn man sich nur im endlichen Gebiet bewegt, nicht auf diese Art abgehandelt und die Definition von Strahlen oder Segmenten derselben oder entgegengesetzter Richtungen wird entweder hier in Uebereinstimmung mit Anm. XVI oder an der in der ersten Anm. zu § 52 angegebenen Stelle gegeben.

Denn die Richtung eines Strahls bestimmt den absoluten Grenzpunkt bezüglich der endlichen Einheit (Satz IV, § 32) und da die beiden Strahlen denselben absoluten Grenzpunkt haben, so bestimmen ihre Richtungen denselben Punkt im Unendlichgrossen. In Bezug auf die Bestimmung dieses Punktes können sie daher einander substituirt werden (Einl. Def. VI, § 8 und Def. I, § 9) und in dieser Hinsicht sind die beiden Richtungen gleich oder wir können mit andern Worten behaupten, dass die beiden Strahlen dieselbe Richtung haben.

Def. II. Wir sagen, zwei Strahlen, die diesem Zusatz entsprechen, hätten *dieselbe Richtung.*

Zus. II. Zwei Strahlen, die dieselbe Richtung mit einem dritten Strahl haben, sind unter sich gleich gerichtet.

Denn die drei Strahlen und mithin auch der erste und zweite haben in Bezug auf die endliche Einheit denselben im Unendlichgrossen liegenden absoluten Grenzpunkt (oder auch Zus. I und Einl. e, § 8).

Zus. III. Die zwei Strahlen, die von einem Punkt aus absolut (und mithin auch relativ) parallel zu einer Graden gezogen werden, haben entgegengesetzte Richtung.

Denn zwei absolut entgegengesetzte Punkte bestimmen mit einem Punkt B des endlichen Gebiets zwei Segmente, die von B aus entgegengesetzte Richtung haben (Satz I; Einl. Def. II, § 62; f', § 63 und Zus. I, Satz II, § 32).

Zus. IV. Wir können behaupten, dass zwei Strahlen a und a', die entgegengesetzte im Unendlichgrossen liegende absolute Grenzpunkte haben, entgegengesetzt gerichtet sind.

Dies ist an sich klar, wenn die Strahlen auf derselben Graden liegen (Zus. III).

Liegen sie auf verschiedenen Graden und man bezeichnet mit a_1 den zu a entgegengesetzten in einer graden Linie mit a liegenden Strahl, so sind a und a_1 entgegengesetzt gerichtet (Zus. III). a' und a_1 haben aber dieselbe Richtung (Zus. I und Def. II), das heisst bei der Bestimmung der Richtung können wir a' durch a_1 ersetzen und da nun a und a_1 entgegengesetzte Richtung haben, so können wir dasselbe auch von a und a' behaupten.

Def. III. Von zwei Strahlen, die diesem Zusatz entsprechen, sagen wir sie hätten *entgegengesetzte Richtung.*

Von jetzt an verstehen wir unter *Strahlen* einer Graden von einem Punkt A ihres endlichen Gebiets an in absolutem Sinn und bezüglich der unendlich grossen Einheit die Hälften der vollständigen Graden (Def. I, § 29) bis zu dem entgegengesetzten Punkt A'. Bei dem Euclid'schen Gebiet dagegen nehmen wir an, sie würden durch ihre absoluten Grenzpunkte begrenzt, welche für die Punkte ihres endlichen Gebiets bezüglich der endlichen und unendlich grossen Einheit zusammenfallen (Satz IV, § 32).

Bem. II. Ist ein Segment (AB) auf einer Graden gegeben, so ist seine Richtung in dem endlichen Gebiet, wie auch auf der vollständigen Graden durchaus bestimmt; denn A und B bestimmen zwei Segmente, von denen das eine (AB) unendlich klein in Bezug auf das andere ist. Betrachtet man nun, wie in § 6 angegeben, wenn man nicht nöthig

hat auch das grössere in Betracht zu ziehen, das kleinere als das Segment der Punkte A und B, so ist die Richtung von (AB) von A aus vollständig bestimmt (Einl. Bez. I, § 64).

Zus. V. In Bezug auf die Richtung sind zwei Segmente (AB), $(A'B')$, welche zwei parallelen Strahlen angehören und in ihnen dieselbe Richtung bestimmen, gleich (haben dieselbe Richtung).

Denn man kann sie bei Bestimmung der Richtung einander substituiren; da aber die Bestimmung ihrer Richtung auf den Strahlen, welche die Segmente enthalten, nur mittelst der Richtung der Strahlen geschieht, so haben die Segmente gleiche Richtungen d. h. dieselbe Richtung (Einl. Def. VI u. VII, § 8 und Def. I, § 9).

Zus. VI. Wenn zwei Segmente (AB) und $(A'B')$ parallelen Strahlen angehören und von A und A' aus entgegengesetzte Richtungen bestimmen, so haben sie entgegengesetzte Richtung.

Denn sie bestimmen Strahlen von entgegengesetzten Richtungen und diese Richtungen sind auch diejenigen der beiden gegebenen Segmente (Einl. f''', § 63).

21.

In absolutem und relativem Sinn gleiche Figuren.[XXV]

§ 34. *Satz I. Die im Unendlichgrossen liegenden Punkte zweier gleicher Figuren entsprechen sich einander derart, dass der Abstand zweier beliebigen im Unendlichgrossen liegenden Punkte der einen dem Abstand der beiden entsprechenden Punkte der andern in absolutem Sinn gleich ist.*

Denn wählt man zwei entsprechende Punkte A und A' der beiden Figuren in dem endlichen Gebiet und einen Punkt X_∞ der ersten, so muss dem Segment (AX_∞) [oder den Segmenten (AX_∞), falls X_∞ zu A entgegengesetzt ist (Def. I, § 30)] ein unendlich grosses Segment $(A'X'_\infty)$ der zweiten entsprechen denn in zwei gleichen Figuren sind die entsprechenden Segmente in absolutem Sinn gleich (Satz II, § 15 und Einl. Def. III, § 9) und mithin entspricht dem im Unendlichgrossen liegenden Punkt X_∞ der ersten ein im Unendlichgrossen liegender Punkt X'_∞ der zweiten. Sind aber X_∞ und Y_∞ zwei Punkte der ersten Figur und X'_∞, Y'_∞ die entsprechenden Punkte der zweiten, so muss $(X_\infty Y_\infty) \equiv (X'_\infty Y'_\infty)$ sein.

Sind X_∞, Y_∞ entgegengesetzte Punkte, so sind es auch die Punkte X'_∞, Y'_∞. Will man in diesem Fall entscheiden, welche der beiden, von diesen zwei Punktepaaren auf den zwei Graden bestimmten, Segmente sich entsprechen, so beachte man, dass diese beiden Graden von zwei entsprechenden Punkten bestimmt sein müssen und dass mithin die Segmente sich entsprechen, welche diese Punkte enthalten.

Bem. I. Ein Dreieck, dessen einer Scheitel in dem endlichen Gebiet liegt und dessen beide andern in dem absoluten Grenzgebiet des ersten Scheitels liegen, ist gleichschenklig (Def. III, § 9 und Def. III, § 32).

XXV) Auch dieser Abschnitt ist auszulassen, wenn man sich auf das endliche Gebiet einer Einheit beschränkt.

Ein Dreieck, von welchem zwei Scheitel in einem absoluten Grenzgebiet liegen und dessen andrer Scheitel in dem endlichen Gebiet liegt, ist in Bezug auf die endliche und die unendlich grosse Einheit gleichschenklig (Def. III, § 9 und Satz IV, § 32).

Satz II. Zwei Dreiecke, deren Scheitel in einem beliebigen endlichen Gebiet liegen und deren Seiten in Bezug auf die endliche Einheit bezüglich gleich sind, können als gleich in absolutem Sinn angesehen werden, wenn nicht festgesetzt ist, dass ihre Seiten um unendlich kleine Segmente differiren.

Die Seiten eines jeden der Dreiecke müssen endlich sein; denn wäre eine unendlich klein, so hätte man bezüglich der endlichen Einheit kein Dreieck mehr. Wenn die Seiten der beiden Dreiecke in absolutem Sinn gleich sind, so wissen wir schon, dass die beiden Dreiecke gleich sind (Satz III, § 17; Hyp. III und Einl. Def. III, § 9). Da man aber die drei Seiten als in absolutem Sinn gleich ansehen kann (Einl. a″, § 109), so ist der Satz damit bewiesen.

Bem. II. Ein Dreieck, dessen einer oder zwei Scheitel in absolutem Sinn im Unendlichgrossen liegen (Uebereink. § 28) z. B. BCA_∞ oder $AB_\infty C_\infty$ ist eigentlich kein Dreieck des endlichen Gebiets, wenn man dieses Gebiet unabhängig von dem Unendlichgrossen betrachtet. Im zweiten Fall haben wir in dem endlichen Gebiet ein Gradenpaar, dessen Scheitel mit dem im endlichen Gebiet liegenden Scheitel A des Dreiecks zusammenfällt. Im ersten Fall dagegen sind es zwei durch die zwei Punkte des endlichen Gebiets begrenzte parallele Strahlen.

In diesen Fällen kann man daher, was die Gleichheit zweier Dreiecke bezüglich der endlichen Einheit angeht, den Satz III, § 17, welcher sich auf Dreiecke bezieht, deren Scheitel im endlichen Gebiet liegen, nicht anwenden und will man auch in solchem Fall von Gleichheit der Dreiecke sprechen, so muss aus der Gleichheit derselben die Gleichheit ihrer Gradenpaare resultiren (Zus., Satz III, § 17). Diese Gleichheit nun erhält man, wenn die beiden verglichenen Dreiecke auch nur bezüglich der unendlich grossen Einheit gleich sind, weil man sie alsdann als in absolutem Sinn gleich ansehen kann (Satz II) und die genannten Paare mithin bezüglich der endlichen Einheit gleich sind.

Kann man die beiden Dreiecke nicht als in absolutem Sinn gleich betrachten, so kann man nicht mehr von Gleichheit bezüglich der endlichen Einheit sprechen.

Satz III. Zwei Dreiecke, welche zwei Scheitel in einem absoluten Grenzgebiet gemeinschaftlich haben und deren anderer Scheitel in dem endlichen Gebiet liegt, sind bezüglich der endlichen und unendlich grossen Einheit gleich und sie sind es auch in absolutem Sinn, wenn die im Unendlichgrossen liegenden Punkte absolute Grenzpunkte der übrigen Scheitel sind.

$BX_\infty Y_\infty$, $CX_\infty Y_\infty$ seien die beiden Dreiecke und die Punkte X_∞, Y_∞ seien absolute Grenzpunkte von B (Def. II, § 32). Das Dreieck $BX_\infty Y_\infty$ ist in absolutem Sinn und bezüglich der endlichen und unendlich grossen Einheit gleichschenklig (Bem. I); es ist also

$$(BX_\infty) \equiv (CX_\infty), \; (BY_\infty) \equiv (CY_\infty). \qquad \text{(Satz IV, § 32)}$$

Diese Relationen gelten in absolutem Sinn, wenn X_∞ und Y_∞ absolute Grenzpunkte auch des Punktes C sind. Die beiden Dreiecke sind mithin in dem ersten Fall bezüglich der unendlich grossen und folglich auch der endlichen Einheit (Bem. II), im zweiten Fall auch in absolutem Sinn einander gleich (Satz III, § 17 und Hyp. III).

Satz IV. Sind X_∞ und X'_∞, Y_∞ und Y'_∞ Paare entgegengesetzter absoluter Grenzpunkte, so sind die beiden Dreiecke $BX_\infty Y_\infty$, $BX'_\infty Y'_\infty$ entweder in absolutem Sinn oder bezüglich der unendlich grossen und der endlichen Einheit einander gleich.

Wir wollen annehmen, X_∞ und X'_∞ seien absolute Grenzpunkte des Punktes B, Y_∞ und Y'_∞ eines andern Punktes C. Im Allgemeinen gilt in absolutem Sinn nicht die Identität $(BY_\infty) \equiv (CY_\infty)$ und mithin auch nicht $(BY'_\infty) \equiv (BY_\infty)$, selbst wenn $(BX_\infty) \equiv (CY_\infty)$ ist (Zus. II, Satz I, § 32). Diese Beziehungen gelten dagegen bezüglich der unendlich grossen und der endlichen Einheit (Satz IV, § 32).

Damit ist der Satz bewiesen (Satz III, § 17 und Bem. II).

Satz V. Zwei Dreiecke, deren Seiten bezüglich der endlichen Einheit gleich sind, können nicht immer in absolutem Sinn für gleich gelten, wenn einer oder zwei ihrer Scheitel im Unendlichgrossen liegen.

Im ersten Fall können sie auch dann nicht für gleich in absolutem Sinn gelten, wenn ihre Seiten bezüglich der unendlich grossen Einheit gleich sind.

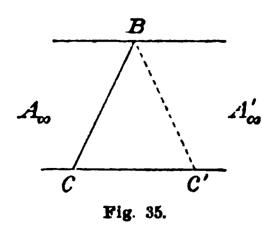


Fig. 35.

Die beiden Punkte C und C' seien in gleichem Abstand von B gegeben und die Entfernung (CC') sei endlich (Satz IV, § 23 und Bem. § 31). Wir wollen von B aus die Parallele zu CC' ziehen und den im Unendlichgrossen liegenden Punkt A_∞ der beiden Graden betrachten. In Bezug auf die endliche und auch unendlich grosse Einheit sind die Seiten der beiden Dreiecke $A_\infty BC$ und $A_\infty BC'$ gleich, d. h. (BA_∞) ist gemeinschaftlich, $(BC) \equiv (BC')$, $(CA_\infty) \equiv (C'A_\infty)$; in absolutem Sinn dagegen ist (CA_∞) nicht gleich $(C'A_\infty)$ (Einl. Def. I, § 61) und sind die beiden Dreiecke mithin nicht identisch und folglich auch nicht die gradlinigen Paare BCA_∞, $BC'A_\infty$ (Def. I, § 16 und Satz III, § 16). Ist A'_∞ der zu A_∞ entgegengesetzte Punkt, so haben die zwei Dreiecke $A'_\infty BC$, $A_\infty BC$ wie auch, bezüglich der endlichen und unendlich grossen Einheit, die Dreiecke $A'_\infty BC$, $A_\infty BC'$ und $A'_\infty BC$, $A'_\infty BC'$ ihre Seiten gleich. Ginge aus diesen Beziehungen die Gleichheit der Dreiecke hervor, so würde das Dreieck $A'_\infty BC$ den Dreiecken $A_\infty BC$ und $A_\infty BC'$ gleich sein; diese letzteren sind jedoch, wie wir gesehen haben, nicht gleich.

Was den letzten Theil des Satzes angeht, bemerken wir, dass bezüglich der unendlich grossen Einheit die zwei Seiten BA_∞, CA_∞ zusammenfallen (Satz III, § 22); es ist desshalb kein Dreieck mehr vorhanden und auf die beiden Dreiecke $A_\infty BC$, $A'_\infty BC$ kann der Satz II und mithin auch Satz III, § 17 nicht angewendet werden und die beiden Dreiecke sind folglich im Allgemeinen auch bezüglich der unendlich grossen Einheit nicht gleich (Bem. II).

Nur wenn die entsprechenden unendlich grossen Seiten in absolutem Sinn gleich sind, kann von einer Gleichheit der beiden Dreiecke die Rede sein:

Bem. III. Bei den Identitätsbeziehungen der Dreiecke im Euclid'schen Gebiet kommen nur solche Dreiecke in Betracht, deren Scheitel nach Satz II in dem endlichen Gebiet liegen (auf welche stets Satz III, § 17 anwendbar ist), es sei denn, es werde anders bestimmt.

22.

Congruente und symmetrische Segmente auf der Graden. — Stetige Systeme von beliebigen unveränderlichen Figuren (in dem allgemeinen Raum). — Stetige Systeme von unveränderlichen Segmenten auf der Graden.[xxvi]

§ 35. *Def. I.* Zwei gleiche Segmente einer und derselben Graden, welche dieselbe Richtung wie die Grade haben (Einl. f''', § 63) heissen *congruent* und wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind, *symmetrisch* (Einl. Bem. I, § 112).

Def. II. Wenn zwei symmetrische Segmente einen Punkt gemeinschaftlich haben, so sagt man, sie seien *symmetrisch in Bezug auf diesen Punkt* und ebenso die beiden andern Enden der Segmente seien in Bezug auf denselben Punkt symmetrisch.

Satz I. Zwei congruente Segmente, welche zwei sich entsprechende Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen.

Ist der Identitätszusammenhang zwischen den beiden congruenten Segmenten (AB) und $(A'B')$ festgestellt (Def. I) und X ein Punkt von (AB), welcher mit dem entsprechenden Punkt X' von $(A'B')$ zusammenfällt, so muss $(AX) \equiv (A'X)$ sein. Dieses ist, da (AX) und $(A'X)$ dieselbe Richtung haben (Zus. II, Satz III, § 4), nur dann möglich, wenn A und A' nicht verschieden sind (Einl. Def. I, § 61 und d, § 73). Mithin fallen A und A' und also auch aus demselben Grund B und B' zusammen.

Satz II. Sich entsprechende Punkte zweier congruenten Segmente sind Enden congruenter Segmente.

(AB) und $(A'B')$ seien die beiden congruenten Segmente. A' kann entweder dem Segment (AB) angehören oder ausserhalb desselben in der Verlängerung von (AB) von A nach B hin liegen (Einl. § 66). Der Fall, in welchem A' ausserhalb (AB) in der entgegengesetzten Verlängerung liegt, reducirt sich auf die beiden ersten, wenn man (AB) mit $(A'B')$ vertauscht. Es ist nicht möglich, dass das eine Segment in dem andern enthalten ist (Einl. d, § 73; c, § 61).

Sind X und X' beliebige entsprechende Elemente der beiden Segmente in ihrem Identitätszusammenhang (Bem. III, § 15), so gehört im ersten Fall das Element X entweder dem Segment (AA') oder $(A'B)$ an.

Liegt es in (AA'), so ist

$$(AX) + (XA') \equiv (AA'), \quad (XA') + (A'X') \equiv (XX')$$

$(A'X') + (XA') \equiv (XX')$ (Ax. II, a oder Hyp. I, Einl. e, § 99 oder a, § 104).

Es ist aber $(AX) \equiv (A'X')$, also $(AA') \equiv (XX')$ (Einl. c, § 68).

Liegt dagegen X in $(A'B)$, so ist

$$(AA') + (A'X) \equiv (A'X) + (AA') \equiv (AX),$$
$$(A'X) + (XX') \equiv (A'X').$$

[xxvi]) Dieser Abschnitt kann mit einigen Abänderungen des § 36 auch für das endliche Gebiet allein mit Ax. II sowohl als Ax. II' beibehalten werden.

Weil nun $(A'X') \equiv (AX)$ und X zwischen A' und B liegt, so ist $(A'X) < (A'X')$ (Einl. Def. I und II, § 61); folglich $(AA') \equiv (XX')$ (Einl. g^{III}, § 73).

Liegt schliesslich A' ausserhalb (AB) und in der Verlängerung von (AB) von A nach B hin, so ist

$$(AX) + (XA') \equiv (AA'), \; (XA') + (A'X') \equiv (A'X') + (XA') \equiv (XX'),$$

es ist aber $(AX) \equiv (A'X')$, folglich $(AA') \equiv (XX')$.

Jedenfalls haben (AA') und (XX') dieselbe Richtung. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 36. *Emp. Bem.* Jedes System einer Dimension, welches von einem materiellen Punkt beschrieben wird, der sich in dem Gebiet unsrer äusseren Beobachtung bewegt, wird eine *materielle Linie* genannt. Abstrahirt man von ihrer Dicke und beachtet nur den von ihr eingenommenen Raum, so erhält man eine *intuitive Linie*. Wir sehen, dass eine solche Linie ein geordnetes System von Punkten ist, deren Ordnung gegeben ist, wie z. B. der Gegenstand der Fig. 36 und dass ein auf der Linie gewähltes Segment (AB) sich in consecutive beliebig kleine Segmente (AA'), $(A'A'')$... derart zerlegen lässt, dass die gradlinigen Segmente (AA'), $(A'A'')$... so klein sind, wie man nur will und umgekehrt.

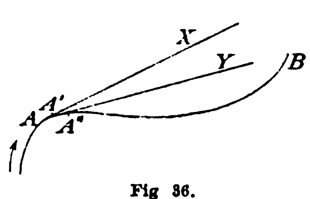


Fig 36.

Wählt man sehr nahe liegende Punkte $AA'A''$ in der Ordnung der Linie, so sehen wir, dass die gradlinigen Striche (AA'), $(A'A'')$ u. s. w. sich materiell d. h. mit grösster Annäherung mit den zwischen diesen Punkten liegenden Segmenten der Linie decken und dass die materielle Linie sich mithin sehr annähernd durch eine aus so vielen gradlinigen Strichen zusammengesetzte (polygonale) Linie ersetzen lässt, deren Striche (Seiten) hinreichend klein sind.

Wir heben noch eine andre Eigenthümlichkeit dieser Linien hervor. Wenn (AA') in der Richtung von A nach A' verlängert wird und man wählt auf der Verlängerung einen Strich $(A'X) \equiv (A'Y)$, unter Y einen beliebigen Punkt des Strahls $A'A''$ von A' nach A'' hin verstanden, und man lässt A' sich hinreichend dem A'' nähern, so fallen die Punkte X und Y mit grosser Annäherung zusammen. Wir geben mithin die folgende Definition.

Def. I. Ist ein System von Punkten einer Dimension (Def. I, § 3) derart gegeben, dass es

1) alle seine Grenzpunkte enthält und dass das gradlinige von den Enden eines seiner beliebig kleinen Segmente bestimmte Segment mit einem Endpunkt in einem beliebigen Punkt des Systems (Bem. I, § 13) so klein ist, wie man nur will und dass

2) jedes Segment (AB) desselben aus beliebig kleinen consecutiven Segmenten zusammengesetzt ist,

so heisst das System *Linie.*[xxvii])[1])

Bem. I. Aus der ersten Eigenschaft geht hervor, dass jeder Grenzpunkt auf der Linie auch Grenzpunkt im allgemeinen Raum ist (Def. II, § 12) und aus der zweiten, dass jeder Punkt, welcher kein Ende der Linie aber das Ende eines ihrer Segmente (AB) ist,

1) Für unsre Untersuchungen reicht es aus, die Def. I in dem auf eine Einheit bezüglichen Sinn zu gebrauchen.

xxvii) Bleibt man in dem endlichen Gebiet allein und gilt stets das Ax. V des Archimedes für die gradlinigen Segmente, so ist es nicht nöthig von endlichem Gebiet und endlicher Einheit zu sprechen; es versteht sich dies von selbst.

Grenzpunkt zweier Reihen von Segmenten ist, von denen die eine beständig wächst, die andre von einem andern Punkt der Linie aus stets abnimmt.

Bem. II. Wir untersuchen nicht, ob jedes System einer Dimension, welches Linie genannt wird, in unsrer Definition enthalten ist oder nicht.[1] Wir bemerken nur, dass die materielle Linie, die durch eine Linie mit gradlinigen Strichen ersetzt werden kann der Eigenschaft der Graden wegen, die der Def. I genügt (Satz V, § 10 und Einl. a', § 95), in dieser Def. I enthalten ist.

Wir untersuchen auch nicht, ob jede Linie oder ein Segment derselben, das der Def. I entspricht, mit allen seinen Eigenschaften sich durch eine intuitive Linie (Emp. Bem.) darstellen lässt oder nicht, weil wir es füs unsre Forschungen nicht nöthig haben.[2]

Auch die einfache Linie genügt der Def. I, wie aus Def. I und Satz VII, § 13 hervorgeht.

Bem. III. Wir geben die Definition der intuitiven Linie nicht, weil wir sie im Grunde für unsre Untersuchungen nicht nöthig haben und weil sie überdies in der obigen Def. enthalten ist.

Def. II. Sind mehrere Linien oder Segmente von Linien (Def. I) gegeben:

$$(A) \equiv \cdots A \cdots A_1 \cdots A_2 \cdots A_m \cdots, \quad (B) \equiv \cdots B \cdots B_1 \cdots B_2 \cdots B_m \cdots,$$
$$(C) \equiv \cdots C \cdots C_1 \cdots C_2 \cdots C_m \cdots, \quad (X) \equiv \cdots X \cdots X_1 \cdots X_2 \cdots X_m \cdots$$

u. s. w., derart dass die Punkte der Reihen derselben (Def. I und Einl. Def. I, § 62) sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen (Einl. Def. III, § 42), wobei jedoch nicht ausgeschlossen ist, dass einige oder alle Punkte einer oder mehrerer Reihen zusammenfallen und dass die Punkte einer oder mehrerer Reihen mehrmal dieselbe Linie oder dasselbe Liniensegment bedecken, so heisst das Figurensystem $\ldots ABCD \ldots X \ldots, \ldots A_1 B_1 C_1 \ldots X_1 \ldots$ u. s. w. *stetiges Figurensystem einer Dimension.*

Die Figuren $\ldots ABCD \ldots X \ldots, \ldots A_1 B_1 C_1 \ldots X_1 \ldots$ heissen *consecutiv*, wenn AA_1, BB_1 u. s. w. consecutive Punkte der Linien (A), (B) u. s. w. sind und man unter consecutiven Punkten AA_1 solche versteht, für welche (AA_1) kleiner als jedes gegebene Segment der Linie (A) wird.

Die gegebenen Linien oder Liniensegmente heissen *Linien der entsprechenden Punkte der Figuren des Systems*, welche sich wie gesagt auch auf einen einzigen Punkt reduciren oder mehrmal dieselbe Linie oder dasselbe Liniensegment bedecken können.

Def. III. Ist der Zusammenhang zwischen den Punkten zweier beliebigen Figuren des Systems z. B. zwischen $\ldots ABC \ldots X \ldots$ und $\ldots A_1 B_1 C_1 \ldots X_1 \ldots$ ein Identitätszusammenhang (Bem. III, § 15) und entsprechen sich die sich in

---

1) Wie wir schon öfter gesagt haben, ist es nicht unsre Absicht, allgemeine Definitionen zu geben, die für jeden Fall gelten (siehe z. B. Einl. Anm. zu § 4), sondern solche, die in den von uns in Betracht gezogenen Fällen gültig sind und vorher schon mit demselben Namen bezeichnete Dinge in sich fassen.

2) Ist eine beliebige stetige Function $y = f(x)$ in dem Intervall (ab) (siehe z. B. *Dini* a. a. O. S. 35—37 und 46) und man stellt diese Function in der Euclid'schen Ebene (xy) dar, so bestimmen alle durch y gegebenen Punkte, wenn sie in der Ordnung der entsprechenden Werthe der x betrachtet werden, in dem Intervall (ab) ein Segment (AB) eines Punktesystems einer Dimension, welches der Def. I genügt. Die Function y kann aber auch in allen Punkten eine Derivirte nicht zulassen und mithin die so erhaltene Linie nicht wie die intuitive Linie eine Tangente gestatten (*Dini* a. a. O. S. 67). Aber auch wenn sie überall eine Derivirte hat, so muss, soll man sie durch eine intuitive Linie darstellen können, auch die Reihe der Tangenten stetig sein (Emp. Bem.).

diesem Zusammenhang entsprechenden Theile der beiden Figuren auch in dem Zusammenhang des stetigen Systems, so heisst dieses System *stetiges System einer Dimension unveränderlicher Figuren* (siehe weiter unten Bem. IV).

Def. IV. Wenn die geordneten Gruppen (A), (B) der Def. III in einer Graden liegen und die Segmente zwischen den entsprechenden Punktepaaren gleich sind: $(AB) \equiv (A_1B_1)$ u. s. w., so heisst das System *stetiges System unveränderlicher Segmente auf der Graden.*

Bem. IV. Wir haben uns hauptsächlich mit den stetigen Systemen unveränderlicher Figuren zu beschäftigen. Es kann ein stetiges System gleicher Segmente (AB), (A_1B_1) u. s. w. (Def. II) geben, ohne dass die Segmente der entsprechenden Punktepaare gleich wären. Es ist dies z. B. der Fall, wenn in dem Segment (AB) ein Punkt X liegt, mit welchem alle Punkte der Gruppe (X) zusammenfallen (Def. II), Wenn A_1 in (AX) enthalten ist, so muss B_1 ausserhalb des Segments (XB) in der Richtung von (AB) fallen derart dass $(AB) \equiv (A_1B_1)$ (Zus. I, Satz III, § 4; Einl. Def. I, § 61 und d, § 73). In diesem Fall ist aber nicht $(AX) \equiv (A_1X_1) \equiv (A_1X)$ und auch nicht $(XB) \equiv (XB_1)$. [1]

Bem. V. Es ist zu beachten, dass die Definitionen dieses Paragraphen von der Existenz der definirten Figuren abhängen; wir werden dieselbe für jeden besondern Raum, mit dem wir uns beschäftigen, nachweisen.

In dem allgemeinen Raum können wir mittelst der Sätze in §§ 16 und 17 und Satz II, § 31; Satz IV, § 12 solche Systeme construiren.

Satz I. In jedem stetigen System unveränderlicher Segmente auf der Graden sind die Segmente congruent.

(AB), (A_1B_1) seien zwei beliebige Segmente des Systems und mithin gleich (Def. IV). Es ist vorerst zu beachten, dass jedem Punkt A_1 des Segments (AB) nicht in dem System ein Punkt B_1 desselben Segments entsprechen kann, weil sonst (AB) nicht identisch mit (A_1B_1) sein könnte (Ax. II, a und Einl. Def. I, § 61; d, § 73).

1) Wir wollen zuerst annehmen, A_1 läge innerhalb (AB) und (A_1B_1) habe die entgegengesetzte Richtung. Der Punkt B_1 muss in dem zu (AB) in Bezug auf A symmetrischen Segment (AB') (Def. II, § 35) enthalten sein, weil $(A_1B_1) \equiv (AB')$ und A_1 ausserhalb des Segments (AB') in (AB) liegt. Wenn (A_1B_1) (AB') enthielte, so wäre es ihm (Einl. Def. I, § 61 oder d, § 73; b, § 61) und mithin auch (AB) nicht gleich (Einl. Def. II, § 61). Den Punkten B_r innerhalb (B_1A) können Punkte A_r von (AA_1) nicht entsprechen, weil sonst nicht $(A_rB_r) \equiv (A_1B_1) \equiv (AB)$ wäre (Def. I, § 61 oder d, § 73). Mithin müssen den Punkten A_r von (AA_1) Punkte B_r ausserhalb des Segments (BB_1) entsprechen, da ihnen aus demselben Grund auch keine Punkte von (A_1B) entsprechen können.

B' B_1 A A_1 B

Fig. 37.

B_1 B' A_1 A B

Fig. 38.

A B_1 B A_1

A B B_1 A_1

Fig. 39.

Den Punkten von (AA_1), welche ein Continuum bestimmen, entsprechen also eindeutig die Punkte des zweiten von B und B_1 bestimmten Segments, welches A nicht enthält (Def. IV). Man kann aber ausserhalb des Segments

---

1) In der Sprache der Bewegung (Einl. § 67) würde man sagen: der Theil (AX) verkürzt sich, während sich (XB) um ebensoviel verlängert, so dass die Gleichheit zwischen (AB) und (A_1B_1) und nicht die Unveränderlichkeit bestehen bleibt.

(BB_1) einen Punkt B_r so wählen, dass nicht $(A_rB_r) \equiv (AB)$ ist; es genügt dazu, dass (BB_r) grösser als (AA_1) genommen wird. Folglich ist es widersinnig, dass (A_1B_1) in diesem Fall die zu (AB) entgegengesetzte Richtung habe; es ist mithin mit (AB) congruent (Def. I, § 35) (Fig. 37).

2) Wenn dagegen A_1 ausserhalb des Segments (AB) z. B. in der Richtung von B nach A hin liegt und (A_1B_1) nicht dieselbe Richtung wie (AB) hat, so kann jedem Punkt A_r von (AA_1) nicht ein Punkt B_r ausserhalb des Segments (AB) in der Richtung von (AB) entsprechen, weil sonst (AB) ein Theil von (A_rB_r) wäre, während es doch identisch mit ihm sein muss. Auch kann dem A_r nicht ein Punkt ausserhalb des Segments (A_1B_1) in der Richtung (A_1B_1) entsprechen, da sonst (A_1B_1) ein Theil von (A_rB_r) wäre. Es muss folglich dem A_r ein Punkt B_r des Segments (BB_1) entsprechen. Man kann aber in diesem Segment einen Punkt B_r immer so wählen, dass (A_rB_r) dem (AB) nicht gleich ist (Def. IV); es ist also auch hier nicht möglich, dass (A_1B_1) entgegengesetzte Richtung zu (AB) hat.

3) Es erübrigt noch der Fall, dass A_1 ausserhalb (AB) in der Richtung von (AB) liegt. Es ist aber leicht zu sehen, dass man dann auf einen der vorigen Fälle zurückkommt. Denn hat (A_1B_1) die entgegengesetzte Richtung zu (AB), und liegt B_1 in (AB), so ist $(BA) \equiv (A_1B_1)$ (Einl. g, § 99) und betrachtet man dagegen die Segmente (B_1A_1), (AB), so liegt das Element B in (B_1A_1), wie A_1 im ersten Fall in (AB) lag. Fällt dagegen B_1 ausserhalb (AB), so liegt es in der Richtung von (AB), weil sonst (A_1B_1) das Segment (AB) als einen Theil enthalten würde; betrachtet man dann (B_1A_1), so fällt das Element B ausserhalb dieses Segments in der Richtung (A_1B_1), womit man auf den zweiten Fall zurückkommt.

Zweiter Beweis. Wenn sich A_1 unbegrenzt dem A nähert, so muss sich B_1 wegen des Zusammenhangs zwischen den Punkten A und B (Def. II) unbegrenzt dem B nähern und wenn daher A_1 innerhalb (AB) liegt, so muss B_1 so nahe man will an B aber ausserhalb (AB) liegen, weil $(AB) \equiv (A_1B_1)$ ist (Einl. a, § 99); mithin haben (AB), (A_1B_1) dieselbe Richtung. Wenn dagegen A_1 ausserhalb (AB) und beliebig nahe an A sich befindet, so muss B_1 aus demselben Grund so nahe, wie man nur will, an B und innerhalb (AB) liegen. Wenn mithin (AB) und (A_1B_1) consecutiv sind, so haben sie dieselbe Richtung. Ist nun ein Segment (AA_1) gegeben, so kann es als Summe beliebig oder unbegrenzt kleiner Theile betrachtet werden (Einl. § 105 und Def. I, § 95) und weil nun die Eigenschaft für jedes zu (AB) consecutive Segment (A_1B_1) gilt, so ist damit der Satz bewiesen.

Zus. Zwei symmetrische Segmente können niemals einem stetigen System unveränderlicher Segmente angehören (Def. II, § 35).

Satz II. In einem stetigen System unveränderlicher Segmente können die Segmente keine gemeinschaftlichen sich entsprechenden Punkte haben (Satz I, § 35 und Satz I).

Satz III. Sind zwei beliebige Segmente (AB), (A_1B_1) eines stetigen Systems unveränderlicher Segmente auf der Graden gegeben, so sind die Segmente

zweier beliebiger sich entsprechender Punkte des Systems congruent (Satz II, § 35; Satz I).

Satz IV. Ein Paar congruenter Segmente (AB) und (A_1B_1) der Graden ist ein Theil eines stetigen Systems unveränderlicher Segmente in einer gegebenen Richtung der Graden.

Es genügt A dem A_1, B dem B_1 und den Punkten von (AA_1) in derselben Ordnung die Punkte von (BB_1) derart entsprechen zu lassen, dass die Segmente zwischen den entsprechenden Punkten (AA_1) gleich sind, was stets möglich ist, weil $(AA_1) \equiv (BB_1)$ (Satz II, § 35 und Satz a und e, § 99).

23.

Praktisches Axiom. — Wirkliche Bewegung auf der Graden.[xxviii]

§ 37. *Emp. Bem.* Um auf einem gradlinigen Gegenstand (Einl. Fig. 1) oder auf verschiedenen gradlinigen Gegenständen zwei gleiche Segmente construiren zu können (Bem. V, § 4), haben wir ein *praktisches Hülfsmittel* nöthig, das durch die bisherigen Axiome und Hypothesen, welche der theoretischen Entwicklung der Geometrie aber nicht der praktischen Anwendung derselben genügen, nicht gegeben ist. Nehmen wir nun die Erfahrung zu Hülfe, so sehen wir, wenn wir einen Körper, der sich in einem physisch homogenen Mittel bewegt, in zwei verschiedene Lagen beobachten, dass der in der zweiten Lage von ihm eingenommene Platz dem in der ersten Lage eingenommenen *gleich* ist, so dass die Theile des von demselben Theil des Körpers eingenommenen Platzes gleich sind. Wir sagen mithin, der Körper könne sich *ohne Deformation* bewegen. Wir sehen überdies, dass ein beliebiger materieller Punkt eines Körpers sich von einem gegebenen Punkt aus in dem von jedem gradlinigen durch den gegebenen Punkt gehenden Gegenstand eingenommenen Ort bewegen kann und dabei die Lage aller andern Punkte des Gegenstandes einnimmt. Wir sagen daher, der Körper könne sich *frei* bewegen.

Das praktische Axiom, welches für die praktische Anwendung der Geometrie bestimmt ist, ist das folgende:

Ein Körper kann sich ohne Deformation bewegen.

Bem. I. Dieses Axiom *setzt* offenbar die Eigenschaft des Anschauungsraums *voraus* (Emp. Bem. I), dass in der ihm entsprechenden abstracten Form stetige Systeme unveränderlicher Figuren existiren (Def. III, § 36), welche den Figuren derjenigen Systeme analog sind, die von dem in Bewegung befindlichen Körper beschrieben werden. Ihre Existenz werden wir bei der Construction dieser abstracten Figur beweisen.[1])

Wenn wir die Bewegung abstract behandeln, das heisst den Satz voraussetzen, dass ein Körper sich in der That und nicht in dem Sinn des § 67 der Einleitung in der äusseren Welt bewegt, den wir bisher manchmal der bequemeren Ausdrucksweise wegen benutzt haben, so werden wir den Punkten des Körpers volle Freiheit der Bewegung unter sich lassen, so dass jeder Punkt des Körpers sich unabhängig von den andern bewegen kann. *Wir verstehen dabei unter frei auch, dass der Punkt allen Bedingungen unterworfen werden kann, die mit den geometrischen Eigenschaften der Umgebung, in welcher er sich bewegt, bezüglich der anderen Punkte vereinbar sind.*

Das folgende Axiom nennen wir ebenfalls praktisch, weil wir es für die Theorie nicht nöthig haben.

Prakt. Ax. II. **Die Punkte einer beliebigen Figur können sich frei und**

1) Siehe Buch III dieses Theils und die Vorrede.

xxviii) Während das praktische Axiom I für das endliche Gebiet allein ein nothwendiges Axiom wird (Anm. XVI, XVIII), bleibt das praktische Axiom der Bewegung rein praktisch mit Ax. II sowohl als II'.

unabhängig voneinander bewegen, indem jeder eine intuitive Linie beschreibt, so jedoch, dass die Lagen der Punkte der Figur eindeutig und in derselben Ordnung den successiven Lagen entsprechen, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass mehrere Punkte denselben Ort in einer successiven Lage einnehmen. [1]

Def. I. Ein Punkt und eine Figur, deren Punkte sich nicht bewegen, heissen *festliegend.*

Bem. II. Die Lagen der Punkte der Figur liefern die Lagen der Figur selbst.

Satz I. Wenn sich ein Segment (AB) *auf der Graden bewegt, so beschreibt es ein stetiges System von Segmenten auf der Graden.*

Denn jeder Punkt des Segments beschreibt eine intuitive Linie, welche die Grade oder ein Strich der Graden ist (Pr. Ax. II) und welche sich auch in speciellen Fällen auf einen Punkt reduciren kann (Pr. Ax. II), so dass die verschiedenen Lagen zweier Punkte $X, X_1, X_2, \ldots; Y, Y_1, Y_2, \ldots$ sich in derselben Ordnung entsprechen (Pr. Ax. II). Wenn sich mithin X_1 unbegrenzt dem X nähert, so kommt Y_1 unbegrenzt dem Y nahe und umgekehrt. Damit ist also der Def. II, § 36 auf der Graden genügt.

Bem. III. Frei bedeutet hier, dass sich das Segment längs aller stetigen Systeme von Segmenten, die auf der Graden, welcher es angehört, möglich sind, bewegen kann.

Def. II. Wenn eine sich bewegende Figur ein System unveränderlicher Figuren beschreibt, so sagen wir, *sie bewege sich ohne Deformation.*

Satz II. Ein Segment kann sich auf der Graden so bewegen, dass es unverändert bleibt.

Man braucht nur die Punkte des Systems zu nöthigen die Gruppen der entsprechenden Punkte eines stetigen Systems unveränderlicher Segmente, von dem das gegebene Segment einen Theil ausmacht, zu durchlaufen (Pr. Ax. II; Def. III, § 36 und Bem. III).

Bem. IV. Die Möglichkeit dieser Bewegung geht offenbar aus der Existenz dieses Systems auf der Graden hervor, welche von der Homogenität und Stetigkeit der Graden abhängt (Satz II, Satz III und Zus. II, Ax. II, a, § 4).

Bem. V. Da wir bei unseren Forschungen nur die Bewegung ohne Deformation, welche wie gesagt zur praktischen Ausführung unsrer Constructionen im äusseren Gebiet dient, in Betracht ziehen, so sagen wir für die Zukunft kurz statt Bewegung einer Figur ohne Deformation nur Bewegung einer Figur; wir beweisen jedoch vorher, wie es für die Grade geschehen ist, die Existenz stetiger Systeme unveränderlicher Figuren in dem Ding, welches wir vorher construirt haben.

Def. III. Wenn man sagt, ein Punkt bewege sich in einer *gegebenen Richtung* auf der Graden, so bedeutet dies, dass die Lagen eines jeden Punktes A in einer gegebenen Richtung von A aus auf der Graden liegen (Def. II, § 32). Dies gilt auch für das Segment.

Wenn sich ein Segment auf der Graden in einer gegebenen Richtung bewegt und dabei ein System unveränderlicher Segmente beschreibt, so sagen wir, es *laufe* auf der Graden in einer gegebenen Richtung.

1) Auf diese Weise ist der Zusammenhang zwischen einer Lage und der successiven eindeutig, kann aber möglicher Weise nicht reciprok sein (Einl. Def. II, § 42). Sieht man jedoch die Punkte, die in einem Punkt zusammenfallen, als verschieden an, so ist der Zusammenhang auch reciprok.

Satz III. Ein Segment, das auf der Graden läuft, bleibt sich selbst congruent (Satz I, § 36 und Def. III).

Satz IV. Wenn man einen Punkt eines Segments einer Graden festhält, so kann das Segment nicht auf der Graden laufen (d. h. alle anderen Punkte des Segments bleiben fest liegen) (Satz II, § 36; Def. I und Def. III).

Satz V. Wenn ein Segment auf der Graden in einer oder der anderen Richtung läuft, so sind in jeder Lage die von seinen Punkten beschriebenen Segmente congruent (Satz III, § 36 und Def. III).

Satz VI. Zwei congruente Segmente der Graden lassen sich ohne Deformation das eine auf das andre übertragen (Satz IV, § 36 und Def. II).

Satz VII. Zwei symmetrische Segmente auf der Graden lassen sich nicht ohne Deformation das eine auf das andere übertragen (Zus. Satz I, § 36 und Def. II und III).

Buch II.

Die Ebene.

I. Kapitel.

Das Strahlenbüschel und die Euclid'sche Ebene.

1.

Winkelsectoren und Winkel eines Strahlenbüschels.[XXIX])

§ 38. *Def. I.* Ein beliebiger Theil eines Strahlenbüschels, der von zwei Strahlen a und b begrenzt wird (Satz I und Def. I, § 30; Einl. Def. I, II § 62 und Def. II, § 27) heisst *Winkelsector des Büschels* oder einfach *Sector; a* und b *die Schenkel, R der Scheitel des Winkelsectors.*

Sind A und B die Punkte der Directrix r des Büschels, welche mit R die Strahlen a und b bestimmen, so heissen auch die Segmente (RA) und (RB) *Schenkel.*

Bem. I. In Folge des eindeutigen Zusammenhangs zwischen den Strahlen des Büschels und den Punkten der vollständigen Directrix (Satz I, § 30) entspricht jedem Segment der Directrix ein Winkelsector des Büschels und umgekehrt.

Def. II. Der Winkel der zwei Endstrahlen eines Winkelsectors ist der Sector selbst, insofern er als durch jeden anderen ihm gleichen Sector bei jeder Vereinigung mit anderen Sectoren ersetzbar betrachtet wird.[1])

Oder auch:

Dasjenige, was man aus dem Winkelsector erhält, wenn man von der gegenseitigen Lage seiner Theile, welche ebenfalls Winkelsectoren sind, abstrahirt, heisst *der Winkel* des Sectors.

---

1) Der Winkel zweier Strahlen in einem Winkelsector ist die intensive Grösse des Sectors, wie der Abstand zweier Punkte A und B in einem Segment (AB) die intensive Grösse des Segments ist (Anm. 2, Def. I, § 5; Einl. Def. II, a und c, § 111). Siehe Anm zu § 40.

XXIX) Sowohl bei Ax. II als Ax. II' (Anm. IV) kann man die Definition und die Eigenschaften des Büschels an der in Anm. XLI angegebenen Stelle geben.

Bem. II. Wenn es gleichgültig ist, ob man den Winkel oder den Winkelsector betrachtet, so gebrauchen wir oft, dem allgemeinen Gebrauch gemäss, das Wort „Winkel" statt „Winkelsector", wie es auch mit den Worten „Abstand" und „Segment" der Fall ist, obgleich diese sowohl wie die ersteren verschiedene Dinge bezeichnen.

Bez. I. Den von dem Segment (AB) in Verbindung mit dem Punkt R bestimmten Winkelsector oder Winkel bezeichnen wir auch mit $R \cdot (AB)$ oder $\widehat{ARB}$ oder auch $\widehat{BRA}$.

Def. III. Wir sagen, der Winkelsector oder Winkel $R \cdot AB$ sei zwischen seinen Schenkeln RA, RB oder (RA) und (RB) *enthalten* (Def. I).

Bem. III. Wie zwei Punkte A und B der vollständigen Graden (Hyp. V und Def. I, § 29) zwei Segmente auf ihr bestimmen, welche zusammengenommen die ganze Grade ausmachen (Einl. c, § 64), so bestimmen auch zwei Strahlen a und b oder RA, RB in dem Büschel zwei Winkelsectoren, welche das ganze Büschel bilden (Satz I, § 30).

Def. IV. Unter Winkelsector und Winkel zweier Strahlen in einem Büschel verstehen wir immer den kleinsten; bestimmen die Strahlen zwei gleiche Winkelsectoren, so ist es gleichgültig, welchen man in Betracht zieht, wenn man ihre Verschiedenheit nicht in Rechnung zu ziehen braucht.

Bem. IV. Wenn der Winkelsector $(a\,b)$ gegeben ist, so soll seine Richtung, wo nicht Anderes bestimmt wird (Einl. Bez. I, § 64), diejenige sein, welche von a nach b führt. Analog soll bei den Symbolen $\widehat{ARB}$, $R \cdot (AB)$ die Richtung von RA nach RB führen.

Def. V. Jeder Winkelsector des Büschels, dessen Schenkel zwei entgegengesetzte Strahlen a und a' sind, heisst *flach*.

Def. VI. Zwei Winkelsectoren (ab), $(a'b')$ des Büschels, deren Schenkel entgegengesetzte Strahlen sind (Def. I, § 7), heissen *Scheitelwinkelsectoren*.

Def. VII. Zwei Winkelsectoren (ab), (ba') des Büschels, welche einen Schenkel gemeinschaftlich haben und deren andern beiden Schenkel entgegengesetzte Strahlen sind, heissen *Nebenwinkelsectoren*.

Bem. V. Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, dass zwei Nebensectoren zusammen einen flachen Sector geben (Def. V).

Def. VIII. Zwei gleiche Nebensectoren heissen *rechte*.

Def. IX. Wenn das Centrum des Graden- oder Strahlenbüschels im Unendlichen liegt, so heisst das Büschel auch *Büschel paralleler Graden oder Strahlen*.

Sprechen wir ohne besondre Bemerkung von einem Strahlenbüschel, so meinen wir immer, sein Centrum liege im endlichen Gebiet (Bem. § 31 und Uebereink. § 28).

Def. X. Der Winkelsector eines Büschels paralleler Strahlen heisst *Streifen* und die Graden oder Strahlen, welche ihn begrenzen, *Schenkel* des Streifens.

Def. XI. Betrachtet man die beiden auf den zwei Graden α und β eines Büschels gelegenen Paare entgegengesetzter Strahlen a, a'; b, b', so heissen die Winkelsectoren oder Winkel $(a\,b)$, $(b\,a')$, $(a'\,b')$, $(b'a)$ *Winkelsectoren und Winkel der beiden Graden*.

Bem. VI. Zwei beliebige verschiedene Punkte der Graden bestimmen im Euclid'schen System die Grade (Satz II, § 30); es lässt sich aber nicht behaupten, dass zwei Strahlen, die in einem P[illegible] R endigen, ein einziges Büschel bestimmen. Denn nehmen wir auf

den beiden Strahlen zwei Punkte A und B an, so bestimmt die Grade AB mit R ein einziges Büschel (Def. I, § 30); wir wissen aber noch nicht, ob alle Büschel, die man erhält, wenn man andre Punktepaare A und B auf den Strahlen a, b in Betracht zieht, zusammenfallen.

Wenn wir auf der Directrix des Büschels, welche nicht im Unendlichgrossen liegt, zwei beliebige gleiche Segmente (AB) und (CD) betrachten, so sind die Winkelsectoren ARB, CRD im Allgemeinen keine gleichen Figuren. Denn wenn A und B verschiedenen Abstand von R haben und wir wählen den Mittelpunkt M des Segments (AB), so sind die beiden Dreiecke ARM, MRB nicht gleich, weil ihre drei Seiten nicht gleich sind (Satz II, § 15) und mithin sind im Allgemeinen, wie wir in der Folge sehen werden, auch die Sectoren $\widehat{ARM}$, $\widehat{MRB}$ nicht gleich.

2.

Das Büschel (Rr_∞). — Winkelsector und Winkel zweier Strahlen. — Erste Eigenschaften derselben. — Winkeleinheit.[xxx])

§ 39. *Bem. I.* Eine im Unendlichgrossen liegende gegebene Grade können wir als absolute Grenzgrade eines jeden Punktes R des endlichen Gebiets betrachten (Satz III, IV, § 32). Man muss sich gegenwärtig halten, dass die absoluten Grenzgebiete der Punkte des endlichen Gebiets in Bezug auf die endliche und unendlich grosse Einheit zusammenfallen, in absolutem Sinn aber verschieden sind (Satz IV, § 32) und wenn man die Grade r_∞ in Bezug auf die endliche und unendlich grosse Einheit als absolute Grenzgrade der zwei Punkte A und B des endlichen Gebiets betrachten kann, so weiss man doch, dass diese beiden Graden in absolutem Sinn bestimmt und verschieden sind.

Bem. II. Für das Büschel (Rr_∞) gelten dieselben Eigenschaften, die für die Büschel (Rr) festgestellt wurden, doch werden wir sogleich sehen, dass es noch andre Eigenschaften besitzt, die wir erst später, wenn wir bewiesen haben, dass alle Strahlenbüschel (Rr) identisch sind, auf die andern Büschel ausdehnen können.

Satz I. Zwei gleiche Segmente $(A_\infty B_\infty)$, $(C_\infty D_\infty)$ der Graden r_∞ bestimmen um den Punkt R zwei gleiche Winkelsectoren.

Denn die beiden Dreiecke $A_\infty RB_\infty$, $C_\infty RD_\infty$ sind gleich (Satz III, § 34 und Bem. I).

Satz II. Zwei derart ungleiche Segmente $(A_\infty B_\infty)$, $(C_\infty D_\infty)$, dass $(A_\infty B_\infty) > (C_\infty D_\infty)$, bestimmen zwei solche ungleiche Sectoren $R\cdot(A_\infty B_\infty)$, $R\cdot(C_\infty D_\infty)$, dass $R\cdot(A_\infty B_\infty) > R\cdot(C_\infty D_\infty)$.

Dieser Satz geht aus Satz I und der Definition des Strahlenbüschels hervor wegen des eindeutigen und in derselben Ordnung stattfindenden Zusammenhangs zwischen den Strahlen des Büschels und den Punkten der Graden (Satz I, § 30) und wegen der Def. I, II, § 61 der Einl.

Zus. I. Zwei gleiche Sectoren des Büschels (Rr_∞) bestimmen auf der Graden r_∞ zwei gleiche Segmente.

Wären die durch die beiden Sectoren auf der Graden r_∞ bestimmten Segmente $(A_\infty B_\infty)$, $(C_\infty D_\infty)$ ungleich, so würden der Voraussetzung zuwider die beiden Sectoren ungleich sein (Satz II u. Einl. b, b′, § 61).

Satz III. Jedes in Bezug auf die vollständige Grade r_∞ endliche Segment bestimmt in Bezug auf das ganze Büschel (Rr_∞) einen endlichen Sector.

[xxx]) Dieser ganze Abschnitt ist selbstverständlich wegzulassen, wenn man sich, wie in diesen Anm. vorausgesetzt wird, nur auf das endliche Gebiet beschränkt (Anm. I).

Denn wenn $(A_x B_x)$, $(C_x D_x)$ der Graden r_x endlich zueinander sind, das eine kein Vielfaches des andern und $(A_x B_x) < (C_x D_x)$ ist, so gibt es eine solche Zahl m, dass

$$(A_x B_x)m < (C_x D_x) < (A_x B_x)(m+1). \quad \text{(Einl. c}', \S\ 81)$$

Mithin ist auch

$$R \cdot (A_x B_x)m < R \cdot (C_x D_x) < R \cdot (A_x B_x)(m+1) \quad \text{(Satz I, II)}$$

und die Sectoren $R \cdot (A_x B_x)$, $R \cdot (C_x D_x)$ sind also endlich zueinander (Einl. d, d′, § 81 und Def. II, § 82).

Satz IV. Ein Strahlenbüschel (Rr_x) ist in der Position seiner Theile identisch.

Denn die Grade r_x ist in der Position ihrer Theile identisch (Ax. II, a und Hyp. I) und es gibt mithin von einem beliebigen Punkt derselben an in der einen und der andern Richtung ein einem beliebigen gegebenen Segment gleiches Segment (Zus. II, Satz III, § 4 und Bem. III, § 18), während gleichen Segmenten der Graden r_∞ gleiche Winkelsectoren des Büschels (Rr_x) entsprechen (Satz I, Einl. Def. I, § 70).

Satz V. Ein Sector (ab) des Büschels (Rr_x) ist dem Sector (ba) gleich, d. h. demselben Sector in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.

Denn dies gilt für jedes Segment $(A_x B_x)$ der Graden r_∞ (Einl. g, § 99 und c, § 104).

Satz VI. Zwei Strahlenbüschel, deren Centren in dem endlichen Gebiet und deren Directricen im Unendlichgrossen liegen, sind in absolutem Sinn gleich, wenn die Directricen absolute Grenzgraden der beiden Centren sind oder in Bezug auf die endliche und unendlich grosse Einheit, wenn die Directricen in den absoluten Grenzgebieten zweier Punkte des endlichen Gebiets liegen.

Denn es seien R, r_x; R', r'_x die Centren und Directricen der beiden Büschel. Sind die Directricen absolute Grenzgraden von R und R', so stehen R und R' von den Punkten der Graden r_x und r'_x um ein rechtes Segment ab (Satz III, § 32). Setzt man mithin zwischen den beiden Graden r_x und r'_x einen Identitätszusammenhang fest (Satz VI, § 15) und lässt dem Punkt R' den Punkt R entsprechen, so entspricht jedem Dreieck $RA_x B_x$ der ersten Figur (Rr_x) ein gleiches Dreieck $R'A'_x B'_x$ der zweiten Figur (Satz III, § 17; Satz III, § 34). Wählt man mithin zwei auf den Strahlen RA_x, RB_x gelegene Punkte X und Y, so entsprechen ihnen zwei Punkte X' und Y' in $R'A'_x$, $R'B'_x$, welche denselben Abstand von R' haben, wie die Punkte X und Y bez. von R. Die beiden Dreiecke RXY, $R'X'Y'$ sind also gleich, weil sie zwei Seiten und das eingeschlossene Paar gleich haben (Satz III, § 16). Mithin ist $(XY) \equiv (X'Y')$ (Zus. Satz III, § 16). Folglich sind die beiden Figuren (Rr_x), $(R'r'_x)$ gleich (Satz III, § 15).

Der zweite Theil des Satzes geht auf ähnliche Art aus Satz IV, § 32 hervor.

Satz VII. Wenn man auf zwei gegebenen Graden AB, AC zwei beliebige im Unendlichgrossen liegende Punkte B_x, C_x auswählt und $(B_x C_x)$ ist in Bezug auf die vollständige Grade endlich und die Grade $B_x C_x$ fällt nicht mit einer der beiden Graden in Bezug auf die unendlich grosse Einheit zusammen, so sind die beiden Graden in dem endlichen Gebiet verschieden.

Da die Grade $B_x C_x$ mit keiner der beiden Graden AB_∞, AC_∞ zusammenfällt, so sind diese beiden Graden bezüglich der unendlich grossen (Satz IV, § 22) und mithin auch bezüglich der endlichen Einheit verschieden (Satz II, § 31).

Satz VIII. Wenn zwei im absoluten Grenzgebiet eines Punktes A liegende Punkte B_x, C_x endlichen Abstand voneinander haben, so fallen die beiden Strahlen, die A mit den beiden gegebenen Punkten verbinden, bezüglich der endlichen Einheit zusammen.

Denn das Segment $(B_x C_\infty)$ ist in Bezug auf die unendlich grosse Einheit unendlich klein und mithin fallen die beiden Graden AB_∞, AC_x bezüglich dieser Einheit (Satz II und Bem. § 31 und Satz III, § 22) und folglich auch bezüglich der endlichen Einheit zusammen (Satz II und Bem. § 31).

Def. I. Unter Winkelsectoren zweier im Punkt R endigender Strahlen a und b verstehen wir immer diejenigen Sectoren, welche in dem Büschel betrachtet werden, das durch den Punkt R und durch seine von seinen absoluten Grenzpunkten in a und b gegebene absolute Grenzgrade bestimmt wird (Def. II, § 32 und Satz III, § 32), solange wir nicht Anderes bestimmen.

Bem. III. Gleichen Segmenten der Graden r_∞ entsprechen gleiche Winkelsectoren um den Punkt R in dem Büschel (Rr_x) und umgekehrt (Satz I und Zus. I, Satz II). *Als Mass der Winkelsectoren oder Winkel um den Punkt R, die dem nämlichen Büschel angehören oder nicht, sehen wir die Segmente oder Abstände an, welche durch die absoluten Grenzpunkte auf ihren Endstrahlen in Bezug auf den Punkt R bestimmt werden. Umgekehrt kann man als Mass der Segmente einer Graden r_x die Winkelsectoren um den Punkt R, von dem r_∞ eine absolute Grenzgrade ist, ansehen* (siehe Einl. Def. IV, § 111).

Zus. I. Wenn zwei Strahlen RA, RB in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets verschieden sind, so bestimmen sie einen endlichen Sector.

Denn wäre er nicht endlich, so würde ihm auf der absoluten von den Strahlen RA, RB bestimmten Grenzgraden von R ein bezüglich der unendlich grossen Einheit unendlich kleines Segment $(A_x B_x)$ entsprechen (Satz III) und die beiden Strahlen würden mithin bezüglich der Einheit des endlichen Gebiets nicht verschieden sein.

Zus. II. Verbindet man die Enden zweier endlichen Segmente (AB), (CD) mit einem Punkt R ausserhalb (AB) und (CD), so erhält man zwei endliche Sectoren (ab), (cd).

Denn R gibt mit A und B wie mit C und D zwei verschiedene Strahlen in Bezug auf die Einheit des endlichen Gebiets, weil R ausserhalb AB und CD liegt (Satz IV, § 22).

Zus. III. In einem Dreieck ABC mit einer unbegrenzt kleinen Seite ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel unbegrenzt klein (Satz III, § 22).

Satz IX. Wenn zwei Winkelsectoren gleiche Winkel haben, so sind die beiden Sectoren gleich.

Denn dies gilt für zwei Sectoren eines Büschels (Rr_∞), weil es für ihre im Unendlichgrossen liegenden Segmente in Bezug auf deren Länge gilt (Def. I, Satz I, § 5). Die Eigenschaft besteht aber auch für zwei Sectoren zweier solcher Büschel (Satz VI und Def. I) und mithin für zwei beliebige Winkelsectoren (Def. I).

§ 40. *Satz I. Zwei Winkelsectoren, deren Schenkel parallel sind und gleiche Richtung haben, sind in Bezug auf die Einheit des endlichen und unendlich grossen Gebiets gleich und können auch in absolutem Sinn, wenn nicht Anderes bestimmt ist, als gleich angesehen werden.*

$\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ seien die beiden Sectoren. Wir können voraussetzen, dass die im Unendlichgrossen liegenden Punkte X_∞, Y_∞ der beiden Strahlen AB, AC in Bezug auf die endliche Einheit absolute Grenzpunkte von A sind (Def. II und Zus., Satz II, § 32). Da diese Punkte aber auch in den Strahlen $A'B'$, $A'C'$ liegen, so können wir annehmen, dass sie auch absolute Grenzpunkte von A' sind. Die absoluten Grenzgraden von A und A', die durch die absoluten Grenzpunkte $X_\infty^{(a)}$, $Y_\infty^{(a)}$; $X_\infty^{(a')}$, $Y_\infty^{(a')}$ der Strahlen AB, AC und $A'B'$, $A'C'$ bestimmt werden, fallen auch bezüglich der unendlich grossen Einheit zusammen (Satz III, IV, § 32). Bezüglich dieser Einheit fallen auch die parallelen Strahlen zusammen und mithin differiren die durch die beiden Winkelsectoren bestimmten absoluten Grenzsegmente, wenn sie nicht in absolutem Sinn gleich sind, um ein Unendlichkleines in Bezug auf die unendlich grosse Einheit. Alsdann kann man aber auf der Grenzgraden von A' ein Segment $(X_\infty^{(a')} Y'^{(a')}_\infty) \equiv (X_\infty^{(a)} Y_\infty^{(a)})$ betrachten, welches also um ein Unendlichkleines von dem Segment $(X_\infty^{(a)} Y_\infty^{(a)})$ differirt. Verbindet man aber den Punkt A' mit $Y'^{(a')}_\infty$, so deckt sich dieser Strahl bezüglich der endlichen wie der unendlich grossen Einheit mit dem Strahl $A'Y_\infty^{(a)}$ oder $A'Y_\infty$ (Zus., Satz II, § 32). Damit ist der Satz bewiesen (Fig. 40).xxxi)

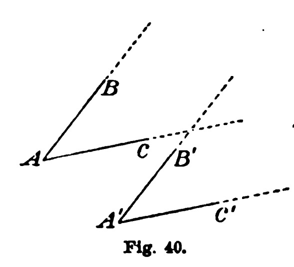


Fig. 40.

Zus. I. Sind zwei beliebige Segmente (AB) und (CD) gegeben, die von A nach B und von C nach D gerichtet sind, und man zieht von den Punkten eines derselben z. B. (AB) die zu dem andern parallelen Strahlen, so sind die Winkelsectoren, welche diese Strahlen mit dem durch (AB) bestimmten Strahl bilden, gleich.

Wir wollen z. B. von A und B aus die parallelen Strahlen zu dem von (CD) bestimmten Strahl ziehen. Die Winkelsectoren, die sie mit dem Strahl (AB) biden, haben einen Schenkel gemeinschaftlich und die beiden andern Schenkel sind parallel. Man kann sie also als zwei Winkelsectoren mit parallelen Schenkeln betrachten und sie sind mithin gleich.

Bem. I. Die Definition des Masses eines Winkels zweier Segmente oder Strahlen (Bem. III, § 39) setzt voraus, dass die beiden Segmente sich schneiden oder durch einen gemeinschaftlichen Punkt begrenzt sind. Dieses Mass kann auch für zwei beliebige Segmente (AB), (CD) benutzt werden, von denen die Richtungen, in welchen sie durchlaufen werden sollen, oder mit andern Worten ihre im Unendlichgrossen liegenden Punkte gegeben sind (Satz I und Def. II, § 33). In der That bestimmen zwei Segmente, welche die obigen Bedingungen nicht erfüllen, keinen Winkelsector; zieht man aber von den Punkten eines derselben die zu dem andern parallelen Strahlen, so kann man alle so erhaltenen Winkelsectoren auch in absolutem Sinn (wenn sich nicht etwas Anderes ergibt) und nicht nur

xxxi) Dieser Satz wird, ohne das Unendlichgrosse zu Hülfe zu nehmen, in der Ebene und im Allgemeinen in einer Anm. zu § 52 mittelst der Sätze des Raums von drei Dimensionen bewiesen werden.

bezüglich der Einheit des endlichen und unendlich grossen Gebiets als gleich ansehen. Wir behaupten daher:

Def. I. Unter *Winkel* zweier Segmente, deren Richtung gegeben ist, versteht man denjenigen, der durch den Abstand der absoluten Grenzpunkte der beiden Strahlen in Bezug auf einen Punkt des endlichen Gebiets eines jeden der Segmente gemessen wird.[1])

Zus. II. Der Winkel zwischen zwei parallelen Segmenten von derselben Richtung ist Null; derjenige zwischen zwei parallelen Segmenten von entgegengesetzter Richtung ist einem flachen Winkel gleich (Zus. V und VI, Satz I, § 33; Zus. I und Def. I).

Def. II. Der Winkel, welcher der Masseinheit der Abstände im unendlich grossen Gebiet entspricht (Uebereink. § 28; Bem. III, § 39 und Bem. I) heisst *Grundwinkeleinheit* oder auch *Winkeleinheit*, wenn man wie wir keine andern gebraucht.

Satz II. Zwei Scheitelwinkelsectoren sind gleich.

Denn (ab), $(a'b')$ seien die beiden Winkelsectoren mit dem Scheitel R. Wir wollen mit A_∞, B_∞ die im Unendlichgrossen der Schenkel a und b, mit A'_∞, B'_∞ die im Unendlichgrossen der Schenkel a', b' liegenden absoluten Grenzpunkte bezüglich R bezeichnen. Die letzteren sind den beiden ersten entgegengesetzt (Def. II, § 32). Die zwei Dreiecke $A_\infty RB_\infty$, $A'_\infty RB'_\infty$ sind gleich (Satz III, § 34) und desshalb auch die beiden gradlinigen Paare (ab) und $(a'b')$ (Zus. Satz III, § 17) und mithin auch die Winkelsectoren (ab), $(a'b')$ (Satz II, § 15).

Def. III. Unter Winkelsectoren zweier entgegengesetzter Segmente oder Strahlen, die von einem Punkt R auf derselben Graden begrenzt werden, verstehen wir diejenigen, welche durch den Punkt R und eine Grade, die durch die absoluten Grenzpunkte der beiden Strahlen in Bezug auf R geht, erzeugt werden (Def. II, § 32; Satz II, § 30).

Satz III. Die beiden flachen Winkelsectoren (Winkel), die durch ein von einem seiner Punkte R begrenztes Segment oder Strahl und durch seine Verlängerung bestimmt werden, sind gleich, mag man sie in derselben oder in entgegengesetzter Richtung betrachten.

Denn die beiden absoluten Grenzpunkte A_∞, A'_∞ der beiden entgegengesetzten Strahlen in Bezug auf R sind auf jeder Graden r_∞ im Unendlichgrossen, welche durch sie geht (Def. II, § 32; Satz II, § 30), entgegengesetzte Punkte und halbiren diese Grade (Def. III, § 6). Mithin sind die beiden flachen Winkelsectoren, welche durch die zwei entgegengesetzten Strahlen a und a' bestimmt werden, sowohl in derselben als in entgegengesetzter Richtung einander gleich, weil die durch die Punkte A_∞, A'_∞ bestimmten Segmente der Graden r_∞ in dem einen wie in dem andern Sinn einander gleich sind.

---

1) Bem. I und Def. I lassen den Unterschied zwischen Winkel und Winkelsector deutlicher erkennen (Def. I und II, § 38). Es wird gut sein, wenn sich der Leser gegenwärtig hält, dass unser endliches Gebiet hier immer das Euclid'sche ist, wie es die Ueberschrift des Kap. I angibt und der Uebereink. § 28 entspricht.

Sie haben auch dasselbe Mass (Bem. III, § 39) d. h. denselben Winkel (Def. II, § 38).

Zus. Eine Grade, welche durch das Centrum des Büschels (Rr_x) *geht, theilt dasselbe in zwei gleiche Theile in derselben und der entgegengesetzten Richtung.*

§ 41. *Bem. I.* Die Benennungen, die wir für die Segmente oder Abstände der vollständigen Graden benutzt haben (Def. I, § 29) können ohne Weiteres auch für die Winkelsectoren und Winkel gebraucht werden.

Def. I. Wenn das im Unendlichgrossen liegende einem Winkelsector entsprechende Segment (Def. I, § 39) ein rechtes ist (Def. IV, § 29), so heisst der Winkelsector oder entsprechende Winkel ein *rechter.*

Ist ein Winkelsector oder Winkel grösser als ein Rechter, so heisst er *stumpf*; ist er kleiner, *spitz.*

Def. II. Zwei Winkelsectoren oder Winkel, deren Summe einem flachen Winkel oder der Summe zweier Rechten gleich ist, heissen *supplementär, complementär* dagegen, wenn ihre Summe einem rechten Winkel gleich kommt.

Satz I. Zwei Nebenwinkelsectoren (Nebenwinkel) sind supplementär.

Denn ihre Summe ist ein flacher Winkelsector (Winkel) (Def. VII, § 38 und Def. I, § 39).

Satz II. Alle rechten Winkelsectoren (Winkel) sind gleich.

Denn die rechten Segmente auf der vollständigen Graden sind gleich (Def. I, Def. IV, § 29).

Satz III. Jeder Winkelsector kann in n gleiche Theile zerlegt werden.

Denn dies gilt auch für jedes Segment der vollständigen Graden (Einl. b, § 99 oder a, § 103).

Def. III. Die Grade, welche einen Winkelsector (ab) halbirt, heisst *Halbirungslinie* des Winkelsectors oder Winkels (ab).

Def. IV. Zwei Grade aa', bb', welche einen Punkt R gemeinschaftlich haben und durch denselben in die Paare entgegengesetzter Strahlen a, a'; b, b getheilt werden, bestimmen vier consecutize Winkelsectoren in dem Büschel (Rr_x) (Def. I, § 39) d. h. (ab), (ba'), $(a'b')$, $(b'a)$, welche *die Sectoren oder Winkel* der beiden Graden genannt werden.

Unter Winkelsector oder Winkel zweier Graden verstehen wir den kleineren oder einen von ihnen, wenn sie gleich sind, es sei denn wir müssten auch die andern in Betracht ziehen.

Def. V. Wenn die im Unendlichgrossen liegenden Punkte A_x, A'_x; B_x, B'_x zweier Graden die Grade $A_x B_x$ in vier rechte Segmente theilen, so bestimmen die beiden Graden vier rechte Winkel. In diesem Fall heissen die zwei Graden *senkrecht zueinander.*

Ebenso sind zwei Strahlen oder Graden, auch wenn sie sich nicht treffen, rechtwinklig zueinander (Def. I).

Satz IV. Die Halbirungslinie eines Winkelsectors (ab) *ist auch die Halbirungslinie des zweiten durch die Strahlen a und b bestimmten Sectors und des Scheitelsectors.*

Denn es gibt nur einen Mittelpunkt eines Segments $(A_x B_x)$ der vollständigen Graden r_x, während der entgegengesetzte Punkt das zweite durch A_x, B_x bestimmte Segment und das entgegengesetzte Segment $(A'_x B'_x)$ halbirt (Zus. Satz V, § 29).

Satz V. Von dem Centrum des Büschels (Rr_x) *kann man nur eine Senkrechte auf eine Grade des Büschels ziehen.*

Denn es gibt nur zwei entgegengesetzte Punkte B_x, B'_x, welche mit den Punkten A_x, A'_x der gegebenen Graden die Grade r_x in vier consecutive rechte Segmente theilen (Ax. II, a oder Hyp. I; Einl. b, § 99 oder a, § 103).

Satz VI. Eine zu einer gegebenen Graden senkrechte Grade ist auch zu allen mit dieser Graden Parallelen senkrecht.

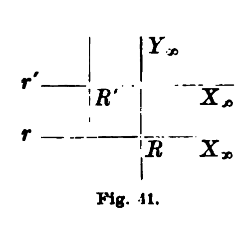


Fig. 41.

r und r' seien die beiden parallelen Graden mit dem gemeinschaftlichen Punkt X_x im Unendlichgrossen (Def. II, § 26; Def. I, II, § 32; Uebereink. I, § 28). Die Grade RY_∞ sei senkrecht zu einer dieser Parallelen z. B. zu r. Der Winkel, den die Grade r' mit RY_∞ macht, wird durch das Segment der beiden Punkte $X_x\, Y_\infty$ gemessen und ist mithin ein Rechter (Def. I, § 40) (Fig. 41).[xxxii]

Satz VII. Die beiden Halbirungslinien der Winkelsectoren zweier Graden sind senkrecht zueinander.

Denn, wie man weiss, bestimmen ihre absoluten Grenzpunkte im Unendlichgrossen vier rechte Segmente (Satz V, § 29).

3.

Winkelsectoren und Winkel eines Dreiecks und zweier gleicher Dreiecke.

§ 42. *Bem. I.* In einem Dreieck ABC bestimmen die von einem beliebigen der drei Scheitel begrenzten und durch die beiden andern Eckpunkte festgelegten Strahlen drei Winkelsectoren nämlich:

$$\widehat{ABC},\ \widehat{BCA},\ \widehat{CAB}.$$

Wenn der Winkelsector, den man durch Verbindung z. B. des Scheitels A mit den Punkten der gegenüberliegenden Seite (BC) erhält (Def. I, § 38), mit dem genannten Winkelsector $\widehat{CAB}$ nicht zusammenfiele, so hätte das Dreieck andre drei Winkelsectoren.

Wir wollen diese Frage für jetzt unerörtert lassen und, solange wir nicht Anderes bestimmen, unter Winkelsectoren und Winkel eines Dreiecks die ersteren drei verstehen.[xxxiii]

[xxxii]) Auch dieser Satz kann ohne Zuhülfenahme des Unendlichgrossen im Allgemeinen so einfach nicht bewiesen werden. Wir beweisen ihn für in der Ebene gelegene Grade (siehe Zus. I, Satz IX, Anm. zu § 48). Der allgemein gültige Beweis kann bei der Betrachtung des Raums von drei Dimensionen gegeben werden (Buch III).

[xxxiii]) Beschränkt man sich auf das endliche Gebiet, so muss man als Winkelsectoren die zweiten statt der ersten drei ansehen, sie sofort nach der Betrachtung der Paare der Dreiecke (§ 16) definiren und für den Winkel die Def. II, § 38 oder, wenn man will, die Eigenschaft des Satzes a, § 111 der Einleitung benutzen (Einl. c, § 111). Man hat jedoch im Grunde nicht nöthig hier die Definition von Winkelsector und Winkel zu geben, wenn man statt derselben das gradlinige Paar benutzt und die Sätze III und IV bringt.

Man kann die Definition von Nebenstrahlenpaaren und von orthogonalen Nebenpaaren mithin von zueinander senkrechten Graden, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, geben

[illegible] Sectoren bezeichnen wir, solange sie von den ersten unterschieden [illegible] $A \cdot (BC)$, $B \cdot (CA)$, $C \cdot (AB)$.

[illegible] Der Winkelsector (Winkel) des Dreiecks ABC mit dem Scheitel [illegible] Seite (BC) *gegenüberliegend* und ebenso die Seite (BC) dem [illegible] der Winkel mit dem Scheitel A *gegenüberliegend.*

[illegible] Ist ein Winkelsector oder Winkel eines Dreiecks ein Rechter, so [illegible] Dreieck *rechtwinklig.* Die dem rechten Winkel gegenüberliegende [illegible] *Hypotenuse,* die beiden andern *Katheten.*

[illegible] *In zwei gleichen Dreiecken sind die von den entsprechenden Seiten [illegible] Winkelsectoren gleich.*

[illegible] sie sind entsprechende Figuren in gradlinigen identischen Figuren [illegible], § 15).[XXXIV]

[illegible] *In gleichen Dreiecken liegen den entsprechenden gleichen Seiten gleiche [illegible] gegenüber und umgekehrt.*

Dieser Zus. geht unmittelbar aus dem vorigen Satz und Def. II, § 38 hervor.

Satz II. *Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel[illegible] gleich haben, so sind sie gleich.*

ABC, $A'B'C'$ seien die beiden Dreiecke; es ist

$$(AB) \equiv (A'B'), \ (AC) \equiv (A'C'), \ \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}.$$

Die gradlinigen Paare mit den Scheiteln A und A' sind gleich (Zus. I, Satz II, § 39; Satz III, § 34 und Zus., Satz III, § 17) und weil B und B', [illegible] und C' entsprechende Punkte in ihrem Identitätszusammenhang sind, so ist [illegible] $(B'C')$. Mithin sind die beiden Dreiecke, weil sie drei Seiten gleich haben, einander gleich (Satz III, § 17).[XXXV]

Satz III. Die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich.

[illegible] das Büschel zu Hülfe zu nehmen (siehe Anm. XXIX). Für die Nebenpaare genügt es [illegible] VII, § 38, die sich auf die Winkelsectoren eines Büschels bezieht, zu folgen und [illegible] orthogonalen Nebenpaare, die einen Scheitel gemeinschaftlich haben, kommt man [illegible] Definition mit der Voraussetzung aus, dass sie gleich seien (siehe Anm. XXXVI).

[illegible] Der Beweis dieses Satzes bleibt derselbe.

[illegible] Um den Satz II zu beweisen, muss man vorher die folgenden Zusätze zu [illegible]:

Zus. I. Zwei Winkelsectoren ABC, $A'B'C'$ sind gleich, wenn $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv$ [illegible] $(B'C')$.

[illegible] die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ sind gleich (Satz III, § 17; Satz I, Anm. XXXIV.

Zus. II. Wenn zwei Winkelsectoren $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ gleich sind, so sind die Graden[illegible] AB, BC; $A'B'$, $B'C'$ gleich.

[illegible] ist $(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C')$ und folglich $(AC) \equiv (A'C')$ (Satz II, § [illegible] sind die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gleich (Satz III, § 17) und also auch die [illegible] AB, BC; $A'B'$, $B'C'$ (Zus. Satz III, § 17 und Anm. XII).

[illegible] des Satzes II ist nunmehr derselbe.

Wir bemerken, dass wir bis jetzt noch nicht, wie im Text (Satz IX, § 39), behaupten [illegible] Sectoren, die gleiche Winkel haben, gleich sind, wohl aber, dass gleiche [illegible] auch gleiche Winkel haben (Anm. XXXIII und Bew. zu Satz I, § 5 oder zu [illegible]). Wir bemerken ferner, dass man diese Sätze hier weglassen und nach [illegible] des Büschels (siehe Anm. XLI) geben kann, indem man sich solange mit den [illegible] der Dreiecke behilft (Def. I, § 16).

Denn ABC sei das gleichschenklige Dreieck und $(AB) \equiv (AC)$. Wir wollen ein andres Dreieck $A'B'C'$ betrachten, dessen Scheitel A' mit dem Punkt A, B' mit C und C' mit B zusammenfällt (Einl. Def. III, § 59). Offenbar sind die beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ identisch, denn zwei entsprechende Seitenpaare sind gleich nämlich $(AB) \equiv (A'B')$, $(AC) \equiv$ $\equiv (A'C')$, weil $(AB) \equiv (AC)$ und es ist $B\dot{A}C \equiv$ $\equiv B'\dot{A}C'$ (Satz I, § 17). Mithin ist $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ (Satz II); weil aber $\widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ACB}$, so folgt $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$ (Fig. 42).

Fig. 42.

Bem. II. Wenn der der Basis (Def. III, § 9) gegenüberliegende Scheitel A des gleichschenkligen Dreiecks ins Unendlichgrosse fällt, so kann man im Allgemeinen nicht länger behaupten, dass die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind (Satz V, § 34).

Def. III. Die Graden, die durch die Scheitel eines Dreiecks und die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten gehen, heissen *Mittellinien.*

Satz IV. Die Mittellinie eines gleichschenkligen Dreiecks ABC, welche durch den der Basis (BC) gegenüberliegenden Scheitel A geht, halbirt den Winkelsector $\widehat{BAC}$ und ist senkrecht auf der Basis.

M sei der Mittelpunkt der Basis (BC). Die zwei Dreiecke ABM, ACM sind gleich, weil sie ihre drei Seiten gleich haben (Satz III, § 17) und mithin ist $\widehat{BMA} \equiv \widehat{CMA}$ (Satz II). Weil nun diese beiden Winkel Nebenwinkel sind (Def. VII, § 38), so sind sie Rechte (Def. VIII, § 38; Bem. I, § 42).

Es ist auch $A \cdot (BM) \equiv A \cdot (CM)$, wenn man unter $A \cdot (BM)$, $A \cdot (CM)$ die durch A mit den Seiten (BM) und (CM) erzeugten Sectoren versteht (Bem. I, § 42), Mithin halbirt die Grade CM den Sector $A \cdot (BC)$.

Bem. III. Man weiss noch nicht, ob die Graden AB, AC, AM demselben Büschel (Aa_∞) angehören. [XXXVI]

4.

Andre Eigenschaften des Büschels (Rr).

§ 43. *Satz I. Die Punkte, welche in den Strahlen eines Büschels (Rr) bezüglich in gleichem Abstand von R wie die Punkte der Directrix r liegen, befinden sich auf einer zu der ersten parallelen Graden r'.*

a und b seien zwei durch die Punkte A und B der Graden r bestimmte Strahlen, welche die Segmente RA und RB enthalten; a' und b' seien die entgegengesetzten Strahlen oder Verlängerungen von a und b (Def. I, § 7); die beiden Paare entgegengesetzter Strahlen (ab), $(a'b')$ sind gleich (Satz II, § 17).

Wenn wir in den zwei Strahlen a' und b' von R aus die beiden den Segmenten (RA) und (RB) bezüglich gleichen Segmente (RA'), (RB') betrachten,

---

[XXXVI]) Man beweist auf dieselbe Art, dass die Dreiecke MAB, MAC gleich sind und dass mithin die Grade AM auf der Graden BC in dem Punkt M senkrecht steht (Anm. XXXIII).

Die Grade AM heisst *Halbirungslinie* des Winkelsectors oder Winkels $A \cdot (CB)$.

so erhalten wir zwei solche Punkte A' und B', dass die beiden Dreiecke ARB, $A'RB'$, weil sie zwei Seiten und das eingeschlossene Paar gleich haben, einander gleich sind (Satz III, § 16). Mithin ist $(AB) \equiv (A'B')$ (Zus. Satz III, § 16) und $A\dot{B}R = A'\dot{B'}R$. $B\dot{A}R$ und $B'\dot{A'}R$ sind ebenfalls gleich (Zus., Satz III, § 16).

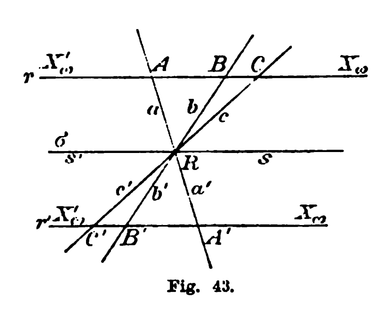


Fig. 43.

Ist c ein andrer Strahl von (Rr), welcher die Grade r in einem Punkt C schneidet und betrachten wir in seiner Verlängerung c' einen Punkt C' derart, dass $(RC) \equiv (RC')$, so sind die Dreiecke RAB, RAC, RBC bezüglich den Dreiecken $RA'B'$, $RA'C'$, $RB'C'$ gleich und weil A, B, C in einer graden Linie sind, so liegen auch die drei Punkte A', B', C' in der Graden r' (Satz V, § 17).

Um zu beweisen, dass die Grade r' parallel zur Graden r (Def. II, § 26 und Def. I u. II, § 32 und Uebereink. § 28) oder, was dasselbe ist, zu der durch R parallel zur Graden r gezogenen Graden σ ist (Zus. Satz I und Def. II, § 26), genügt die Bemerkung, dass dem in r gelegenen Punkt X_∞ des Parallelstrahls s der Punkt X'_∞ des Strahls s' entspricht, welcher auf der Graden r' liegen muss. Und umgekehrt; betrachtet man X'_∞ als zu der Graden r gehörig, so muss der Punkt X_∞ auf der Graden r' liegen (Fig. 43).

Zus. I. Sind zwei Winkel zweier gleicher Dreiecke Scheitelwinkel, so sind die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich.

Denn solche zwei Dreiecke verhalten sich wie die eben erwähnten Dreiecke ABR, $A'B'R$.

Zus. II. Jede Grade des Büschels (Rr) schneidet die Grade r' und umgekehrt ist jede Grade, die einen Punkt von r' mit R verbindet, eine Grade des Büschels (Rr).

Denn jede Grade des Büschels (Rr) schneidet nach der Definition (Def. III, § 27) die Grade r und mithin auch die Grade r' in einem von R gleich weit entfernten Punkt und ebenso schneidet jede Grade, die durch R geht und r' schneidet, aus demselben Grund auch die Grade r und ist mithin eine Grade des Büschels (Rr).

Bem. I. Aus dem vorstehenden Satz geht auch hervor, dass zwei Scheitelsectoren des Büschels (Rr), von denen die Strahlen des einen die Grade r und die des andern r' schneiden, gleich sind. Dies gilt aber noch nicht für zwei Scheitelsectoren des Büschels, von denen ein Strahl r und ein andrer r' trifft, wie z. B. für die beiden Winkelsectoren ARC' und $A'RC$, weil noch nicht bekannt ist, ob das Büschel RAC' mit dem Büschel Rr zusammenfällt.[XXXVII]

[XXXVII] Der Satz I folgt unmittelbar aus dem in Anm. XVI gegebenen Postulat über die Parallelen. Da aber die Definition des Büschels erst in Anm. XLI gegeben wird, so erhält Satz I folgende Form:

Wenn man in der Verlängerung eines jeden Segments (RX), welches einen beliebigen Punkt X einer Graden r mit einem Punkt R ausserhalb r verbindet, von R aus ein Segment $(RX') \equiv (RX)$ construirt, so liegen die Punkte X' in einer zu der gegebenen Graden r

Satz II. Wenn auf zwei parallelen Graden zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Segmente (AB), $(A'B')$ gegeben sind, so schneiden sich

1) die Segmente (AA'), (BB') in ihrem Mittelpunkt und sind

2) die Segmente (AB'), $(A'B)$ gleich und parallel.

Vom Punkt A aus wird die Grade r (Fig. 43) in zwei entgegengesetzte gleiche Theile $(X'_\infty A)$, (AX_∞) in Bezug auf den Punkt A zerlegt (Zus. II, Satz III, § 4 und Uebereink. § 28; Zus. III, Satz III, § 19). Analog sind $(A'X'_\infty)$, $(A'X_\infty)$ auf der Graden r' bezüglich des Punktes A' entgegengesetzt. Die beiden Strahlen (AX_∞), $(A'X'_\infty)$ sind parallel und entgegengesetzt gerichtet, ebenso (AX'_∞), $(A'X_\infty)$ (Def. III und Zus. IV, Satz I, § 33).

Wir wollen annehmen, der Punkt B liege in dem Segment (AX_∞); der Punkt B' liegt dann in demselben Abstand von R in (Rr) in dem Segment $(A'X'_\infty)$. In der That ist das Segment (RB) in dem Winkelsector $\widehat{ARX_\infty}$ des Büschels (Rr) enthalten (Def. I, § 38) und das entgegengesetzte Segment (RB') bestimmt in dem Büschel mit den Segmenten (RA') und (RX'_∞) Winkelsectoren, die den in demselben Büschel von dem Segment (RB) mit den Segmenten (RA) und (RX_∞) bestimmten Sectoren entgegengesetzt sind. Wie aber der Sector $\widehat{ARX_\infty}$ den Strahl RB enthält, so enthält auch der entgegengesetzte Sector $A'RX'_\infty$ den Strahl RB', weil RB' mit RA' und RX'_∞ Winkel macht, die kleiner als $\widehat{A'RX'_\infty}$ sind und weil das Strahlenbüschel (Rr) einfach geschlossen ist (Satz I, § 30) und desshalb RB' nicht ausserhalb des Sectors $\widehat{A'RX'_\infty}$ liegen kann (Einl. a, § 65).

Es seien nun zwei beliebige parallele Grade r_1 und r'_1 gegeben, wie in dem Satz verlangt wird. Sie befinden sich auf unendlich viele Arten in denselben Verhältnissen, wie die obigen Graden r und r'. Denn man braucht nur eine beliebige Grade auszuwählen, welche sie in den Punkten A und A' schneidet, und den Mittelpunkt R des Segments (AA') zu bestimmen. Das Büschel (Rr_1) fällt mit dem Büschel (Rr'_1) wie (Rr) mit (Rr') zusammen (Satz I) und weil man vom Punkt A' nur eine Parallele zu der Graden r_1 ziehen kann (Satz IV, § 26; Uebereink. § 28; Bem. § 31). Sind mithin (AB) und $(A'B')$ die zwei gleichen und entgegengesetzt gerichteten Segmente auf den Graden r_1 und r'_1, so muss die Grade RB nach den obigen Auseinandersetzungen r'_1 in einem Punkt schneiden, welcher mit A' in r'_1 ein (AB) gleiches und ent-

---

Parallelen r'. Den Punkten X der Graden r in einer gegebenen Richtung entsprechen die Punkte X' von r' in einer bestimmten Richtung.

Was den letzten Theil angeht, beachte man, dass jedem Punkt C (Fig. 43) innerhalb des Segments beliebiger zweier Punkte A und B der Graden r auf dem zu RC entgegengesetzten Strahl in r' ein Punkt C' innerhalb des Segments der Punkte A' und B' entspricht, weil er von diesen beiden Punkten dieselben Abstände hat, wie C von A und B (Satz I, § 4; Einl. Def. I, § 61). Ist mithin eine Reihe von Punkten $ABC \ldots X \ldots$ in einer bestimmten Richtung der Graden r gegeben, so folgen sich die Punkte $A'B'C' \ldots X' \ldots$ in einer Richtung der Graden r' (Einl. Def. II, § 62).

Der Zus. I ist die Def. in Anm. XVI und Zus. II gilt mit einigen kleinen Aenderungen in der Form des Beweises (siehe Anm. XVI und XXVIII).

gegengesetzt gerichtetes Segment bestimmt. Dieser Punkt muss daher mit B' zusammenfallen (Zus. I, Satz III, § 4).

Die Segmente $(A'B)$, (AB') sind dann parallel und gleich (Zus. I, Satz I).

Zus. I. Wenn auf zwei parallelen Graden zwei gleiche und gleichgerichtete Segmente (AB), $(A'B')$ gegeben sind, so sind die Segmente (AA'), (BB') gleich und parallel und die Segmente (AB'), $(A'B)$ schneiden sich in ihrem Mittelpunkt.

Zus. II. Wenn man von einem Punkt X eine Parallele zu einer Graden AA' zieht, so schneidet dieselbe die von jedem Punkt A' der gegebenen Graden zu AX parallel gezogene Grade.

Denn wählt man auf der durch A' zu AX parallel gezogenen Graden ein (AX) gleiches Segment (AX'), so geht entweder die Grade (XX') durch den Mittelpunkt von (AA') oder sie ist parallel zu AA', je nachdem das Segment $(A'X')$ die eine oder die andre Richtung hat. Zieht man daher durch X die zu AA' Parallele, so muss sie, weil es nur eine solche Parallele gibt (Satz IV, § 26; Uebereink. § 28; Bem. § 31), die durch A' zu AX parallel gezogene Grade in einem Punkt schneiden (Fig. 44).

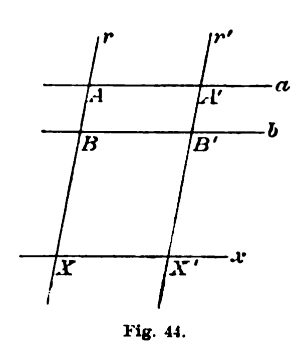


Fig. 44.

Zus. III. Jede zu der Directrix eines Büschels paralleler Graden Parallele, welche eine derselben schneidet, schneidet auch alle andern.

r sei die Directrix des Büschels (Def. IX, § 38) und a eine Grade desselben, die von einer zu r parallelen Graden r' in dem Punkt A' geschnitten wird, während a die Grade r in dem Punkt A schneidet. Wir behaupten, dass r' eine beliebige Grade x des Büschels in einem Punkt X' schneidet.

In der That trifft x die Grade r nach der Voraussetzung in einem Punkt X; mithin muss die durch den Punkt A' von a zu r oder auch r' parallel gezogene Grade die Grade x schneiden (Zus. II).[XXXVIII]

[XXXVIII] Man kann auch hier ohne die Richtung der Segmente in verschiedenen Graden auskommen (Anm. XXIV). Der Satz II nimmt dann die folgende Form an:

Wenn auf zwei parallelen Graden zwei gleiche Segmente (AB) und $(A'B')$ gegeben sind, so sind zwei der Segmente, welche die Enden von (AB) mit denen von $(A'B')$ verbinden, parallel; die beiden andern schneiden sich in ihrem Mittelpunkt.

Denn wählt man den Mittelpunkt R' von (AB'), so schneidet die Grade BR' die Grade $A'B'$ entweder in dem Punkt A' und dann ist der Satz bewiesen (Satz I und Zus. I) oder in einem Punkt A'_1 derart, dass $(A'_1B') = (B'A')$ (Satz I und Ax. der Anm. XVI).

Es ist auch $(R'B) = (R'A_1')$, $(R'A) = (R'B')$ und $A\dot{R}'A'_1 = B\dot{R}'B'$ (Satz II, § 17); mithin sind die beiden Dreiecke $AR'A'_1$, $BR'B'$ gleich (Satz III, § 16) und also auch $(AA'_1) \# (BB')$ (Zus. Satz III, § 16 und Def. der Anm. XVI).

Ist im vorstehenden Fall R der Mittelpunkt von (BB'), so kann die Grade RA'_1 nicht durch A gehen, weil AA'_1 parallel zu BB' ist (Anm. XVI); es muss also RA durch A' gehen und $(AB') \# (A'B)$ sein, da die Dreiecke ARB', $A'RB$ zwei Seiten und das eingeschlossene Paar gleich haben und mithin gleich sind (Satz III und Zus. § 16 und Def. Anm. XVI) (Fig. 43).

Als Zusatz erhält man:

Wenn (BB') ein Segment ist, dessen Enden in den beiden parallelen Graden r und r' liegen und (AB) ein Segment von r ist, so liefern die Enden A' und A'_1 zweier (AB) gleicher Segmente $(A'B')$, (A'_1B') in r' mit A verbunden zwei Segmente, von denen das eine parallel zu (BB') ist und das andre es in seinem Mittelpunkt schneidet.

5.

Das Parallelogramm.

§ 44. *Def. I.* Wenn ein Viereck (Def. I, § 17) zwei Paare paralleler Seiten hat, heisst es *Parallelogramm.* Die beiden andern von den vier Ecken des Parallelogramms bestimmten Segmente oder Graden heissen *Diagonalen.*

Unter den *gegenüberliegenden Seiten* des Parallelogramms versteht man die Seiten, welche keine Ecke gemeinschaftlich haben, d. h. die parallelen Seiten.

Wenn A, B, A', B' die Ecken des Parallelogramms und (AB), (BA'), $(A'B')$, $(B'A)$ seine Seiten sind, so sind (AA'), (BB') die beiden Diagonalen und ist (AB) parallel zu $(A'B')$ und (BA') parallel zu (AB'), so liegen sich die Seiten (AB) und $(A'B')$, (BA') und $(B'A)$ gegenüber.

Die durch die Seiten des Parallelogramms bestimmten Winkelsectoren oder Winkel, deren Scheitel in den Ecken des Parallelogramms liegen, heissen die *Winkelsectoren* oder *Winkel* des Parallelogramms.

Bem. I. Nach der Definition der parallelen Graden (Def. II, § 26) müssen die Ecken des Parallelogramms im endlichen Gebiet liegen (Def. I und Zus. Satz III, § 26; Bem. § 31).

Bem. II. Die aus den beiden gleichen Segmenten (AB), $(A'B')$ auf zwei parallelen Graden (Fig. 44) gebildete Figur ist offenbar ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich halbiren.

Bez. I. Sind zwei Segmente (AB) und $(A'B')$ gleich und parallel ohne Rücksicht auf die Richtung, so bezeichnen wir dies mit dem Symbol $\#$ und setzen

$$(AB) \# (A'B').$$

Satz I. In jedem Parallelogramm halbiren sich

1) die Diagonalen und sind

2) die gegenüberliegenden Seiten gleich.

A, B, A', B' seien die Ecken; (AB), $(A'B')$; $(A'B)$, (AB') die gegen-

---

Denn verbindet man A mit dem Mittelpunkt R von (BB'), so muss die Grade RA entweder durch A' oder A', gehen.

Mit einem ähnlichen Beweis gilt Zus. II.

Dann folgt der Satz:

III. Sind zwei parallele Grade r und r' und ein Segment (AA') gegeben, dessen Enden in r und r' liegen und zieht man von den Punkten X in r in einer bestimmten Richtung betrachtet die Parallelen zu AA', so folgen sich die Durchschnittspunkte X' mit der Graden r' in einer gegebenen Richtung.

R sei der Mittelpunkt von (AA'). Die zu den gegebenen Punkten in r entgegengesetzten Punkte von r' liegen von A' aus in der entgegengesetzten Richtung wie die Punkte X' (der letzte Zus. und Satz I, Anm. XXXVII).

IV. Sind zwei parallele Grade r und r' gegeben, so ist die Grade, die von einem beliebigen Punkt einer ihrer Durchschnittslinien aus zu einer derselben parallel gezogen wird, auch zu der andern parallel.

Denn zieht man von X (Fig. 44) die Parallele zur Graden a, so ist $(AX) \equiv (A'X')$ und da $(AB) \equiv (A'B')$, so ist aus demselben Grund (III) $(XB) \equiv (X'B')$.

Die Grade AA' ist parallel zu BB' (XVI). Betrachtet man die Graden r und r' in ihren durch die Segmente (AB), $(A'B')$ bestimmten Richtungen, so sind entweder B und B' in (AX) und $(A'X')$ enthalten, wie in Fig. 44, oder A und A' liegen in (BX) und $(B'X')$. Mithin geht die durch X zu BB' parallel gezogene Grade durch X' (III).

überliegenden Seiten des Parallelogramms. R sei der Mittelpunkt der Diagonale (AA'). Die Strahlen des Büschels, welches durch den Punkt R und die Grade AB, die wir wieder mit r bezeichnen, bestimmt wird, schneiden eine Grade r'. Verbindet man R mit B, so geht die Grade RB durch einen Punkt B'_1 von r' (Satz I, § 43).

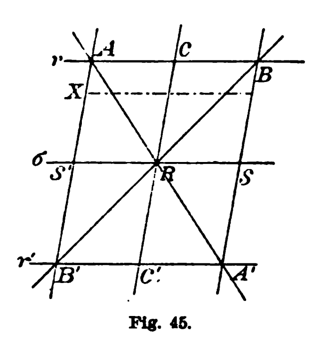


Fig. 45.

Weil aber AB'_1 parallel zu BA' ist (Zus. I, Satz I, § 43) und durch einen Punkt A nur eine Parallele zu einer gegebenen Graden geht (Satz IV, § 26; Uebereink. § 28 und Bem. § 31), so fällt der Punkt B'_1 mit B' zusammen. Es ist mithin $(AB) \equiv \equiv (A'B')$, $(AB') \equiv (A'B)$ und R halbirt die beiden Diagonalen, q. e. d. (Fig. 45).

Def. II. Der Mittelpunkt der Diagonalen heisst *Centrum* des Parallelogramms.

Satz II. Die gegenüberliegenden Winkelsectoren des Parallelogramms sind gleich.

Denn eine Diagonale (AA') des Parallelogramms $ABA'B'$ theilt es in die zwei Dreiecke ABA', $AB'A'$, welche bezüglich drei Seiten gleich haben und mithin gleich sind (Satz III, § 17 und Satz II, § 34). Folglich sind die Winkelsectoren in B und B', welche der Diagonale gegenüberliegen und sich im Parallelogramm gegenüberstehen, gleich (Zus. Satz I, § 42) (Fig. 45).

Satz III. Wenn zwei Segmente (AA'), (BB') sich halbiren, so sind die Punkte $ABA'B'$ Ecken eines Parallelogramms.

Denn wenn R der Mittelpunkt von (AA') und (BB') ist und man von A' die Parallele zur Graden AB zieht, so muss diese durch B' gehen (Zus. I, Satz I, § 43; Satz IV, § 26; Uebereink. § 28; Bem. § 31). Aus demselben Grund ist AB' parallel zu $A'B$; folglich u. s. w. (Def. I) (Fig. 45).

Satz IV. Verbindet man die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms, so erhält man zwei zu den Seiten parallele Grade, die durch das Centrum des Parallelogramms gehen.

Und umgekehrt:

Die durch das Centrum des Parallelogramms parallel zu den Seiten gezogenen Graden halbiren die Seiten.

C und C' seien die Mittelpunkte der Seiten (AB), $(A'B')$ des Parallelogramms $ABA'B$. Weil $(AC) \equiv (A'C')$ (Satz I und Einl. b und g, § 99) und (AA') durch R geht, so muss die Grade CC' durch R gehen, da (AC) und $(A'C')$ entgegengesetzte Richtung haben (Satz II, § 43). Es ist aber auch $(AC) \equiv (B'C')$ und weil (CC') durch R geht, so ist (AB') parallel zur Graden CC' (Satz II, § 43); d. h. $ABCC'$ sind Ecken eines neuen Parallelogramms (Def. I). Zieht man mithin durch R die zu den beiden Seiten (AB'), (BA') des Parallelogramms Parallele, so halbirt dieselbe die beiden anderen Seiten (Satz IV, § 26; Uebereink. § 28 und Bem. § 31). Dasselbe gilt offenbar auch, wenn man von R die zu den Graden AB, $A'B'$ Parallele σ zieht; sie halbirt die Seiten (AB'), $(A'B)$ in den Punkten S' und S.

Wie die Graden CC', SS' dem durch das Centrum R und die Seite AB oder die entgegengesetzte $A'B'$ bestimmten Büschel angehören, so gehören sie auch demjenigen an, welches durch R und AB' oder $A'B$ bestimmt wird (Fig. 45).

Bem. III. Daraus geht noch nicht hervor, dass diese beiden Büschel zusammenfallen, es beweist dies nur, dass sie die Graden AA', BB', CC', SS' gemeinschaftlich haben.

Zus. I. Wenn man von dem Mittelpunkt einer Seite des Dreiecks eine Parallele zu einer andern Seite zieht, so halbirt dieselbe die dritte Seite.

Denn das oben beschriebene Dreieck $AB'A'$ kann als ein beliebiges Dreieck angesehen werden (Def. II, § 9), insofern dann die z. B. von A und A' aus zu den Seiten $B'A'$ und AB' bez. parallel gezogenen Graden sich in dem Punkt B schneiden (Zus. II, Satz II, § 43).

Zus. II. Wenn man von einem Punkt X innerhalb einer Seite z. B. AB' eines gegebenen Parallelogramms $ABA'B'$ die Parallele zu den andern ihr nicht gegenüberliegenden Seiten zieht, so schneidet diese die gegenüberliegende Seite in einem Punkt X' innerhalb $(A'B)$.

Denn die durch X gehende Parallele zur Graden AB schneidet BA' (Zus. II, Satz II, § 43) und die Figur $AXX'B$ ist ein Parallelogramm (Def. I) und mithin $(B'X') \equiv (AX)$ (Satz I). Analog ist $(XB') \equiv (X'A')$ und weil X innerhalb des Segments (AB') liegt, so ist auch X' innerhalb des gleichen Segments (BA') gelegen (Fig. 45).[xxxix]

6.

Fundamentalsatz über das Dreieck.

§ 45. *Satz I. Wenn man von einem beliebigen Punkt X der Seite AB eines Dreiecks ABC die Parallele zu einer andern Seite BC zieht, so schneidet diese*

1) die dritte Seite in einem Punkt X' und

2) ist das Verhältniss des Segments, welches der Punkt A oder C mit dem Punkt X' bestimmt, zur Seite (AC) dem Verhältniss des durch den Punkt X mit A oder B bestimmten Segments zur Seite (AB) gleich.

Und umgekehrt:

Wenn das letztere der Fall ist, so bestimmen die beiden Punkte X und X' eine zur Graden BC parallele Grade.

Das Dreieck $AB'A'$ der Fig. 45 kann man als ein beliebiges Dreieck ABC betrachten (Def. II, § 9). Zieht man vom Mittelpunkt R_1 einer Seite z. B. (AB) die Parallele zur Seite (BC), so schneidet sie die dritte Seite (AC) in ihrem Mittelpunkt R'_1 (Zus. I, Satz IV, § 44). Verfährt man ebenso mit dem

xxxix) Die Sätze I, III, IV und Zus. werden auf dieselbe Art bewiesen, indem man sich auf die vorausgehende Anm. bezieht. Satz II dagegen gilt, wenn man die Def. des Winkelsectors des Dreiecks und also auch des Parallelogramms noch nicht gegeben hat (siehe Anm. XXXV), für die gradlinigen Paare (Def. I, § 16) des Parallelogramms. Zu Lehrzwecken braucht man hier nur den Zus. I, Satz IV zu bringen, welcher sich leicht auch ohne die Definition und die speciellen Eigenschaften des Parallelogramms beweisen lässt.

Dreieck $AR_1R'_1$, so liegen die beiden Mittelpunkte R_2 und R'_2 von (AR_1) und (AR'_1) in der durch R_2 gehenden zu $R_1R'_1$ oder zur Seite BC Parallelen; denn es gibt nur einen Mittelpunkt eines gradlinigen Segments (Satz I, § 4; Bem. III, § 18; Einl. Def. I, § 61).

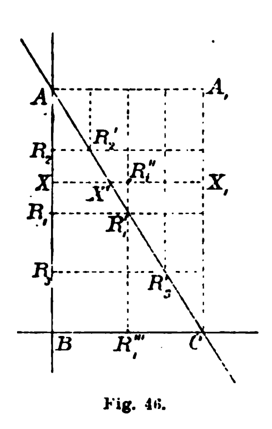


Fig. 46.

Um zu beweisen, dass dies auch für den Mittelpunkt R_3 von (R_1B) gilt, verbinde man C mit R_1; man erhält dann die zwei Dreiecke R_1BC, $R_1CR'_1$ mit den beiden parallelen Seiten BC, $R_1R'_1$. Die von R_3 aus in dem ersten Dreieck zur Seite (BC) parallel gezogene Grade trifft die Seite (R_1C) in ihrem Mittelpunkt R''_3. Die von R''_3 zur Seite $(R_1R'_1)$ parallel gezogene Grade, die auch parallel zu BC ist und mit der Graden $R_3R''_3$ zusammenfällt (Zus. I, Satz I, Satz IV, § 26; Uebereink. § 28 und Bem. § 31), geht durch den Mittelpunkt R'_3 des Segments (CR'_1).

Dieser Beweis gilt offenbar auch für die Mittelpunkte der Segmente (R_3B), (R_3R_1), (R_1R_2). Halbirt man daher (AB) und dann die beiden so erhaltenen und dann wieder die vier sich ergebenden Segmente und führt diese Operation $n$mal aus, so hat man (AB) in 2^n gleiche Theile zerlegt. Zieht man nun von den Theilungspunkten die Parallelen zur Seite (BC), so schneiden diese die Seite (AC) in Punkten, welche sie in 2^n gleiche Theile zerlegen derart, dass, wenn R_n und R'_n in einer Parallelen zu (BC) liegen,

$$\frac{(AR_n)}{(AB)} \cdot \frac{(AR'_n)}{(AC)} \text{ und auch } \frac{(R_nB)}{(AB)} = \frac{(R'_nC)}{(AC)} \text{ ist;}$$

d. h. (AR_n), (AR'_n); (R_nB), (R'_nC) sind sich entsprechende Segmente in dem durch (AB) und (AC) bestimmten Proportionalitätszusammenhang (Einl. Def. I und III, § 106).

Lässt man n unbegrenzt wachsen, so ist jeder andre Punkt X Grenzpunkt der Punktgruppe (R), die man durch die successive Halbirung von (AB) erhält. Einer Reihe von Punkten R, die zur Grenze X hat, entspricht nun in dem obigen Proportionalitätszusammenhang eine Reihe von Punkten R', die zum Grenzpunkt den entsprechenden Punkt X' hat (Einl. b, § 106). Ziehen wir von C aus die Grade (CA_1) parallel zu (AB), so schneiden die von den Punkten von (AB) zu (BC) parallel gezogenen Graden sämmtlich das Segment (A_1C) (Zus. II, Satz IV, § 44).

R'', R''' seien die Durchschnittspunkte der durch einen Punkt R' gehenden Parallelen zur Graden AB mit den Graden BC, XX_1 (parallel zu BC). Man erhält $(R'R'') \equiv (RX)$ und andrerseits $(XR'') \equiv (RR') \equiv (BR''')$. Es ist aber

$$\frac{(R'A)}{(AC)} = \frac{(R'''B)}{(BC)}. \qquad \text{(Satz I, § 45)}$$

Wenn daher, für einen andern Punkt R'_1, $(R'_1A) < (R'A)$ ist, so folgt $(R_1'''B) < (R'''B)$ und mithin $(XR_1'') < (XR'')$, d. h. das Segment (XR'') nimmt

in dem Segment (XX_1) mit den Segment $(R'X')$ unbegrenzt ab. Folglich hat die Punktreihe R'' einen Grenzpunkt Y der Graden XX_1 (Einl. d, § 97). $(R'Y)$ wird also zugleich mit $(R'R'')$ unbegrenzt klein (Zus. Ax. IV, § 10). R' hat also zu Grenzpunkten X' und Y; das heisst aber X' und Y und desshalb auch die Graden XX', XX_1 fallen zusammen (Satz IV, § 10).

Nachdem so der Satz für einen beliebigen Punkt X der Seite (AB) bewiesen ist, kann man ihn leicht für jeden Punkt M der Graden AB beweisen. M liege in Bezug auf A auf der Seite nach B zu. Es gibt immer eine solche Zahl n, dass

$(AB)n > (AM)$ (Ax. II, a; Einl. c', § 81; Uebereink. § 28).

Bezeichnet man die zweiten Enden von $(AB)n$, $(AC)n$ mit B_n, C_n, so befindet sich M auf der Seite AB_n des Dreiecks AB_nC_n und weil (AB) und (AC) in dem durch (AB_n) und (AC_n) bestimmten Proportionalitätszusammenhang entsprechende Segmente sind (Einl. e', § 106), so ist die Grade BC parallel zur Graden $B_n C_n$ und mithin schneidet die durch M parallel zu $B_n C_n$ gezogene Grade, die auch zu BC parallel ist (Zus. Satz I und Def. II, § 26), die Seite (AC_n).

Liegt dagegen M von A aus auf der entgegengesetzten Seite von A in der Graden AB, so construire man ein Dreieck $AB'_nC'_n$ so, dass $(AB'_n) \equiv (AB_n)$, $(AC'_n) \equiv (AC_n)$. Die Grade $B'_nC'_n$ ist dann parallel zur Graden B_nC_n (Zus. I, Satz I, § 43) und mithin auch zu BC. Folglich schneidet die von M zu BC parallel gezogene Grade das Segment (AC'_n).

Der erste Theil des Satzes ist damit vollständig bewiesen.

Dass der Satz auch in seiner Umkehrung gilt, ist klar. Denn wenn man von X die Parallele zur Seite BC zieht, so schneidet sie die Seite AC in einem Punkt X_1, welcher in dem durch (AB) und (AC) auf den Graden AB, AC bestimmten Proportionalitätszusammenhang dem Punkt X entspricht. Mithin muss X_1 mit X' zusammenfallen (Einl. d, § 111) (Fig. 46).

Zus. I. Wenn zwei parallele Grade gegeben sind und eine Grade α, welche sie schneidet (Transversale), so schneidet jede andre Grade, welche die Grade α und eine der beiden Parallelen trifft, auch die andre.

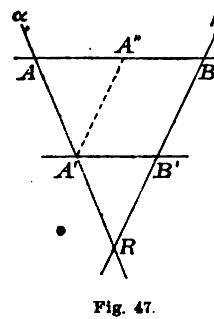


Fig. 47.

AB und $A'B'$ oder r und r' seien die beiden Parallelen, A und A' die Durchschnittspunkte der Transversalen mit r und r', β die Grade, welche α und r' in den Punkten R und B' schneidet. In dem Dreieck $A'B'R$ muss nach dem ersten Theil des vorigen Satzes die von A aus zu r' parallel gezogene Grade nämlich r die Grade RB' d. h. β in einem Punkt B schneiden (Fig. 47).

Zus. II. Zieht man von einem beliebigen Punkt innerhalb einer Seite des Dreiecks eine Parallele zu einer andern Seite, so schneidet diese die übrig bleibende Seite in einem inneren Punkt.

Denn in dem Dreieck Fig. 46 ist

$$\frac{(AX)}{(AB)} = \frac{(AX')}{(AC)}; \quad \frac{(XB)}{(AB)} = \frac{(X'C)}{(AC)};$$

es ist aber $(AX) < (AB)$, $(XB) < (AB)$, folglich ist auch $(AX') < (AC)$, $(X'C) < (AC)$ (Einl. c, § 111); d. h. X' ist ein Punkt innerhalb der Seite (AC), denn läge es ausserhalb des Segments (AC), so könnten die obigen Beziehungen nicht bestehen (Einl. Def. I, § 61).

Zus. III. Wenn zwei Punkte A' und B' die beiden Seiten (AR) und (BR) eines Dreiecks ABR in demselben Verhältniss theilen, so stehen auch die Segmente (AB) und $(A'B')$ in diesem Verhältniss.

Von A' ziehe man die Parallele zu (BR), welche (AB) in einem Punkt A'' schneidet. Nach dem zweiten Theil des Satzes muss

$$\frac{(A''B)}{(AB)} = \frac{(A'R)}{(AR)};$$

es ist aber $(A''B) \equiv (A'B')$, weil $A''BB'A'$ die Ecken eines Parallelogramms sind (Def. I und Satz I, § 44). Mithin ist

$$\frac{(A'B')}{(AB)} = \frac{(A'R)}{(AR)} = \frac{(B'R)}{(BR)}. \quad \text{(Einl. g, § 106) (Fig. 47)}$$

Zus. IV. Sind A, B, C drei Punkte einer Graden r und liegt C innerhalb des Segments (AB) und sind A', B', C' die drei Durchschnittspunkte der drei Graden RA, RB, RC mit einer zu r Parallelen r', so liegt der Punkt C' innerhalb des Segments $(A'B')$.

Denn nach dem Zus. III ist

$$\frac{(A'R)}{(AR)} = \frac{(A'C')}{(AC)} = \frac{(A'B')}{(AB)} = \frac{(C'B')}{(CB)}.$$

Mithin entsprechen sich $(A'C')$ und $(A'B')$ in dem durch die Segmente (AC) und (AB) bestimmten Proportionalitätszusammenhang. Weil nun nach der Voraussetzung $(AB) > (AC)$ ist, so folgt dass die Vielfachen und Quotienten von (AB) grösser sind als diejenigen von (AC), welche nach derselben Zahl genommen werden (Einl. d, d', § 79). Also ist $(A'B') > (A'C')$ (Einl. c, § 106). Analoges gilt für die Paare $(A'B')$, (AB); $(C'B')$, (CB). Weil mithin die Abstände des Punktes C' von A' und B' kleiner sind als $(A'B')$, so liegt C' innerhalb des Segments $(A'B')$ (Einl. Def. I, § 61).[XL]

[XL]) Der Satz I wird sowohl bei Ax. II als II' ebenso bewiesen. Man legt dabei die in den früheren Anmerkungen gegebenen Sätze zu Grunde, welche den im Text angezogenen analog sind. Weil es aber sowohl bei Ax. II als II' noch nicht ausgeschlossen ist, dass die Grade geschlossen sei und bei Ax. II auch die Möglichkeit besteht, dass zwei entgegengesetzte Punkte die Grade nicht bestimmen (Satz II, § 14), so machen wir den Vorbehalt, dass es in den Seiten des Dreiecks keine entgegengesetzte Punkte gebe. Diese Einschränkung ist bei Ax. II' nicht nöthig, wie auch bei Ax. II nicht, wenn man als Seite des Dreiecks das kleinere der beiden durch die Ecken bestimmten Segmente betrachtet. Ein Dreieck, dessen eine Seite der Hälfte der Graden gleich wäre, kann es nicht geben (Satz II, § 14). Aehnlich verhält es sich mit den Zusätzen.

Hat man zu Lehrzwecken die Definitionen der §§ 10 und 12 nicht gegeben, so reicht es aus, wenn man sie hier mit Ax. IV bringt und sich darauf beschränkt den Satz VI, § 11 zu beweisen. Satz II, § 10 wird als Zusatz zu Ax. IV gebracht.

7.

Definition der Ebene und ihre ersten Eigenschaften. — Büschel um ihre Punkte.

§ 46. *Def. I.* Betrachtet man den Punkt als Element, so erhält man aus dem Strahlenbüschel eine Figur, welche *ebene Fläche oder einfach Ebene* heisst.

Def. II. Der durch einen Winkelsector des Büschels gegebene Theil der Ebene heisst *ebener Winkelsector oder Sector.*

Wenn der ebene Winkelsector als durch jeden andern ihm identischen Sector bei jeder Verbindung mit andern ebenen Sectoren ersetzbar angesehen wird, so heisst er *ebener Winkel*[1]) des gegebenen Sectors.

Bem. I. Es ist also ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Winkelsector des Büschels und dem Winkelsector der Ebene, insofern der erste den Strahl, der zweite dagegen den Punkt zum Element hat. Dies heisst, wenn man die Definitionen des § 110 der Einleitung benutzt: während das Strahlenbüschel als eine Figur einer Dimension in Bezug auf einen Strahl oder eine Grade angesehen wird, ist die Ebene dagegen bezüglich des Punktes als Element eine Figur von zwei Dimensionen.

Weil aber jeder Sector eines Strahlenbüschels nur einen ebenen Sector und, wie wir in Kurzem sehen werden, jeder ebene Sector nur einen Sector eines Büschels liefert, so darf man sie unbeschadet ihres Unterschieds und der Eigenschaften, die von diesem Unterschied abhängen, miteinander vertauschen, wie wir in analogen Fällen Abstand und Segment, Sector und Winkel eines Büschels verwechseln können.

Def. III. Wenn alle Punkte einer Graden der Ebene angehören (Def. I, § 2), so sagt man, die Grade *liege* in der Ebene.[XLI])

Satz I. Wenn man von den Punkten der Ebene die Parallelen zu allen Graden eines Büschels, welches die Ebene erzeugt, zieht, so werden diese Parallelen

1) von allen Graden des Büschels geschnitten und haben

2) alle ihre Punkte in Graden des Büschels liegen und schneiden sich

3) untereinander.[XLII])

a) Die durch das Strahlenbüschel (Rr) gegebene Ebene (Def. I) enthält eine andre zu r parallele Grade r' (Satz I, § 43). Sind zwei beliebige Grade α und β des Büschels (Rr) gegeben und man zieht von einem Punkt der ersten die Parallele x zur Graden r, so schneidet diese die Grade β (Satz I, § 45)

---

[1]) Der ebene Winkel ist daher die intensive Grösse des ebenen Sectors (Einl. Def. II und a, c, § 111).

[XLI]) Wenn man die Definition des Gradenbüschels noch nicht gegeben hat, so kann man sie hier geben. Es ist die durch alle Graden, welche die Punkte einer Graden r mit einem Punkt R ausserhalb derselben verbinden, bestimmte Figur mit Einschluss der durch R zu r parallel gezogenen Graden. Hierher gehören dann die in § 38 gegebenen Definitionen der Winkelsectoren und Winkel des Büschels wie auch die Definition des Büschels paralleler Graden. Alsdann folgt die Definition der Ebene.

[XLII]) Macht man von dem im Unendlichgrossen liegenden Punkt der Graden keinen Gebrauch, auch nicht als Ausdrucksweise, so hat man in 1) und 3) den Fall paralleler Graden auszuschliessen. Der Beweis ist mit Ausnahme dieses Unterschieds unter Berücksichtigung des Satzes IV, Anm. XXXVIII derselbe.

und mithin jede Grade des Büschels; denn auch wenn β der Graden r parallel ist, so schneidet x die Grade β im Unendlichen. Umgekehrt liefert jeder Punkt der Graden x mit R verbunden eine Grade, welche die Grade r schneidet (Zus. I, Satz V, § 45); die Grade x liegt daher vollständig in der Ebene (Def. III). Die Grade α aber ist eine beliebige Grade des Büschels und andrerseits sind die Punkte der Ebene durch die Graden des Büschels gegeben (Def. I). Mithin schneiden alle Graden, welche von den Punkten der Ebene parallel zur Graden r und also auch zu der durch R parallel zu r geführten Graden σ gezogen werden (Zus. Satz I und Def. II, § 26) die Graden des Büschels (Rr) und liegen in der Ebene (Def. III) (Fig. 45).

b) Jeder Punkt Z der Graden AB' liegt in der Ebene; denn die durch Z parallel zu r gezogene Grade muss die Grade RA des Büschels schneiden und liegt daher in der Ebene (a); folglich liegt die Grade AB' in der Ebene (Def. III) (Fig. 45).

Oder auch: Die Grade RZ schneidet die zu r parallele Grade x, welche RA schneidet; folglich schneidet RZ auch die Grade r (Zus. I, Satz § 45). Jeder Punkt der Graden AB' liegt daher in einer Graden des Büschels (Rr) (Fig. 45).

Umgekehrt schneidet jede Grade des Büschels (Rr) die Grade AB'. Ist X der Durchschnittspunkt der gegebenen Graden des Büschels mit r und betrachtet man das Dreieck XCR, so sieht man, dass die Grade AB' die Grade RX schneiden muss (Satz I, § 45) (Fig. 48).

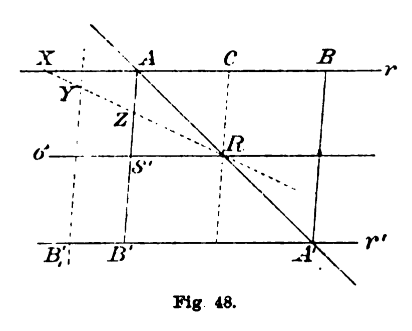


Fig. 48.

Der Punkt A kann nun als ein beliebiger Punkt der Graden RA angesehen werden; denn zieht man von einem beliebigen Punkt A'_1 der Graden RA die zu r Parallele r_1, so ist jede Grade des Büschels (Rr) eine Grade des Büschels (Rr_1) und umgekehrt (a). Man kann also ein dem Parallelogramm $ABA'B'$ analoges Parallelogramm construiren, dessen Centrum R und Ecke A'_1 und dessen eine Seite die Grade r_1 und dessen andre Seite parallel zu RC ist. Zieht man daher von einem beliebigen Punkt A der Graden RA eine Parallele zur Graden RC des Büschels, so besitzt diese die Eigenschaften 1) und 2) des Satzes.

Ist ein beliebiger Punkt Y der Ebene gegeben, so ist die Grade RY eine Grade des Erzeugungsbüschels (Def. I), welche die Directrix r in einem Punkt X schneidet. Betrachtet man den Strahl RX als Strahl RA, so folgt, dass die von Y zu RC parallel gezogene Grade vollständig in der Ebene liegt und von allen Graden des Büschels (Rr) geschnitten wird.

RC kann aber als beliebige Grade des Büschels angesehen werden und mithin schneiden die Graden, welche von einem beliebigen Punkt Y der Ebene parallel zu den Graden des Büschels (Rr) gezogen werden, diese Graden und

liegen in der Ebene. Ist RC die von R parallel zu r gezogene Grade σ, so wissen wir schon, dass die von Y parallel zu σ gezogene Grade dieselbe Eigenschaft besitzt (a).

Was für das Büschel (Rr) gilt, hat offenbar für jedes Büschel Geltung, welches die Ebene erzeugt und sich mithin in denselben Verhältnissen wie das Büschel (Rr) befindet (Def. I).

Damit sind die Eigenschaften 1) und 2) nachgewiesen (Fig. 48).

c) Es erübrigt der Beweis, dass die zu den Graden des Büschels (Rr) Parallelen sich in einem Punkt schneiden. Wir nehmen den Fall aus, in welchem sie parallel sind, weil sie alsdann, wie wir schon wissen, sich in einem Punkt im Unendlichgrossen bez. der Einheit des endlichen Gebiets schneiden (Def. II, § 26, Uebereink. § 28 und Zus. I, Satz III, § 19).

Es sei also eine Grade des Büschels gegeben und es werde von einem Punkt A aus AB parallel zu ihr gezogen. AB liegt dann, wie man weiss, in der Ebene und schneidet alle Graden des Büschels (b). Von einem Punkt Y ziehe man die Parallele zu einer andern Graden RC des Büschels. Da RC und RY die Grade AB bez. in den Punkten C und X treffen (b), so schneidet die von Y parallel zu RC gezogene Grade die Grade AB (Satz I, § 45) (Fig. 48).

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Zus. I. Ein Punkt im Unendlichgrossen und ein Punkt des endlichen Gebiets bestimmen eine vollständig in der Ebene liegende Grade.

Denn der Punkt im Unendlichgrossen ist durch eine Grade des Büschels (Rr) gegeben (Def. I) und durch den Punkt des endlichen Gebiets geht eine zu dieser Graden Parallele, welche in der Ebene liegt (b).

Zus. II. Ist ein Büschel (Rr) der Ebene gegeben, so bestimmt jede andre Grade dieser Ebene mit R dieselbe Ebene.

Ist r' die andre Grade, so ist sie einer Graden des Büschels (Rr) parallel und schneidet mithin alle Graden des Büschels (Rr) und wird von den Graden dieses Büschels geschnitten.[XLIII])

Satz II. Zieht man durch den Punkt R eine Parallele zu einer Graden r, so ist dieselbe Grenzgrade des Büschels (Rr).

[XLIII]) Zus. I wird so ausgedrückt:

Zieht man durch einen Punkt der Ebene eine Parallele zu einer ihrer Graden, so liegt diese Parallele ganz in der Ebene.

a) Die Grade, welche von R aus parallel zu einer in der Ebene liegenden Graden gezogen wird, liegt ebenfalls in der Ebene.

Denn betrachtet man RA und eine Grade RS', welche AB' im Punkt S' trifft, und zieht durch A die Parallele AB zu RS', so liegt AB in der Ebene (Def. III und Satz I) und wird mithin von allen Graden des Erzeugungsbüschels (Rr) der Ebene geschnitten und ihre Punkte liegen in Graden des Büschels (b). Zieht man aber von R die Parallele zu AS', so schneidet diese die Grade AB in einem Punkt C (Anm. XXXVII). RC, welches parallel zu AB' ist, ist mithin eine Grade des Büschels (Rr).

b) Wenn s die gegebene Grade und X der gegebene Punkt sind, so ziehe man RC durch R parallel zu s; RC liegt dann in der Ebene (a). Zieht man durch X eine Parallele XM zu s, so ist diese auch parallel zu der durch R zu s parallel gezogenen Graden (Satz IV, Anm. XXXVIII) oder zu einer Graden des Büschels (Rr); XM liegt also ganz in der Ebene (Satz I).

Zus. II wird ebenso bewiesen, nur sind die beiden parallelen Graden, wie in der vorigen Anmerkung angegeben, auszuschliessen.

a) Z sei ein Punkt innerhalb des zu (RC) parallelen **Segments** (AS') und AC, RS' seien parallel zueinander. X sei der **Durchschnittspunkt der Graden** RZ mit der Graden AC; A liegt dann innerhalb des **Segments** (CX). **Denn** aus den Dreiecken XRC, XZA erhält man

$$\frac{(AZ)}{(CR)} = \frac{(XZ)}{(XR)}, \qquad \text{(Zus. III, Satz I, § 45)}$$

und weil $(CR) \equiv (AS')$ ist (Satz I, § 44) und $(AZ) < (AS')$ (Einl. Def. I, § 61), so ist $(AZ) < (CR)$ (Einl. Def. II, § 61). **Folglich ist** $(XZ) < (XR)$ (Einl. c, § 111).

Betrachtet man die Dreiecke RXX_1, RZS', wobei (XX_1) parallel zu (RC) ist und der Punkt X_1 auf der Graden RS' liegt, so ist $(XX_1) \equiv (RC)$ (Satz I, § 44) und daher

$$\frac{(ZR)}{(XR)} = \frac{(S'Z)}{(X_1X)}. \qquad \text{(Zus. III, Satz I, § 45)}$$

Es ist aber $(S'Z) < (S'A) \equiv (X_1X)$ und also $(ZR) < (XR)$. **Z liegt mithin** innerhalb des Segments (XR) (Einl. Def. I, § 61). Folglich **liegt auch A inner**halb des Segments (XC) (Zus. II, Satz I, § 45).

Wenn umgekehrt A innerhalb des Segments (XC) liegt, so **lässt sich** ähnlich beweisen, dass der Durchschnittspunkt Z von (RX) mit (AS') (Satz I) innerhalb des Segments (AS') liegt (Fig. 48).

b) Wählt man einen Punkt Z' in dem Segment (ZS'), so schneidet RZ' das Segment (XX_1) in einem innerhalb gelegenen Punkt X'' (Zus. IV, Satz I, § 45), und bezeichnet man mit X' den Durchschnittspunkt von RZ' mit der Graden AC (Satz I), so liegt, weil X'' sich innerhalb des Segments (XX_1) befindet, der Punkt X innerhalb des Segments (CX') (a).

Liegt umgekehrt X innerhalb des Segments (CX'), so ist der Punkt X'' innerhalb des Segments (XX_1) (a) und mithin auch Z' in dem Segment (ZS') (Zus. IV, Satz I, § 45).

Wenn also $(S'Z)$ unbegrenzt abnimmt (Uebereink. § 28 und Einl. Def I, § 95), so nimmt das Segment (CX) in der Richtung von (CA) unbegrenzt zu, weil die Grade RZ, wie auch Z in (AS') liegen mag, stets die Grade r in einem Punkt X schneidet (Satz I) und umgekehrt.

Damit ist der Satz bewiesen.[1] [XLIV]

---

1) In Verbindung mit unsern Definitionen von Strahlen und parallelen Graden (Def. I, II, § 26), welche sich auf die abstracte Existenz der im Unendlichgrossen liegenden Punkte nach den in der Einleitung entwickelten Principien stützen, haben wir hier eine erfahrungsmässige Bestätigung der Existenz der parallelen Graden und Strahlen. Denn bei unsern empirischen Betrachtungen in § 27 haben wir wohl gesehen, dass der parallele Strahl Grenzstrahl des Büschels ist, dies aber nur zur Aufstellung der Hyp. V und des ersten prakt. Axioms benutzt.

XLIV) Satz II wird auf dieselbe Art bewiesen.

Bem. I. Man beachte, dass jedem Punkt der Graden r in dem Büschel (Rr) eine Grade entspricht, welche durch den gegebenen Punkt geht, mit Ausnahme der Parallelen und dass jede Grade des Büschels die Grade r schneidet.

Um auch in einem Elementarbuch die Ausnahmen in den Sätzen und Beweisen zu vermeiden, kann man sagen:

Satz III. Jeder Punkt der Ebene ist Centrum eines Büschels von Graden, welche in der Ebene liegen und alle Punkte der Ebene enthalten.

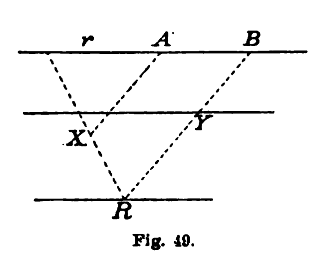


Fig. 49.

Denn die Graden, welche von einem beliebigen Punkt X parallel zu den Graden des die Ebene erzeugenden (Def. I) Büschels (Rr) gezogen werden, schneiden sämmtlich die Grade r (Satz I). Nimmt man einen Punkt A von r, so ist die Grade AX parallel zu einer Graden RB des Büschels (Rr), weil RX eine Grade des Büschels ist und mithin r schneidet; also schneidet die Parallele zu AX, welche durch R geht, die Grade r in einem Punkt B (Satz I, § 15). Alle Graden des Büschels (Xr) gehören folglich der Ebene (Rr) an (Satz I).

Umgekehrt ist jede Grade des Büschels (Rr), weil sie die Grade r schneidet, parallel zu einer Graden des Büschels (Xr) und wird mithin von allen Graden des Büschels (Xr) geschnitten und jeder Punkt einer Graden von (Rr) liegt in diesem Büschel (Satz I). Also liegt jede Grade des Büschels (Rr) und mithin jeder Punkt der Ebene (Rr) in der Ebene (Xr).

Ist der Punkt X im Unendlichgrossen, so sind alle Graden des Büschels mit dem Centrum X parallel zur Graden RX und werden von der Graden r

---

Zwei Grade haben einen Punkt im Unendlichgrossen gemeinschaftlich heisst soviel als: die beiden Graden sind parallel.

Dieser so eingeführte Punkt im Unendlichgrossen ist ein uneigentlicher Punkt und hat nicht wie unsre im Unendlichgrossen liegenden Punkte dieselben Eigenschaften wie die übrigen Punkte (Def. I u. II, § 26). Dann folgt (siehe Anm. V)

Satz III. Die Grade ist eine offene Linie.

Denn wäre sie geschlossen, so würde jedem Punkt Z der Graden r eine durch Z gehende Grade des Büschels (Rr) und einer Grenzgraden RX des Büschels ein Grenzpunkt X der Graden entsprechen, da man in diesem Fall die Grade als ein Segment AB mit zusammenfallenden Enden betrachten kann (Einl. a, § 63 und Satz VIII, § 13). Die zu der Graden r parallele Grade in dem Büschel (Rr) schneidet die Grade r aber nicht (Anm. XVI), ist jedoch Grenzgrade des Büschels (Satz II). Folglich ist die Grade nicht geschlossen.

Es ist in Bezug auf Anm. X zu beachten, dass der Beweis des Satzes VIII, § 13, wenn der Satz auf die Grade beschränkt wird, unabhängig von den andern Sätzen des § 13 ist.

Zus. Die Grade wird durch einen ihrer Punkte halbirt (wie Satz a″, § 70 der Einl.).

Def. Wenn man in einem Gradenbüschel die Strahlen betrachtet, wie sie durch die Theile gegeben sind, in welche R jede Grade des Büschels zerlegt, so heisst die resultirende Figur *Strahlenbüschel.*

Satz IV. Das Strahlenbüschel ist bez. des Strahls als Element ein einfach geschlossenes System einer Dimension.

Denn in (Rr) gibt es Strahlen, welche die Grade r und die entgegengesetzten Strahlen, welche die Grade r' schneiden (siehe Anm. XXXVII), zwischen denen die Strahlen der parallelen Graden liegen, welche dem Büschel angehören (Anm. XLI).

Bem. II. Aus dem Beweis des Satzes II geht hervor, dass die Strahlen des Büschels, welche die Grade r von einem ihrer Punkte an in einer gegebenen Richtung schneiden, einen Strahl der parallelen Graden zum Grenzstrahl haben, während die Strahlen, welche die Grade r in der entgegengesetzten Richtung schneiden, den entgegengesetzten Strahl zum Grenzstrahl haben (Def. I, § 12).

Unterscheidet man die Strahlen einer Graden, so kann man sagen, dass im ersten Fall der Strahl der Graden r und der parallele Strahl in dem Büschel (Rr) einen Punkt im Unendlichgrossen und die entgegengesetzten Strahlen einen entgegengesetzten Punkt im Unendlichgrossen haben (Bem. I).

Bem. III. Nach Satz III, wenn Satz I, § 14 mit dem Ax. II gilt, braucht man von jetzt an in diesen Anmerkungen dem Unterschied zwischen Ax. II und II′ nicht mehr Rechnung zu tragen (siehe Anm. IV).

und allen Graden des Büschels (Rr) geschnitten, weil jeder ihrer Punkte in einer Graden dieses Büschels liegt.

Zus. I. Jede Grade der Ebene schneidet alle Graden eines jeden Büschels dieser Ebene.

Dies geht aus dem Beweis unsres Satzes hervor, weil sie parallel zu einer Graden des Büschels ist (Zus. I, Satz I) und mithin alle Graden des Büschels trifft (Satz I).

Zus. II. Zwei Graden der Ebene schneiden sich in einem Punkt.

Sind sie parallel, so treffen sie sich im Unendlichgrossen (Def. II, § 26). Sind sie es nicht und nimmt man auf einer von ihnen einen Punkt X an, so gehört diese zu dem Büschel der Ebene mit dem Centrum X und die andre gegebene Grade ist einer Graden dieses Büschels parallel (Zus. I, Satz I) und schneidet mithin alle Graden des Büschels und also auch die erste gegebene Grade (Satz I).

Satz IV. Eine Grade, welche zwei Punkte in dem endlichen Gebiet der Ebene hat, liegt vollständig in der Ebene.

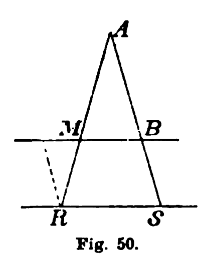


Fig. 50.

Sind A und B diese beiden Punkte, so zieht man durch A die Grade RA und durch B eine z. B. zu der Graden RS des die Ebene erzeugenden Büschels (Def. I) parallele Grade, welche RA in M trifft (Satz I).

Jede Grade, welche A mit den Punkten der Graden BM verbindet, ist eine in der Ebene liegende Grade des Büschels mit dem Centrum A (Satz III und Zus. II, Satz I). Mithin liegt die Grade AB in der Ebene.

Oder auch: Zieht man von R eine Parallele zu AB, so schneidet sie MB (Satz I, § 45) und ist eine Grade des Büschels von dem Centrum R und der Directrix BM (Zus. II, Satz I). Mithin liegt nach Satz I die Grade AB vollständig in der Ebene.[1])

Satz V. Die Ebene wird durch jede ihrer Graden und einen beliebigen Punkt ausserhalb dieser Graden bestimmt.

X und x seien der Punkt und die Grade und (Rr) das ursprüngliche Büschel, welches die Ebene erzeugt (Def. I). Wie man weiss, fallen die Punkte der beiden Büschel (Xx), (Rr) zusammen (Satz III) und mithin auch die beiden Ebenen (Xx), (Rr).

Zus. I. Durch eine Grade und jeden Punkt ausserhalb derselben geht nur eine Ebene.

Wenn r und R die Grade und der Punkt sind und es gingen zwei Ebenen durch dieselben, so müssen diese durch das Büschel (Rr) bestimmt sein, d. h. sie müssen zusammenfallen (Satz III und Zus. II, Satz I).

Dasselbe gilt, wenn der Punkt R im Unendlichgrossen liegt.

1) Diese Eigenschaft wird in den Elementarbüchern gewöhnlich als Fundamentalaxiom für die Ebene angenommen.

Zus. II. Drei nicht in grader Linie liegende Punkte bestimmen eine einzige Ebene, welche auch von jeder andern Gruppe von dreien ihrer Punkte, welche im endlichen Gebiet und nicht in grader Linie liegen, bestimmt wird.

Denn durch die Grade r, welche zwei von den gegebenen Punkten verbindet und durch den dritten Punkt geht nur eine Ebene (Zus. I), welche die Graden enthält, die den letzten Punkt mit den beiden ersten verbinden.

Wählt man drei beliebige Punkte D, E, F der Ebene, die nicht in grader Linie liegen, so liegt die Grade, welche zwei beliebige von ihnen verbindet, in der Ebene (Satz IV). Mithin wird die Ebene durch diese Grade und den dritten Punkt bestimmt.

Zus. III. Zwei Grade, welche einen Punkt A gemeinschaftlich haben, bestimmen eine einzige Ebene;

oder auch:

Zwei Strahlenbüschel mit zwei gemeinschaftlichen Strahlen fallen zusammen.

Denn um die beiden Graden zu bestimmen, sind ausser dem gemeinschaftlichen Punkt A noch zwei andre nöthig, die mit dem ersten eine einzige Ebene bestimmen, welche die beiden gegebenen Graden enthält.

Zus. IV. Zwei Parallelen bestimmen eine einzige Ebene.

r und r' seien die beiden Parallelen, (AB) schneide sie und R sei der Mittelpunkt von (AB). Die von R mit einer der beiden Parallelen bestimmte Ebene enthält alle Graden, die man von den Punkten von AB parallel zu den beiden Graden ziehen kann. Jeder Punkt von AB oder jeder andern Transversalen $A'B'$ von r und r', welcher in der Ebene (Rr) liegt (Satz IV), erzeugt mit r und r' dieselbe Ebene (Satz III). Damit ist der Satz bewiesen.[XLV])[1])

1) Beschränkt man den Satz I, § 45 auf alle Punkte R, die man durch successive Halbirung der Seiten (AB), (AC), (BC) des Dreiecks ABC sowie durch die Vielfache von (AB) und (AC) auf den Seiten AB und AC des Dreiecks erhält und zieht durch diese Punkte R Parallele zu den Seiten des Dreiecks und der neuen durch die neuen Graden gebildeten Dreiecke, so erhält man eine Figur, die wir *netzförmige Ebene* nennen. Dieses Netz enthält statt Graden gradlinige von zwei Punkten bestimmte Punktgruppen derart, dass die Segmente der Punkte jeder Gruppe unter sich commensurabel sind und dass einem gegebenen Segment (AB) des Netzes die Punkte angehören, welche es in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile zerlegen. Die netzförmige Ebene besitzt dieselben Eigenschaften, die bis jetzt für die Ebene gelten; d. h.: zwei Punkte der netzförmigen Ebene bestimmen eine gradlinige in der Ebene gelegene Gruppe und zwei gradlinige Gruppen schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind, immer in einem Punkt des Netzes. In einem solchen Netz kann man die Constructionen der projectiven Formen erster Art, welche von diesen Eigenschaften abhängen, ausführen; dagegen gelten die das Mass betreffenden Eigenschaften nicht immer; so ist es z. B. möglich, dass in dem Netz eine gradlinige Gruppe, die durch einen Punkt des Netzes geht und normal zu einer gradlinigen Gruppe desselben ist, nicht existirt. Projicirt man das Netz auf eine beliebige Ebene, so erhält man ein weiteres Netz, welches im Allgemeinen die Eigenschaft nicht zu besitzen braucht, dass zwei Segmente einer gradlinigen Gruppe des neuen Netzes commensurabel sind.

XLV) Die Sätze III, IV u. V und ihre Zusätze können auf dieselbe Art bewiesen werden, wenn man die Def. Anm. XLIV benutzt; andernfalls muss man die Fassung ändern, sobald es sich um parallele Grade handelt.

Hat man in der Anm. XXXIII die Definition von Winkelsectoren und Winkeln eines Dreiecks nicht gegeben und daher die Sätze I u. II, § 42 noch nicht gebracht, so kann man hier, wie es in Anm. XXXIV geschehen ist, beweisen, dass gleichen gradlinigen Paaren gleiche Winkelsectoren entsprechen und umgekehrt. Schickt man Satz I, Anm. XLVI voraus,

8.

Die Identität der Ebene (Rr) um ihre Punkte des endlichen Gebiets und um die im Unendlichgrossen liegenden Punkte. — Eigenschaften der Senkrechten in der Ebene.

§ 47. *Def. I.* Wir nennen im Unendlichgrossen liegendes *absolutes Grenzsegment* eines Winkelsectors (ab) eines Büschels (Rr) das durch die absoluten Grenzpunkte A_∞, B_∞ der Strahlen a und b bez. des Punktes R bestimmte Segment (Def. II, § 32).

Satz I. Gleichen Winkelsectoren eines Büschels (Rr) oder verschiedener Büschel (Rr), $(R'r')$ entsprechen gleiche im Unendlichgrossen liegende absolute Grenzsegmente und umgekehrt.

Denn es seien $\widehat{A_\infty R B_\infty}$, $\widehat{A'_\infty R' B'_\infty}$ die zwei gleichen Winkelsectoren und A_∞, B_∞; A'_∞, B'_∞ die absoluten Grenzpunkte bez. R und R'.

Wählt man auf den Strahlen RA_∞, RB_∞ zwei Punkte A und B und auf den Strahlen $R'A'_\infty$, $R'B'_\infty$ die Punkte A' und B', welche denselben Abstand von R' haben, wie A und B von R, so ist $(AB) \equiv (A'B')$ (Satz II, § 15) und mithin sind die beiden Dreiecke ABR, $A'B'R'$ gleich (Satz III, § 17).

Da aber A_∞ und A'_∞, B_∞ und B'_∞ entsprechende Punkte in dem Identitätszusammenhang zwischen diesen Dreiecken sind, so ist $(A_\infty B_\infty) \equiv (A'_\infty B'_\infty)$ (Satz I, § 34).

Wenn umgekehrt $(A_\infty B_\infty) \equiv (A'_\infty B'_\infty)$, so sind die beiden Dreiecke $A_\infty RB_\infty$, $A'_\infty R'B'_\infty$ gleich (Satz III, § 17) und mithin auch die beiden Dreiecke ARB, $A'R'B'$ (Satz III, § 16). Folglich sind ihre zwei Winkelsectoren $A_\infty RB_\infty$, $A'_\infty R'B'_\infty$ gleich (Satz II, § 15).

Wenn die Winkelsectoren der Büschel flach sind (Def. V, § 38), so sind ihre absoluten im Unendlichgrossen liegenden Grenzsegmente der Hälfte der Graden gleich, weil die im Unendlichgrossen liegenden Punkte der entgegengesetzten Strahlen der Sectoren entgegengesetzte Punkte sind (Def. III, § 6 und Def. II, § 32).

Sind dagegen zwei Segmente $A_\infty X_\infty A_{1\infty}$, $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty}$ gegeben, welche der Hälfte der Graden in den absoluten Grenzgebieten von R und R' gleich sind, so wählen wir zwei Punkte B_∞ und B'_∞ auf den andern Hälften der durch diese zwei Segmente bestimmten Graden in gleichem Abstand von $A_{1\infty}$ und $A'_{1\infty}$. Die Winkelsectoren der durch die Segmente $A_\infty X_\infty A_{1\infty} B_\infty$ und $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty} B'_\infty$ bestimmten Büschel (Rr) und $(R'r')$ sind gleich und weil es auch ihre Theile $A_{1\infty} RB_\infty$, $A'_{1\infty} R'B'_\infty$ sind, so sind die übrigbleibenden Winkelsectoren, d. h. die beiden gegebenen flachen Winkelsectoren ebenfalls gleich (Satz II, § 15).

Zus. I. Zwei Scheitelwinkelsectoren in einem Strahlenbüschel (Rr) sind gleich.

---

so lässt sich auch beweisen, dass gleichen Winkeln gleiche Winkelsectoren und mithin gleiche gradlinige Paare entsprechen. Als Zusätze werden die Sätze über die Gleichheit der Dreiecke gegeben und den gradlinigen Paaren dabei die Winkelsectoren und Winkel substituirt.

Denn die beiden entgegengesetzten von ihnen bestimmten gradlinigen Paare sind gleich (Def. I, § 16 und Satz II, § 17) und folglich auch ihre im Unendlichgrossen liegenden absoluten Grenzsegmente (Satz I, § 34).

Zus. II. Zwei beliebige flache Winkelsectoren desselben Büschels (Rr) *oder zweier Büschel* (Rr), $(R'r')$ *sind gleich.*

Denn ihre im Unendlichgrossen liegenden absoluten Grenzsegmente sind der Hälfte der Graden gleich.

Zus. III. Ein in der Richtung von a *nach* b *durchlaufener Winkelsector* (ab) *eines Büschels* (Rr) *ist mit demselben Sector in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen identisch.*

Denn dies gilt von dem im Unendlichgrossen liegenden absoluten Grenzsegment des Sectors (Einl. g, § 99 oder c, § 104).

Satz II. Zwei beliebige Büschel (Rr), $(R'r')$ *sind identisch.*

Die beiden Büschel haben zum absoluten Grenzsegment die als Segment betrachtete ganze Grade, deren Enden in einem beliebigen ihrer Punkte zusammenfallen.

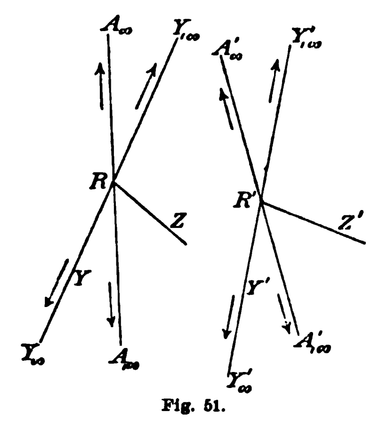


Fig. 51.

Sind umgekehrt die beiden absoluten Grenzgraden $A_\infty X_\infty A_{1\infty} X_{1\infty}$, $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty} X'_{1\infty}$ der Punkte R und R' gegeben (Satz III, § 32), so werden die beiden Büschel (Rr) und $(R'r')$, welche sie mittelst der Gradenpaare $RA_\infty A_{1\infty}$, $RX_\infty X_{1\infty}$; $R'A'_\infty A'_{1\infty}$, $R'X'_\infty X'_{1\infty}$ bestimmen, durch die Graden $RA_\infty A_{1\infty}$, $R'A'_\infty A'_{1\infty}$ in zwei gleiche flache Winkelsectoren getheilt (Zus. II, Satz I), auch wenn die Winkelsectoren $X_\infty RA_\infty$, $X'_\infty R'A'_\infty$ nicht gleich sind.

Setzt man in gegebenen Richtungen der beiden Büschel, z. B. in denjenigen, die durch die Punkte $A_\infty X_\infty A_{1\infty} X_{1\infty}$ und $A'_\infty X'_\infty A'_{1\infty} X'_{1\infty}$ bestimmt sind, den Identitätszusammenhang zwischen den obengenannten flachen Winkelsectoren fest, so entsprechen den zwei Punkten Y und Z in einem dieser Sectoren zwei Punkte Y' und Z' des andern Sectors in einem Abstand von R', der demjenigen der Punkte Y und Z von R gleich und derart ist, dass $\widehat{YRZ} \equiv \widehat{Y'R'Z'}$ und mithin $(YZ) \equiv (Y'Z')$.

Liegen dagegen Y und Z in den beiden obengenannten flachen Sectoren des Büschels (Rr), so liegen die entsprechenden Punkte Y' und Z' in den entsprechenden Sectoren des Büschels $(R'r')$.

Der zu RY entgegengesetzte Strahl $RY_{1\infty}$ ist in dem entgegengesetzten flachen Sector gelegen (siehe Beweis zu Satz II, § 43), in welchem auch der Strahl RZ liegt. Diesem Strahl entspricht in dem obigen Identitätszusammenhang der zu $R'Y'$ entgegengesetzte Strahl $R'Y'_{1\infty}$. Man erhält mithin $\widehat{Y_{1\infty}RZ} \equiv \widehat{Y'_{1\infty}R'Z'}$ und daher, weil $\widehat{Y_{1\infty}RY_\infty} \equiv \widehat{Y'_{1\infty}R'Y'_\infty}$, auch $\widehat{ZRY} \equiv \widehat{Z'R'Y'}$,

woraus $(ZY) \equiv (Z'Y')$ folgt (Satz II, § 42). Danach kann man zwischen den beiden Büscheln (Rr), $(R'r')$ einen solchen Zusammenhang feststellen, dass den Segmenten des einen der Ordnung nach die Segmente des andern gleich sind. Folglich sind die Büschel identisch (Fig. 51).

Zus. I. Alle Ebenen (Rr) sind identisch.

Denn es sind dies die beiden Büschel, welche sie bestimmen (Def. I, § 46) und der Identitätszusammenhang der beiden Büschel ergibt den Identitätszusammenhang der beiden Ebenen, welche mithin identisch sind (Satz II, § 15).

Zus. II. Die Ebene ist um jeden ihrer Punkte des endlichen Gebiets identisch.

Es gilt ein ähnlicher Beweis (Satz III, § 46).

Satz III. Das Büschel (Rr) ist identisch in der Position seiner Theile und stetig.

Dass es identisch in der Position seiner Theile ist, geht daraus hervor, dass es von einem seiner Strahlen in der einen Richtung aus identisch mit dem Büschel ist, welches in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen wird (Satz I).

Dass es stetig ist, folgt aus der Definition des Büschels; denn, ist ein Winkelsector (ab) des Büschels gegeben, so gibt es in ihm einen kleineren Sector (Def. I, § 38) und wenn ein Winkelsector (xx') derart ist, dass x und x' das Büschel in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen und (xx') unbegrenzt klein wird und wenn man eine Grade r der Ebene des Büschels auswählt, welche die Schenkel x und x' des Sectors schneidet, so wird auch das Segment (XX') auf der Graden r unbegrenzt klein (Def. I, § 30) und dem Punkt Y, welchen (XX') in r bestimmt (Einl. a, § 96 oder a, § 101) entspricht ein in jedem Zustand des Sectors (xx') enthaltener Strahl RY des Büschels.

Das Büschel besitzt mithin bezüglich seiner Winkel die Eigenschaften des in der Position seiner Theile identischen und stetigen Systems einer Dimension sowohl in relativem als absolutem Sinn.

Zus. Die Ebene ist in der Position ihrer Theile um jeden ihrer Punkte des endlichen Gebiets identisch.

Denn die gleichen Winkelsectoren eines Büschels (Rr) der Ebene mit dem Centrum in dem endlichen Gebiet bestimmen gleiche ebene Winkelsectoren (Def. II, § 46 und Satz III, § 15).

Satz IV. Die im Unendlichgrossen liegenden absoluten Grenzsegmente der rechten Winkelsectoren eines beliebigen Büschels (Rr) sind rechte Segmente.

Sind drei Punkte $A_\infty B_\infty A_{1\infty}$ einer Graden in dem absoluten Grenzgebiet eines Punktes R derart gegeben, dass $(A_\infty B_\infty) \equiv (B_\infty A_{1\infty})$ und sind A_∞, $A_{1\infty}$ entgegengesetzte Punkte, so sind die Winkelsectoren $\widehat{A_\infty R B_\infty}$, $\widehat{B_\infty R A_{1\infty}}$ in dem Büschel (Rr) der vierte Theil des Büschels. Und weil zwei beliebige Büschel (Rr), $(R'r')$ identisch sind (Satz II), so sind auch ihre vierten Theile gleich (Satz III; Einl. b, § 99 oder a, § 103 und d', § 79). Mithin sind ihre im Unendlichgrossen liegenden absoluten Grenzsegmente, da sie gleich sind (Satz I), rechte Segmente.

Zus. In einem Büschel (Rr) *gibt es nur eine zu einer Graden des Büschels senkrechte Grade.*

Denn die gegebene Grade bestimmt zwei flache Sectoren in dem Büschel, welche durch die zu der gegebenen Graden Senkrechte halbirt werden (Def. V, § 41).

Satz V. Ist ein Punkt A ausserhalb einer Graden a gegeben, so gibt es nur eine Senkrechte, welche die Grade a schneidet und den Punkt A enthält.

Man betrachte das Büschel (Aa) und ziehe von A aus eine Parallele s zu der Graden a. Von A aus kann man in dem Büschel (Aa) nur eine Senkrechte zu der Graden s ziehen (Zus. Satz IV), welche auch auf der Graden a senkrecht steht (Satz VI, § 41).

Zus. I. Durch einen Punkt A der Ebene geht nur eine Senkrechte zu einer beliebigen Graden a der Ebene (Satz V; Zus. II, Satz III, § 46).

Zus. II. Zwei Grade, die in der Ebene (Rr) *auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.*

Denn a und b seien die zur Graden c senkrechten Graden, A und B ihre Durchschnittspunkte mit c. Wäre b nicht parallel zu a, so würde die zu a Parallele, die durch den Punkt B geht, eine zweite Senkrechte auf der Graden c sein (Satz VI, § 41), was widersinnig ist (Zus. I).

Satz VI. Zwei Strahlen, die in der Ebene senkrecht auf zwei andern Strahlen stehen, bilden einen Winkel, welcher dem Winkel der beiden Strahlen gleich oder supplementär ist.

Wir können annehmen, dass die gegebenen Strahlen x und y und die senkrechten Strahlen z und w demselben Büschel angehören; denn, wäre es nicht so, so könnten wir in der Ebene immer zwei zu den senkrechten Strahlen parallele Strahlen betrachten, die durch den Durchschnittspunkt der Strahlen x und y gehen (Zus. II, Satz III, § 46) und die denselben Winkel miteinander machen, wie die senkrechten Strahlen (Satz I, § 40).

Wenn die Winkel (xz) und (yw) dieselbe Richtung haben und (xy) ein spitzer Winkel ist, so erhält man:

$$(xy) + (yz) \equiv (yz) + (xy) \quad \text{(Satz III; Einl. b, § 99 oder a, § 104)}$$

und da die rechten Winkel einander gleich sind (Satz IV und Satz I), so ist:

$$(yz) + (xy) \equiv (yz) + (zw).$$

Daraus folgt

$$(xy) \equiv (zw). \qquad \text{(Satz III; Einl. g}^{\text{III}}\text{, § 73)}$$

Aehnlich ist es, wenn der Winkel (xy) stumpf ist.

Wenn dagegen die Winkel (xy) und (zw) entgegengesetzte Richtung haben und man bezeichnet mit w' den zu w entgegengesetzten Strahl, so haben die Winkel (xy) und (zw') dieselbe Richtung und man kommt damit auf den vorigen Fall zurück. (zw) ist aber der Supplementwinkel zu (zw'), womit der Satz bewiesen ist.

§ 48. *Satz I. Jedes Parallelogramm mit einem rechten Winkel hat vier rechte Winkel.*

$MM_1M'M_1'$ sei das Parallelogramm mit einem rechten Winkel in M und daher auch in M_1 (Def. I, § 44 und Satz VI, § 41).

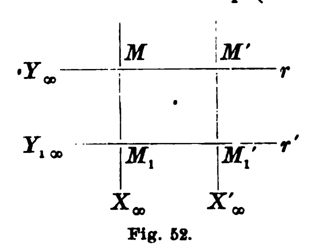


Fig. 52.

Da die gegenüberliegenden Winkel des Parallelogramms gleich sind (Satz II, § 44), so ist auch der Winkel in M' ein Rechter. (MM_1), ($M'M_1'$) sind aber parallel, daher steht auch M_1M_1' senkrecht auf der Graden $M'M_1'$ (Def. I, § 44; Satz VI, § 41) (Fig. 52).

Def. I. Ein Parallelogramm (Def. I, § 44), welches einen rechten Winkel hat, heisst *Rechteck.*

Satz II. Sind in der Ebene zwei Grade, die auf zwei gegebenen Graden senkrecht stehen, parallel, so sind die gegebenen Graden parallel.

MM_1, $M'M_1'$ seien die beiden Graden, die auf den gegebenen Graden MM' und M_1M_1' senkrecht stehen.

Wäre die Grade M_1M_1' nicht parallel zu MM', so würde die Grade, die parallel zu MM' durch M_1 gezogen wird, eine zweite durch M_1 gehende Senkrechte zu M_1M sein (Satz VI, § 41), was widersinnig ist (Zus. I, Satz V, § 47) (Fig. 52).

Satz III. Ein Büschel paralleler Graden ist in der Position seiner Theile identisch und stetig.

Denn X_∞ sei das Centrum des Büschels und man ziehe in der Ebene desselben eine Senkrechte AC zu einer Graden des Büschels, welche dann auch senkrecht auf allen andern Graden des Büschels steht (Satz VI, § 41). Wir wählen auf dieser Senkrechten zwei gleiche Segmente (AB) und (BC) aus und durch ihre Enden mögen die Strahlen b und c gehen.

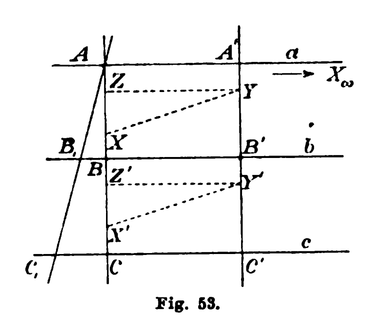


Fig. 53.

Wir behaupten, dass die Streifen (ab), (bc) (Def. X, § 38) gleich sind.

In der That, stellt man einen Identitätszusammenhang zwischen den Graden a und b, b und c derart fest, dass jedem Punkt A' von a der Punkt B' von b und C' von c entspricht, welche in gleicher Entfernung von den Punkten A, B und C und in den Strahlen der Graden a, b, c in der Richtung des Punktes X_∞ liegen, so sind die Figuren $AA'BB'$, $BB'CC'$ Rechtecke (Satz I) und mithin $(AB) \equiv (A'B')$, $(BC) \equiv (B'C')$ (Satz I, § 44). Durch den Punkt B' geht aber nur eine Senkrechte zur Graden b und mithin auch zu allen andern Graden des Büschels (Zus. I, Satz V, § 47 und Satz VI, § 41). Da also $B'A'$, $B'C'$ senkrecht auf b stehen, so liegen die Punkte A', B', C' in einer Graden, die senkrecht auf allen Graden des Büschels steht. Weil nun A', B', C' beliebige in dem obigen Zusammenhang entsprechende Punkte sind, so liegen beliebige entsprechende Punkte von a, b, c in einer auf allen Graden des Büschels senkrecht stehenden Graden.

Man wähle nun zwei Punkte X und Y von (ab), ziehe durch X und Y

die Senkrechten AB, $A'B'$ zu den Graden des Büschels und X', Y' seien die Punkte, welche von B und B' ebensoweit abstehen als X und Y von den entsprechenden Punkten A und A'. Durch Y und Y' ziehen wir die zur Richtung des Büschels parallelen Graden, welche (AB) und (BC) in den inneren Punkten Z und Z' schneiden (Zus. II, Satz IV, § 44). Es ist dann

$$(AZ) \equiv (A'Y) \equiv (BZ') \equiv (B'Y'). \qquad \text{(Satz I, § 44)}$$

Die Dreiecke XYZ, $X'Y'Z'$ sind bei Z und Z' rechtwinklig (Def. II, § 42) und haben gleiche Katheten, folglich ist auch

$$(XY) \equiv (X'Y'). \quad \text{(Satz II, § 42; Satz IV und Satz I, § 47)}$$

Auf diese Art wird ein Identitätszusammenhang zwischen den beiden Streifen (ab), (bc) festgestellt, welche mithin identisch sind (Satz III und II, § 15).

Die Streifen des Büschels verhalten sich bei diesem Zusammenhang wie die Segmente, welche sie auf einer beliebigen zu den Graden des Büschels senkrechten Graden bestimmen. Damit ist der Satz bewiesen (Fig. 53).

Satz IV. Die Gleichheit der Streifen eines Büschels paralleler Graden ist durch die Gleichheit der Segmente gegeben, welche durch die Streifen auf einer beliebigen Graden r der Ebene des Büschels bestimmt werden.

Denn wenn man durch den Durchschnittspunkt A der beiden Graden AB_1 und a (Zus. II, Satz III, § 46) die Normale AB zu den Graden des Büschels zieht (Zus. I, Satz V, § 47 und Satz VI, § 41) und B_1, C_1 die Durchschnittspunkte von AB_1 mit b und c sind, so ist, weil $(AB) \equiv (BC)$ auch $(AB_1) \equiv (B_1C_1)$ (Satz I, § 45) (Fig. 53).

Def. II. Als *Mass der Streifen eines Büschels* paralleler Graden kann man daher die Segmente betrachten, welche die Streifen auf einer beliebigen Transversalen in dem endlichen Gebiet des Büschels abschneiden.

Def. III. Wenn man in einem Streifen eines Büschels paralleler Graden den Punkt als Element ansieht, so heisst die so erhaltene Figur *ebener Streifen.*

Zus. Die Ebene ist um jeden ihrer im Unendlichgrossen liegenden Punkte identisch in der Position ihrer Theile (Satz III; Def. III und Satz III, § 15).

Satz V. Die Büschel paralleler Graden sind gleich.

Denn wählt man zwei Grade r und r', welche die Graden der zwei Büschel senkrecht durchschneiden und setzt man zwischen den beiden Graden r und r' einen Identitätszusammenhang fest (Satz VI, § 15), so können wir mittelst dieses Zusammenhangs einen Identitätszusammenhang zwischen den beiden Büscheln selbst feststellen (Satz III).

Zus. Die Ebene ist um jeden ihrer im Unendlichgrossen liegenden Punkte identisch (Satz IV, Def. III und Satz III, § 15).

Def. IV. Eine Figur, deren Punkte der Ebene angehören (Def. II, § 2) heisst *ebene Figur.*

Satz VI. Eine ebene Figur ist, wenn sie von jeder Graden ihrer Ebene, die nicht selbst der Figur angehört, in nur einem Punkt geschnitten wird, eine Grade.

Denn zwei Punkte der Figur bestimmen nach der Bedingung des Satzes eine Grade, welche ein Theil der Figur ist (Def. I, § 2). Hätte die Figur noch andre Punkte ausserhalb dieser Graden, so würde jeder von ihnen mit einem ihrer Punkte eine andre der gegebenen Figur angehörige Grade bestimmen und es hätte mithin jede Grade der Ebene mehr als einen Punkt mit der Figur gemeinschaftlich (Zus. II, Satz III, § 46), was gegen die Voraussetzung ist.[XLVI])

[XLVI]) Bezüglich der Sätze des § 47 muss man im endlichen Gebiet auf folgende Art verfahren:

Satz I. Ein Winkelsector $\widehat{ACB}$ mit dem Scheitel C kann durch ein beliebiges Segment $(A_1 B_1)$, dessen Enden auf den Schenkeln des Sectors liegen, erzeugt werden.

Man betrachte zunächst das Segment (BA_1) und D sei ein innerer Punkt desselben. Durch D ziehe man die Parallele zu AB, welche die Schenkel CA, CB des Sectors in E und F schneidet. Der Punkt E liegt innerhalb des Segments (AA_1) (Zus. II, Satz I, § 45) und mithin ausserhalb (AC). Es ist $(EF) > (AB)$, weil $\frac{(EF)}{(AB)} = \frac{(EC)}{(AC)}$ (Zus. III, Satz I, § 45). Aus demselben Grund ist aber $(ED) < (AB)$; mithin liegt D im Innern des Segments (EF). Nun trifft die Grade CD das Segment (AB) in einem inneren Punkt (Zus. IV, Satz I, § 45). Jede Grade also, welche $(A_1 B)$ in einem inneren Punkt schneidet, trifft auch ein beliebiges andres Segment (AB) in einem inneren Punkt und umgekehrt. Betrachtet man nun das Segment $(A_1 B_1)$, so gilt dieselbe Eigenschaft für $(A_1 B)$ und $(A_1 B_1)$ und mithin auch für (AB) und $(A_1 B_1)$. Weil aber der Winkelsector $\widehat{ACB}$ dadurch erzeugt wird, dass man die Punkte von (AB) mit C verbindet, so ist der Satz damit bewiesen.

Satz II. Zwei Scheitelwinkelsectoren (Scheitelwinkel) eines Büschels (Rr) sind gleich.

Der Satz wurde bereits für solche Winkelsectoren bewiesen, deren Endstrahlen die Grade r schneiden (Bem. I, § 43 und Anm. XXXV). Man betrachte nun einen Winkelsector des Büschels (Rr), dessen einer Endstrahl die Grade r in einem Punkt A, der zweite dagegen die zu r Parallele r' (deren Punkte den gleichen Abstand von R wie die Punkte der Graden r haben) in dem Punkt C' trifft (Fig. 43). Die Strahlen des Sectors $\widehat{ARC'}$ schneiden die Grade AC', weil das Büschel (Rr) mit dem Büschel $R \cdot AC'$ zusammenfällt (Satz III, § 46 und Anm. XLV). Mithin ist nach dem in § 43 gegebenen Beweis auch $\widehat{ARC'} \equiv \widehat{A'RC}$ (Fig. 43).

Zus. I. Zwei ebene Scheitelwinkelsectoren (Scheitelwinkel) sind gleich.

Dies geht unmittelbar aus der Identität der Scheitelwinkelsectoren eines Büschels der Ebene mit dem Centrum in dem Scheitel der gegebenen Winkelsectoren hervor (Def. II, § 46 und Anm. XLI).

Satz III. Ein Büschel wird durch zwei seiner entgegengesetzten Strahlen halbirt.

s und s' seien die beiden entgegengesetzten Strahlen in einer Graden σ des Büschels (Rr) und r sei eine zu σ parallele Grade der Ebene des Büschels (Anm. XLI). Alle Strahlen des Büschels (Rr), welche die Grade r schneiden, s und s' eingeschlossen, bestimmen einen Theil des Büschels, dessen Endstrahlen s und s' sind (Anm. XLI; Satz II, § 46 und Anm. XLV) und die entgegengesetzten Strahlen liefern den andern Theil des Büschels.

Diese beiden Theile sind gleich. Denn jedem Sector des ersten entspricht ein entgegengesetzter ihm identischer Sector des zweiten (Satz I). Wählt man daher zwei Punkte X und Y in dem ersten Theil, lässt durch sie die Strahlen RX und RY gehen und construirt die beiden Punkte X' und Y' in den entgegengesetzten Strahlen derart, dass $(RX) \equiv (RX')$, $(RY) \equiv (RY')$, so sind die beiden Dreiecke XRY, $X'RY'$ gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 42 und Anm. XXXV). Mithin ist $(XY) \equiv (X'Y')$ (Satz III, § 16 und Anm. XII) und folglich sind die beiden genannten Theile des Büschels gleich (Satz III und Zus. II, Satz II, § 15 und Anm. XII).

Satz IV. Es gibt einen Zusammenhang in dem Strahlenbüschel vom Centrum R derart, dass

1) der Punkt R sich selbst entspricht und eine Grade AB und die zu ihr parallelen Graden, jede in einer Richtung betrachtet, sich selbst, in der entgegengesetzten Richtung betrachtet, entsprechen,

2) den Winkelsectoren des Büschels andre gleiche Winkelsectoren desselben entsprechen und

3) zwei beliebigen Punkten X und Y der Ebene des Büschels Punkte X' und Y' derart entsprechen, dass $(XY) \equiv (X'Y')$.

9.

Betrachtungen über das System der im Unendlichgrossen liegenden absoluten Grenzpunkte der Strahlen eines Büschels (Rr) in Bezug auf das Centrum R.

§ 49. Wir betrachten nun alle absoluten Grenzpunkte der Strahlen eines Büschels (Rr) in Bezug auf den Punkt R (Def. II, § 32).

Wir wollen in zwei Strahlen des Büschels zwei Punkte A und B in gleichem Abstand vom Punkt R betrachten und sie auch bezüglich mit B' und A' bezeichnen; die beiden Dreiecke ARB, $A'RB'$ sind gleich, weil ihre drei Seiten gleich sind (Einl. g, § 99 und Satz III, § 17 und Anm. XII). Mittelst dieser beiden Dreiecke können wir den Identitätszusammenhang des Satzes zwischen den beiden Büscheln $R \cdot AB$ und $R \cdot A'B'$ festsetzen. Diese Büschel fallen zusammen, d. h. sind dasselbe Büschel, einmal in der durch das Segment (AB) gegebenen Richtung von A nach B hin, das andre Mal in der entgegengesetzten Richtung betrachtet.

a) In dem Identitätszusammenhang zwischen diesen beiden Dreiecken entspricht der Punkt R sich selbst und der Graden AB in der Richtung des Segments (AB) von A nach B hin durchlaufen (Einl. f''', § 63) entspricht dieselbe Grade in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen derart, dass einem beliebigen Punkt X_1 der Graden AB in der ersten Richtung betrachtet ein Punkt X_1' entspricht, dessen Abstände von A' und B' denjenigen des Punktes X_1 von A und B gleich sind (Fig. 54).

b) Einem beliebigen Punkt X des Büschels $R \cdot AB$ entspricht ein Punkt X' in demselben Abstand von R auf folgende Weise. Man bestimme den Durchschnittspunkt X_1 der beiden Graden RX und AB, von denen wir zuerst voraussetzen wollen, dass sie einander nicht parallel sind (Zus. II, Satz III, § 46 und Anm. XLV). Dem Punkt X_1 entspricht in AB ein Punkt X_1' (a) und weil der Punkt R sich selbst entspricht, so entspricht RX_1 der Graden RX_1' und mithin dem Punkt X der Punkt X', der denselben Abstand von R und X_1' hat, wie der Punkt X von R und X_1. Damit ist der Punkt X' vollständig bestimmt (Satz I, § 8 und Anm. VII; Einl. Def. I, § 61; b, § 36 und Anm. III).

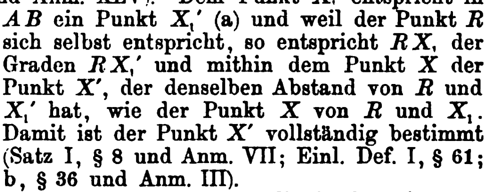
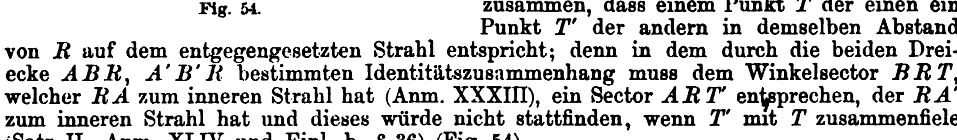


Fig. 54.

Wenn dagegen RX die in der Richtung von (AB) durchlaufene zur Graden AB parallele Grade s ist, so muss ihr die Grade s' entsprechen, die zur Graden $A'B'$ oder zu der in der entgegengesetzten Richtung durchlaufenen Graden AB parallel ist; d. h. die beiden Graden s und s' fallen mit der durch R zu AB parallel gezogenen Graden derart zusammen, dass einem Punkt T der einen ein Punkt T' der andern in demselben Abstand von R auf dem entgegengesetzten Strahl entspricht; denn in dem durch die beiden Dreiecke ABR, $A'B'R$ bestimmten Identitätszusammenhang muss dem Winkelsector BRT, welcher RA zum inneren Strahl hat (Anm. XXXIII), ein Sector ART' entsprechen, der RA' zum inneren Strahl hat und dieses würde nicht stattfinden, wenn T' mit T zusammenfiele (Satz II; Anm. XLIV und Einl. b, § 36) (Fig. 54).



Jedem Punkt z. B. A_1 von RA entspricht ein Punkt A_1' des entsprechenden Strahls RA' in demselben Abstand von R und die Grade A_1A_1' ist der Graden AB parallel (Satz I, § 45 und Anm. XL). Zwei sich entsprechende Strahlen RX_1 und RX' schneiden die Grade A_1A_1' in zwei Punkten X_2 und X_2', die von R gleichweit abstehen (Satz I, § 45, Anm. XL und Bem. III, Anm. XLIV). Jedem Punkt der Graden A_1A_1' entspricht daher ein Punkt derselben Graden (Fig. 54).

c) Zweien Strahlen x und y des Büschels, die der Graden AB nicht parallel sind, entsprechen zwei Strahlen x' und y', welche denselben Winkel bilden.

Denn X_1 und Y_1 seien die Durchschnittspunkte von x und y mit der Graden AB; X_1' und Y_1' die entsprechenden Punkte (b). Die Dreiecke ARX_1, $A'RX_1'$ sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 42 und Anm. XXXV), nämlich $(AX_1) \equiv (A'X_1')$; $(RA) \equiv (RA')$, $\widehat{X_1AR} \equiv \widehat{X_1'A'R}$; also ist $(RX_1) \equiv (RX_1')$ (Anm. XXXV; Zus. Satz III, § 16 und Anm. XII).

Alle diese Punkte bestimmen ein Punktesystem σ_∞ einer Dimension, welches eindeutig und in derselben Ordnung dem es bestimmenden Strahlenbüschel entspricht (Def. III, § 42) und weil dieses auf dieselbe Art einer beliebigen

---

Analog erhält man $(RY_1) \equiv (RY'_1)$; es ist aber $(X_1 Y_1) \equiv (X'_1 Y'_1)$ (a); daher sind die beiden Dreiecke $X_1 R Y_1$, $X'_1 R Y'_1$ gleich, weil sie die drei Seiten gleich haben (Satz III, § 17 und Anm. XII), mithin auch die zwei Winkel $\widehat{X_1 R Y_1}$ und $\widehat{X'_1 R Y'_1}$ (Anm. XXXV) und zweien Punkten X und Y auf den beiden Strahlen x und y entsprechen zwei Punkte X' und Y' (b) und die beiden Dreiecke XRY, $X'RY'$ sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben. Folglich ist $(XY) \equiv (X'Y')$ (Zus. Satz III, § 16 und Anm. XXXV).

d) Wir wollen nun annehmen, einer der beiden Strahlen z. B. x sei der zur Graden AB parallele Strahl s.

Wir ziehen von A die Parallele zu RA' und T sei ihr Durchschnittspunkt mit der von R zu AB parallel gezogenen Graden, alsdann von A' die Parallele zu RA, welche die Grade TR in dem Punkt T' trifft. Aus den beiden Parallelogrammen $AA'RT$, $A'ART'$ erhält man $(RT) \equiv (AA') \equiv (RT')$ (Satz I, § 44 und Anm. XXXIX); mithin sind T und T' entsprechende Punkte (b). Ferner sind die Dreiecke ATR, $AA'R$; $AA'R$, $A'T'R$ gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 44 und Anm. XXIX); also ist $\widehat{TRA} \equiv \widehat{RAA'}$ (Zus. Satz III, § 16 und Anm. XXXV) und $\widehat{T'RA'} \equiv \widehat{RA'A}$. Es ist aber $\widehat{RA'A} \equiv \widehat{RAA'}$ (Satz III, § 42), folglich $\widehat{TRA} \equiv \widehat{T'RA'}$ (Satz IV, § 15).

Es sei nun eine beliebige Grade y des Büschels gegeben; man ziehe durch T eine Grade, welche die beiden Graden y und RA in den Punkten Y und Z schneidet. Dieses ist möglich, sonst müssten alle Graden in der Ebene des Büschels, welche die Grade y schneiden, zu RA parallel sein, was gegen Ax. VI wäre (Anm. XVI).

In den RT, y, RA entsprechenden Graden, entsprechen den Punkten T, Y, Z drei Punkte T', Y', Z' in gleichem Abstand von R (b) derart, dass $(TZ) \equiv (T'Z')$ — der Gleichheit der Dreiecke TRZ, $T'RZ'$ wegen, welche, wie gesagt, zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben — und $(YZ) \equiv (Y'Z')$ ist (c). Mithin ist immer ebenfalls in Folge der Gleichheit der genannten Dreiecke, welches auch die Lage des Punktes Y auf der Graden TZ sei, $(TY) \equiv (T'Y')$.

Damit ist der Satz für alle Fälle bewiesen.

Satz V. Ein Strahlenbüschel (Rr) *ist in der Position seiner Theile identisch.*

Wir wollen einen Sector (ab) des Büschels und zwei gleichweit von R entfernte Punkte A, B in a, b betrachten und sie auch bezüglich mit B_1 und A_1 bezeichnen. Die beiden Büschel $R \cdot AB$ und $R \cdot A_1 B_1$ sind identisch (Satz III; Satz III, § 15 und Anm. XII). Sie sind aber dasselbe Büschel von a und von b in entgegengesetzten Richtungen betrachtet; das Büschel von einem beliebigen seiner Strahlen a an in einer gegebenen Richtung (ab) ist also dem Büschel von einem beliebigen andern Strahl b an in der entgegengesetzten Richtung (ba) gleich. Das Büschel von einem in dem Sector (ab) enthaltenen Strahl x an in der Richtung (xa) oder (ba) ist mit dem von a an in der Richtung (ab) betrachteten Büschel identisch und ebenso ist das Büschel von x an in der Richtung (xb) oder (ab) dem Büschel, das von b in der Richtung (bx) ausgeht, gleich. Daraus folgt also nach dem Obigen, dass das Büschel vom Strahl x aus in einer gegebenen Richtung demselben Büschel vom Strahl x ausgehend in der entgegengesetzten Richtung gleich ist. Ist mithin ein beliebiger Winkelsector (ac) des Büschels gegeben, so gibt es von x an in der einen und der andern Richtung einen (ac) gleichen Sector.

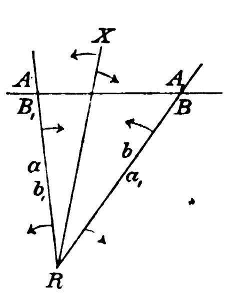


Fig. 55.

Der Strahl x aber kann als ein beliebiger Strahl des Büschels angesehen werden, weil sich, wie leicht zu sehen, stets ein Sector (ab) wählen lässt, in welchem dieser Strahl enthalten ist. Damit ist der Satz bewiesen (Einl. Def. I, § 68 und § 70 und Bem. II, § 81).

Zus. Die Ebene ist um jeden ihrer Punkte identisch in der Position ihrer Theile (Def. II, § 46 und Anm. XLI; Satz III, § 15 und Anm. XII).

Satz VI. (*) *Das Büschel ist ein stetiges System.*

Denn ist ein Sector (xx') gegeben, so ist immer ein kleinerer in ihm enthalten. Um sich davon zu überzeugen braucht man nur eine Grade r der Ebene des Büschels als seine Directrix zu wählen (Satz III, § 46; Anm. XLI, XLV). Wenn dann ein Sector ge-

Directrix r des endlichen Gebiets der Ebene entspricht (Satz III, § 46), so entsprechen sich auch das System σ_∞ und die Grade r eindeutig und in derselben Ordnung.

---

geben ist, dessen Endstrahlen* x und x' in entgegengesetzten Richtungen veränderlich sind, so hat das entsprechende Segment auf der Graden r dieselbe Eigenschaft und bestimmt einen zwischen den Punkten X und X' gelegenen Punkt Y (Einl. Hyp. VI und a, § 91), welchem ein Strahl y des zwischen x und x' liegenden Büschels entspricht (Anmerk. XLI).

Die in der Einleitung gegebenen Bedingungen für die Stetigkeit (siehe Anm. 8 zu § 99) sind erfüllt und das Büschel ist mithin stetig.

Bem. I. Die Halbirung eines Winkelsectors, dessen Strahlen nicht entgegengesetzt sind, kann man nunmehr mittelst eines gleichschenkligen Dreiecks ausführen, dessen Seiten in die Strahlen des gegebenen Sectors fallen (Satz IV, § 42 und die bezügl. Anm.)

Wir haben den Satz VI mit einem Stern bezeichnet, weil wir die Eigenschaften des Büschels, welche uns später noch vorkommen werden, unabhängig von der Stetigkeit beweisen wollen. Siehe das Ende der Anm. IV.

Bem. II. Auf Grund des Satzes VI kann man behaupten, dass die Ebene (Def. II, § 46 und XLI) stetig ist.

*Satz VII. **Ein beliebiger Winkelsector (Winkel) (ab) eines Büschels in einer Richtung durchlaufen ist demselben Sector (Winkel) in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen gleich.***

Wenn a und b keine entgegengesetzten Strahlen sind, so folgt der Satz daraus, dass das Paar (ab) dem gradlinigen Paar (ba) gleich ist (Satz II, § 17 und Anm. XII) und mithin auch die von ihnen bestimmten Sectoren und Winkel gleich sind (Anm. XLI u. XXXV). Sind a und b entgegengesetzte Strahlen z. B. s und s', so geht der Satz aus dem in Satz III behandelten Zusammenhang hervor (Satz III, § 15 und Anm. XII) (Fig. 54).

Bem. III. Der Satz VII kann auch als Zusatz zu Satz VI aufgefasst werden (Einl. g, § 99 oder des Verf. „Il continuo rettilineo u. s. w.").

Zus. Flache ebene Sectoren (Winkel) sind direct und umgekehrt gleich.

Denn es sind dies die Sectoren des Büschels, welches sie bestimmt (Def. II, § 46 und Anm. XLI; Satz III und V dieser Anm.; Satz III, § 15 und Anm. XII).

*Satz VIII. **Es gibt eine und nur eine Grade, welche einen flachen Winkelsector halbirt. — Die rechten Winkel des Büschels sind gleich.***

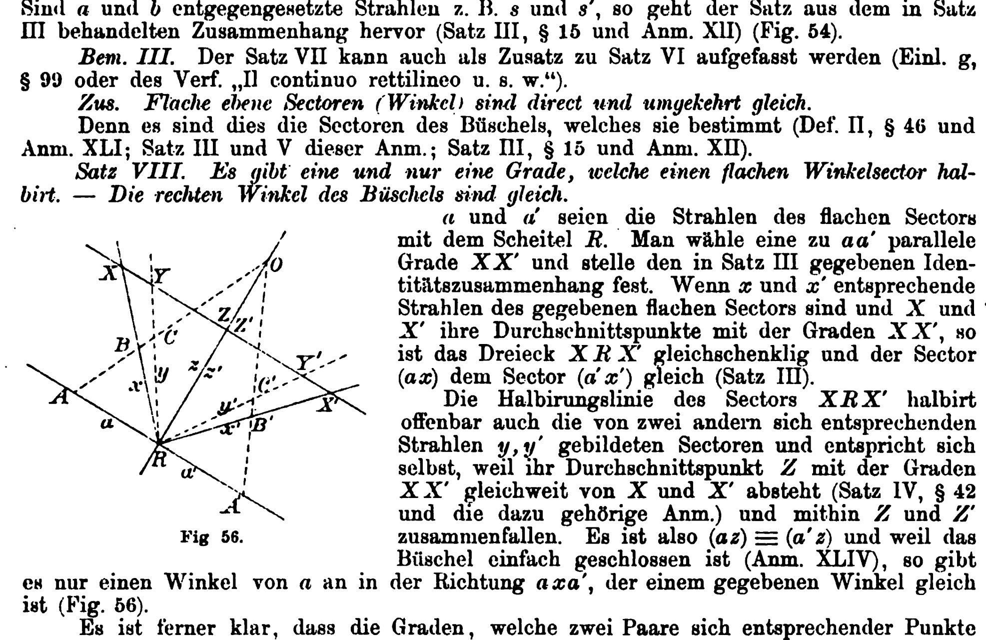


Fig 56.

a und a' seien die Strahlen des flachen Sectors mit dem Scheitel R. Man wähle eine zu aa' parallele Grade XX' und stelle den in Satz III gegebenen Identitätszusammenhang fest. Wenn x und x' entsprechende Strahlen des gegebenen flachen Sectors sind und X und X' ihre Durchschnittspunkte mit der Graden XX', so ist das Dreieck XRX' gleichschenklig und der Sector (ax) dem Sector $(a'x')$ gleich (Satz III).

Die Halbirungslinie des Sectors XRX' halbirt offenbar auch die von zwei andern sich entsprechenden Strahlen y, y' gebildeten Sectoren und entspricht sich selbst, weil ihr Durchschnittspunkt Z mit der Graden XX' gleichweit von X und X' absteht (Satz IV, § 42 und die dazu gehörige Anm.) und mithin Z und Z' zusammenfallen. Es ist also $(az) \equiv (a'z)$ und weil das Büschel einfach geschlossen ist (Anm. XLIV), so gibt es nur einen Winkel von a an in der Richtung axa', der einem gegebenen Winkel gleich ist (Fig. 56).

Es ist ferner klar, dass die Graden, welche zwei Paare sich entsprechender Punkte verbinden, sich in der Halbirungslinie schneiden. Die Grade AC z. B. schneidet die Halbirungslinie z in einem Punkt O, der mit O' zusammenfällt, weil $(O'Z) \equiv (OZ)$, $(O'R) \equiv (OR)$ ist (Einl. b, § 36 und Def. I, § 61 und Anm. III).

Sind zwei flache Winkelsectoren gegeben, so stelle man ihren Identitätszusammenhang fest (Satz VII); die Halbirungslinien entsprechen sich alsdann. Damit ist der Satz bewiesen.

*Satz IX. **Wenn zwei Dreiecke ABD, ADC einen Eckpunkt A und eine Seite AD gemeinschaftlich, die Winkel $\widehat{BAD}$ und $\widehat{CAD}$ gleich haben, die Punkte B, D, C in grader Linie liegen und $(BD) \equiv (DC)$ ist, so sind die beiden Dreiecke gleich.***

Denn durch den Punkt C geht keine andre Grade, welche AD und AB derart in zwei Punkten D' und B' schnitte, dass $(B'D') \equiv (D'C)$ wäre, denn es wäre sonst

Das System σ_x ist durch zwei beliebige seiner Punkte bestimmt, sofern es nicht entgegengesetzte Punkte sind, und enthält den entgegengesetzten Punkt eines jeden seiner Punkte.

$$\frac{(CD)}{(CB)} = \frac{(CD')}{(CB')}$$

und die Graden BB', DD' müssten parallel sein (Satz I, § 45) während sie sich doch in dem Punkt A schneiden (Anm. XVI). Und wenn (AB) nicht gleich (AC) wäre, so gäbe es in (AB) einen solchen Punkt B'_1, dass $(AB'_1) = (AC)$ wäre und da alsdann D' der Durchschnittspunkt von B'_1C mit AD_1 ist, so würde $(B'_1D') = (D'C)$ sein, was, wie man gesehen hat, widersinnig ist.

Satz X. Durch einen Punkt R kann man in einer Ebene nur eine einzige Senkrechte zu einer Graden AB ziehen.

Liegt der Punkt R auf der Graden AB, so ist der Satz nichts Anderes wie Satz VIII (Anm. XXXVI). Ist dies nicht der Fall, so sei σ die durch R gehende Parallele zu AB. Man ziehe zwei Strahlen RA und RB, welche mit den entgegengesetzten Strahlen RS', RS von σ zwei Winkel ARS und BRS' bilden, die kleiner als ein Rechter und gleich sind. Die Halbirungslinie des Sectors $\widehat{ARB}$ steht in R senkrecht auf der Graden σ (Satz VIII).

Man verlängere RB nach B', sodass $(RB) \equiv (RB')$ und ebenso A nach A', so dass $(RA) \equiv (RA')$. Es ist dann $\widehat{B'RS} \equiv \widehat{BRS'} \equiv \widehat{ARS}$. Die Dreiecke ASR, $B'SR$ befinden sich in derselben Lage, wie diejenigen des Satzes IX, es ist mithin $(AR) \equiv (B'R)$ und also $\widehat{ASR} \equiv \widehat{B'SR}$; AB' steht daher auch senkrecht auf der Graden σ (Anm. XXXIII).

C sei der Mittelpunkt von (AB); durch ihn geht die Halbirungslinie des Sectors (BRA) (Satz IV, § 42 und Anm. XXXVI); mithin ist auch die Grade RC senkrecht zur Graden AB (Anm. XXXIII).

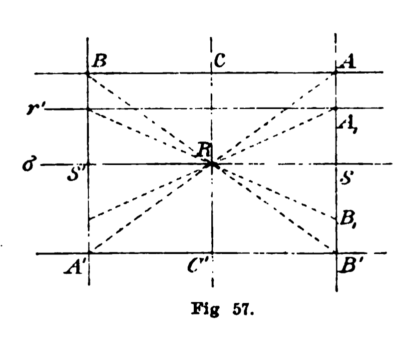


Fig 57.

Ist umgekehrt gegeben, dass die Grade RC in C senkrecht auf der Graden AB steht und man construirt die gleichen Segmente (BC) und (AC), so ist $(RB) \equiv (RA)$, weil die beiden Dreiecke BCR, ACR zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben und also gleich sind (Satz II, § 42 und Anm. XXXV). Mithin ist auch $(RB') \equiv (RA)$. Da die Parallele σ das Segment (AB') in seinem Mittelpunkt S schneidet und das Dreieck ARB' gleichschenklig ist, so ist die Grade σ senkrecht zur Graden AB'. Mithin ist, da $(BS') \equiv (AS)$, $\widehat{BRS'} \equiv \widehat{ARS}$ (Satz VIII) und die Grade RC halbirt den flachen durch die beiden Strahlen RS und RS' bestimmten Winkel. Die Grade RC steht folglich senkrecht auf der Graden σ (Fig. 57).

Es lässt sich also von R nur eine Grade senkrecht zu AB ziehen, denn gäbe es zwei verschiedene, so würden sie auch senkrecht auf der Graden σ stehen, was widersinnig ist (Satz VIII).[1]

Zus. I. Die Normale zu einer Graden in der Ebene steht senkrecht auf allen zu der gegebenen parallelen Graden.

r' sei parallel zur Graden AB und schneide AB' in einem Punkt A_1. Man ziehe RA_1 und den Strahl RB_1 der Art, dass

$$A_1RS = B_1RS \quad \text{(Satz V)}.$$

Aus demselben Grund wie früher steht die Grade RC senkrecht auf der Graden r'.

Zus. II. Zwei Grade, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

Es gilt derselbe Beweis, wie der im Text zu Zus. II, Satz VI gegebene.

Satz XI. Zwei beliebige Büschel der Ebene mit den Centren R und R' sind identisch.

Durch den Mittelpunkt M von (RR') ziehe man r senkrecht auf RR'. Verbindet man einen beliebigen Punkt A von r mit R und R', so erhält man zwei einander gleiche

1) Siehe Kap. III, in welchem der Beweis dieses Satzes unabhängig von der Ebene und für jedes System der Geometrie gegeben ist.

Es ist leicht zu zeigen, dass gleichen Winkelsectoren des Büschels gleiche Segmente des Systems σ_∞ entsprechen und umgekehrt und dass den Sectoren (ab), $(a'b')$ des Büschels $[(ab) \gtrless (a'b')]$ Segmente von σ_∞ entsprechen, welche in demselben Verhältniss der Ungleichheit stehen und umgekehrt.

Jeder Punkt des Systems σ_∞ besitzt überdies die Eigenschaft, dass die Summe seiner Abstände von zwei beliebigen entgegengesetzten Punkten des Systems der Hälfte der Graden gleich ist.

Aber trotz allen diesen Eigenschaften, welche das System σ_∞ mit der durch zwei Punkte des Systems σ_∞ bestimmten Graden des absoluten Grenzgebiets, die mithin auch die entgegengesetzten Punkte enthält (Satz I, § 30), gemeinschaftlich hat, trotzdem, dass zwei solche Systeme identisch sind (Satz II, § 47), wie zwei Grade (Satz I, § 8), ist es uns doch nicht gelungen und daher wie wir annehmen müssen, nicht möglich, die folgenden Eigenschaften mittelst der bisherigen Axiome und Hypothesen in jedem Fall nachzuweisen:

1) Dass gradlinigen Segmenten $(A_\infty B_\infty) \gtrless (C_\infty D_\infty)$ immer Winkelsectoren entsprechen, welche in demselben Verhältniss der Ungleichheit stehen, obwohl ihnen ungleiche Sectoren entsprechen.

2) Dass, wenn man einen Winkelsector als Summe mehrerer consecutiver Winkelsectoren in dem Büschel betrachtet, das dem ersten Sector entsprechende gradlinige Segment im Allgemeinen auch die Summe der den zweiten Sectoren entsprechenden Segmente ist.

Die zweite Eigenschaft reicht aus, um die Identität des Systems σ_∞ mit der Graden festzustellen. Aus der zweiten geht mithin die erste hervor; wir haben sie jedoch getrennt gegeben, weil aus der ersten noch nicht die zweite folgt. Könnte man für das System σ_∞ den Satz VII § 13 beweisen, so liesse sich daraus leicht die erste der obigen Eigenschaften ableiten.

Der Beweis des Satzes VII, § 13 stützt sich aber auf die Definition der einfachen Linie (Def. II, § 13), welche festsetzt, dass ein Grenzpunkt einer Reihe von Punkten auf der Linie dies unabhängig von der Linie und im allgemeinen Raum ist (Def. II, § 10). Wir sehen nicht ein, wie dies für das System σ_∞ bewiesen werden kann, ohne zu der Hyp. IV die Eigenschaft hinzu-

---

Segmente (RA), $(R'A)$; denn die beiden Dreiecke RMA, $R'MA$ haben zwei Seiten und den eingeschlossenen rechten Winkel gleich und sind mithin gleich (Satz VIII). Folglich sind die Figuren (Rr) und $(R'r)$ oder die beiden Büschel der Ebene mit den Centren R und R' gleich (Satz III, § 15 und Anm. XII).

Zus. Die Ebene ist um jeden ihrer Punkte und von jeder ihrer Graden an in der einen und in der andern Richtung identisch.

Denn die Büschel um die Punkte der Ebene und ihre flachen Winkel sind identisch (Def. II, § 46 und Anm. XLI).

Bem. IV. Da wir nicht, wie im Text auf die abstracten Hypothesen zurückgreifen, so können wir nicht sofort die Identität zweier Strahlenbüschel und mithin zweier beliebigen Ebenen beweisen. Ebenso haben wir noch nicht im endlichen Gebiet die Gleichheit der Winkel mit parallelen Schenkeln in derselben Ebene und in verschiedenen Ebenen bewiesen (Anm. XXXI).

Bem. V. Satz VI, § 47 wird in einer Anm. zu § 52 gegeben werden, während die Sätze des § 48 sich auf dieselbe Weise wie im Text mit Hülfe der vorstehenden Sätze beweisen lassen.

zufügen, dass eine Grade SA, wenn sie die Grenze einer andern Graden SX in einem beliebigen endlichen Gebiet um S ist, auch die Grenze derselben Graden SX in jedem bezüglich der Einheit des gegebenen Gebiets unendlich grossen und unendlich kleinen Gebiet um den Punkt S ist. Dieser Zusatz zur Hyp. IV, welcher sich nur auf den Punkt S bezieht, könnte dann auch für jeden andern Punkt X bewiesen werden, wenn man so verfährt, wie bei dem Beweis der Hyp. IV (Satz II, § 31).

Uebereink. Das System σ_∞ verhält sich jedoch bezüglich der Ebene oder auch zweier *Euclid*'schen Ebenen (Rr), $(R'r')$ als ob es eine Grade wäre (Satz IV und VI, § 39). Wir wollen dasselbe daher einstweilen, wenn wir es benutzen, die unendlich ferne *grade Linie* der *Euclid*'schen Ebene nennen; dies ist jedenfalls erlaubt, wenn wir nur die Eigenschaften in Betracht ziehen, welche es mit der Graden gemeinschaftlich hat.

Bem. I. Wir behalten uns vor im Kap. II eine Hypothese aufzustellen, aus welcher hervorgeht, dass das System σ_∞ in der That eine Grade ist.

Da wir bis zum Kap. II nur die Euclid'sche Ebene behandeln werden, so wollen wir unter Büschel mit dem Centrum in dem endlichen Gebiet und mithin auch unter Ebene immer ein Büschel mit der Directrix in dem endlichen Gebiet verstehen und wenn wir ohne weiteren Zusatz von Punkten und Graden sprechen, so meinen wir im Allgemeinen damit Punkte und Grade des endlichen Gebiets.

10.

Die Theile, in welche die Ebene durch eine ihrer Graden zerlegt wird. — Innerer und äusserer Theil eines Dreiecks.

§ 50. *Satz I. In dem Büschel (Rr) liegen die Grade r und jede zu ihr parallele Grade in einem der Theile, in welche das Büschel durch die zur Graden r parallele und durch R gehende Grade getheilt wird.*

Die zu r parallele Grade σ, welche durch R geht, theilt das Büschel in zwei identische Theile (Zus. II, Satz I, § 47), welche durch die beiden Hälften der im Unendlichgrossen liegenden Graden des Büschels (Uebereink. § 49) bestimmt sind, die zu Enden im Unendlichgrossen die Punkte S_∞, S'_∞ der Graden σ haben.

Die durch die Punkte von r und den Punkt R bestimmten Strahlen folgen sich von einem gegebenen Strahl z. B. dem Grenzstrahl RS_∞ an (Satz II, § 46) in einer gegebenen Ordnung, wie die entsprechenden Punkte der Graden r (Def. I, § 30), und mithin auch die entsprechenden Punkte auf der einen zwischen den Punkten S_∞ und S'_∞ enthaltenen Hälfte der im Unendlichgrossen liegenden Graden. Mithin sind die beiden genannten Theile des Büschels der eine durch die Strahlen, welche die Grade r schneiden, mit Einschluss der Grenzstrahlen RS_∞, RS'_∞ und der andre durch die entgegengesezten Strahlen gegeben (Fig. 43).

Ist r' eine Parallele zu r und mithin auch zu σ, welche durch einen Punkt A_1 eines Strahls RA geht, welcher letztere in einem der obigen Theile des

Büschels liegt, so bestimmt die Grade r' mit R denselben Theil $S_\infty A, S'_x$ der im Unendlichgrossen liegenden Graden.[XLVII])

Bem. I. Die Figur aller Punkte der Ebene, welche in einem durch eine Grade der Ebene bestimmten Theil des Büschels liegen, ist ein Theil der Ebene (Def. I, § 46).

Satz II. Die Büschel der Ebene, deren Centren auf derselben Graden des endlichen Gebiets liegen, werden durch diese Grade in zwei Theile zerlegt, die bezüglich in denselben beiden Theilen der Ebene gelegen sind.

R und R' seien die in einer Graden σ gelegenen Centren der beiden Büschel und r eine Parallele zu σ. Die Grade r kann man als Directrix der beiden Büschel (Satz III, § 46) und überdies nach Satz I als Directrix eines der beiden Theile betrachten, in welche die Büschel durch die Grade σ getheilt werden. Zieht man durch einen Punkt M z. B innerhalb (RA) die Parallele zu σ, so schneidet sie $(R'A)$ in einem inneren Punkt (Zus. II, Satz I, § 45) und (RB) in einem inneren Punkt M'. Da die Parallele MM' in den Theilen der Büschel (Rr) und $(R'r)$ liegt, die durch r und σ bestimmt werden, so haben diese Theile alle Punkte der Graden MM' gemeinschaftlich, welches auch der Punkt M innerhalb des Segments* (RA) sein mag. Dasselbe gilt, wenn M auf der Verlängerung von (RA) von R nach A hin liegt und andre Fälle sind in dem durch R begrenzten Strahl RA nicht möglich (Einl. b, § 36; Def. I, § 7). Mithin ist jeder Punkt des genannten Theils des Büschels (Rr) ein Punkt des Theils des Büschels $(R'r)$ und aus demselben Grund auch umgekehrt. Damit ist der Satz bewiesen.

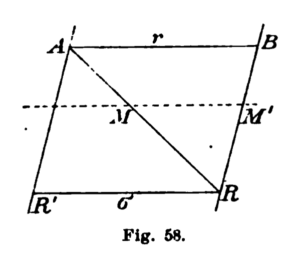


Fig. 58.

Def. I. Dem Satz II entsprechend sagen wir von einer Ebene, *sie werde durch eine ihrer Graden in zwei Theile bezüglich dieser Graden getheilt* (Bem. I).

Zus. I. Die bezüglich einer Graden entgegengesetzten Theile der Ebene sind direct und umgekehrt identisch.

Denn die entgegengesetzten Theile, welche durch die Grade in einem Büschel, dessen Centrum auf ihr liegt, bestimmt werden, sind direct und umgekehrt identisch (Zus. II, Satz I, § 47 und Def. I).

Zus. II. Jede Grade r liegt zur Hälfte in denjenigen beiden Theilen der Ebene, welche durch eine andre mit ihr nicht parallele Grade s bestimmt werden.

XLVII) Der Satz I wird folgendermassen bewiesen:

Nach der Def. des Büschels (Rr) (Anm. XLI) enthält einer der Theile, welche durch die zu r parallele Grade σ des Büschels bestimmt werden, die Grade r, während der andre Theil durch die entgegengesetzten von R begrenzten Strahlen gegeben ist, welche die Grade r' schneiden, deren Punkte den gleichen Abstand von R haben, wie die entsprechenden Punkte von r (Fig. 43 Seite 318).

Wenn RA ein Strahl des ersten Theils und mithin durch R begrenzt ist, so liegt ein Punkt A_1 desselben entweder innerhalb des Segments (RA) oder A liegt innerhalb des Segments (RA_1), weil in dem von R begrenzten Strahl RA andre Fälle nicht möglich sind (Einl. b, § 36 und Anm. III). Die von A_1 zu σ parallel gezogene Grade schneidet die Grade RB, wenn B ein Punkt von r ist, in einem Punkt B_1 derart, dass entweder B_1 innerhalb des Segments (RB) oder B innerhalb (RB_1) liegt (Anm. XLI und Zus. II, Satz I, § 45). Mithin liegt der Punkt B_1 auf dem durch R begrenzten Strahl RB, womit der Satz bewiesen ist.

Die im Unendlichgrossen liegenden Punkte der Graden s sind entgegengesetzte Punkte und werden durch das Paar der im Unendlichgrossen liegenden entgegengesetzten Punkte der Graden r voneinander getrennt (Satz I, § 29).

Diese letzteren beiden Punkte bestimmen mit dem Durchschnittspunkt B der beiden Graden (Zus. II, Satz III, § 46) die beiden auf entgegengesetzten Seiten der Graden s liegenden Hälften der Graden r (Def. I, Satz II und I).

Zus. III. Das Segment, welches zwei Punkte verbindet, die bezüglich einer Graden auf entgegengesetzten Theilen der Ebene liegen, wird von dieser Graden in einem inneren Punkt geschnitten und umgekehrt.

Denn die Grade, welche die beiden gegebenen Punkte X und Y verbindet, ist der gegebenen Graden s nicht parallel (Satz I), sie schneidet dieselbe daher in einem Punkt S (Zus. II, Satz III, § 46). Dieser Punkt theilt aber die erste Grade in zwei bezüglich der Graden s in entgegengesetzten Theilen gelegenen Strahlen (Def. I, Satz II und I). Mithin liegt der Punkt S innerhalb des Segments (XY).

Die Umkehrung des Satzes geht daraus hervor, dass SX und SY entgegengesetzte Strahlen sind und mithin in entgegengesetzten Theilen bezüglich der Graden s liegen (Def. I).

Zus. IV. Ein Winkelsector (ab) mit dem Scheitel R kann dadurch construirt werden, dass man den Scheitel R mit den Punkten eines beliebigen Segments (AB) verbindet, dessen Enden in a und b liegen.

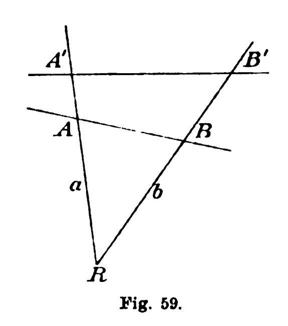


Fig. 59.

(AB) und $(A'B')$ seien zwei Segmente, deren Enden in a und b liegen. Wir wissen, dass das Büschel mit dem Centrum R durch die zwei Graden AB und $A'B'$ erzeugt werden kann (Zus. II, Satz III, § 46); wir wissen aber noch nicht, ob auch unser Zusatz gilt und haben von dieser Eigenschaft bisher nur in dem Fall Gebrauch gemacht, wenn AB und $A'B'$ parallel sind (Zus. IV, Satz I, § 45).

E sei ein Punkt innerhalb des Segments (AB). Die Strahlen RA, RB sind mithin bezüglich der Graden RE auf entgegengesetzten Seiten der Ebene gelegen und also auch die Punkte A' und B'. Das Segment $(A'B')$ wird daher von RE in einem inneren Punkt (Zus. III) geschnitten (Fig. 59). XLVIII)

XLVIII) Der Satz II (Anm. XXXI) und die Zusätze I und III werden ebenso bewiesen, nur für Zus. II gilt ein andrer Beweis:

Die Grade r schneidet s in einem Punkt S (Zus. II, Satz III, § 46 und Anm. XLV) und gehört mithin zu dem Büschel mit dem Centrum S. Die beiden Strahlen von r aber, die durch S begrenzt werden, liegen in den bezüglich der Graden s entgegengesetzten Theilen der Ebene (Satz II). Damit ist der Zusatz bewiesen. [1]

Zus. IV ist schon in Anm. XLVI bewiesen worden.

---

1) Die Eigenschaften der Zusätze I und II werden in den Elementarbüchern der Geometrie gewöhnlich, stillschweigend oder nicht, als Axiome gegeben. *Euclid, Baltzer* u. s. w. setzen sie stillschweigend voraus *De Paolis* z. B. (Elementi di geometria) gibt sie in den Postulaten III, 3 und 4; IV, 3; V, 1; *Sannia* und *D'Ovidio* geben dagegen als Postulate die Zusätze I, II und III (Elementi di geometria. 1886. Post. 3, 4 u. 5; S. 15—16). Bei

§ 51. *Satz I. Die Theile der Ebene, welche durch die von den gegenüberliegenden Seiten begrenzten Winkelsectoren eines Dreiecks bestimmt werden, fallen zusammen.*

ABC sei das Dreieck und der Sector $\widehat{CAB}$ durch die Seite BC begrenzt. Wählt man auf der Seite (AB) einen Punkt D, so kann der Sector $\widehat{CAB}$ auch durch dên Scheitel A und das Segment (CD) erzeugt werden (Zus. IV, Satz II, § 50). Ist ein Punkt E innerhalb (CD) gegeben und F der Durchschnittspunkt von AE mit der Seite (CB) (Zus. IV, Satz II, § 50), so ist, weil der Sector $\widehat{ACB}$ durch das Segment (AF) erzeugt werden kann und D ein Punkt innerhalb (AB) ist, auch E ein Punkt innerhalb (AF) (Zus. IV, Satz II, § 50). (CD) ist aber ein Segment innerhalb des Sectors $\widehat{ACB}$; folglich fällt der Theil der Ebene, welcher durch den von der Seite (CB) begrenzten Sector $\widehat{CAB}$ bestimmt wird, mit dem Theil der Ebene zusammen, welcher durch den von der Seite (AB) begrenzten Sector $\widehat{ACB}$ bestimmt wird (Einl. Def. V, § 57).

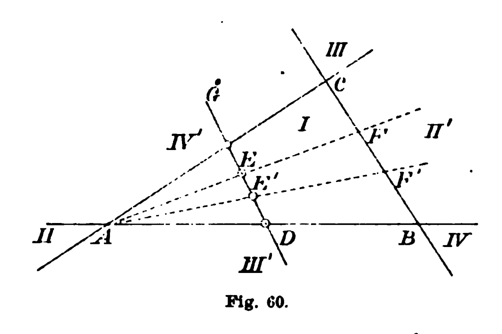


Fig. 60.

Aehnlich weist man dieselbe Eigenschaft bezüglich des dritten Sectors $\widehat{ABC}$ nach (Fig. 60).[1]

Def. I. Der Theil der Ebene, welcher von den durch die gegenüberliegenden Seiten begrenzten Winkelsectoren des Dreiecks bestimmt wird, heisst *der innere*, der übrige Theil der Ebene *der äussere Theil* des Dreiecks.

Die durch die drei Seiten (AB), (AC), (CB) des Dreiecks allein gebildete Figur heisst *der Perimeter oder Umfang* des Dreiecks.

Unter innerem oder äusserem Punkt eines Dreiecks versteht man einen Punkt des inneren oder äusseren Theils, welcher jedoch nicht auf dem beiden Theilen gemeinschaftlichen Umfang liegt.

Def. II. Eine Figur, deren sämmtliche Punkte innere oder äussere Punkte des Dreiecks sind und zum Theil auch auf dem Umfang (Def. I) liegen können, heisst *innere oder äussere Figur* des Dreiecks.

---

den Postulaten über die Zulässigkeit der Umkehrung eines Winkels (ab), bei der Rotation, die man der Ebene um eine beliebige ihrer Graden gibt, bis sie durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht (ohne Definition ist hier der Raum zu drei Dimensionen verstanden — siehe Buch III), bei dem Gleiten der Ebene längs einer ihrer Graden und der Rotation um jeden ihrer Punkte in zwei entgegengesetzten Richtungen wird das Postulat der Bewegung ohne Deformation (§ 37) benutzt und die Zus. II, III des Satzes I; Zus. I, Satz II; Satz III in § 47 und Satz II, § 48 einfach vorausgesetzt, während wir sie in den vorstehenden Anm. auch ohne Benutzung des Unendlichgrossen bewiesen haben. Davon ist nur der Zus. I, Satz II, § 47 ausgenommen, der später bewiesen werden soll. Ebenso werden stillschweigend oder nicht andre Postulate aufgestellt, die wir dagegen beweisen.

1) In diesem Fall kann man nicht statt Winkelsector Winkel setzen, es sei denn man wolle das Wort „Winkel“ stets im Sinn von Winkelsector gebrauchen (Def. I, II, § 38).

Zus. I. Eine Grade, die durch einen Scheitel und einen inneren Punkt des Dreiecks geht, schneidet die gegenüberliegende Seite in einem inneren Punkt (Def. I und Satz I).

Zus. II. Zwei Grade, die durch zwei Scheitel und zwei innere Punkte der gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks gehen, schneiden sich in einem inneren Punkt des Dreiecks.

Denn A und C seien die beiden Scheitel, D und F die inneren Punkte der gegenüberliegenden Seiten. Der Sector $\widehat{ACB}$ kann durch C und das Segment (AF) erzeugt werden und weil (CD) innerhalb dieses Sectors liegt, so schneidet es (AF) in einem inneren Punkt E (Zus. IV, Satz II, § 50) (Fig. 60).

Zus. III. Das Segment zweier beliebiger Punkte, die innerhalb eines Dreiecks oder auf zweien seiner Seiten liegen, ist innerhalb des Dreiecks.

E und E' seien die inneren Punkte des Dreiecks. Das von A über E hinaus verlängerte Segment (AE) trifft die gegenüberliegende Seite in einem Punkt F (Def. I) und das Segment (AF), welches E enthält, liegt innerhalb des Dreiecks (Def. II). Ebenso schneidet das Segment (AE') über E' verlängert die gegenüberliegende Seite (CB) in einem inneren Punkt F'. Der Sector FAF' liegt innerhalb des Dreiecks, weil er ein Theil des Sectors $\widehat{CAB}$ ist (Def. I). Das Segment (EF') liegt innerhalb des Dreiecks FAF' (Zus. I) und das Dreieck AEF' innerhalb des Dreiecks AFF' (Einl. a, § 13; Def. I u. II). Das Segment (EE') liegt innerhalb des Dreiecks AEF' (Zus. I), mithin auch des Dreiecks FAF' und des Dreiecks ABC (Einl. a, § 13; Def. I u. II) (Fig. 60).

Zus. IV. Ein Dreieck, dessen Scheitel innerhalb eines andern Dreiecks oder auf dessen Seiten liegen, ist innerhalb des zweiten Dreiecks.

Denn ist $A'B'C'$ das erste gegebene Dreieck, so liegen die Seiten $(A'B')$, $(A'C')$, $(B'C')$ innerhalb des Dreiecks ABC (Zus. III); der innere Theil des Dreiecks $A'B'C'$ ist aber durch die Strahlen eines jeden seiner Sectoren z. B. $\widehat{A'B'C'}$ gegeben, der durch die gegenüberliegende Seite $(A'C')$ begrenzt wird (Def. I). Dies sind aber innere Strahlen des Dreiecks ABC (Zus. III) und mithin liegen alle Punkte des Dreiecks $A'B'C'$ mit Ausnahme derjenigen, die auf seinen Seiten liegen (Def. I), innerhalb des Dreiecks ABC. Damit ist der Zus. bewiesen (Def. II).

Bem. I. Ein Dreieck ist durch die drei Graden seiner drei Eckpunkte bestimmt (Def. II, § 9) und da zwei Grade einer Ebene, welche sich in dem endlichen Gebiet schneiden, in diesem vier consecutive Winkelsectoren bestimmen, von denen je zwei entgegengesetzt sind (Def. I, § 50 und Def. II, § 46), so bestimmen die drei Seiten des Dreiecks zu je zweien zwölf ebene Winkelsectoren.

Def. III. Die drei ebenen Sectoren $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ des Dreiecks ABC heissen die *inneren* Sectoren (Winkel) des Dreiecks und lässt man die ihnen entgegengesetzten Winkelsectoren (Winkel) ausser Betracht, so heissen die übrigen sechs durch die drei Seiten in der Ebene bestimmten Sectoren (Winkel) (Bem. I) *Aussensectoren (-winkel)* des Dreiecks.

Bem. II. Die Graden des Dreiecks ABC theilen daher die Ebene in sieben Theile, nämlich den inneren, die drei den Scheiteln der Innenwinkel entgegengesetzten und die drei übrigen Theile dieser Winkel.

Def. IV. Die Theile der Ebene, von denen jeder begrenzt wird durch eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der beiden andern in der Richtung, welche von dem der gegebenen Seite gegenüberliegenden beiden gemeinschaftlichen Scheitel ausgeht, heissen *den ebenen Innensectoren (-winkeln) bezüglich der Seiten entgegengesetzte Theile.*

Zus. V. Wenn ein Punkt ausserhalb eines Dreiecks liegt, so schneidet von den drei Graden, welche ihn mit den Eckpunkten verbinden, nur eine Grade eine Seite in einem inneren Punkt und diese Seite liegt dem in dieser Graden enthaltenen Eckpunkt gegenüber.

Liegt ein Punkt E innerhalb eines Dreiecks, d. h. in dem inneren Theil I des Dreiecks, so schneiden die Graden AE, BE, CE die Seiten (BC), (AC), (AB) in inneren Punkten (Zus. I). Befindet sich der Punkt E dagegen in einem der den Scheiteln entgegengesetzten Theile z. B. in dem dem Scheitel A entgegengesetzten Theil II, so schneidet die Grade AE die Seite BC in einem inneren Punkt (Zus. I), während die Graden BE und CE die Seiten (AC) und (AB) in inneren Punkten nicht schneiden können, weil sonst der Punkt E ein innerer Punkt wäre (Zus. II).

Dasselbe gilt, wenn der Punkt E in einem den Innensectoren bezüglich der Seiten entgegengesetzten Theile liegt (Def. IV) z. B. in dem dem Sector $\widehat{BAC}$ bezüglich der Seite (BC) entgegengesetzten Theil II' (Zus. IV, Satz II, § 50) (Fig. 60).

Satz II. Wenn eine Grade der Ebene eines Dreiecks nicht durch einen der Eckpunkte geht und eine Seite in einem inneren Punkt schneidet, so trifft sie von den beiden andern die eine in einem inneren, die andre in einem äusseren Punkt.

Wir wählen auf einer der Seiten z. B. (BC) einen Punkt F. Der ebene Sector $\widehat{FAC}$, welcher durch das Segment (FC) begrenzt wird, liegt ganz in dem inneren Theil des gegebenen Dreiecks (Zus. IV, Satz I), welches so aus den inneren Theilen der beiden Dreiecke BAF, FAC besteht. Der $\widehat{AFC}$ entgegengesetzte Sector hat zu Schenkeln den Strahl FB und die Verlängerung von (AF) über F hinaus und hat desshalb ausser dem Segment (FB) keinen andern Punkt mit dem Nebensector $\widehat{AFB}$ gemeinschaftlich, weil das Büschel vom Centrum F in der Ebene (Satz III, § 46), wie jedes andre Büschel, einfach geschlossen ist (Satz I, § 30). Jede Grade daher, die durch F geht und in dem Sector $\widehat{AFC}$ und seinem Scheitelsector enthalten ist, schneidet die Seite (AC) in einem inneren Punkt (Zus. I, Satz I); während sie die Seite (AB) nur in einem ihrer äusseren Punkte treffen kann (Zus. IV, Satz II, § 50). Liegt dagegen die durch F gehende Grade innerhalb des Sectors $\widehat{AFB}$ und seines Scheitelsectors, so schneidet sie die Seite (AB) in einem inneren und die Seite (AC) in einem äusseren Punkt. Da aber jede durch F gehende Grade in zweien

der entgegengesetzten Sectoren, welche die ganze Ebene um F bilden (Def. I, § 30 und Def. I, § 46), liegen muss, so ist damit der Satz bewiesen (Fig. 60).

Zus. I. Wenn eine Grade zwei Seiten des Dreiecks in äusseren Punkten schneidet, so trifft sie auch die dritte in einem äusseren Punkt.

Denn träfe sie die dritte Seite in einem inneren Punkt, so würde sie auch eine der beiden andern Seiten in einem inneren Punkt treffen.

Satz III. Wenn eine Grade einen Punkt innerhalb eines Dreiecks hat, so muss sie den Umfang des Dreiecks in zwei Punkten schneiden.

Denn g sei die Grade, E ihr Punkt innerhalb des Dreiecks ABC und F der Durchschnittspunkt von AE mit der gegenüberliegenden Seite (BC). Betrachtet man die Dreiecke ABF, ACF, von denen je zwei Seiten entweder Seiten des gegebenen Dreiecks oder Theile derselben sind, so schneidet die Grade g, weil sie die gemeinschaftliche Seite (AF) in einem inneren Punkt trifft, eine andre Seite eines jeden Dreiecks, welche eine Seite oder ein Theil einer Seite des gegebenen Dreiecks ist, in einem inneren Punkt. Damit ist der Satz bewiesen (Fig. 60).

Zus. Die Segmente, welche einen Punkt O innerhalb eines Dreiecks mit den Punkten der Seiten verbinden, enthalten alle Punkte des inneren Theils des Dreiecks.

Denn alle diese Segmente liegen innerhalb des Dreiecks (Zus. III, Satz I). Wenn O' ein beliebiger innerer Punkt ist, so schneidet die Grade OO' den Umfang des Dreiecks in zwei Punkten, von denen einer auch ein Eckpunkt sein kann. Damit ist der Zusatz bewiesen (Def. I, § 2 und Def. I).[XLIX)]

Bem. III. Je zwei Aussenwinkel eines Dreiecks (Def. III) sind Nebenwinkel des Innenwinkels, welcher denselben Scheitel hat.[1)]

XLIX) Die Eigenschaften, die wir in diesem Paragraphen behandelt haben, werden auf dieselbe Weise unter Zugrundelegung der in den früheren Anmerkungen bewiesenen Sätze nachgewiesen. Nur muss man, wenn der Ausdruck „im Unendlichgrossen liegender Punkt zweier parallelen Graden" nicht gebraucht werden soll, im Satz III darauf aufmerksam machen, dass die Grade einer der beiden Seiten parallel sein kann, d. h. der Durchschnittspunkt mit dieser Seite nicht existirt.

Wir bemerken hier noch, dass die Einführung dieses Ausdrucks auch in die Elementarbücher die Sätze gleichförmiger macht.

---

1) Ein Polygon heisst *convex*, wenn jede Seite desselben die übrigen, welche keinen Eckpunkt mit ihr gemeinschaftlich haben, in äusseren Punkten schneidet.

Aus dieser Definition folgt, dass eine Seite die Ebene in zwei Theile zerlegt, in deren einem das ganze Polygon liegt, oder dass, wie man auch sagt, eine Seite des convexen Polygons alle andern auf derselben Seite lässt (Def. II und Zus. III, Satz II, § 50).

Daraus geht dann sofort hervor, dass eine Diagonale eines gegebenen convexen Polygons $A_1 A_2 A_3, \ldots, A_n$, dessen Seiten $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, \ldots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$ sind, z. B. $A_1 A_s$ auf der einen Seite der Ebene die Eckpunkte $A_2 A_3 \ldots A_{s-1}$ und auf der andern $A_{s+1} A_{s+2} \ldots A_n$ liegen hat. Es folgt auch, dass die Verlängerungen der Seiten $(A_{s+1} A_s), \ldots$ $\ldots, (A_n A_1)$ bezüglich in den Nebensectoren zu $\widehat{A_{s-1} A_s A_1}, \ldots, \widehat{A_2 A_1 A_s}$ liegen. Sind diese Eigenschaften aufgestellt, so lässt sich mit Hülfe der Sätze dieses Paragraphen und speciell des Satzes III leicht das folgende Theorem beweisen:

Eine Grade der Ebene eines convexen Polygons, welche nicht durch einen seiner Eckpunkte geht und eine Seite desselben in einem inneren Punkt trifft, schneidet eine zweite Seite und nur eine in einem inneren, alle übrigen in äusseren Punkten.

Eine Grade kann den Umfang eines Polygons nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

11.

Die Winkel, welche zwei parallele Grade mit einer gemeinsamen Durchschnittslinie machen. — Die Theile eines ebenen Streifens bezüglich einer Graden.

§ 52. *Bem. I.* Es seien zwei parallele Grade r und r' und eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, welche sie in den Punkten A und A' schneidet, gegeben und R sei der Mittelpunkt des Segments (AA'). Die Grade AA' theilt die Ebene in zwei entgegengesetzte und gleiche Theile, in welchen die beiden entgegengesetzten Theile von r und r' bezüglich der Punkte A und A' liegen (Zus. II, Satz II, § 50). X_∞ sei der auf der einen Seite der Durchschnittslinie im Unendlichgrossen liegende Punkt von r und r', welchen auf derselben Seite der Strahl s mit R verbindet und X'_∞ der zu X_∞ entgegengesetzte Punkt.

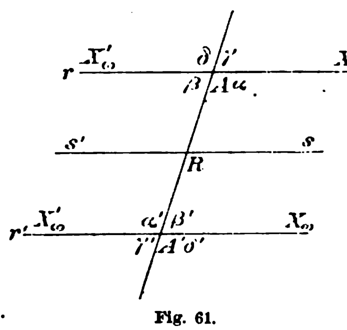


Fig. 61.

Die Winkel $\widehat{X_\infty AR}$, $\widehat{X'_\infty AR}$, $\widehat{X'_\infty A'R}$, $\widehat{X_\infty A'R}$ wollen wir bezüglich mit α und β, α' und β' bezeichnen, ferner die Scheitelwinkel zu α und β mit δ und γ und zu α' und β' mit δ' und γ'. Die Winkel α und γ, β und δ; α' und γ', β' und δ' sind Nebenwinkel; ebenso die Winkel α und β, γ und δ; α' und β', γ' und δ'.

Offenbar liegen die Winkel α und α' β und β', γ und γ', δ und δ' nach ihrer Definition in entgegengesetzten Theilen der Ebene bezüglich der Graden AA', während die Winkel α und γ, β' und δ', α' und γ', β und δ in demselben Theil der Ebene bezüglich dieser Graden AA' liegen (Fig. 61).

Def. I. Die Winkelsectoren (Winkel) α und β, α' und β' nach der Bezeichnung in Bem. I heissen *innere;* γ und δ, γ' und δ' *äussere;*

α und β', α' und β innere Ergänzungswinkel,
γ und δ', γ' und δ äussere " "
β und β', α und α' innere Wechselwinkel,
γ und γ', δ und δ' äussere " "
α und δ', β' und γ, α' und δ, β und γ'

Gegenwinkel.[1])

Der Umfang des Polygons ist durch seine Seiten gegeben und der innere Theil desselben durch denjenigen der Dreiecke, welche einen Eckpunkt gemeinschaftlich und die Seiten des Polygons zu Seiten haben. Man beweist dann:

Wenn ein Punkt einer Graden innerhalb eines convexen Polygons liegt, so schneidet die Grade nothwendiger Weise den Umfang des Polygons in zwei Punkten.

Der Satz, dass eine Grade, von welcher ein Punkt im Innern und einer ausserhalb eines convexen Polygons liegt, den Umfang desselben wenigstens in einem Punkt schneiden muss, wird von *Sannia* und *D'Ovidio* als Postulat gegeben (a. a. O. S. 50). *Euclid, Legendre* u. A. setzen ihn stillschweigend voraus; *De Paolis* (a. a. O. S. 71 u. 114) behandelt ihn als selbstverständlich ohne Postulat und ohne Beweis, indem er davon ausgeht, dass der Umfang des Polygons eine geschlossene Linie ist (siehe Anm. zu § 60). Der Beweis, den *Faifofer* (Elemente der Geom. S. 43, 1886) gibt, ist nicht ausreichend, wie er selbst bemerkt; wenn die Definition der Linie fehlt, so fehlt auch die Basis für den Beweis seiner Sätze (siehe Vorr.).

[1]) An dieser Stelle kann man die Definition von parallelen Strahlen und Segmenten von derselben und entgegengesetzter Richtung geben, nämlich:

Def. Die Strahlen zweier parallelen Graden heissen, wenn sie auf derselben Seite einer sie schneidenden Graden von den Durchschnittspunkten aus gerechnet liegen, *von derselben Richtung;* liegen die beiden parallelen Strahlen dagegen auf entgegengesetzten Seiten, *von entgegengesetzter Richtung.*

Gleiche Benennungen können auch gebraucht werden, wenn die Graden r und r' nicht parallel sind.

Satz I. Die inneren und äusseren Wechselwinkel, welche zwei parallele Grade mit einer Durchschnittslinie bilden, sind gleich.

Wählt man auf dem Strahl (AX_∞) der Graden r einen Punkt B, so liegt der Punkt B', welcher bezüglich R symmetrisch zu B auf der Graden RB sich befindet, auf dem zu RB entgegengesetzten Strahl RB', der in dem Winkel $\widehat{X'_\infty RA'}$ enthalten ist. Mithin liegt der Punkt B' auf dem Strahl $(A'X'_\infty)$ der Graden r' (Satz I, II, § 43). Die beiden Dreiecke BAR, $B'A'R$ sind gleich und desshalb ist, da $\widehat{BAR} = \alpha$, $\widehat{B'A'R} = \alpha'$,

$$\alpha = \alpha'$$

und ähnlich $\beta = \beta'$

und weil $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$; $\alpha' = \delta'$, $\beta' = \gamma'$ ist,

so erhält man auch

$$\gamma = \beta', \; \gamma = \gamma'. \qquad \text{(Satz IV, § 15)}$$

Bez. Einen flachen Winkel bezeichnen wir auch mit dem Buchstaben π.

Satz II. Die inneren und äusseren Ergänzungswinkel, welche zwei parallele Grade mit einer gemeinsamen Durchschnittslinie machen, sind Supplementwinkel.

Denn es ist

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \pi$$

und weil $\beta = \beta'$

$$\alpha + \beta' = \alpha' + \beta = \pi \qquad \text{(Def. II, § 38)}$$

und ähnlich

$$\delta + \gamma' = \delta' + \gamma = \pi.$$

Satz III. Wenn zwei Grade r und r' gleiche innere Wechselwinkel mit einer gemeinsamen Durchschnittslinie bilden, so sind sie parallel.

Denn A und A' seien die Durchschnittspunkte der Transversalen mit den beiden Graden r und r'; X_∞, X'_∞; Y_∞, Y'_∞ seien die im Unendlichgrossen liegenden Punkte von r und r' derart, dass die Segmente (AX_∞), $(A'Y_\infty)$ von

---

Mit diesen Ausdrücken soll nur die Lage der parallelen Strahlen bezüglich einer ihrer Durchschnittslinien bestimmt werden.

Satz. Zwei parallele Strahlen von derselben oder entgegengesetzter Richtung bezüglich einer ihrer Durchschnittslinien AA' sind es auch bezüglich einer beliebigen andern gemeinsamen Transversalen.

A_1A_1' sei eine andre gemeinsame Transversale. Es sind zwei Fälle möglich: entweder liegen A_1, A_1' auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten bezüglich der Graden AA' (Def. I, § 50 und Anm. XLVIII). Im ersten Fall haben die Strahlen AA_1, $A'A_1'$ dieselbe Richtung bezüglich der Graden AA' (Def.). Die Segmente (AA'), (A_1A_1') können keinen Punkt gemeinschaftlich haben, sonst befänden sich die Punkte A_1 und A_1' auf entgegengesetzten Seiten bezüglich der Graden AA' (Zus. III, Satz II, § 50 und Anm. XLVIII). Folglich liegen, wie man sich leicht überzeugt, auch A und A' auf derselben Seite der Graden A_1A_1'; daher sind die Strahlen A_1A, $A_1'A'$ ebenso wie die entgegengesetzten Strahlen AA_1, $A'A_1'$ von derselben Richtung bezüglich der Graden A_1A_1'. Parallele Strahlen von entgegengesetzter Richtung bezüglich der Graden AA' haben mithin auch entgegengesetzte Richtung bezüglich der Graden A_1A_1'.

Liegen dagegen A_1 und A_1' auf entgegengesetzten Seiten von AA', so liegen auch die Punkte A und A' bezüglich der Transversalen A_1A_1' so. Mithin haben die Strahlen A_1A, $A'A_1'$ dieselbe Richtung bezüglich der Graden AA' und auch bezüglich der Graden A_1A_1'. Damit ist der Satz bewiesen.

r und r' auf derselben Seite von AA' (Def. I, § 50) und mithin die Segmente (AX'_∞), $(A'Y'_\infty)$ auf der entgegengesetzten Seite liegen (Zus. II, Satz II, § 50). Nach der Voraussetzung ist

$$\widehat{X_\infty AA'} \equiv \widehat{Y'_\infty A'A}.$$

Wenn r' nicht parallel zur Graden r ist, so lässt sich durch den Punkt A' eine Grade r'' parallel zu r ziehen und es muss dann

$$\widehat{X_\infty AA'} \equiv \widehat{X'_\infty A'A}$$

sein; d. h. es gäbe zwei Strahlen $(Y'_\infty A')$ und $(X'_\infty A')$, welche denselben Winkel mit dem Strahl $A'A$ um A' und in demselben Theil der Ebene bezüglich der Graden AA' von dem Strahl $A'A$ an bildeten. Dieses ist nicht möglich, weil das Strahlenbüschel ein einfach geschlossenes und überdies in der Position seiner Theile identisches System ist (Satz I, Def. I, § 30 und Satz III, § 47). Die beiden Graden r und r' müssen daher parallel sein und die Punkte X_∞ und Y_∞, X'_∞ und Y'_∞ also zusammenfallen.[LI])

[LI]) Die Beweise der Sätze I, II u. III kann man leicht dadurch von den im Unendlichgrossen liegenden Punkten unabhängig machen, dass man andre Punkte benutzt; man kann aber auch von dem uneigentlichen Punkt im Unendlichgrossen (Anm. XLIV) Gebrauch machen; die Beweise bleiben dann dieselben.

Für das endliche Gebiet allein ist in diesen Anmerkungen noch nicht bewiesen worden, dass zwei Winkel mit parallelen Schenkeln von derselben Richtung gleich sind. Mit Hülfe des Unendlichgrossen hatte sich dies leicht beweisen lassen (Satz I; § 40).

Dieses Theorem folgt für Winkel, welche in einer Ebene liegen, aus Satz II. Der Beweis kann folgendermassen gegeben werden:

Fig. 62.

$\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ seien die beiden Winkel und es sei $(AB) \# (A'B')$, $(AA_1) \# (A'A_1')$. Man verbinde A mit A', dann ist

$$\widehat{BAA'} \equiv \widehat{B'A'D'};\ \widehat{CAA'} \equiv \widehat{C'A'D'}, \quad \text{(Satz II)}$$

weil aber

$$\widehat{BAA'} = \widehat{BAC} + \widehat{CAA'};\ \widehat{B'A'D'} = \widehat{B'A'C'} + \widehat{C'A'D'},$$

so folgt:

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}. \quad \text{(Anm. XLVI u. Einl. } g^{IV}\text{, § 73) (Fig. 62)}$$

Um diesen Satz allgemein zu beweisen, hat man nur den Beweis für den Raum von drei Dimensionen nöthig (siehe Buch III), weil zwei parallele Ebenen, wie $A'B'C'$, ABC immer, wie wir sehen werden, in einem Raum von drei Dimensionen enthalten sind. Da wir uns in den mit Römischen Ziffern bezeichneten Anmerkungen auf die Ebene allein beschränken, so wollen wir hier diesen Beweis geben, den man eigentlich erst nach der Construction des genannten Raums bringen dürfte.

Ist also dieser Raum construirt und der Parallelismus zweier Ebenen definirt, so lässt sich leicht beweisen:

1) dass zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene in parallelen Graden geschnitten werden, zwei parallele Grade dagegen in einer Ebene liegen (Zus. IV, Satz V, § 46 u. Anm. XLV).

2) dass parallele Segmente zwischen parallelen Ebenen gleich sind.

Alsdann gibt man den folgenden Beweis:

Die Graden AB, $A'B'$; AC, $A'C'$ sind bezüglich in einer Ebene gelegen [1)] und weil $(AA_1) \equiv (A'A_1')$, so ist $(A_1A_1') \# (AA')$. Die Ebene $A_1A_1'B$ schneidet die Ebene $A'B'C'$ in der Graden $A_1'B'$, welche der Graden A_1B parallel ist [1)]. Denkt man sich durch AA' eine Ebene parallel zur Ebene A_1BA_1' gelegt, so ist $(AB) \equiv (A'B')$ [2)] und mithin $(BB') \# (A_1A_1')$ (Zus. I, Satz II, § 43 und Anm. XXXVIII), woraus $(A_1B) \equiv (A_1'B')$ folgt. Ferner sind die Dreiecke ABA_1, $A'B'A_1'$ gleich, weil sie ihre drei Seiten gleich haben

§ 53. *Satz I. Eine Grade, welche die Schenkel eines ebenen Streifens verbindet, halbirt den Streifen.*

r und r' seien die Schenkel des Streifens, welche parallel sein müssen (Def. III, § 47) und AA' sei die Transversale, welche r und r' in den Punkten A und A' schneidet.

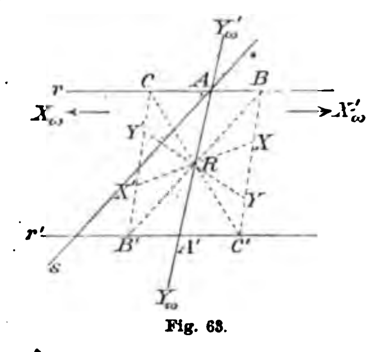


Fig. 63.

Um zu beweisen, dass die beiden Theile $X'_\infty AA'X'_\infty$, $X_\infty A'AX_\infty$ identisch sind, stellen wir fest, dass diejenigen Punkte sich entsprechen, welche mit dem Mittelpunkt R von AA' in einer Linie liegen und bezüglich R symmetrisch sind (Def. II, § 35). Wählt man auf den Segmenten (AX'_∞), $(A'X'_\infty)$ zwei Punkte B und C', so liegen die entsprechenden Punkte B' und C auf den Segmenten $(A'X_\infty)$, (AX_∞) (Satz II, § 43) und so dass $(B'C) \# (BC')$ ist (Zus. I, Satz I, § 43). Wählt man zwei andre Punkte X und Y des ersten Theils, so haben die entsprechenden Punkte X' und Y' auf den zu RX und RY entgegengesetzten Strahlen gleichen Abstand von R. Die beiden Dreiecke RXY, $RX'Y'$ sind mithin gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben. Es ist daher $(XY) \equiv (X'Y')$ und folglich sind die beiden Figuren gleich (Satz III, § 15) (Fig. 63).

Def. I. Die beiden Theile, in welche der Streifen durch eine Grade zerlegt wird, heissen *entgegengesetzt* bezüglich dieser Graden.

Satz II. Wenn man von den Enden A und A' eines Segments zwei Strahlen in einem der durch die Grade des Segments bestimmten Theile der Ebene derart zieht, dass die Summe der Winkel, welche die Strahlen mit dem Segment (AA') bilden, kleiner als zwei Rechte ist, so schneiden sich die beiden Strahlen in einem Punkt. Ist dagegen die Summe der Winkel grösser als zwei Rechte, so schneiden sich die Verlängerungen der Strahlen in dem bezüglich der Graden AA' entgegengesetzten Theil der Ebene.

Bezeichnet man mit Y_∞ und Y'_∞ die im Unendlichgrossen liegenden Punkte der Graden AA' und zieht durch A und A' zwei parallele Grade r und r', so wird die Ebene durch die drei Graden r, r', AA' in sechs Theile zerlegt, von denen je zwei gleich sind, nämlich:

$$\widehat{Y_\infty A'X_\infty} \equiv \widehat{Y'_\infty AX'_\infty},\quad \widehat{Y_\infty A'X'_\infty} \equiv \widehat{Y'_\infty AX_\infty} \qquad \text{(Satz I, § 52)}$$

$$X_\infty AA'X_\infty \equiv X'_\infty A'AX'_\infty. \qquad \text{(Satz I)}$$

Eine Grade s der Ebene, welche durch den Punkt A geht, ist je zur Hälfte in den beiden Theilen der durch die Grade AA' getrennten Ebene gelegen (Zus. II, Satz II, § 50), nämlich in den beiden Theilen:

(Satz III, § 17 und Anm. XII). Mithin sind ihre entsprechenden Winkel $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ gleich, was zu beweisen war (Fig. 62).

Gilt dieser Satz in der Ebene, so kann man hier mit demselben Beweis den Satz VI, § 47 geben.

$$\widehat{Y_\infty A' X_\infty} + X_\infty A' A X_\infty + \widehat{X_\infty A Y'_\infty}$$
$$\widehat{Y'_\infty A X'_\infty} + X'_\infty A A' X'_\infty + \widehat{X'_\infty A' Y_\infty}.$$

Ist eine Hälfte der Graden in dem Winkel $X'_\infty A Y'_\infty$ enthalten, so liegt die andre in dem entgegengesetzten Winkel $\widehat{X_\infty A Y_\infty}$. Sie schneidet die Grade r' in dem Segment $(A' X_\infty)$, welches innerhalb dieses Winkels liegt, weil $\widehat{X_\infty A Y_\infty}$ dadurch erzeugt werden kann, dass man den Punkt A mit den Punkten des Segments $(A' X_\infty)$ verbindet (Zus. IV, Satz II, § 50). Die andre Hälfte der Graden s kann die Grade r' sicherlich nicht schneiden (Satz II, § 30 und Uebereink. § 28).

Wenn die Grade s zur Hälfte in dem Winkelsector $Y'_\infty A X_\infty$ liegt, so schneidet die andre Hälfte aus demselben Grund die Grade r' in einem Punkt des Segments $(A' X'_\infty)$.

In dem ersten Fall ist der durch das Segment (AA') und den Theil von s, der in dem Winkelsector $X_\infty A Y_\infty$ enthalten ist, gebildete Winkel kleiner als $\widehat{X_\infty A Y_\infty}$ und daher mit dem Winkel $X_\infty A' Y'_\infty$ zusammen kleiner als zwei Rechte, denn es ist

$$\widehat{X_\infty A Y_\infty} + \widehat{X_\infty A' Y'_\infty} = \pi. \qquad \text{(Satz II, § 52)}$$

In dem zweiten Fall ist die Summe des von dem Segment (AA') und dem in dem Sector $Y'_\infty A X_\infty$ enthaltenen Strahl von s gebildeten Winkels und des Winkels $X_\infty A' Y'_\infty$ grösser als zwei Rechte. Damit ist der Satz vollständig bewiesen, wenn man annimmt, dass das auf der Graden r' liegende $(A' X_\infty)$ einer der Strahlen sei.[LII])

12.

Segmente und Abstände eines Punktes von den Punkten einer Graden. — Abstand zweier parallelen Graden.

§ 54. *Satz I. In jedem rechtwinkligen Dreieck sind die den Katheten gegenüberliegenden Winkel spitz.*

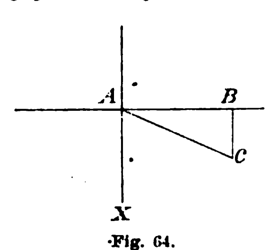


Fig. 64.

ABC sei das rechtwinklige Dreieck. Von A ziehe man AX senkrecht zur Graden AB (Zus. I, Satz V, § 47) und X sei ein Punkt, der auf derselben Seite von AB liegt wie der Punkt C. Da nun BC parallel zu AX ist, so liegen die Punkte B und C auf derselben Seite der Graden AX (Satz I, § 50).

Wäre der Winkel $\widehat{BAC}$ stumpf, so müsste der Strahl AX in dem Sector $\widehat{BAC}$ enthalten sein und die Grade AX würde mithin (BC) in einem Punkt schneiden, (Zus. IV, Satz II, § 50), was widersinnig ist (Satz II, § 26).

LII) Im endlichen Gebiet braucht man, um die Sätze I u. II zu beweisen, nur andre Punkte statt der im Unendlichgrossen liegenden Punkte zu nehmen.

$\widehat{BAC}$ kann auch kein rechter Winkel sein; denn sonst könnte man vom Punkt C aus zwei Senkrechte zur Graden AB ziehen, was ebenfalls widersinnig ist (Zus. I, Satz V, § 47) (Fig. 64).[LIII]

Def. I. Unter einem vom Punkt R auf eine Grade r *normalen Segment* verstehen wir dasjenige, welches auf der durch R gehenden auf der Graden r Senkrechten von R bis zum Durchschnittspunkt *(Fusspunkt)* der Senkrechten mit r reicht.

Unter *schiefem Segment* verstehen wir jedes andere, welches einen Punkt der Graden r mit R verbindet.

Satz II. Das normale Segment von einem Punkt auf eine Grade ist kleiner als jedes schiefe Segment.

r sei die gegebene Grade, R der gegebene Punkt, (RM) das normale Segment, (RA) ein schiefes Segment. Es kann vorerst (RA) nicht gleich (RM) sein, weil sonst das Dreieck ARM gleichschenklig wäre (Def. III, § 9) und man durch Verbindung des Mittelpunkts von (AM) mit R eine zweite von R auf die Grade r Senkrechte erhielte (Satz IV, § 42), was widersinnig ist (Zus. I, Satz V, § 47).

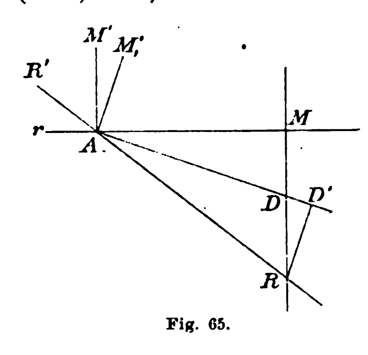


Fig. 65.

AD sei eine Grade, welche (RM) in einem inneren Punkt D schneidet. Wir wollen RA nach R' verlängern und von A die normalen Strahlen AM', AM_1' bezüglich zu den Graden AM und AD auf derselben Seite der Graden AR wie das Segment (AD) ziehen (Def. II, § 50). Weil der Winkel MAR spitz ist (Satz I), so sind die beiden Strahlen AM', AM_1' in dem stumpfen Winkelsector $\widehat{R'AM}$ enthalten, mithin liegt der Strahl AM in dem Winkelsector $\widehat{M_1'AD}$. Es ist aber $\widehat{R'AM} < \widehat{R'AD}$, weil $\widehat{RAD} < \widehat{RAM}$ und $\widehat{R'AM} + \widehat{MAR} \equiv \widehat{R'AD} + \widehat{DAR} \equiv \pi$ ist; der Strahl AM' ist daher in dem Winkelsector $\widehat{R'AM_1'}$ enthalten.

Wir wollen nun von R das normale Segment (RD') zur Graden AD ziehen. Weil AM', RM; AM_1', RD' parallel sind (Zus. II, Satz V, § 47), so ist

$$\widehat{R'AM_1'} \equiv \widehat{ARD'}, \quad \widehat{R'AM'} \equiv \widehat{ARM}, \quad \text{(Satz I, § 40 oder II, § 52)}$$

mithin ist (RM) in dem Winkelsector $\widehat{ARD'}$ enthalten, also liegt der Punkt D' ausserhalb des Segments (AD) (Zus. IV, Satz II, § 50). Wenn nun (RM) grösser als (AR) wäre, so gäbe es in dem Segment (RM) einen Punkt D derart, dass $(RD) \equiv (AR)$ wäre (Satz I, § 8; Einl. Def. I, § 61 und b, § 73).

[LIII]) Der Beweis des Satzes I bleibt so ziemlich derselbe; man bezieht sich dabei auf dieselben Sätze und Ax. II' oder benutzt Ax. II auch zu Satz III der Anm. XLIV und zu Satz I, § 14.

Weil alsdann das Dreieck ARD gleichschenklig wäre, so erhielte man durch die Verbindung des Mittelpunkts von (AD) mit R eine zweite durch R gehende auf der Graden AD Senkrechte, was widersinnig ist (Zus. I, Satz V, § 47). Daher u. s. w. (Fig. 65).

Zus. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist grösser als jede seiner Katheten.

Satz III. Die schiefen Segmente von einem Punkt nach den Punkten einer Graden, welche gleichen Abstand von dem Fusspunkt des von dem Punkt auf die Grade gefällten Lothes haben, sind gleich.

A und r seien der Punkt und die Grade, (AM) das zur Graden normale Segment, (AB), (AC) zwei schiefe Segmente, deren Enden B und C gleichen Abstand von M haben. Die Dreiecke BMA, CMA sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; nämlich (MA) gemeinschaftlich, $(BM) \equiv (CM)$, $\widehat{BMA} \equiv \widehat{CMA}$ (Satz IV, § 42); daher ist $(AB) \equiv (AC)$ (Satz II, § 42), was zu beweisen war (Fig. 42, Seite 317).

Def. II. Das zwischen dem Fusspunkt M des normalen Segments (AM) und dem Punkt B eines schiefen Segments (AB) auf der Graden r enthaltene Segment (BM) heisst *rechtwinklige Projection* oder nur *Projection* des Segments (AB) auf die Grade r.

Satz IV. Die Projectionen zweier gleichen schiefen Segmente sind gleich.

(AB) und (AC) seien die gleichen schiefen Segmente; (BM), (CM) ihre Projectionen (Def. II). Haben B und C nicht den gleichen Abstand von M, so sei $(MC_1) \equiv (MB)$ (Zus. I, Satz III, § 4); der Punkt C_1 muss dann auf derselben Seite von M liegen, wie C. Es ist auch

$$(AB) \equiv (AC_1) \qquad \text{(Satz III)}$$

und weil das Dreieck CC_1A gleichschenklig ist (Def. III, § 9) und C und C_1 auf derselben Seite von M liegen, so gäbe es eine zweite Senkrechte zur Graden BC, die durch A geht, was widersinnig ist (Zus. I, Satz V, § 47) (Fig. 42, Seite 317).

Satz V. Wenn zwei Punkte R und R' bezüglich denselben Abstand von zwei Graden r und r' haben, so sind die Segmente, welche sie mit den Punkten dieser Graden bestimmen, zu je zweien gleich und die so erhaltenen Figuren sind gleich.

Man stelle einen Identitätszusammenhang zwischen den beiden Graden r und r' derart fest, dass die Fusspunkte M und M' der Lothe von R und R' auf die Graden r und r' sich entsprechen (Satz VI, § 15). Sind A und A' zwei andre sich entsprechende Punkte auf den beiden Graden r und r', so sind die zwei rechtwinkligen Dreiecke RAM, $R'A'M'$ gleich, weil ihre Katheten gleich sind (Satz IV. u. I, § 47); es ist also $(AR) \equiv (A'R')$.

Sind zwei Punkte X und Y der Figur (Rr) gegeben und A und B die Durchschnittspunkte der Graden RX und RY mit r, so liegen die X und Y entsprechenden Punkte X' und Y' auf den entsprechenden Strahlen $R'A'$, $R'B'$ in einem Abstand von R' und A', R' und B', der demjenigen der Punkte X und Y von R, A; R, B gleich ist, und weil

$$\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R\,B'},$$

so ist auch

$$(XY) \equiv (X'Y'). \qquad \text{(Satz II, § 42)}$$

Folglich sind zwei Figuren (Rr) und $(R'r')$ identisch (Satz III u. Zus. II, Satz II, § 15).

Zus. I. Wenn zwei Punkte denselben Abstand von einer Graden haben, so sind die beiden Figuren, welche sie mit der Graden bestimmen, gleich.

Zus. II. Wenn zwei Punkte in einer auf einer Graden Normalen in der Ebene liegen und denselben Abstand von der Graden haben, so sind die Segmente, welche sie mit jedem Punkt der Graden bestimmen, gleich.

Satz VI. Die Punkte einer Graden haben gleichen Abstand von einer zu ihr Parallelen.

r und r' seien die parallelen Graden, (MM_1), $(M'M_1')$ die zu r und r' normalen Segmente. Die Figur $M'MM_1M_1'$ ist ein Rechteck (Zus. II, Satz V, § 47 und Satz I, § 48) und mithin $(MM_1) \equiv (M'M_1')$ (Satz I, § 44) (Fig. 52, Seite 338).

Def. III. Der normale Abstand eines Punktes einer Graden von einer zu ihr parallelen Graden heisst *Abstand* der beiden Graden.

Satz VII. Wächst die Projection eines schiefen Segments, welches von einem Punkt nach einer Graden gezogen ist, so wächst auch das Segment selbst und umgekehrt.

A sei der gegebene Punkt, BC die gegebene Grade, (AM) das normale Segment.

Wir wollen annehmen, von (AB) ausgehend wachse die Projection (MB) von M nach B hin und das schiefe Segment (AB) bliebe constant. Wählt man dann zwei gleiche Segmente (AB), (AB_1), so wäre das Dreieck BAB_1 gleichschenklig und es würde der Fusspunkt eines zweiten von A auf die Grade MB gefällten Lothes zwischen B und B_1 fallen, was unmöglich ist (Zus. I, Satz V, § 47). Wäre dagegen das Segment (AB_1) kleiner als (AB), so gäbe es zwischen B und M, weil $(AB_1) < (AB)$ und $< (AM)$ ist (Satz II), wenigstens einen Punkt B_2 derart, dass $(AB_2) \equiv (AB_1)$ (Zus. I, Def. I und Satz VII, § 13) wäre. Es fiele mithin wieder, weil das Dreieck B_1AB_2 gleichschenklig ist, der Fusspunkt eines zweiten von A auf MB gefällten Lothes in das Segment (B_1B_2), was widersinnig ist (Zus. I, Satz V, § 47). Es muss desshalb (AB_1) grösser als (AB) sein (Satz I, § 8 und Einl. b, § 73).

Wächst dagegen (AB) in einer gegebenen Richtung von M an, so muss auch seine Projection wachsen, denn nähme dieselbe ab, so würde nach dem obigen Beweis auch (AB) abnehmen, was gegen die Voraussetzung ist (Fig. 42, Seite 317).[LIV]

[LIV]) Für das endliche Gebiet werden die Sätze I, II, III, IV, V u. VI in derselben Art bewiesen, indem man sich auf dieselben Sätze bezieht, die in den Beweisen und den zugehörigen Anmerkungen angeführt sind. Der Satz VI gilt jetzt für die Ebene (Bem. II, Anm. XLVI). Satz VII kann unabhängig von Satz VII, § 13, (den man später bringen kann; siehe Anm. X), bewiesen werden, wie in Anm. LVII ausgeführt werden wird.

13.

Andre Eigenschaften der Dreiecke.

§ 55. *Satz I. Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden andern.*

Wir wissen schon, dass eine Seite der Summe der beiden andern nicht gleich sein kann (Satz IV, § 17); hier erhalten wir eine Bestätigung dieser Eigenschaft.

Man braucht den Satz nur für die grösste Seite zu beweisen, denn jede der übrigen ist offenbar kleiner als die Summe der beiden andern. ABC sei das Dreieck, (AB) die grösste Seite. Wir wollen annehmen, (AB) wäre ebensogross oder grösser als die Summe der beiden andern Seiten. Alsdann gibt es in dem Segment (AB) zwei Punkte C' und C'' (die in dem ersten Fall zusammenfallen), derart dass

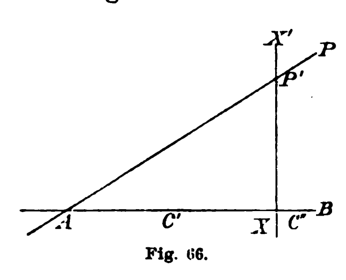


Fig. 66.

$$(AC) \equiv (AC') \text{ und } (BC) \equiv (BC'').$$

Fällt C' in das Segment $(C''B)$, so wäre $(AB) \equiv (AC') + (C'B)$ und $(C'B) < (C''B)$; weil ferner $(C''B) \equiv (BC)$, so wäre (AB) gegen die Voraussetzung kleiner als $(AC) + (BC)$; es fällt mithin C' in das Segment (AC'').

Durch einen Punkt X des Segments $(C'C'')$ (in dem ersten Fall durch den Punkt C') ziehen wir eine Senkrechte XX' zu der Graden AB. In XX' gibt es keinen Punkt, der mit A verbunden ein Segment lieferte, das ebensogross oder kleiner als (AC') wäre (Satz II, § 54). Auch auf der entgegengesetzten Seite von A bezüglich der Graden XX' kann es keinen Punkt P geben, für welchen das Segment AP ebensogross oder kleiner als (AC') wäre. Denn bezeichnet man mit P' den Durchschnittspunkt von (AP) und XX', so liegt P' innerhalb des Segments (AP) (Zus. III, Satz II, § 50) und da $(AP') > (AX)$ (Satz II, § 54), so ist um so viel mehr $(AP') > (AC')$ und $(AP) > (AC)$.

Dasselbe gilt für den Punkt B und das Segment (BC''), welches kleiner oder ebensogross als (BX) ist.

Ist nun das Dreieck ABC gegeben, so muss der Punkt C entweder auf der Senkrechten XX' selbst liegen oder auf der einen oder andern Seite derselben. Auf der Senkrechten kann er aber ebensowenig wie in einem der Theile der Ebene bezüglich der Senkrechten liegen. Damit ist bewiesen, dass, wenn das Dreieck ABC existiren soll, die Seite AB immer kleiner als die Summe der beiden andern sein muss (Fig. 66).

Zus. Jede Seite eines Dreiecks ist grösser als die Differenz der beiden andern.

Es sei $(AB) \geqq (BC) \geqq (CA)$. Wenn $(CA) < (AB) - (BC)$ wäre, so würde $(CA) + (BC) < (AB)$ sein, was unmöglich ist. Es kann auch nicht $(CA) \equiv (AB) - (BC)$ sein, weil sonst $(CA) + (BC) \equiv (AB)$ wäre, was ebenfalls widersinnig ist.

Satz II. Zwei rechtwinklige Dreiecke, die eine Kathete und die Hypotenuse gleich haben, sind gleich.

Wenn in den beiden bei M und M' rechtwinkligen Dreiecken ARM, $A'R'M'$ die Katheten (RM), $(R'M')$ und die Hypotenusen (AR), $(A'R')$ gleich sind, so müssen auch (AM) und $(A'M')$ gleich sein. Wir wollen annehmen, in dem Identitätszusammenhang, welcher in dem Beweis zu Satz V des vorigen Paragraphen festgestellt wurde, entspräche dem A nicht A' sondern ein andrer auf derselben Seite von M' wie A' gelegener Punkt A''. Es müsste dann $(RA) \equiv (R'A'') \equiv (R'A')$ sein. Es kann aber nicht $(R'A'') \equiv (R'A')$ sein (Zus. I, Satz V, § 47); mithin fällt A'' mit A' zusammen.

Satz III. Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und den der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben, sind gleich.

ABC, $A'B'C'$ seien die beiden Dreiecke, welche die Seiten (AB), (AC); $(A'B')$, $(A'C')$ gleich haben, (AC) sei die kleinere Seite und $\widehat{ACS}$ der der grösseren Seite (AB) gegenüberliegende Winkel. S sei ferner der Fusspunkt des von A auf die Grade BC gefällten Lothes. Die gegebene Seite (AB) ist grösser als (AC) und (AC) grösser als (AS); um so viel mehr ist $(AB) > > (AS)$; es muss also zwei gleiche schiefe Segmente (AB) und (AB_1) geben, deren in SC liegende Punkte grösseren Abstand von S haben, als der Punkt C (Satz VII, § 54 und Satz VII, § 13). Eines dieser Segmente genügt uns, nämlich dasjenige, dessen Punkt B in SC auf der entgegengesetzten Seite von S liegt, wie der Punkt C, wenn der Winkel $\widehat{ACS}$ spitz ist und das andre schiefe Segment, wenn er stumpf ist. In der That ist in dem einen, wie in dem andern Fall ACB_1 der Supplementwinkel zu dem gegebenen Winkel. Hat man mithin den Zusammenhang zwischen den Punkten A, A'; S, S'; C, C' festgestellt, so entspricht dem Punkt B der Punkt B' und die beiden Dreiecke sind gleich.

Def. Statt zu sagen, zwei Dreiecke seien gleich, wenn sie gegebene Elemente (Seiten und Winkel) gleich haben, wollen wir auch sagen, es gäbe nur ein Dreieck, welches die gegebenen Elemente besitzt derart, dass dieses Dreieck alle ihm gleichen Dreiecke vorstellt.

Satz IV. Sind zwei Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel gegeben, so gibt es entweder zwei ungleiche Dreiecke, welche diese Elemente besitzen, derart, dass in denselben die der grösseren gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkel Supplementwinkel sind, oder nur ein Dreieck, wenn das von dem gemeinschaftlichen Eckpunkt der gegebenen Seiten auf die dritte Seite gefällte Loth entweder kleiner oder ebensogross als die kleinere der gegebenen Seiten ist.

SC sei wie vorhin die Grade der dritten Seite, (AC) die grössere der beiden gegebenen Seiten, $\widehat{ACS}$ der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel und S der Fusspunkt des von A auf die Grade SC gefällten Lothes. Wenn die dem Winkel $\widehat{ACS}$ gegenüberliegende Seite grösser als (AS) ist, so gibt es zwei schiefe Segmente (AB) (AB'), welche dieser Seite gleich sind (Satz VII,

§ 54 und Satz VII, § 13). Der Endpunkt B' desjenigen Segments, welches auf derselben Seite von (AS) liegt, wie (AC), muss in dem Segment (SC) enthalten sein, weil nach der Voraussetzung $(AB') < (AC)$ (Satz VII, § 54). Die beiden Dreiecke ABC, $AB'C$ erfüllen die Bedingungen des Satzes und weil $\widehat{ABS} \equiv \widehat{AB'S}$, so sind $\widehat{ABC}$ und $\widehat{AB'C}$ Supplementwinkel.

Ist die dem Winkel $\widehat{ACS}$ gegenüberliegende Seite (AS) gleich, so gibt es nur ein Dreieck; ist sie dagegen kleiner als (AS), so gibt es überhaupt kein Dreieck (Def.).

Zus. Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben, sind gleich, wenn die der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel entweder beide spitz oder beide stumpf sind.

Denn in dem Dreieck ABC ist der Winkel $\widehat{ABC}$ spitz, während in dem zweiten $\widehat{AB'C}$ stumpf ist.

Satz V. Wenn ein Dreieck zwei Winkel gleich hat, so ist es gleichschenklig.

ABC sei das Dreieck, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$ und (AM) sei eine Mittellinie des Dreiecks (Def. III, § 42). Die beiden Dreiecke ABM, ACM haben die Seite AM gemeinschaftlich, die beiden Seiten BM, CM und die der gemeinschaftlichen Seite AM gegenüberliegenden Winkel gleich. Die beiden Dreiecke sind sowohl, wenn (AM) grösser als (BM) oder (CM), wie wenn es kleiner als (BM) oder (CM) ist, gleich (Satz III und Zus. Satz IV). Mithin ist $(AB) \equiv$ $\equiv (AC)$ d. h. das Dreieck ABC gleichschenklig (Def. III, § 9) (Fig. 42, S. 317).

Oder auch nach *Euclid:* Wäre $(AC) < (AB)$, so möge (BD) in (BA) dem (AC) gleich sein. Die beiden Dreiecke CBD, BCA sind gleich, weil sie eine Seite (BC) gemeinschaftlich, die Seiten BD und AC und die Winkel bei B und C gleich haben (Satz II, § 42). Folglich wäre $\widehat{BCD}$ dem Winkel $\widehat{BCA}$, von welchem $\widehat{BCD}$ ein Theil ist, gleich, was widersinnig ist (Einl. b', § 61).

Satz VI. In jedem Dreieck liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

ABC sei das gegebene Dreieck und es sei

$$\widehat{CAB} > \widehat{ABC}, \tag{1}$$

wir behaupten, dass $(BC) > (AC)$.

Man ziehe (AD) so, dass es mit (AB) einen Winkel $\widehat{BAD}$ macht, der $\widehat{ABC}$ gleich und in dem Sector $\widehat{CAB}$ enthalten ist (Einl. Def. I, § 61). D sei der Durchschnittspunkt von AD und BC; D liegt dann innerhalb des Segments (BC) (Zus. IV, Satz II, § 50). Das Dreieck ABD ist gleichschenklig; mithin $(BD) \equiv (AD)$ (Satz V). In dem Dreieck ACD ist aber $(AC) < (AD) +$ $+ (DC)$ (Satz I); also

$$(AC) < (BD) + (DC)$$

oder

$$(AC) < (BC). \quad \text{(Einl. c, § 68 und Def. II, § 61)}$$

Zus. Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

Dieser Zusatz ist eine Folge des Satzes III, § 42 und auch des vorigen Satzes, wenn man beachtet, dass, wenn die Winkel ungleich wären, auch die Seiten ungleich sein müssten.

Satz VII. Es gilt auch die Umkehrung des Satzes VI.

Wenn $(BC) > (AC)$, so muss $\widehat{CAB} > \widehat{ABC}$ sein.

Wäre $\widehat{CAB} = \widehat{ABC}$, so müssten die gegenüberliegenden Seiten gleich sein; $\widehat{CAB}$ kann auch nicht kleiner als $\widehat{ABC}$ sein, weil sonst die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite (BC) kleiner als die dem zweiten gegenüberliegende (AC) wäre (Satz VI), was gegen die Voraussetzung ist.

Satz VIII. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten gleich haben, so ist die dritte Seite desjenigen Dreiecks grösser, in welchem sie dem grösseren Winkel gegenüberliegt, und der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in demjenigen Dreieck grösser, in welchem er der grösseren Seite gegenüberliegt.

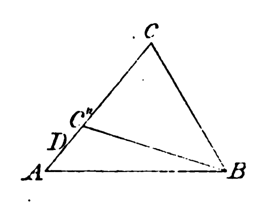
Haben die beiden Dreiecke keine Seite gemeinschaftlich, so können wir uns immer in der Ebene des einen ein dem andern gleiches Dreieck mit einer gemeinschaftlichen Seite denken. Sind ABC und $A'B'C'$ die beiden Dreiecke und

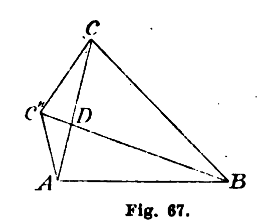
$$(AB) \equiv (A'B'),\ (BC) \equiv (B'C'),\ \widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'},$$

so ist, wenn man die beiden Winkel $\widehat{ABC}$ und $\widehat{A'B'C'}$ mit β und β' bezeichnet:

$$\beta > \beta'.$$

In der Ebene des Dreiecks ABC denken wir uns einen durch B begrenzten Strahl, welcher mit dem Segment (AB) von (AB) aus um den Punkt B in der Richtung des Winkels $\widehat{ABC}$ den Winkel β' bildet (Satz II, § 47). Der so bestimmte Strahl liegt offenbar in dem Winkelsector $\widehat{ABC}$, weil $\beta > \beta'$ ist.





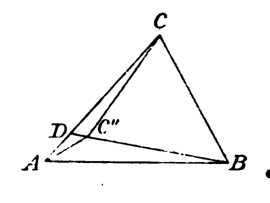


Fig. 67.

Der Durchschnittspunkt D dieses Strahls und der Seite (AC) muss innerhalb (AC) liegen (Zus. IV, Satz II, § 50). Wir wollen auf dem Strahl BD das Segment $(BC'') \equiv (BC) \equiv (B'C')$ betrachten; das Dreieck ABC'' liegt in der Ebene des Dreiecks ABC (Zus. II, Satz V, § 46) und ist dem Dreieck $A'B'C'$ gleich, weil beide zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 42); mithin ist $(AC'') \equiv (A'C')$.

Der Punkt C'' fällt entweder mit D zusammen, oder in die Verlängerung von (BD) oder in dieses Segment selbst.

Im ersten Fall ist der Satz rasch bewiesen; denn, da D innerhalb der Seite (AC) liegt, so ist:

$$(AD) \equiv (AC'') \equiv (A'C') < (AC). \qquad \text{(Einl. Def. I, § 61)}$$

Im zweiten Fall verbinden wir C'' mit A und C. Das Segment BC'' liegt in dem Winkelsector $\widehat{CC''A}$, weil der Punkt D innerhalb (AC) liegt und ebenso liegt das Segment (AC) in dem Sector $\widehat{BCC''}$, weil D ein Punkt des Segments $(C''B)$ ist. Mithin ist in dem Dreieck $CC''A$ der Winkel $\widehat{CC''B}$ kleiner als $\widehat{CC''A}$.

Das Dreieck $C''BC$ ist gleichschenklig, weil $(BC'') \equiv (BC)$; mithin ist

$$\widehat{CC''B} \equiv \widehat{BCC''}. \qquad \text{(Satz IV, § 42)}$$

$\widehat{CC''B}$ ist aber ein Theil des Winkels $\widehat{CC''A}$, umsovielmehr ist

$$\widehat{ACC''} < \widehat{CC''A}.$$

Daraus folgt

$$(AC'') < (AC) \qquad \text{(Satz VI)}$$

und also

$$(A'C') < (AC).$$

Im dritten Fall liegen die Segmente (AC''), (CC'') innerhalb der Sectoren $\widehat{CAB}$, $\widehat{BCA}$, weil C'' innerhalb des Dreiecks ABC liegt (Zus. I, Satz I, Def. I, § 51); mithin ist

$$\widehat{BCC''} < \widehat{BCA}.$$

Aus dem gleichschenkligen Dreieck BCC'' erhält man aber:

$$\widehat{BCC''} \equiv \widehat{CC''B}.$$

Ist E ein Punkt in der Verlängerung von (BC) von B über C hin, so sind $\widehat{DC''C}$, $\widehat{C''CE}$ Supplementwinkel der Winkel $\widehat{CC''B}$, $\widehat{BCC''}$ und also

$$\widehat{DC''E} \equiv \widehat{C''CE}.$$

Es ist aber

$$\widehat{C''CE} > \widehat{C''CA};$$

folglich

$$\widehat{DC''C} > \widehat{C''CA}. \qquad \text{(Einl. d, § 61)}$$

Der Winkel $\widehat{DC''C}$ ist ein Theil des Winkels $\widehat{AC''C}$, mithin in dem Dreieck $AC''C$

$$\widehat{AC''C} > \widehat{C''CA};$$

daher $(AC) > (AC'')$ (Satz VI) oder:

$$(AC) > (A'C'). \qquad \text{(Einl. Def. II, § 61)}$$

Wenn umgekehrt $(AC) > (A'C')$ ist, so können die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel nicht gleich sein weil sonst $(AC) \equiv (A'C')$ wäre, und

es kann auch $\widehat{ABC}$ nicht kleiner als $\widehat{A'B'C'}$ sein, weil sonst $(AC) < (A'C')$ wäre, es muss also

$$\widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'} \text{ sein (Fig. 67).}$$

Satz IX. In einem der Theile, in welche die Ebene durch eine ihrer Graden getheilt wird, können keine zwei gleiche Dreiecke existiren, welche eine Seite auf der gegebenen Graden gemeinschaftlich haben.

ABC, ABC' seien zwei Dreiecke, deren Scheitel C und C' auf derselben Seite der Graden AB liegen. Die Winkel $\widehat{CAB}$, $\widehat{C'AB}$ sind nach der Voraussetzung gleich und haben auch von AB an dieselbe Richtung. Der Strahl AC' kann aber nicht in dem Sector $\widehat{CAB}$ liegen ebensowenig wie der Strahl AC in dem Sector $\widehat{C'AB}$, weil das Strahlenbüschel einfach geschlossen ist (Satz I, § 30 und Einl. b, § 36). $C'A$ muss also mit CA zusammenfallen. Ebenso muss $C'B$ sich mit CB decken und also auch der Punkt C' in den Punkt C fallen, weil sonst AC und BC zwei Punkte gemeinschaftlich hätten, die überdies auf derselben Seite von AB liegen (Satz II, § 30 und Uebereink. § 28).

Satz X. Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und die anliegenden Winkel gleich haben, sind gleich.

ABC, $A_1B_1C_1$ seien die beiden Dreiecke und $(AB) \equiv (A_1B_1)$, $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C_1A_1B_1}$, $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C_1B_1A_1}$. Die Hälften der Ebene bezüglich der beiden Graden AB, A_1B_1, in welchen die beiden Dreiecke liegen, sind gleich (Zus I, Satz II, § 50) und man kann daher einen Identitätszusammenhang derart festsetzen, dass dem A der Punkt A_1, dem B der Punkt B_1 entspricht. Einem beliebigen Strahl AX, der durch A geht, entspricht ein durch A_1 gehender Strahl A_1X_1 und diese Strahlen müssen mit den entsprechenden Strahlen AB, A_1B_1 gleiche Winkel bilden. Ebenso ist es mit den durch B und B_1 gehenden Strahlen. Die in den Mittelpunkten M und M_1 von (AB) und (A_1B_1) auf diese Segmente senkrecht gezogenen Strahlen entsprechen sich und der Zusammenhang der Strahlen um A und A_1 wie auch um B und B_1 wird z. B. mittelst der gleichen Segmente festgesetzt, die man auf den senkrechten Strahlen von M und M_1 aus annimmt.

Wir wollen annehmen, dem Strahl C_1A_1 entspräche nicht der Strahl CA, sondern ein Strahl $C'A$; dieser muss mit AB einen Winkel $\widehat{C'AB}$ bilden, der $\widehat{C_1A_1B_1}$ und also auch $\widehat{CAB}$ gleich ist. Dies ist nur möglich, wenn $C'A$ mit CA zusammenfällt. Ebenso muss der C_1B_1 entsprechende Strahl mit CB zusammenfallen.

Dem Durchschnittspunkt C von AC, BC entspricht der Durchschnittspunkt C_1 der entsprechenden Strahlen A_1C_1, B_1C_1. Denn wäre (AC) nicht gleich (A_1C_1), so gäbe es in (AC) einen von C verschiedenen Punkt C', so dass $(AC') \equiv (A_1C_1)$. Aber C' mit B verbunden würde den B_1C_1 entsprechenden

Strahl liefern, welcher mit BC zusammenfällt. Es müssten sich also BC und AC in zwei Punkten C und C' auf derselben Seite von AB schneiden, was widersinnig ist (Satz II, § 30 und Uebereink. § 28).

Satz XI. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist der Summe zweier Rechten gleich.

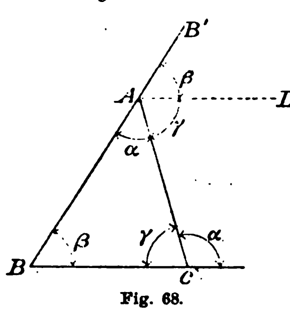


Fig. 68.

ABC sei das Dreieck. Man ziehe von A aus AD parallel BC. AD kann nicht im Sector $\widehat{BAC}$ liegen, sonst würde es (BC) in einem inneren Punkt treffen (Zus. IV, Satz II, § 50). Verlängert man BA nach B', so ist: $\widehat{B'AD} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ACB}$ (Satz I, § 52) und $\widehat{B'AD} + \widehat{DAC} + \widehat{BAC} \equiv \pi$ (Uebereink. § 52), daher $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} \equiv \pi$ (Fig. 68).

Zus. Ein Aussenwinkel eines Dreiecks ist grösser als jeder der gegenüberliegenden Innenwinkel. [LV])

[LV]) Satz I wird ebenso bewiesen. *Legendre* gibt ihn als Axiom; andre beweisen ihn mittelst des Zus. zu Satz XI im Text wie *Euclid* oder mittelst der Eigenschaft, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte ist; z. B. *De Paolis.*

Es ist leicht zu zeigen, dass die Summe der Abstände eines Punktes innerhalb eines Dreiecks von den beiden Eckpunkten einer Seite kleiner als die Summe der beiden andern Seiten ist.

Mittelst dieses Satzes lässt sich ein andrer Beweis zu Satz VII § 54 geben, von welchem der Beweis des Satzes I dieses Paragraphen nicht abhängt. Ist R und r gegeben, so wähle man auf der Senkrechten RM einen Punkt R', so dass $(RM) \equiv (MR')$. Sind nun zwei Punkte A und A_1 auf derselben Seite von M in r gegeben, so ist

$$(RA_1) \equiv (R'A_1);\ (RA) \equiv (R'A) \quad \text{(Zus. II, Satz V, § 54).}$$

Nimmt man an $(MA) < (MA_1)$, so liegt A im Innern des Dreiecks $R'A_1R$ (Satz I und Def. I, § 51); mithin ist

$$2(R'A) < 2(R'A_1) \text{ oder } (R'A) < (R'A_1).$$

Auf diese Weise benutzt man den Satz VII, § 13 nicht.

Satz II wird wie im Text bewiesen, gilt aber bis jetzt nur für rechtwinklige Dreiecke derselben Ebene, weil man noch nicht weiss, ob rechte Winkel, die in verschiedenen Ebenen liegen, gleich sind (siehe Bem. III, Anm. XLVI).

Will man Satz VII, § 13 (siehe Anm. X) hier nicht benutzen, so muss man den Beweis der Sätze III und IV erst nach den Betrachtungen über die Durchschnittspunkte einer Graden mit einem Kreisumfang bringen. Zu dem Satz V muss man in diesem Fall den zweiten Beweis geben, die Sätze VII und VIII wie die übrigen IX, X und XI werden wieder wie im Text bewiesen. Der letzte Satz ist, wie man sehen wird, für das *Euclid*'sche System charakteristisch (siehe Kap. II und III und §§ 27, 28).

Legendre beweist Satz VI, indem er dazu Satz I als Axiom benutzt. Andre z. B. *Euclid, Baltzer, Sannia* und *D'Ovidio, Faifofer, De Paolis* beweisen zuerst den umgekehrten Satz, indem sie den Zus. zu Satz XI zu Hülfe nehmen, der bei *Euclid* unabhängig von Satz XI bewiesen wird (Prop. XVI, Buch I), welcher, wie gesagt, für das *Euclid*'sche System Geltung hat. Unsre Beweise der Sätze I—X sind von dieser Eigenschaft unabhängig und gelten mithin auch für die übrigen Systeme.

Es ist ferner nicht zu glauben, dass der Beweis *Euclid*'s durchaus unabhängig von dem Postulat über die Parallelen sei; der Beweis der Prop. XVI, Buch I müsste genauer sein; um so mehr in Büchern, in welchen dieser Satz dem Postulat über die Parallelen vorangeht. In der zu dieser Proposition gehörenden Figur [in welcher ABC das Dreieck ist, D in der Verlängerung von (AC) liegt, E der Mittelpunkt von (BC) ist und F ein Punkt in der Verlängerung von (AE) derart, dass $(AE) \equiv (EF)$] genügt es nicht, dass der Punkt F innerhalb des Winkelsectors BAD liege, um daraus den Schluss zu ziehen,

14.

Figuren, welche bezüglich einer Graden symmetrisch sind.[LVI])

§ 56. *Def. I.* Zwei Punkte B, B', welche in einer auf einer Graden α in der Ebene Senkrechten liegen, heissen *bezüglich der Graden α symmetrisch,* wenn sie denselben Abstand von der Graden α, *der Symmetrieaxe,* haben (Def. I, § 54). Ist S der Durchschnittspunkt des Lothes BB' mit α, so sind B und B' bez. des Punktes S symmetrisch (Def. II, § 53). Zwei Figuren sind bez. α symmetrisch, wenn ihre Punkte bez. α symmetrisch sind.

Zus. Die Theile, in welche die Ebene durch eine ihrer Graden zerlegt wird, sind bezüglich der Graden und die Punkte dieser Graden sind zu einander symmetrisch.

Satz I. Die einem gradlinigen Segment bezüglich einer Graden symmetrische Figur ist ein andres ihm gleiches Segment. Die Graden der beiden Segmente schneiden sich in einem Punkt der Symmetrieaxe und bilden gleiche Winkel mit ihr.

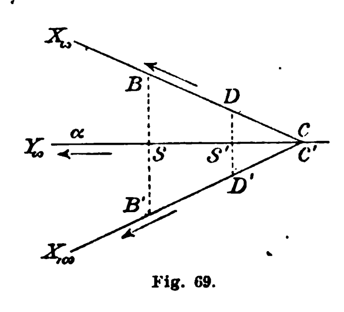


Fig. 69.

Ein Segment (CB) sei gegeben und man betrachte das Segment $(C'B')$ welches die beiden zu C und B bezüglich der Graden α symmetrischen Punkte C' und B' verbindet. Wenn der Punkt C in α liegt, so fällt C' mit ihm zusammen (Def. I). S sei der Durchschnittspunkt von (BB') und α. Die beiden Dreiecke SBC, $SB'C'$ sind gleich, weil die Seite (SC) gemeinschaftlich, $(BS) \equiv (B'S)$ ist und die Winkel bei S Rechte sind (Satz IV und I, § 47 und Satz II, § 42).

Ist auf dem Segment (BC) ein Punkt D gegeben und man zieht von D die Normale zu α, welche $(B'C')$ in D' schneidet, so ist D' der zu D symmetrische Punkt. Denn, wenn S' den Durchschnittspunkt der Graden DD' und α bezeichnet, so sind die beiden Dreiecke $DS'C$, $D'S'C'$ gleich, weil $(S'C)$ gemeinschaftlich, die Winkel bei S' Rechte und diejenigen bei C gleich sind, da $\widehat{SCB} \equiv \widehat{SCB'}$; mithin ist $(DS') \equiv (D'S')$ (Satz X, § 55).

Aus den beiden Dreiecken $DS'C$, $D'S'C'$ erhält man

$$(DC) \equiv (D'C')$$

und also $(BD) \equiv (B'D')$ (Einl. g^{III}, g^{IV}, § 73). Das zu (BD) symmetrische Segment $(B'D')$ ist daher (BD) gleich und die Graden BD und $B'D'$ schneiden

dass der Strahl CF innerhalb des Winkelsectors BCD liege. Im Fall der zweiten *Riemann*'schen Form, in welchem sich zwei Grade der Ebene auch in einem einzigen Punkt schneiden (§ 30), ist es sehr wohl möglich, dass der Strahl CF ausserhalb dieses Winkels fällt und mithin der Winkel $\widehat{BCF}$ grösser als $\widehat{BCD}$ ist. Man muss desshalb angeben, warum dies bei Anwendung der vorangeschickten Axiome nicht der Fall ist.

Es ist ferner zu beachten, dass sich bis jetzt der Satz VIII nur auf Dreiecke derselben Ebene bezieht, während er im Text auch solche verschiedener Ebenen einschliesst.

[LVI]) Dieser Abschnitt wird ebenso behandelt.

sich in einem Punkt C der Symmetrieaxe und bilden gleiche Winkel mit ihr (Fig. 69).

Satz II. Zwei bezüglich einer Graden symmetrische Figuren sind gleich.

Denn hat man den Zusammenhang zwischen ihren symmetrischen Punkten festgesetzt, so entspricht einem beliebigen Punktepaar einer jeden von ihnen ein Punktepaar der andern von demselben Abstand (Satz III, Zus. II, Satz II, § 15).

15.

Kreisumfang und Kreis. — Kreisbogen. — Zusammenhang zwischen den Bogen, den Winkeln und Segmenten der im Unendlichgrossen liegenden Graden.[LVII]

§ 57. *Def. I.* Die Punkte der Strahlen eines Büschels, welche einen gegebenen Abstand von dem Centrum haben, bestimmen ein System einer Dimension, dessen Richtungen durch diejenigen des Erzeugungsbüschels gegeben sind und welches *Kreisumfang oder Peripherie* heisst. Der Punkt R ist *der Mittelpunkt oder das Centrum* und das gegebene Segment oder der gegebene Abstand *der Radius* oder *Halbmesser.*

Zus. I. Der Kreisumfang ist ein einfach geschlossenes System einer Dimension.

In jedem Strahl des Büschels liegt ein Punkt der Peripherie und nach der Definition ist jeder Punkt der Peripherie in einem Strahl des Büschels gelegen, während dieses bezüglich des Strahls als Element ein einfach geschlossenes System einer Dimension ist (Satz I, § 30; Einl. Def. I, § 62 und Def. II, § 63).

Zus. II. Die im Unendlichgrossen der Ebene liegende Grenzgrade ist eine Peripherie mit unendlich grossem Radius (Uebereink. § 49).

Def. II. Das durch zwei entgegengesetzte Radien der Peripherie bestimmte Segment heisst *Durchmesser.* Die beiden in einem Durchmesser gelegenen Punkte der Peripherie seine *Enden.*

Def. III. Die Durchmesser bestimmen einen Theil der Ebene, welcher *Kreis* heisst. Der Kreis mit Ausnahme der Peripherie wird *der innere Theil des Kreises* genannt. Die Verlängerungen der Halbmesser mit Ausnahme der Enden bestimmen *den äusseren Theil des Kreises.*

Bem. I. Wenn keine Verwechselungen möglich sind, verstehen wir unter Durchmesser auch eine durch das Centrum gehende Grade. Unter Kreis versteht man häufig auch die Peripherie.

Def. IV. Von jeder Figur der Ebene, deren Punkte dem Kreis angehören (Def. I, § 2), sagt man, auch wenn einige Punkte von ihr auf der Peripherie liegen, sie liege *innerhalb*, sonst, sie liege *ausserhalb* des Kreises.

[LVII] Will man aus didaktischen Gründen die Betrachtungen des § 13 nicht früher geben, so muss man sie doch vor § 59 bringen, wobei sie derart beschränkt werden, dass Satz VII, § 13 für die Grade und den Kreisumfang benutzt werden kann. Man braucht mithin die Definition der einfachen Linie nicht zu geben; es genügt, wie wir sehen werden, hervorzuheben, dass die Eigenschaften, auf welchen der Beweis dieses Satzes beruht, für den Kreisumfang gelten (siehe Anm. LVIII).

Def. V. Ein Winkelsector (Winkel) des Büschels, dessen Centrum mit dem Centrum des Kreises zusammenfällt, heisst *Centriwinkel.*

Def. VI. Ein Segment der Peripherie heisst *Kreisbogen* oder *Bogen.*

Zwei Punkte der Peripherie bestimmen zwei Bogen, welche zusammen die Peripherie ausmachen (Satz I und Einl. c, § 64).

Als *Bogen* zweier Punkte des Umfangs wird immer der kleinere angesehen, wenn man nicht auch den grösseren in Betracht ziehen muss und wenn die Punkte nicht die Enden eines Durchmessers sind. Will man in diesem Fall einen der Bogen bestimmen, so muss man noch einen Punkt desselben hinzufügen.

Def. VII. Wenn man bei einem Kreisbogen nur in Betracht zieht, dass er durch einen andern gleichen Bogen bei jeder Beziehung zu andern Kreisbogen ersetzt werden kann, so heisst derselbe *die Länge* des gegebenen Bogens.[1])

Oder auch: Dasjenige, was man aus einem Kreisbogen erhält, wenn man von der gegenseitigen Lage seiner Theile, welche ebenfalls Bogen sind, abstrahirt, heisst *die Länge* des gegebenen Bogens.

Satz. I. Gleiche Centriwinkel oder solche, von welchen der eine grösser als der andre ist, bestimmen auf der Peripherie gleiche Bogen oder solche, von denen der eine grösser als der andre ist, und umgekehrt.

Denn es seien $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$ die beiden gleichen Centriwinkel; B, C und B', C' die Peripheriepunkte. Die beiden Dreiecke BAC, $B'AC'$ sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 42); mithin kann man in den beiden Bogen (BC) und $(B'C')$, die durch die beiden Winkel bestimmt werden, mittelst der gleichen Winkel, in welche sich die Winkel $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$ zerlegen lassen, einen derartigen Zusammenhang feststellen, dass den Punkten B und C die Punkte B' und C' entsprechen und einem Punkt X des ersten Bogens ein Punkt X' des zweiten, welcher denselben Abstand von B' und C' hat, wie der Punkt von X von B und C, d. h. also einen Identitätszusammenhang zwischen den zwei Bogen. Mithin sind die beiden Bogen (BC) und $(B'C')$ gleich (Satz III und Zus. II, Satz II, § 15).

Sind dagegen die beiden gleichen Bogen (BC), $(B'C')$ gegeben, so sind die Segmente (BC), $(B'C')$ gleich (Satz II, § 15) und mithin auch die beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ (Satz III, § 17) und die Winkel $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'AC'}$ (Zus. Satz I, § 42, Def. I und II, § 38).

Einem Theil eines Centriwinkels entspricht ein Theil eines Bogens und umgekehrt (Def. I, V und VI). Damit ist der Satz bewiesen.

Zus. I. Die Peripherien mit gleichem Radius sind gleich.

Denn der Satz I gilt auch, wenn die beiden Winkel BAC, $B'AC'$ Centriwinkel von zwei Peripherien mit gleichem Radius sind.

---

1) Die Länge des Kreisbogens ist die intensive Grösse desselben (Einl. Def. II, a und c, § 111).

Satz II. Die Peripherie ist ein in der Position seiner Theile identisches und stetiges System einer Dimension.

Die Identität in der Position seiner Theile folgt unmittelbar aus Satz III, § 47 und Satz I.

Was die Stetigkeit anlangt, so beachte man, dass es in einem beliebigen gegebenen Bogen (BC) immer einen Punkt des Umfangs gibt, wie dies bei dem Erzeugungsbüschel der Fall ist (Def. I) und jeder Bogen (XX'), welcher unbegrenzt klein wird (Bem. I, § 13) einen zwischen X und X' liegenden Punkt des Umfangs bestimmt, weil dies auch von dem Erzeugungsstrahlenbüschel gilt (Def. I; Satz III, § 47 und Def. I, § 96 oder Def. I, § 101).

Def. VIII. Das von den Enden eines Kreisbogens bestimmte Segment heisst *Sehne* (Satz II, § 30 und Def. I, § 6).

Der von diesen Enden bestimmte Bogen heisst der Bogen der Sehne.

Zus. Ein Durchmesser halbirt die Peripherie (Zus. II, Satz I, § 47).

Satz III. Gleichen oder grösseren Bogen des Umfangs oder gleicher Umfänge entsprechen gleiche oder grössere Sehnen oder umgekehrt.

Denn (AB) und $(A'B')$ seien die beiden Sehnen gleicher Umfänge von den Centren R und R', α und α' die entsprechenden Bogen und $\alpha \geqq \alpha'$.

Es ist auch $\widehat{ARB} \geqq \widehat{A'R'B'}$ und da die Dreiecke ARB, $A'R'B'$ die Seiten (RA), (RB); $(R'A')$, $(R'B')$ gleich haben, so ist $(AB) \geqq (A'B')$ (Satz VIII, § 55). Ist dagegen $(AB) \geqq (A'B')$, so erhält man $\alpha \geqq \alpha'$.[LVIII]

§ 58. *Satz I. Die Peripherie ist eine einfache Linie.*

Denn jedem Punkt der im Unendlichgrossen liegenden Graden (Uebereink. § 49) entspricht ein Punkt des Umfangs auf dem durch den Punkt im Unendlichgrossen bestimmten Strahl und umgekehrt und wenn eine Reihe von Punkten der im Unendlichgrossen liegenden Graden einen Grenzpunkt X_∞ hat, so hat die Reihe der entsprechenden Strahlen des Büschels, dessen Centrum mit dem Mittelpunkt der Peripherie zusammenfällt, einen Grenzstrahl RX_∞ und auf demselben einen Punkt X des Umfangs. Weil aber der Bogen und die Sehne mit dem Winkel unbegrenzt abnehmen (Einl. Def. I, § 95; Satz II u. III, § 57), so ist X ein Grenzpunkt der entsprechenden Reihe der Punkte der Peripherie (Def. II, § 10).

Und weil jeder Strahl des Büschels Grenzstrahl einer Reihe von Strahlen in der einen und andern Richtung von dem gegebenen Strahl an ist, so gilt dies auch aus dem obigen Grund für den auf dem gegebenen Strahl liegenden Punkt der Peripherie bezüglich der Reihe von Punkten der Peripherie, welche auf den Strahlen der entsprechenden Reihe des Büschels liegen. Die Peripherie ist mithin eine einfache Linie (Def. I, § 13).

[LVIII] Die Definitionen und Sätze dieses Paragraphen werden ebenso und mit denselben Beweisen gegeben. Man stützt sich dabei auf die Eigenschaften, die in den Anm. XLIV und XLVI bewiesen wurden.

Bem. I. Wie die Winkel um einen Punkt R der Ebene als Mass der Bogen einer beliebigen Peripherie, deren Centrum R ist (Satz I, § 57), benutzt werden, so dienen die Bogen dazu die Winkel um den Punkt R zu messen unabhängig von der Grösse des Radius der Peripherie vom Centrum R (Satz I, § 57).

Wir können mithin den Segmenten der Graden im Unendlichgrossen, die wir als Mass der Winkel gebrauchten (Bem. III, § 39 und Uebereink. § 49), die Bogen einer beliebigen Peripherie mit dem Centrum in dem Scheitel der Winkel substituiren.

Def. I. Der Kreisbogen, welcher einer Winkeleinheit entspricht (Def. II, § 40), heisst *Bogeneinheit.*

Bem. II. Die Bogeneinheit entspricht der unendlich grossen Einheit der Graden, wie diese letztere der Winkeleinheit (Def. II, § 40) derart, dass zwei gleichen Segmenten im Unendlichgrossen zwei gleiche Bogen der Peripherie entsprechen und umgekehrt. Die Grade im Unendlichgrossen ist aber endlich bezüglich der unendlich grossen Einheit, wie das Büschel bezüglich der entsprechenden Einheit (Uebereink. § 28); mithin ist auch die Peripherie endlich bezüglich der entsprechenden Bogeneinheit.

Def. II. Unter *Grundbogeneinheit* oder nur *Bogeneinheit*, da wir andre nicht in Betracht zu ziehen brauchen, verstehen wir diejenige, bezüglich welcher der Umfang endlich ist (Bem. II).

Satz II. Die Enden eines bezüglich der Bogeneinheit unendlich kleinen Bogens haben einen unendlich kleinen Abstand.

Denn einem bezüglich der Bogeneinheit unendlich kleinen Kreisbogen entspricht ein bezüglich der Winkeleinheit unendlichkleiner Winkel (Bem. I und Satz I, § 57) und mithin ein gradliniges Segment im Unendlichgrossen, welches bezüglich der Einheit der unendlichgrossen Abstände unendlich klein ist (Satz III, § 39). Weil aber der entsprechende Centriwinkel bezüglich der Winkeleinheit unendlich klein ist, so müssen die Enden des Bogensegments einen bezüglich der Einheit der Abstände des endlichen Gebiets unendlich kleinen Abstand haben (Zus. I, Satz VIII, § 39). [LIX]

§ 59. *Satz I. Eine Grade schneidet die Peripherie in zwei, einem oder keinem Punkt, je nachdem ihr Abstand vom Centrum kleiner, ebensogross oder grösser als der Radius ist.*

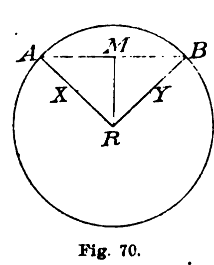


Fig. 70.

Vorerst bemerke man, dass die Grade keine drei oder mehr Punkte A, B, C mit der Peripherie gemeinschaftlich haben kann, weil die Dreiecke ABR, ACR, BCR als gleichschenklige (Def. III, § 9) drei verschiedene von dem Centrum R nach der gegebenen Graden gehende Lothe bestimmen würden, da nach der Voraussetzung die Mittelpunkte der Segmente (AB), (BC) und (AC) verschieden sind (Satz III, § 42); dieses ist widersinnig (Zus. I, Satz V, § 47).

Wenn die Normale (RM) zur gegebenen Graden kleiner als der Radius ist, so wähle man ein schiefes Segment (RA'), das grösser als der Radius ist.

[LIX] Nach Anm. LVIII lässt sich Satz I auf dieselbe Art beweisen; Bem. I beschränkt man auf ihren ersten Theil, gibt die Def. I und lässt Bem. II, Def. II und Satz II weg. Will man in einem Elementarbuch die Definition der einfachen Linie nicht geben, weil sie nicht nöthig ist, so müsste der Satz I die Eigenschaften dieser Linie bezüglich der Peripherie wiedergeben, mit deren Hilfe man dann für die Grade wie für die Peripherie den Satz VII, § 13 beweisen kann.

Es gibt dann zwischen (RA') und (RM) ein Segment, welches dem Radius gleich ist (Satz VII, § 54 und Zus. I, Def. I und Satz VII, § 13) und ein zweites ihm gleiches schiefes Segment auf der andern Seite von RM (Fig. 70).

Ist dagegen (RM) dem Radius gleich, so gibt es kein dem Radius gleiches schiefes Segment (Satz II, § 54).

Wenn schliesslich (RM) grösser als der Radius ist, so gibt es um so viel weniger ein dem Radius gleiches schiefes Segment. Mithin u. s. w.

Zus. I. Eine Grade, die einen Punkt innerhalb des Kreises hat, trifft die Peripherie in zwei Punkten.

P sei der innere Punkt, R der Mittelpunkt des Kreises; RP ist kleiner als der Radius (Def. III, § 57). Ist (RP) senkrecht zur gegebenen Graden, so schneidet die Grade den Umfang in zwei Punkten; ist (RP) ein schiefes Segment, so ist die Normale kleiner als (RP) (Satz II, § 54); es gilt daher dieselbe Eigenschaft.

Def. I. Wenn die Grade den Umfang in zwei Punkten schneidet, heisst sie *Secante*.

Hat die Grade nur einen Punkt mit dem Umfang gemeinschaftlich, so heisst sie *Tangente* oder *Berührungslinie* und der gemeinsame Punkt *Berührungspunkt*.

Zus. II. In jedem Punkt der Peripherie ist die zum Radius normale Grade die Tangente in diesem Punkt an die Peripherie.

Dies geht offenbar aus dem Beweis des Satzes I hervor.

Zus. III. Jede Grade, die durch einen Punkt des Umfangs geht und keine Tangente an denselben ist, schneidet den Umfang in einem zweiten Punkt.

r sei eine beliebige Grade, die durch einen Punkt A des Umfangs geht und weder die Tangente in A ist, noch mit dem durch A gehenden Durchmesser zusammenfällt, welcher den Umfang ja in dem zu A entgegengesetzten Punkt schneidet.

(RM) sei das zur Graden r normale Segment, welches nicht mit RA zusammenfallen kann, sonst würden die Tangente in A und die Grade r, weil sie eine gemeinsame Normale haben der Voraussetzung zuwider zusammenfallen (Satz II, § 26 und Zus. II, Satz V, § 47).

In dem bei M rechtwinkligen Dreieck AMR ist aber $(RM) < (RA)$ (Zus. Satz II, § 54) und mithin schneidet die Grade r den Umfang in einem zweiten Punkt, der denselben Abstand von M hat, wie A (Satz I).

Zus. IV. Alle von einem Punkt der Ebene gleichweit abstehende Graden sind Tangenten an einem Kreisumfang, dessen Berührungspunkte die Fusspunkte der von dem gegebenen Punkt auf die Graden gefällten Lothe und dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt ist.

Satz II. Eine Tangente an einem Kreis liegt in dem äusseren Theil des Kreises.

Denn s sei die Tangente, A ihr Berührungspunkt mit dem Umfang, das Centrum R und der Radius r. X sei der Durchschnittspunkt eines Strahls

RB mit der Graden s (Zus. II, Satz III, § 46) und B ein Punkt des Umfangs. Es ist immer $(RB) < (RX)$ (Satz II, § 54 und Def. III, § 57).

Satz III. Das von dem Mittelpunkt auf die Sehne gefällte Loth halbirt die Sehne.

Denn, wenn A und B die Enden der Sehne sind, R das Centrum, so ist das Dreieck ARB gleichschenklig und das von R auf die Grade gefällte Loth — mehrere gibt es nicht (Zus. I, Satz V, § 47) — geht durch den Mittelpunkt der Sehne (Satz IV, § 42).

Zus. Ein Durchmesser zerlegt den Umfang und den Kreis in zwei bezüglich des Durchmessers symmetrische Theile.

Denn jede auf den Durchmesser senkrechte Sehne wird von dem Durchmesser halbirt (Def. I, § 56).

Satz IV. Das in dem Mittelpunkt der Sehne auf dieser Sehne errichtete Loth geht durch das Centrum.

(AB) sei die Sehne. Wenn das Centrum C nicht auf dem in dem Mittelpunkt M von (AB) auf AB errichteten Loth MX liegt, so muss es auf einer der beiden Seiten von MX z. B. auf derselben Seite wie A liegen (Def. II, § 50). Bezeichnet man mit Y den Durchschnittspunkt des Segments (BC) und der Graden MX (Zus. II, Satz III, § 46), so sind die Dreiecke ACB, AYB gleichschenklig und daher

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{BAY} \equiv \widehat{BAC};$$

d. h. es muss AC mit AY zusammenfallen (Satz I, § 30) und also auch C mit Y (Satz II, § 30).

Oder auch: Weil $(BY) \equiv (AY)$ und $(AC) \equiv (BC)$, so wäre in dem Dreieck AYC die Summe der Seiten $(AY) + (YC) \equiv (AC)$, was unmöglich ist (Satz IV, § 17 oder Satz I, § 55).

Satz V. Drei nicht in grader Linie liegende Punkte bestimmen in der Ebene der Punkte einen Kreisumfang und ein Kreisumfang ist durch drei beliebige seiner Punkte bestimmt.

Sind A, B, C die drei gegebenen Punkte, so schneiden sich die Lothe in den Mittelpunkten von (AB) und (BC) stets in einem Punkt M und können nicht parallel sein, weil sonst auch die Sehnen (AB) und (BC) parallel sein müssten (Satz II, § 48), was nicht der Fall ist. Die beiden Dreiecke AMB, BMC sind gleichschenklig; mithin steht M von den drei Punkten gleich weit ab, d. h. ist das Centrum eines Kreises, der durch die drei Punkte geht.

Das in dem Mittelpunkt der Sehne (AC) errichtete Loth geht aber auch durch das Centrum M (Satz IV). Denkt man sich andrerseits einen zweiten durch die drei gegebenen Punkte gehenden Kreis, so müssen sich die in den Mittelpunkten der drei Sehnen (AB), (BC), (AC) errichteten Lothe auch in dem Centrum des neuen Kreises schneiden, welches mithin mit M zusammenfällt (Satz II, § 30 und Uebereink. § 28).

Wählt man andre drei Punkte $A'B'C'$ des Umfangs, so gehen offenbar

die Lothe in den Mittelpunkten der Sehnen $(A'B')$, $(A'C')$ durch M (Satz IV). Damit ist der Satz bewiesen.

Def. II. Ein Dreieck, dessen Eckpunkte in dem Umfang liegen, heisst *in den Kreis beschrieben, um den Kreis beschrieben* dagegen, wenn seine Seiten Tangenten an den Umfang sind.

Satz VI. Eine Sehne liegt innerhalb des Kreises.

Denn ist (AB) die Sehne, R das Centrum, so ist das Dreieck ABR gleichschenklig. Weil nun, wenn M der Mittelpunkt von (AB) ist, (MR) das von R auf die Sehne normale Segment, (RA) und (RB) dagegen schiefe Segmente sind, so ist jedes andre in dem Winkel $\widehat{ARB}$ enthaltene schiefe Segment kleiner als (RA) und (RB) (Satz VII, § 54) und liegt mithin innerhalb des Kreises (Def. III und IV, § 57) (Fig. 70, S. 372).

Satz VII. Ein Segment, dessen Enden in dem Kreis oder auf der Peripherie sind, liegt innerhalb des Kreises.

X und Y seien die beiden Punkte; man verbinde sie mit dem Centrum R. Die beiden Radien (RA), (RB), die X und Y bestimmen und auf welchen X und Y liegen, befinden sich im Innern des Kreises (Def. III, § 57). Das Dreieck ARB ist innerhalb des Kreises, weil der innere Theil des Dreiecks durch einen seiner durch die gegenüberliegende Seite z. B. (AB) begrenzten Kreissectoren z. B. $\widehat{ARB}$ gegeben ist (Satz I und Def. I, § 51) und dieser Sector innerhalb des Kreises liegt (Def. IV, § 57). Das Segment (XY) ist aber im Innern des Dreiecks (Zus. III, Satz I, § 51); folglich ist es auch im Innern des Kreises (Einl. a, § 13) (Fig. 70, S. 372).

Satz VIII. Alle Segmente, welche einen inneren Punkt O des Kreises mit den Punkten des Umfangs verbinden, enthalten alle Punkte des inneren Theils des Kreises.

Denn die Segmente liegen im Innern des Kreises (Satz VII) und verbindet man den Punkt O mit einem andern inneren Punkt, so erhält man eine Sehne, welche zwei dieser Segmente enthält (Zus. Satz I).

Zus. Ein Dreieck, dessen Eckpunkte auf dem Umfang oder im Innern des Kreises liegen, ist innerhalb des Kreises.

$A'B'C'$ sei das Dreieck; der innere Theil desselben ist durch die Strahlen des von der Seite $(A'C')$ begrenzten Winkelsectors $\widehat{A'B'C'}$ gegeben und diese Strahlen liegen sämmtlich im Innern des Kreises (Satz VII u. Def. IV, § 57).

Satz IX. Ein rechtwinkliges Dreieck ist in einen Kreis beschrieben, wenn der Kreis die Hypotenuse zum Durchmesser hat.

ABC sei das bei A rechtwinklige Dreieck. Von dem Mittelpunkt M einer Kathete z. B. (AB) ziehen wir eine Grade parallel zur andern Kathete, welche die Hypotenuse in ihrem Mittelpunkt schneidet (Zus. I, Satz IV, § 44). Mithin schneiden sich die auf den Mittelpunkten der Katheten errichteten Lothe in dem Mittelpunkt der Hypotenuse, womit der Satz bewiesen ist.

Satz X. Die Halbirungslinie des Winkels, welchen zwei Radien eines Kreises miteinander machen, geht durch den Durchschnittspunkt der in den Enden der Radien an den Kreis gezogenen Tangenten.

(CR), $(C'R)$ seien die beiden Radien, A, A' die Durchschnittspunkte der Mittellinie des Winkelsectors $\widehat{CRC'}$ mit der Peripherie. Die beiden durch die Punkte A, A' bestimmten Halbperipherien sind bezüglich des Durchmessers AA' symmetrisch (Zus. Satz III). Die Tangente in C ist symmetrisch zu der Tangente in C'. Aber zwei bezüglich einer Graden symmetrische Graden schneiden sich in dieser Graden (Satz I, § 56); daher u. s. w.

Satz XI. Die Abstände eines Punktes von den Punkten der Peripherie haben den Abstand des Punktes von dem ihm zunächst gelegenen Ende des durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmessers zum Minimum und zum Maximum den Abstand von dem andern Ende.

Es giebt zwei Punkte der Peripherie, für welche der Abstand von dem gegebenen Punkt einen zwischen dem Maximum und Minimum liegenden gegebenen Werth hat.

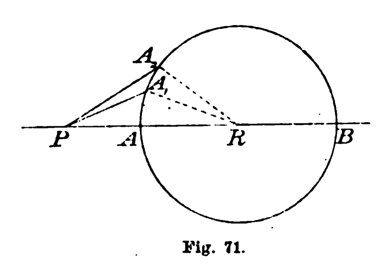


Fig. 71.

(AB) sei der durch den gegebenen Punkt P gehende Halbmesser, A das ihm zunächst gelegene, B das entferntere Ende desselben. Die Peripherie ist bezüglich der Graden AB symmetrisch (Zus. Satz III), es genügt mithin die Abstände des Punktes P von den Punkten einer der beiden Halbperipherien zu betrachten. Es kann keinen zweiten Punkt A_1 derart geben, dass $(PA) = (PA_1)$ ist, weil das Dreieck PAA_1 gleichschenklig wäre, das durch den Mittelpunkt M der Sehne AA_1 gezogene Loth alsdann durch P und R gehen müsste und die beiden Graden PM und PR mithin zwei Punkte gemeinschaftlich hätten, was widersinnig ist (Satz IV; Satz II, § 30 und Uebereink. § 28).

Aus demselben Grund kann es keine zwei Punkte A_1, A_2 (auch wenn A_2 mit B zusammenfällt) derart geben, dass $(PA_1) = (PA_2)$ ist.

Ist also auf der Halbperipherie AA_1B ein beliebiger Punkt A_1, der auch mit A und B zusammenfallen kann, gegeben, so gibt es keinen andern Punkt X, für welchen $(PA_1) = (PX)$ wäre. Dass es, wenn γ ein zwischen (PA) und (PB) liegender Abstand ist, einen Punkt X (und nach unserm Beweis nur einen) geben muss, für welchen $(PX) = \gamma$ ist (Def. I, § 5), geht aus den Sätzen I, § 58 und VII, § 13 hervor.

Satz XII. Die Tangente in einem Punkt A des Umfangs ist die Grenzgrade der Secante AX, wenn X ein Punkt der Peripherie ist und zum Grenzpunkt auf ihr den Punkt A hat und ist ferner die Grenzgrade der Tangente im Punkt X.

Wenn der Bogen (AX) in einer gegebenen Richtung abnimmt, so vermindert sich auch die entsprechende Sehne (Satz III, § 57). Ist Y der Durch-

schnittspunkt des durch X gehenden Strahls RX mit der Tangente in A, so ist, weil (RA) normal zur Tangente ist (Zus. II, Satz I), $(RY) > (RA)$ und wenn der Bogen (AX) unbegrenzt klein wird, so wird es auch der Winkel ARY und mithin auch (AY); denn das Büschel kann durch R und die Tangente in A erzeugt werden (Zus. II, Satz II, § 46). Wenn mithin der Bogen und die Sehne unbegrenzt abnehmen, so wird auch die Differenz zwischen (RX) (RA) und (RY) (Ax. IV) d. h. (XY) unbegrenzt klein.

M sei ferner der Mittelpunkt der Sehne (AX), der Strahl RM halbirt dann den Winkel ARX (Satz IV, § 42); der Winkel ARM nimmt daher um so viel mehr unbegrenzt ab, wenn der Winkel ARX und also der Bogen (AX) unbegrenzt kleiner wird. $\widehat{ARM}$ ist aber, wie man leicht sieht, dem Winkel, welchen der Strahl AX mit dem auf derselben Seite von AR gelegenen Strahl der Tangente bildet, gleich (Satz VI, § 47). Mithin vermindert sich der Winkel, den Secante und Tangente miteinander machen, unbegrenzt, wenn dies auch für den Bogen (AX) gilt; damit ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Aehnlich weist man dieselbe Eigenschaft für die Tangente in X nach. Man beachte, dass der Durchschnittspunkt Z derselben mit der Tangente in A auf der Halbirungslinie des Winkels ARX liegt und Z mithin ein innerer Punkt des Segments (AY) ist (Zus. IV, Satz II, § 50) und dass andrerseits der Winkel YZX, welchen die beiden Tangenten miteinander bilden und der dem Winkel ARX gleich ist (Satz VI, § 47), mit $\widehat{ARX}$ unbegrenzt klein wird.

Bem. I. Die Eigenschaft in Satz XII sagt uns, dass die Peripherie eine intuitive Linie ist, weil sie die Eigenthümlichkeiten dieser Linien besitzt (Emp. Bem. § 36).

Bem. II. Wenn A' ein dem Punkt A in der Richtung von (AB) unendlich naher Punkt des Umfangs ist, d. h. wenn die Sehne (AA') unendlich klein ist, so ist diese Sehne bezüglich der endlichen Einheit Null (Einl. b', § 91) und fällt mithin bezüglich dieser Einheit mit der Tangente in A zusammen. Man kann also eine Tangente an den Umfang bezüglich der endlichen Einheit als eine Grade betrachten, welche zwei unendlich nahe Punkte der Peripherie verbindet. Wenn A und A' diese beiden Punkte in der in dem unendlichkleinen Bogen (AA') bestimmten Richtung sind, so heisst die Grade AA' Tangente in A, in der entgegengesetzten Richtung dagegen Tangente in A'.

In dieser Hinsicht kann die Peripherie mithin als ein Polygon von unendlich vielen bezüglich der endlichen Einheit unendlich kleinen Seiten angesehen werden derart, dass die consecutiven Seiten ebenfalls einen unendlich kleinen Winkel miteinander machen.[LX])

16.

Gemeinschaftliche Punkte zweier Kreislinien in der Ebene. — Auflösung von Problemen über die Grade und den Kreis.[LXI])

§ 60. *Satz I. Wenn zwei Peripherien einen Punkt gemeinschaftlich haben, so besitzen sie noch einen zweiten, welcher zu dem ersten bezüglich der Graden, welche die beiden Centren verbindet (der Centralaxe), symmetrisch ist.*

[LX]) Die Eigenschaften, die dieser Paragraph bringt, werden mit Ausnahme der Bem. II, die ausfällt, ebenso abgehandelt. Man bezieht sich dabei statt auf die Sätze, auf welche sich die Beweise gründen, auf diejenigen in den bez. Anmerkungen.

[LXI]) Zu diesem Abschnitt füge man die *Identität der Büschel und der Ebenen,* weil in diesen Anmerkungen (siehe Bem. III, Anm. XLVI) nur die Identität der Büschel einer Ebene aber nicht diejenige der Büschel verschiedener Ebenen bewiesen wurde.

Die beiden Peripherien sind bezüglich der Centralaxe RR' symmetrisch, wenn R und R' die beiden Centren sind (Zus. Satz III, § 59). Haben die Umfänge mithin einen Punkt A gemeinschaftlich, so haben sie auch den zu A bezüglich der Graden RR' symmetrischen Punkt gemeinschaftlich.

Wenn A in die Centralaxe fällt, so liegt auch A' in derselben und die beiden Peripherien haben alsdann die Tangente in A, welche auf der Centralaxe senkrecht steht (Zus. II, Satz I, § 59), gemeinschaftlich.

Def. I. Von zwei Peripherien, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, die zusammenfallen und auf der Centralaxe liegen, sagt man, sie *berührten sich* in dem Punkt A und A sei *ihr Berührungspunkt.*

Liegen in diesem Fall die beiden Peripherien auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente, so sagt man, sie berührten sich *von innen*, liegen sie auf entgegengesetzten Seiten, sie berührten sich *von aussen.*

Satz II. Wenn zwei Kreise sich von innen berühren, so enthält derjenige, welcher den grösseren Radius hat, denjenigen mit dem kleineren Radius.

Denn A und B seien die beiden Mittelpunkte, C der Berührungspunkt. Es sei ferner $(BC) < (AC)$. Da B auf dem Radius (AC) liegt, so ist das kleinste der Segmente, welche B und einen Punkt der Peripherie vom Centrum A zu Enden haben, gerade (BC), der Radius des zweiten Kreises. Weil nun alle Sehnen des ersten Kreises, die durch B gehen, diesen Kreis bestimmen (Satz VIII, § 59), so liegt der zweite Kreis vom Centrum B und Radius (BC) innerhalb des ersten Kreises (Def. IV, § 57).

Satz III. Ist d der Abstand der Mittelpunkte zweier Peripherien von den Radien r und r' $(r' \geq r)$, so ist

1) $d = r + r'$, wenn die Peripherien sich von aussen berühren,

2) $d = r' - r$, wenn sie sich von innen berühren,

3) $r + r' > d > r' - r$, wenn sie sich schneiden,

4) $r' - r > d$ oder $d > r' + r$, wenn sie keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Und umgekehrt, wenn der Abstand der Centren die Bedingungen 1, 2, 3 und 4 erfüllt, so berühren sich die Kreise von aussen, von innen, schneiden sich in zwei Punkten oder haben keinen Punkt gemeinschaftlich.

C und C' seien die Centren der beiden Peripherien, die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen. Die Centralaxe CC' schneide den Umfang C in den beiden Punkten A und B. Bezüglich der Lage des Punktes C' sind drei Fälle möglich. Er kann

1) in dem Umfang C z. B. in A,

2) ausserhalb des Segments (AB) z. B. auf derselben Seite von C wie A,

3) innerhalb des Segments (AB) auf derselben Seite von C wie A liegen.

In dem ersten Fall könnte C' auch in B, wie in den beiden andern Fällen auf derselben Seite von C wie B liegen; man sieht aber leicht, dass diese Fälle auf die ersten drei zurückführen.

Im ersten Fall ist $d = r$ und jedenfalls daher $d < r + r'$. Es gibt zwei durch C' gehende Sehnen in dem Kreis C, welche bezüglich der Centralaxe symmetrisch und dem Radius r' gleich sind, vorausgesetzt dass $r' \leq 2r$ ist

(Satz XI, § 59). Mithin haben die beiden Peripherien zwei Punkte gemeinschaftlich, die in B zusammenfallen, wenn $r' = 2r$ ist und sich alsdann *von innen* berühren. Wenn mithin $r' \leq 2r$, so erhält man $d \geq r' - r$, indem alsdann $d = r$ ist.

Im zweiten Fall wachsen die Segmente, welche C' mit den Punkten X einer der beiden bezüglich der Centralaxe symmetrischen Halbperipherien von C verbinden, von dem Segment $(C'A)$ an bis zu dem Segment $(C'B)$ derart, dass es für eine der beiden Halbperipherien nur ein einziges Segment $(C'X)$ gibt, welches dem Radius r' gleich ist, vorausgesetzt, dass:

$$(C'A) < r' < (C'B). \qquad \text{(Satz XI, § 59)} \quad (1)$$

Ist $(C'A) < r' < (C'B)$, so haben die beiden Peripherien zwei bezüglich der Centralaxe symmetrische und nicht zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich.

Ist dagegen $r' = (C'A)$ oder $r' = (C'B)$, so haben sie zwei mit A oder B zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich. In dem ersten Fall liegen die beiden Umfänge auf entgegengesetzten Seiten bezüglich der gemeinschaftlichen Tangente, berühren sich also von aussen, im zweiten Fall berühren sie sich von innen (Def. I).

Fällt drittens C' innerhalb des Segments (AC), so berühren sich die beiden Peripherien, wenn sie sich berühren, von innen, weil C' innerhalb des Kreises C liegt.

Im zweiten Fall ist

$$C'A = d - r, \; C'B = d + r,$$

während im dritten $(C'A)$ immer kleiner als r' ist, weil C' in dem Segment (CA) liegt und nach der Voraussetzung $r' \geq r$ ist.

Im zweiten Fall erhält man aus (1)

$$d - r \leq r' \leq d + r \quad \text{oder} \quad r + r' \geq d \geq r' - r$$

und im dritten

$$r' < d + r$$

und mithin

$$d > r' - r;$$

d ist in diesem Fall immer kleiner als $r + r'$, da d kleiner als r ist.

Schneiden sich die beiden Kreise nicht, so muss im ersten Fall $r' > 2r$ und da $d = r$ ist, $d < r' - r$ sein, im zweiten Fall $(C'A) > r'$ oder $(C'B) < r'$ d. h. $d > r' + r$ oder $d < r' - r$ sein und schliesslich im dritten Fall $(C'B) < r'$ oder $d < r' - r$ sein.

Was die Umkehrung des Satzes angeht, bemerken wir, dass eine jede der vier Relationen 1, 2, 3, 4 die andern drei ausschliesst, dass mithin, wenn eine derselben stattfindet, die beiden Kreise in der Lage sein müssen, welcher die gegebene Relation entspricht.

Bem. I. Dieser Beweis stützt sich auf Satz XI, § 59, auf die Eigenschaft, dass die Peripherie eine einfache Linie ist (Satz I, § 58) und auf die Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks. Er ist mithin unabhängig von dem Satz, dass eine Seite des Dreiecks kleiner als die Summe der beiden andern sein muss und Satz III kann daher einen zweiten Beweis für diese Grundeigenschaft der Geometrie liefern.

Satz IV. Von einem Punkt ausserhalb eines Kreises kann man zwei Tangenten an den Kreis ziehen.

C' sei der gegebene Punkt, C das Centrum und r der Radius des Kreises. Ist t eine durch C' gehende Tangente und T ihr Berührungspunkt, so steht t senkrecht auf dem Radius CT (Zus. II, Satz I, § 59). Und existirt eine Tangente t, so existirt auch eine zweite ihr bezüglich der Graden CC' symmetrische (Zus. Satz III, § 58). Das Dreieck $C'TC$ ist also bei T rechtwinklig und mithin in eine Peripherie beschrieben, deren Durchmesser CC' ist (Satz IX, § 59). Bezeichnet man mit M den Mittelpunkt von (CC'), so ist $(MC) = r'$. Da r' auch der Abstand d der beiden Mittelpunkte ist, so erhält man jedenfalls:

$$r + r' > r' > r' - r$$

und auch $r' > r' - r$, wenn M ausserhalb des Kreises liegt.

Die Peripherie mit dem Radius r' und dem Centrum M schneidet daher die gegebene Peripherie in den beiden Berührungspunkten der beiden Tangenten (Satz III).

Bem. II. Es geht dagegen ebenfalls aus Satz III hervor, dass die beiden Peripherien sich nicht schneiden, wenn C' im Innern des Kreises C liegt.[LXII])

[LXII]) Die Sätze dieses Paragraphen werden ebenso bewiesen. Alsdann folgt der Satz: *Büschel in verschiedenen Ebenen sind gleich.*

R und R' seien die Mittelpunkte zweier Büschel, r und r' zwei ihrer Strahlen. Man betrachte in r und r' zwei gleiche Segmente (RB), $(R'B')$. Auf der einen oder andern Seite von RB und $R'B'$ gibt es in den Ebenen der beiden Büschel die Dreiecke RAB, $R'A'B'$, deren Seiten (RA), $(R'A')$; (AB), $(A'B')$ gleich sind, weil die Kreise mit den Radien (RA) und (BA), $(R'A')$ und $(B'A')$ und den Centren R und B, R' und B' in den beiden betrachteten Halbebenen sich in den beiden Punkten A und A' schneiden. Die beiden Dreiecke ARB, $A'R'B'$ sind aber gleich, weil sie die drei Seiten gleich haben (Satz III, § 17 und Anm. XII); mithin $\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'}$; und weil die beiden Büschel bezüglich durch R und AB, R' und $A'B'$ bestimmt sind (Satz III, § 46 und Anm. XLV), so sind sie gleich (Satz III, Zus. II, Satz II, § 15 und Anm. XII).

Zus. Alle Ebenen sind identisch.

Denn zwei beliebige Büschel derselben sind identisch (Satz III, § 15 u. Anm. XII).

Die Elementarbücher, welche kein besonderes Postulat geben (und wir sprechen von den besseren von denen, die wir kennen), setzen ohne Weiteres voraus, dass eine geschlossene Linie, von welcher ein Punkt innerhalb und ein Punkt ausserhalb des Kreisumfangs oder einer andern geschlossenen Linie liegt, von welchen nirgends die Definition gegeben wird, nothwendiger Weise diese Linie schneiden muss. Offenbar ist dies eine neue Eigenschaft, welche nicht unmittelbar aus der Definition des inneren und äusseren Theils folgt. Denn P_1 und P_2 seien der innere und äussere Punkt. Wenn die erste Linie eine Grade und die geschlossene ein Kreisumfang ist, so muss man beweisen, dass entweder alle Graden, welche P_1 mit den Punkten des Kreisumfangs in der Ebene verbinden, *alle* Graden der Ebene sind, die durch den Punkt P_1 gehen und mithin auch die Grade P_1P_2 den Kreisumfang in einem Punkt schneidet, — oder dass es, wenn der Abstand des Centrums C von den Punkten R_1, P_2 also $(CP_1) < r$, $(CP_2) > r$ ist, stets wenigstens *einen* solchen Punkt X von P_1P_2 gibt, dass $(CX) = r$ ist (Satz I, § 58).

Man sagt, eine Linie *theile* eine Fläche, wenn ein beweglicher Punkt auf der Fläche nicht von der einen Seite der Linie auf die andre kommen kann, ohne vorher die Lage eines der Punkte der Linie anzunehmen. Wir sehen davon ab, dass diese Definition in abstractem Sinn unbestimmt ist, weil die Definition der Fläche und Linie nicht vorher gegeben wird. Jedenfalls, wenn ein Punktesystem in der Ebene zwei Theile der Ebene, einen inneren und einen äusseren bestimmt, so bedeutet dies nicht, dass auch *die* Eigenschaft gelten muss, dass ein beweglicher Punkt um von der einen auf die andre Seite zu kommen die Lage eines Punktes des Systems annehmen muss oder mit andern Worten, dass, wenn ein Punkt einer Linie innerhalb und einer ausserhalb des gegebenen Systems liegt, diese Linie wenigstens einen Punkt mit dem System gemeinschaftlich haben muss. Und wenn die beiden Theile der Ebene alle Punkte der Ebene enthalten, ist mithin ein Beweis nöthig.

Bem. III. Bei den praktischen Anwendungen der Geometrie kann man natürlich die Abstände im Unendlichgrossen nicht als Mass der Winkel oder Kreisbogen wählen, wohl aber kann man die Bogen im Allgemeinen als Mass der Winkel und mithin auch der Entfernungen im Unendlichgrossen nehmen, falls man annimmt, das Unendlichgrosse existire unseren Hypothesen gemäss wirklich in der äusseren Welt (Emp. Bem. I). Man wendet dieses Mass an, indem man sich dem praktischen Axiom II gemäss zur Construction des Kreisumfangs eines sehr einfachen Instruments, *des Zirkels* bedient. Was man aber in der Praxis nicht kann, nämlich die eine Messmethode mit der andern vertauschen, ist abstract möglich und desshalb erlaubt, ja von Nutzen, wie wir gesehen haben und in den folgenden Büchern noch besser sehen werden.

Weil es in der Praxis ferner darauf ankommt, die Probleme der Geometrie mit den Instrumenten zu lösen, die zu unserer Verfügung stehen und von denen die einfachsten Lineal und Zirkel sind, so muss man zu diesem Zweck auch lernen, sie mit den Elementen des endlichen Gebiets zu lösen. Damit ist aber nicht gesagt, dass dies auch für die Beweise der Eigenschaften nöthig ist, auf welche sich die Auflösung dieser Probleme gründet.

Die eben bewiesenen Sätze dienen grade zur graphischen Auflösung vieler Probleme, z. B., ein gegebenes Segment zu halbiren; ein Loth auf einer Graden in einem ihrer Punkte zu errichten oder von einem Punkt ausserhalb auf die Grade zu fällen; mithin eine Parallele zu einer gegebenen Graden zu ziehen; in der Ebene, wenn ein Strahl gegeben ist, einen zweiten Strahl zu ziehen, welcher mit dem ersten einen gegebenen Winkel bildet; ein Dreieck zu beschreiben, wenn die Seiten gegeben sind; die Halbirungslinie eines Winkels zu ziehen u. s. w.[LXIII])

17.

Richtungen oder Sinn der Winkel, Dreiecke und Büschel der Ebene. — Richtungen der Ebene.[1])

§ 61. *Bem. I.* Die Richtungen des Büschels (Rr) und seiner Winkelsectoren oder Winkel (Def. I, II, § 38) werden durch die Richtungen der Directrix bestimmt und umgekehrt (Def. I, § 30). Andrerseits kann jedes Büschel durch sein Centrum und die im Unendlichgrossen liegende Grade der Ebene erzeugt werden (Uebereink. § 49).

Satz I. Zwei Scheitelwinkel (ab), $(a'b')$ haben dieselbe Richtung, zwei Nebenwinkel dagegen entgegengesetzte Richtung.

Die beiden Winkel bestimmen auf der Graden im Unendlichgrossen zwei entgegengesetzte Segmente $(A_\infty B_\infty)$, $(A'_\infty B'_\infty)$, welche dieselbe Richtung haben, während die beiden Segmente $(A_\infty B_\infty)$, $(A'_\infty B_\infty)$ entgegengesetzte Richtung haben (Uebereink. § 49, Satz III, § 29).

Satz II. Wenn zwei Winkel (ab), (ab') einen Schenkel a gemeinschaftlich haben und die beiden andern Schenkel auf derselben oder den entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels liegen, so haben die beiden Winkel dieselbe oder entgegengesetzte Richtung.

1) Im Deutschen wird statt Richtung häufig auch „Sinn" gebraucht oder „Umlaufsrichtung, Drehungsrichtung"; hier ist der Einfachheit wegen in allen Fällen blos Richtung gesetzt worden.

LXIII) Zu diesem Zweck wird in den Elementarbüchern der Geometrie der Kreisumfang und die Durchschnittspunkte zweier Kreisumfänge ziemlich früh behandelt. *Euclid* z. B. benutzt den Kreis von seiner ersten Proposition an (siehe Vorrede); der praktische Gebrauch des Kreisumfangs muss aber von den mit geometrischer Strenge durchgeführten Beweisen seiner Eigenschaften begleitet sein. Auch wenn man dem Weg folgt, den diese Anmerkungen einschlagen, wird die Behandlung des Kreises nicht sehr verzögert und man kann nachher, wie in der Bem. III erläutert wurde, die Probleme bringen, welche sich auf die schon bewiesenen Eigenschaften beziehen. So macht es auch *Legendre*, der diesen Problemen die zwei ersten Bücher seiner Elemente vorausgehen lässt.

Denn sie gehören demselben Büschel an, weil sie den einen gemeinsamen Scheitel haben und sie bestimmen im ersten Fall dieselbe, im zweiten entgegengesetzte Richtungen des Büschels (Einl. f''', § 63).

Bem. II. Ist ein Dreieck ABC gegeben, so ist sein Umfang ein einfach geschlossenes Punktesystem einer Dimension und hat die beiden Richtungen ABC und ACB (Einl. Def. I, § 62 und Def. II, § 63). Wie man weiss, bestimmen BCA, CAB dieselbe, CBA, BAC dagegen die entgegengesetzte Richtung wie ABC (Einl. d, d', § 64).

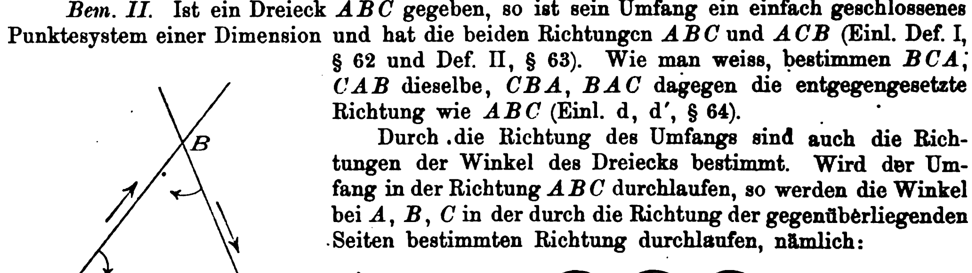


Fig. 72.

Durch die Richtung des Umfangs sind auch die Richtungen der Winkel des Dreiecks bestimmt. Wird der Umfang in der Richtung ABC durchlaufen, so werden die Winkel bei A, B, C in der durch die Richtung der gegenüberliegenden Seiten bestimmten Richtung durchlaufen, nämlich:

(1) $\widehat{BAC},\ \widehat{CBA},\ \widehat{ACB}.$ (Fig. 72)

Def. I. Da die Winkel bei A, B, C in der Richtung (1) durchlaufen dieselbe Richtung bestimmen, wie der Umfang, so können wir sagen, *sie hätten dieselbe Richtung*, weil man die Richtungen der Winkel einander bei der Bestimmung der Richtung des Umfangs substituiren kann und die Richtungen derselben bezüglich dieser Bestimmung gleich sind (Einl. Def. VI, § 8; Def. I u. IV, § 9).[1]

Bestimmen dagegen zwei Winkel des Dreiecks entgegengesetzte Richtungen wie der Umfang, so sagen wir, sie hätten *die entgegengesetzte Richtung.*

Satz III. In jedem Dreieck ABC sind die Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ gleich gerichtet, während $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ untereinander dieselbe und bezüglich der ersten drei entgegengesetzte Richtung haben.

Denn die Winkel $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ bestimmen *die* Richtung des Umfangs des Dreiecks ABC, welche derjenigen entgegengesetzt ist, die durch die ersten drei Winkel bestimmt wird (Bem. II und Def. I).

Def. II. Die beiden Richtungen, in welchen die Winkel oder der Umfang des Dreiecks durchlaufen werden, heissen *die Richtungen des Dreiecks.*

Satz IV. Die durch die Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ bestimmte Richtung ABC des Dreiecks ist der Richtung ABC des Umfangs entgegengesetzt.

Denn die genannten Winkel bestimmen die Richtung ACB des Umfangs (Bem. II, Def. I u. II).

Satz V. Die Symbole ABC, BCA, CAB bestimmen dieselbe Richtung sowohl für die Winkel wie für den Umfang des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C, während *ACB, CBA, BAC die entgegengesetzte Richtung bestimmen.*

Denn die Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ haben dieselbe, während die Winkel $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$ die entgegengesetzte Richtung haben.

1) Dies steht daher durchaus nicht im Widerspruch mit der Anmerkung zu § 9 der Einleitung.

Satz VI. Die Richtungen zweier Büschel der Ebene sind gleich oder entgegengesetzt.

Denn von den Winkeln $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ des Dreiecks ABC bestimmt jeder eine der Richtungen der Büschel mit den Centren A und C und diese Richtungen sind gleich, weil die Richtungen der Winkel, welche sie auf dieselbe Art bestimmen, gleich sind (Einl. f''', § 63 und a'', § 60). Die entgegengesetzten Richtungen der beiden Büschel sind ebenfalls gleich, weil die Richtungen der Winkel $\widehat{CAB}$, $\widehat{BCA}$ gleich sind. A und C sind aber zwei beliebige Punkte der Ebene, mithin u. s. w.

Zus. In Büscheln von derselben oder der entgegengesetzten Richtung haben die Winkel dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung.

Und umgekehrt:

Winkel von gleicher oder entgegengesetzter Richtung bestimmen dieselbe oder entgegengesetzte Richtungen in den Büscheln, denen sie angehören.

Denn die Richtung eines Büschels bestimmt eindeutig die Richtung eines jeden seiner Winkelsectoren (Einl. f'', § 63).

Die Umkehrung des Satzes folgt daraus, dass eine Richtung eines Winkelsectors eindeutig die Richtung des Büschels, dem er angehört, bestimmt (Def. I, § 38 und Einl. f''', § 63).

Satz VII. Die Richtungen zweier Büschel, welche dieselbe Richtung wie ein drittes Büschel haben (oder die entgegengesetzte), sind gleich.

Dies geht aus Satz e, § 8 der Einl. hervor.

Oder auch: Es seien α, β, γ die drei Büschel und ihre Richtungen seien mit a und a', b und b', c und c' bezeichnet. Wenn $a = c$, $b = c$ ist, so folgt $a = b$.

Denn A, B, C seien die Centren der drei Büschel; die Richtungen der drei Büschel bestimmen die Richtungen der Winkel des Dreiecks ABC (Zus. Satz VI). Wenn aber die Winkel bei A und B gleiche Richtung mit dem Winkel bei C haben und wenn der letztere z. B. $\widehat{ACB}$ ist, so sind die Richtungen der Winkel bei A und B $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, welche gleich sind (Satz III).

Daraus folgt auch: Wenn $a' = c'$, $b' = c'$, so ist $a' = b'$.

Die Richtungen der beiden ersten Büschel, welche die entgegengesetzte Richtung c' des Büschels vom Centrum C haben, sind a' und b' und nur a' und b' und diese sind gleich. Damit ist der Satz bewiesen.

Zus. Die Richtungen zweier Büschel, von welchen die eine der Richtung eines dritten Büschels gleich, die andre entgegengesetzt ist, sind entgegengesetzt.

Nach den gegebenen Bezeichnungen sind a und b' (oder a' und b) die beiden Richtungen, von denen die eine der Richtung c des dritten Büschels gleich, die andre entgegengesetzt ist, und a und b' haben entgegengesetzte Richtung.

Satz VIII. Wenn zwei Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ zweier Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, so sind die beiden Dreiecke gleich oder entgegengesetzt gerichtet.

Denn die Richtung des Winkels $\widehat{ABC}$ und die Richtung des Winkels $\widehat{A'B'C'}$ bestimmen auf dieselbe Art die Richtungen ABC, $A'B'C'$ (Def. I) und weil die Richtungen der beiden Winkel gleich sind, so sind es auch die Richtungen der beiden Dreiecke (Einl. Def. I, § 9).

Def. III. Wenn man zwei Büschel von den Centren R und R' und derselben oder der entgegengesetzten Richtung betrachtet, so sagt man auch, *die Ebene habe um die beiden Punkte R und R' dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung* oder auch *die Richtung der Ebene um den Punkt R sei der Richtung der Ebene um den Punkt R' gleich oder entgegengesetzt.*

Die Richtungen der Ebene um ihre Punkte, seien sie gleich oder entgegengesetzt, können wir *Richtungen der Ebene* nennen.

Satz IX. Die Richtungen der Ebene werden durch diejenigen eines ihrer Winkel bestimmt.

Denn die Richtungen der Ebene werden durch diejenigen ihrer Büschel bestimmt (Def. III) und weil diese durch die Richtungen eines einzigen Büschels (Satz VI u. VII) und die eines einzigen Büschels durch die Richtungen eines seiner Winkel bestimmt werden (Zus. Satz VI), so ist damit der Satz bewiesen.

Zus. Eine Richtung der Ebene bestimmt gleiche Richtungen der Winkel der Ebene.

Denn wenn die gegebene Richtung entgegengesetzte Richtungen in zweien der Winkel der Ebene bestimmen würde, so müssten diesen Richtungen entgegengesetzte Richtungen der Ebene und nicht dieselbe entsprechen (Def. III).

Satz X. Zwei Dreiecke ABC, $A'BC$, welche eine Seite BC gemeinschaftlich haben, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem die Eckpunkte A und A' auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Seite (BC) liegen.

Denn wenn A und A' bezüglich BC auf derselben Seite liegen, so haben die Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'BC}$ dieselbe Richtung und mithin auch die beiden Dreiecke. Das Gegentheil findet statt, wenn A und A' bezüglich der Seite (BC) auf entgegengesetzten Seiten liegen (Satz II u. VIII).

Zus. I. Wenn die Schenkel zweier Winkel $\widehat{BAC}$, $\widehat{BA'C}$ sich in zwei Punkten B und C derselben Graden schneiden, so haben sie dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung, je nachdem ihre Scheitel auf derselben oder entgegengesetzten Seiten bezüglich der Graden BC gelegen sind.

Zus. II. Eine Richtung der Graden bestimmt dieselbe Richtung in den Büscheln, deren Centren auf derselben Seite der Graden liegen, und entgegengesetzte Richtungen in denjenigen, deren Centren auf entgegengesetzten Seiten gelegen sind (Zus. I und Zus. Satz VI).

Zus. III. Zwei Winkel (ab), ($a'b'$), deren Schenkel parallel von derselben oder der entgegengesetzten Richtung sind, haben dieselbe Richtung.

Wenn dagegen zwei der Schenkel parallel von derselben und die beiden andern von entgegengesetzter Richtung sind, so haben die zwei Winkel entgegengesetzte Richtung.

Denn in dem ersten Fall haben sie entweder dasselbe Segment im Unendlichgrossen gemeinschaftlich oder sie haben auf der Graden im Unendlichgrossen (Uebereink. § 49) entgegengesetzte Segmente, welche gleich gerichtet sind (Satz III, § 29). Im zweiten Fall sind die beiden im Unendlichgrossen liegenden Segmente der beiden Winkel entgegengesetzt gerichtet, weil sie Nebensegmente sind (Def. III, § 29).

Zus. IV. Zwei Dreiecke ABC, $AB'C'$, welche einen Eckpunkt A gemeinschaftlich haben und deren Seiten (BC), $(B'C')$ auf derselben Graden liegen, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem (BC) und $(B'C')$ dieselbe Richtung haben oder nicht.

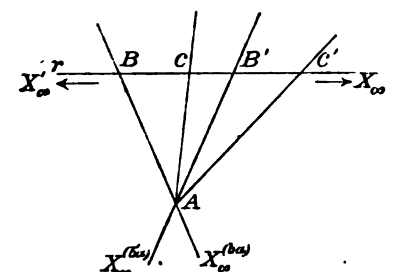


Fig. 73.

Eine Richtung der Graden BC bestimmt die Richtung des Büschels $A \cdot BC$ (Zus. II und Satz VIII) (Fig. 73).

Zus. V. Wenn zwei Schenkel zweier Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel eine Grade in zwei Segmenten (BC) und $(B'C')$ von derselben oder entgegengesetzter Richtung schneiden, so haben sie dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung.

Satz XI. Wenn die Seiten (BC), $(B'C')$ zweier Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auf der nämlichen Graden r liegen und dieselbe oder entgegengesetzte Richtung haben, so sind die beiden Winkel $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ (und mithin auch die beiden Dreiecke) in dem ersten Fall gleich, in dem zweiten Fall entgegengesetzt gerichtet, wenn ihre Scheitel A und A' auf derselben Seite der Graden r liegen.

Und umgekehrt, wenn A und A' auf entgegengesetzten Seiten von r liegen.

In dem ersten Fall haben die Winkel $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{B'A'C'}$ dieselbe Richtung (Zus. I, Satz X). Dies gilt aber auch für $\widehat{BAC}$ und $\widehat{B'AC'}$ (Zus. IV, Satz X) und mithin auch für $\widehat{BAC}$ und $\widehat{B'A'C'}$ (Satz VII und Zus. Satz VI) und die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ (Satz VIII).

Ebenso sieht man, dass sie entgegengesetzte Richtung haben, wenn (BC) und $(B'C')$ entgegengesetzt gerichtet sind.

Liegen dagegen A und A' auf entgegengesetzten Seiten bezüglich der Graden r (Def. II, § 50), so sind die Winkel $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{B'A'C'}$ entgegengesetzt gerichtet (Zus. I, Satz X) und mithin auch die Winkel $\widehat{BAC}$ und $\widehat{B'A'C'}$ (Zus. IV, Satz X u. Satz VII und Zus. Satz VI) und die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ (Satz VIII).[LXIV]

[LXIV]) Man kann dieselbe Methode beibehalten, auch wenn man von der Graden im Unendlichgrossen keinen Gebrauch macht. Dass zwei Scheitelwinkel (ab), $(a'b')$ dieselbe Richtung haben, folgt daraus, dass b in einem der Theile der Ebene bezüglich der Graden aa' enthalten ist und mithin (ab), (ba'), $(a'b)$, $(b'a)$ dieselbe Richtung haben.

Um den Zus. III, Satz X zu beweisen, braucht man ihn nur als Zus. zu Satz XI zu geben. Die Schenkel der beiden Winkel von den Scheiteln R und R' schneiden eine Grade,

18.

Congruente und symmetrische Figuren in der Ebene.[LXV])

§ 62. *Satz I. Der Identitätszusammenhang zweier gleichen Figuren in der Ebene wird durch zwei entsprechende Winkel bestimmt.*

$ABCD \ldots M$, $A'B'C'D' \ldots M'$ seien zwei identische Figuren; sie entsprechen sich derart, dass die Segmente der entsprechenden Punktepaare z. B. (AB), $(A'B')$ gleich sind (Satz II, § 15).

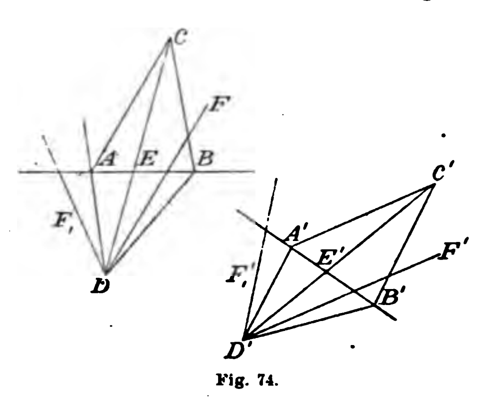


Fig. 74.

(ab), $(a'b')$ seien die beiden entsprechenden Winkel mit den Scheiteln C und C', die mithin gleich sind. Wählt man auf den Schenkeln a und b der Ebene zwei Punkte A und B und auf den Schenkeln des zweiten Winkels die Punkte A' und B', die von C' denselben Abstand haben, wie A und B von C, so sind die beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gleich (Satz III, § 16). D sei ein Punkt der ersten Figur; er werde mit dem Punkt C verbunden und die Grade CD schneide AB in einem Punkt E. Wir wollen annehmen, E liege z. B. innerhalb (AB). In dem entsprechenden Segment $(A'B')$ gibt es nur einen Punkt E' innerhalb $(A'B')$ derart, dass $(AE) \equiv (A'E')$. Betrachtet man auf der Graden $C'E'$ einen Punkt D', welcher von C' und E' dieselben Abstände hat, wie D von C und E (Satz I, § 8) — es gibt nur einen solchen Punkt D' (Ax. II, a, Einl. Def. I, § 61) — so entspricht der Punkt D' dem Punkt D. Construirt man ein andres Paar sich entsprechender Punkte M und M', so sind die beiden Dreiecke DCM, $D'C'M'$ gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bei C gleich haben; mithin ist:

$$(DM) \equiv (D'M')$$

und die so construirten gradlinigen Figuren sind identisch (Satz III, § 15). Und weil die Construction der entsprechenden Punkte eindeutig und reciprok ist, so fällt die so construirte Figur $A'B' \ldots M' \ldots$ mit der zweiten gegebenen Figur zusammen (Fig. 74).

---

die parallel zu der Graden durch die beiden Scheitel gezogen ist. Sind (AB), $(A_1 B_1)$ die Segmente, welche durch die Durchschnittspunkte der parallelen Schenkel von derselben Richtung bestimmt werden, so ist $(AB) \# (RR') \# (A_1 B_1)$; es sind also (AB) und $(A_1 B_1)$ gleichgerichtet (Anm. XLIX) und mithin auch (AA_1), (BB_1) (Satz II, § 35).

Haben a_1 und b_1 die entgegengesetzte Richtung wie a und b, so genügt es den Scheitelwinkel zu betrachten, welcher dieselbe Richtung hat, und denselben Beweis anzuwenden (Satz VII und Zus. Satz VI). Ist a_1 von derselben Richtung wie a, b_1 von entgegengesetzter wie b, so braucht man nur den Nebenwinkel $(a_1 b_1')$ in Betracht zu ziehen, welcher dieselbe Richtung wie (ab) und die entgegengesetzte wie $(a_1 b_1)$ hat. (ab) und $(a_1 b_1)$ sind daher entgegengesetzt gerichtet (Satz VII).

LXV) Dieser Abschnitt bleibt unverändert mit Ausnahme des Satzes II, welcher wegfällt.

Zus. I. Der Identitätszusammenhang zweier gleicher Figuren in der Ebene wird durch zwei sich entsprechende Dreiecke der Figuren bestimmt.

ABC, $A'B'C'$ seien die beiden Dreiecke; alsdann entsprechen sich die Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ und sind gleich; folglich ist der Identitätszusammenhang der beiden Figuren vollständig bestimmt (Fig. 74).

Zus. II. Zwei identische Figuren können keine drei Paare sich entsprechender Punkte, welche nicht in grader Linie liegen, gemeinschaftlich haben.

Denn fielen drei Paare sich entsprechender Punkte zusammen z. B. A mit A', B mit B', C mit C', so würden nach der vorstehenden Construction auch alle andern sich entsprechenden Punkte der beiden Figuren zusammenfallen.

Satz II. In dem Zusammenhang zwischen den Punkten der Ebene, welcher durch zwei seiner gleichen Figuren bestimmt wird, entspricht die Grade im Unendlichgrossen sich selbst.

Denn einem unendlichgrossen Abstand der ersten Figur entspricht ein unendlich grosser Abstand der zweiten Figur (Satz I, § 34 und Uebereink. § 49).

Satz III. Die gradlinigen Figuren, welche von zwei Gruppen von je vier Punkten $ABCD$, $A'B'C'D'$ in der Ebene bestimmt werden, sind gleich, wenn die gradlinigen Segmente, welche die vier gegebenen Punkte zu Enden haben, der Ordnung nach gleich sind.

Von diesem Satz, welcher ein besonderer Fall des Satzes VII, § 17 ist, geben wir hier einen zweiten Beweis.[1]

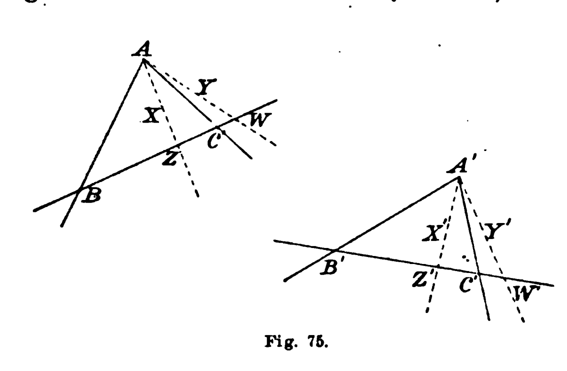


Fig. 75.

Es seien zwei Punkte X und Y der ersten Figur gegeben; die Graden AX und AY schneiden die Grade BC in den beiden Punkten Z und W. Construirt man die entsprechenden Punkte Z' und W' in der Graden $B'C'$, so enthalten die Strahlen $A'Z'$ und $A'W'$ die entsprechenden Punkte X' und Y', deren Abstände von A' und Z', A' und W' bezüglich dieselben sind, wie die der Punkte X und Y von A und Z, A und W. Die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ sind gleich, weil sie nach der Voraussetzung die drei Seiten gleich haben (Satz III, § 17); mithin ist

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'},\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'},\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}.$$

Die Dreiecke ABZ, $A'B'Z'$ sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 42); mithin ist $(AZ) \equiv (A'Z')$. Aus demselben Grund ist $(AW) \equiv (A'W')$. Und da $(ZW) \equiv (Z'W')$, so sind die Dreiecke ZAW, $Z'A'W'$ gleich, weil sie die drei Seiten gleich haben

1) Siehe die zweite Anm. zu § 17.

(Satz III, § 17); mithin ist $\widehat{ZAW} \equiv \widehat{Z'A'W'}$. Die beiden Dreiecke XAY, $X'A'Y'$ sind daher gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; also ist $(XY) \equiv (X'Y')$. Es ist leicht zu zeigen, dass der so construirte Punkt X' gerade mit demjenigen der zweiten Figur, welcher dem Punkt X der ersten Figur entspricht, zusammenfällt und umgekehrt. Folglich u. s. w. (Satz III, § 15).

Satz IV. Die ebenen gradlinigen Figuren, welche von zwei Gruppen von je m Punkten bestimmt werden, sind gleich, wenn die gradlinigen Segmente, welche $m - 3$ von diesen Punkten mit den übrigen drei und diese drei Punkte miteinander verbinden, der Ordnung nach gleich sind.

Die beiden von den drei übrigen Punkten gebildeten Dreiecke seien ABC, $A'B'C'$, welche gleich sind, weil sie drei Seiten gleich haben (Satz II, § 17). Einem beliebigen Punkt X entspricht in dem durch diese beiden Dreiecke bestimmten Identitätszusammenhang (Zus. I, Satz I) ein Punkt X'. Dagegen sei X'_1 der dem Punkt X in der gegebenen zweiten Figur entsprechende Punkt, der nach der Voraussetzung dieselben Abstände von den Punkten $A'B'C'$ hat wie X von ABC. Die beiden Figuren $A'B'C'X'_1$, $A'B'C'X'$ sind identisch (Satz III), sie müssen daher zusammenfallen, weil sich drei Paare entsprechender Punkte decken (Zus. II, Satz I) d. h. X' fällt mit X'_1 zusammen. Wiederholt man dasselbe Verfahren für die übrigen $m - 4$ Punkte, so ist damit der Satz bewiesen.

Bem. I. Wie bei den gleichen Segmenten auf der Graden (Einl. Bem. I, § 112) ist auch hier zu bemerken, dass die Identität zweier Figuren in derselben oder in verschiedenen Ebenen unabhängig von den Richtungen der Ebene oder der Ebenen ist, in welchen sie gelegen sind. Damit ist jedoch keineswegs gesagt, dass bei dem Identitätszusammenhang zweier Figuren die Ordnung, in welcher sich ihre entsprechenden Punkte folgen, nicht in Betracht gezogen werde.

Satz V. Die entsprechenden Winkel zweier identischen Figuren in derselben Ebene haben dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung, wenn zwei beliebige der Winkel dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung haben.

$\widehat{ACB}$, $\widehat{A'C'B'}$ seien die beiden entsprechenden Winkel und sie mögen gleich gerichtet sein. Es seien ferner zwei andre sich entsprechende Winkel $\widehat{F_1DF}$, $\widehat{F'_1D'F'}$ gegeben; zu beweisen ist, dass auch diese Winkel dieselbe Richtung haben. Man verbinde C mit D, C' mit D'. Der Winkel ACD hat dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie der Winkel ACB. Ebenso verhält es sich mit dem Winkel $\widehat{A'C'D'}$ und dem Winkel $\widehat{A'C'B'}$, weil die beiden Figuren gleich sind und mithin auch ihre sich entsprechenden Winkel gleich sein müssen, d. h. wenn der Strahl CD innerhalb oder ausserhalb des Winkels $\widehat{ACB}$ liegt, so befindet sich auch der entsprechende $C'D'$ innerhalb oder ausserhalb des Winkels $\widehat{A'C'B'}$. Es sind also $\widehat{ACD}$, $\widehat{A'C'D'}$ jedenfalls gleich gerichtet, weil $\widehat{ACB}$, $\widehat{A'C'B'}$ dieselbe Richtung haben (Zus. Satz VI [illegible] 61).

Man verbinde D mit A, D' mit A'. Die Dreiecke ACD, $A'C'D'$ sind gleich gerichtet, weil es $\widehat{ACD}$, $\widehat{A'C'D'}$ sind (Satz VIII, § 61) und mithin haben auch die Winkel $\widehat{ADC}$, $\widehat{A'D'C'}$ dieselbe Richtung (Satz III, § 61).

Die Winkel $\widehat{FDA}$, $\widehat{F'D'A'}$ haben beide dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie $\widehat{CDA}$, $\widehat{C'D'A'}$; da aber die beiden letzten gleich gerichtet sind, so sind es auch $\widehat{FDA}$, $\widehat{F'D'A'}$. Schliesslich haben die Winkel $\widehat{FDF_1}$, $\widehat{F'D'F_1'}$ beide dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie $\widehat{FDA}$, $\widehat{F'D'A'}$; diese sind aber gleichgerichtet also auch $\widehat{FDF_1}$ und $\widehat{F'D'F_1'}$.

Damit ist der erste Theil des Satzes bewiesen, der zweite folgt aus dem ersten Theil.

Def. I. Wir sagen von zwei identischen Figuren, welche zwei Winkel und mithin auch alle andern (Satz V) von derselben oder der entgegengesetzten Richtung haben, *sie hätten dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung.* Im ersten Fall heissen die beiden Figuren auch *congruent*, im zweiten *symmetrisch.*

Bem. II. Es ist jedoch zu beachten, dass die Richtungen der Winkel einer Figur, welche kein Dreieck ist, im Allgemeinen eine Richtung der Ebene nicht bestimmt (Def. III, § 61), weil sie Winkel enthalten kann, die entgegengesetzte Richtung haben.

Zus. I. Zwei einer dritten Figur congruente oder symmetrische Figuren sind congruent (Def. I, Satz V; Satz VII und Zus. Satz VI, § 61).

Zus. II. Zwei Figuren, von denen die eine einer dritten Figur congruent die andre symmetrisch ist, sind symmetrisch.

Satz VI. Zwei congruente Figuren fallen zusammen, wenn in ihnen zwei Punkte mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen.

Wir wollen die beiden den zwei Figuren gemeinsamen Punkte mit A und B oder A' und B' bezeichnen, je nachdem sie als der ersten oder als der zweiten angehörig betrachtet werden. C sei ein andrer Punkt der ersten Figur; der von C verschiedene und C entsprechende Punkt C' ist derart, dass das Dreieck $A'B'C'$ dem entsprechenden Dreieck ABC congruent ist (Satz V). Der Punkt C' kann sich nicht in dem Theil der Ebene bezüglich der Graden AB befinden, in welchem C liegt (Satz IX, § 55); er kann auch nicht auf der entgegengesetzten Seite sein, weil C' mit dem bezüglich der Graden AB zu C symmetrischen Punkt zusammenfallen müsste und das Dreieck $A'B'C'$ die entgegengesetzte Richtung wie das Dreieck ABC hätte. Folglich u. s. w.

Zus. Wenn in zwei symmetrischen Figuren zwei Punkte mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen, so sind diese Figuren bezüglich der Graden, welche die beiden Punkte verbindet, symmetrisch.

19.

Stetige Systeme einer Dimension von unveränderlichen Figuren in der Ebene.

§ 63. *Def. I.* Aus den stetigen Systemen unveränderlicher Segmente auf der Graden im Unendlichgrossen (Uebereink. § 49 und Def. IV, § 36) erhält man stetige Systeme unveränderlicher Winkel vom Centrum R um jeden Punkt R der Ebene (Satz I, II; Zus. § 39 und Def. III, § 36). Wir nennen ein solches System *Kreissystem von Winkelsectoren oder Winkeln*, von welchem R *das Centrum* ist und die Winkelsectoren oder Winkel *Centriwinkelsectoren oder Centriwinkel* heissen.

Satz I. Das Centrum des Systems entspricht sich selbst.

Denn wählt man zwei sich entsprechende Winkel (ab), $(a'b')$, so entspricht der Scheitel von (ab), welcher R ist, dem Scheitel von $(a'b')$, welcher ebenfalls R ist (Def. II, III, § 36 und Satz I, § 16).

Satz II. Die Centriwinkel eines Kreissystems sind congruent.

Denn die Segmente desjenigen Systems, welches auf der Graden im Unendlichgrossen durch das Kreissystem bestimmt wird, sind congruent (Def. I, Satz I, § 36), da, wie man sich erinnert, eine Richtung der Graden im Unendlichgrossen die Richtung der Centriwinkel des Systems angibt (Bem. I, § 61).

Zus. I. Zwei symmetrische Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel können einem Kreissystem nicht angehören (Zus. Satz I, § 36).

Zus. II. Die entsprechenden Schenkel zweier Centriwinkel des Kreissystems bilden denselben Winkel.

Dies geht aus der analogen Eigenschaft der Segmente im Unendlichgrossen hervor (Satz III, § 36 und Satz I, § 39).

Satz III. Zwei Centriwinkel eines Kreissystems können kein Paar sich entsprechender Punkte, welche vom Scheitel verschieden sind, gemeinschaftlich haben.

Hätten sie ein Paar, vom Scheitel R verschiedener, sich entsprechender Punkte gemeinschaftlich, so hätten sie auch die Strahlen RA, RA', weil R sich selbst entspricht, gemeinschaftlich und mithin hätten die im Unendlichgrossen liegenden Segmente der zwei Winkel, welche congruent sind, ein Paar sich entsprechender Punkte gemeinschaftlich, was widersinnig ist (Def. I und Satz I, § 35).

Satz IV. Ist eine beliebige Figur gegeben, so kann man ein stetiges System von unveränderlichen Figuren beschreiben, dessen Linien Kreisumfänge mit dem Centrum in einem beliebigen gegebenen Punkt R sind.

Hat man z. B. ein Dreieck ABC gewählt, so verbinde man seine Eckpunkte mit R und RC liege in dem Winkel $\widehat{ARB}$. Es sei ferner das Kreissystem der Winkel gegeben, welche $\widehat{ARB}$ gleich sind. Wenn man in einem beliebigen Winkel $\widehat{A_1RB_1}$ des Systems den RC entsprechenden Strahl zieht, so haben die drei den Punkten A, B, C entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1

bezüglich denselben Abstand von R und bilden ein dem Dreieck ABC identisches Dreieck, weil $(AB) = (A_1B_1)$, $(AC) = (A_1C_1)$, $(BC) = (B_1C_1)$ (Satz III, § 17).

Ebenso entsprechen, wenn eine andre Figur gegeben ist und man dieselbe Construction macht, zweien Punkten der einen zwei Punkte von demselben Abstand; mithin sind die entsprechenden Figuren identisch (Satz III, Satz I und Zus. II, Satz II, § 15) und andrerseits sind die in dem Identitätszusammenhang der beiden Figuren sich entsprechenden Punkte auch entsprechende Punkte in dem auf diese Art beschriebenen stetigen System (Def. III, § 36).

Def. II. Ein System identischer Figuren, welches dem Satz IV genügt, heisst *Kreissystem unveränderlicher Figuren*, von welchem das bereits definirte Kreissystem von Winkeln ein specieller Fall ist (Def. I).

Zus. Das Centrum R eines beliebigen Kreissystems entspricht sich selbst.

Denn die Linie seiner sich im System entsprechenden Punkte reducirt sich auf den Punkt R allein.

Satz V. Die Figuren eines Kreissystems sind congruent.

Fig. 76.

Sind (AB), (A_1B_1) zwei sich entsprechende Segmente zweier Figuren des Systems, so sind die beiden Winkel $\widehat{ARB}$, $\widehat{A_1RB_1}$ congruent (Satz II) und mithin auch die Dreiecke ARB, A_1RB_1 (Satz VIII, § 61 u. Def. I, § 62).

Mit a und b, a_1 und b_1 mögen die Strahlen des Büschels R bezeichnet werden, die durch A und B, A_1 und B_1 gehen; BC, B_1C_1 seien zwei andre sich entsprechende Graden der beiden Figuren und die beiden Punkte C, C_1 mögen auf den Graden a, a_1 liegen. Die beiden Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ sind congruent, weil es die Winkel $\widehat{RAB}$, $\widehat{RA_1B_1}$ oder $\widehat{CAB}$, $\widehat{C_1A_1B_1}$ sind (Satz VIII, § 61); mithin haben auch die Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ dieselbe Richtung (Satz III, § 62). $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ sind aber zwei sich entsprechende Winkel der beiden Figuren des Systems; folglich sind die Figuren congruent (Def. I und Satz V, § 62) (Fig. 76).

Bem. I. Zwei bezüglich eines Punktes auf der Graden symmetrische Segmente können zu keinem stetigen System von Segmenten auf der Graden gehören (Zus. Satz I, § 36), dagegen können sie einem Kreissystem der Ebene angehören.

§ 64. *Def. I.* Betrachtet man ein stetiges System unveränderlicher Segmente auf der Graden, die senkrecht zu der Richtung eines Büschels paralleler Graden ist, so erhält man ein System unveränderlicher Streifen (Def. X, § 38; Def. II und Satz IV, § 48). Ein solches System heisst *paralleles Streifensystem* und die Richtung der Graden des Büschels *die Richtung* des Systems.

Satz I. Die Streifen eines parallelen Systems sind congruent und symmetrisch.

Denn betrachtet man die Seiten der Streifen als Strahlen eines Büschels paralleler Graden vom Centrum X_x, so haben die Seiten dieselbe Richtung oder sind congruent, weil auch die Segmente auf der zu ihnen senkrechten

Graden, der Directrix des Systems (Def. I und Zus. II, Satz X, § 21), congruent sind.

Betrachtet man dagegen die Seiten des einen Streifens in der Richtung nach X, und die des andern in der Richtung nach dem Punkt X'_∞, welcher bezüglich der *Euclid*'schen Einheit mit X_∞ zusammenfällt, so haben die Seiten entgegengesetzte Richtung.

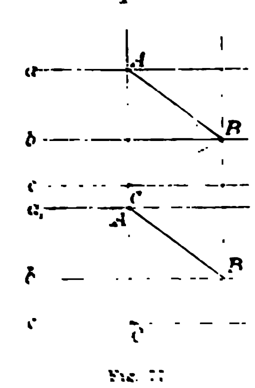
Zus. I. Zwei Streifen des parallelen Systems können kein Paar sich entsprechender Punkte gemeinschaftlich haben.

Denn wäre dies der Fall, so hätten sie auch einen Strahl des Büschels vom Centrum X_∞ gemeinsam und folglich hätten auch die entsprechenden Segmente auf der senkrechten Graden zwei sich entsprechende Punkte gemeinsam (Def. I), was widersinnig ist (Satz I, § 36 und Satz II, § 35).

Bem. I. Der ganze ebene Streifen (ab) bestimmt keine Richtung der Ebene, eben weil man den Punkt X_∞ bezüglich der *Euclid*'schen Einheit sowohl auf der einen wie auf der andern Seite einer zu der Richtung des Systems senkrechten Graden liegend ansehen kann.

Bem. II. Bezeichnet man mit α und α', β und β' die Strahlen, welche zwei parallelen Graden des Systems angehören und durch die beiden Punkte A und B einer auf den Strahlen Senkrechten r begrenzt werden so, dass α und β, α' und β' dieselbe Richtung haben (Def. II, § 38), so sind die beiden Halbstreifen $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta')$ bezüglich der Graden r symmetrisch und mithin $(\alpha\beta)$, $(\beta'\alpha')$ congruent.

Satz II. Ist eine beliebige Figur gegeben, so gibt es ein stetiges System unveränderlicher Figuren derart, dass die Linien der sich entsprechenden Punkte auf einer gegebenen Graden senkrechte Grade und die sich entsprechenden Graden einander parallel sind.


Fig. 77.

Man betrachte ein Segment (AB), dessen Enden in den Seiten a und b des Streifens (ab) liegen und errichte in A und B Lothe auf die Seiten a und b, welche die Seiten a_1 und b_1 des dem ersten gleichen Streifens (a_1b_1) in den Punkten A_1 und B_1 treffen. Das Segment (A_1B_1) ist (AB) gleich (Satz I, § 44).

Wenn eine Figur $ABCD \ldots M \ldots$ gegeben ist, so kann man sich ein stetiges System mit der ersten identischer Figuren derart denken, dass die sich in dem System entsprechenden Theile ebenfalls identisch sind.

Def. II. Ein System identischer Figuren, welches dem Satz II genügt, heisst *paralleles System unveränderlicher Figuren* oder einfach *paralleles System*, von welchem das frühere (Def. I) ein specieller Fall ist (Fig. 77).

Satz III. Die Figuren eines parallelen Systems sind congruent.

$\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ seien zwei sich entsprechende Winkel der beiden Figuren und die Punkte A und C, A_1 und C_1 mögen in derselben auf der Richtung des Systems senkrecht stehenden Graden liegen.

Die ebenen Streifen [illegible], [illegible], deren Seiten bezüglich durch A und C, A_1 und C_1 gehen, sind congruent, wenn sie von demselben Punkt X_∞ aus

(Satz I) oder von derselben Seite einer auf den Seiten senkrechten Graden betrachtet werden. Mithin sind auch die Segmente (AC) und (A_1C_1) congruent (Zus. V, Satz X, § 61). Die Punkte B und B_1 liegen auf derselben Seite einer jeden Senkrechten, weil die Grade BB_1 ebenfalls normal auf der Richtung des Systems ist und zwei auf einer dritten Senkrechte parallel zueinander sind (Zus. II, Satz V, § 47 und Satz I, § 50). Die Winkel $\widehat{ABC}$, $\widehat{A_1B_1C_1}$ sind daher congruent (Satz XI, § 61) und also auch die beiden sich entsprechenden Figuren, denen sie angehören (Satz V und Def. I, § 62).

§ 65. *Def. I.* Wenn ein stetiges System einer Dimension unveränderlicher Figuren (Def. III, § 36) in der Ebene liegt, so heisst das System: *ebenes stetiges System einer Dimension von unveränderlichen Figuren.*

Satz I. Zwei Figuren eines ebenen stetigen Systems einer Dimension unveränderlicher Figuren sind congruent.

Denn die Schenkel und Scheitel zweier sich entsprechender und consecutiver Winkel (Def. III, § 36) müssen consecutiv sein und mithin bestimmen die unendlich fernen Punkte der Schenkel zwei gleiche und consecutive Segmente (Zus. II, Satz X, § 62). Diese sind aber gleichgerichtet (Einl. a, § 99); also sind es auch die beiden in Betracht gezogenen Winkel und mithin auch die beiden betrachteten consecutiven Figuren (Satz V, § 62). Das System kann aber als aus einer Reihe consecutiver Figuren zusammengesetzt gedacht werden (Def. I; Def. II u. III, § 36). Folglich sind zwei beliebige Figuren des Systems auch congruent.

Zus. Zwei symmetrische Figuren können keinem stetigen System unveränderlicher Figuren in der Ebene angehören.

Satz II. Ist eine Figur und eine Linie in der Ebene gegeben, so gehört die Figur einem stetigen System einer Dimension unveränderlicher Figuren an, in welchem die gegebene Linie eine Linie sich entsprechender Punkte ist.

(A) sei die gegebene Figur, l die gegebene Linie, R ein Punkt von l, der eventuell auch der Figur angehören kann. Man betrachte ein Segment (RR_1) von l und zerlege (RR_1) in beliebig kleine Segmente (RR'), $(R'R'')\dots(R^mR_1)$ derart, dass die gradlinigen Segmente $(RR'$, $(R'R'')\dots(R^mR_1)$ kleiner als ein gegebenes Segment ε sind (Def. I, § 36). Wegen der Identität der Ebene um ihre Punkte R und R' (Zus. II, Satz II, § 47) können wir um R' eine Figur (A'), welche (A) identisch ist, derart beschreiben, dass, wenn (RR') unbegrenzt klein wird, auch der Abstand zwischen zwei beliebigen sich entsprechenden Punkten von (A) und (A') unbegrenzt abnimmt. Zu dem Ende ziehen wir von R nach einem Punkt A von (A) den Strahl RA und $R'A'$ sei ein Strahl, der RA zur Grenze hat, wenn R' den Punkt R zur Grenze hat (Def. I, § 36). Dies ist möglich, denn es braucht nur z. B. der Punkt A'_∞ von $R'A'$ sich unbegrenzt dem absoluten Grenzpunkt A_∞ von RA zu nähern (Def. I, § 12; Uebereink. § 49). Dasselbe führen wir für jeden andern Punkt X der Figur (A) so aus, dass die im Unendlichgrossen liegenden Segmente der

Winkel $\widehat{ARX}$, $\widehat{A'R'X'}$ d. h. die beiden Winkel gleich sind oder auch dass die Segmente $(A_\infty X_\infty)$, $(A'_\infty X'_\infty)$ einem stetigen System unveränderlicher Segmente auf der Graden im Unendlichgrossen zugehören.

Auf dem RX entsprechenden Strahl $R'X'$ construiren wir den Punkt X' in demselben Abstand von R', wie X von R derart, dass jeder andre Punkt Y' des Strahls $R'X'$ sich unbegrenzt einem Punkt Y nähert, der den gleichen Abstand von R und X hat, wie Y' von R' und X' (Zus. II, Satz IV, § 12).

Es ist dann $(AX) \equiv (A'X')$, weil $(AR) \equiv (A'R')$, $(XR) \equiv (X'R')$ und $\widehat{ARX} \equiv \widehat{A'R'X'}$ (Satz II, § 42) und wenn Y und Y' zwei andre sich entsprechende Punkte von (A) und (A') sind, so ist auch $(AY) \equiv (A'Y')$. Man sieht auch leicht, dass $\widehat{XAY} \equiv \widehat{X'A'Y'}$ und mithin auch $(XY) \equiv (X'Y')$ ist. Die beiden Figuren (A) und (A') sind mithin identisch und der Identitätszusammenhang derselben fällt mit dem Zusammenhang des für den Theil (RR') der Linie l beschriebenen Systems zusammen. Wiederholt man daher dieselbe Construction für jedes successive Segment, so erhält man das verlangte System (Def. III, § 36).

Bem. I. Der Satz II setzt die Existenz der Linie l voraus. Abstract haben wir die Existenz der Graden, des Kreisumfangs und mithin der polygonalen aus Theilen der Graden oder des Kreisumfangs zusammengesetzten Linien festgestellt; empirisch gilt der Satz für alle Anschauungslinien, welche durch materielle Linien graphisch in der Ebene dargestellt werden (Emp. Bem. § 36). Ist aber die Existenz einer Linie, welche der Def. I, § 36 genügt, bewiesen, so gilt der Satz auch für diese Linie. [1])

Def. II. Ein stetiges System einer Dimension von unveränderlichen stetigen Systemen einer Dimension von unveränderlichen Figuren heisst stetiges System unveränderlicher Figuren *von zwei Dimensionen* u. s. w.

Bem. II. Offenbar gehen die Eigenschaften dieser Systeme aus denjenigen der Systeme einer Dimension hervor und sind zwei beliebige Figuren der neuen Systeme stets congruent. [LXVI])

20.

Thatsächliche Bewegung der Figuren in der Ebene. [LXVII])

§ 66. *Satz I. Eine Figur, die sich frei in der Ebene bewegt, beschreibt ein stetiges System.*

1) Wir sehen daher, dass bei den stetigen Systemen unveränderlicher und also congruenter Figuren (Satz I) nicht alle Bedingungen der Anschauungslinie für die entsprechenden Linien der Punkte des Systems nöthig sind (Def. II, § 36 und die zugehör. Anm.).

LXVI) Die Definition des Kreissystems muss man auf die Eigenschaften des Büschels gründen, da das Kreissystem ein in der Position seiner Theile identisches System ist. Man wiederholt bei ihm dieselben Betrachtungen, welche für die Grade angestellt wurden (§ 36). Bei dem Beweis der Sätze I und II dieses Paragraphen beachtet man, statt das Unendlichgrosse zu Hülfe zu nehmen, nur, dass zwei consecutive Winkel dieselbe Richtung haben müssen, weil die Segmente, welche sie auf einer Graden bestimmen, die die Scheitel der Winkel auf derselben Seite hat, gleich gerichtet sind (Zus. II, Satz X, § 61 und Einl. a, § 69).

LXVII) Dieser Abschnitt bleibt wie er ist, nur Satz III und sein Zusatz werden weggelassen. Wie wir in der Vorrede bemerkt haben, beschränken wir uns in diesen Anmerkungen auf die *Euclid*'sche Ebene allein und begleiten desshalb den Text mit diesen besonderen Anmerkungen in der Folge nicht mehr.

Bei der Bewegung einer Figur beschreibt jeder ihrer Punkte eine Anschauungslinie, wie sie in Def. I, § 36 (Bem. II, § 36) definirt wurde und jeder Lage eines ihrer Punkte entspricht eine Lage der Figur selbst (Prakt. Ax. II Seite 304).

Wenn $AA_1A_2 \ldots A_m$, $BB_1B_2 \ldots B_m$, ..., $XX_1X_2 \ldots X_m \ldots$ verschiedene Lagen der Punkte A, B, ..., $X \ldots$ der Figur sind, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass die Lagen der Punkte mehrmals in eine Linie oder ein Liniensystem fallen, und wenn (AA_1) der von dem Punkt A in einer gegebenen Zeit durchlaufene Weg ist, so durchläuft der Punkt B in derselben Zeit eine Strecke (BB_1) und den Punkten des Segments (BB_1) müssen die Punkte der Strecke (AA_1) entsprechen (Prakt. Ax. II). Es findet mithin ein eindeutiger Zusammenhang in derselben Ordnung statt, womit der Satz bewiesen ist (Def. II, § 36).

Satz II. Eine Figur kann sich in der Ebene bewegen ohne sich zu verändern.

Denn beschreibt man ein stetiges System unveränderlicher Figuren und sind (A), (B), (C), ..., (X), ... die Anschauungslinien der sich entsprechenden Punkte, welche durch die Punkte A, B, C, ..., X, ... der gegebenen Figur gehen (Satz II und Bem. III, § 62), so kann man die Punkte A, B, C, ..., X, ... der gegebenen Figur nöthigen, sich längs der Linien sich entsprechender Punkte derart zu bewegen, dass die sich entsprechenden Punkte der genannten Linien sich entsprechende Lagen der Punkte der gegebenen Figur sind (Prakt. Ax. II Seite 304).

Bem. I. Wenn die Ebene nicht, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde, die Eigenschaft hätte, stetige Systeme einer Dimension von unveränderlichen Figuren zu besitzen, so könnte offenbar eine Figur sich nicht ohne Deformation bewegen (Def. II, § 37).

Zus. Zwei Figuren, welche Lagen einer Figur sind, die sich bewegt und dabei nicht ändert, sind congruent.

Denn dies gilt von zwei Figuren eines stetigen Systems unveränderlicher Figuren (Satz I, § 65).

Def. I. Ist das System ein Kreissystem (§ 63), so heisst die Bewegung *Rotationsbewegung um das Centrum* des Systems, welches *das Centrum* der Rotationsbewegung genannt wird.

Bem. II. Bei der Rotationsbewegung sind die Bahnen der Punkte Kreisbogen mit dem Centrum in dem Centrum der Bewegung, weil die Linien der sich entsprechenden Punkte in diesem Fall Kreisbogen mit dem Centrum in dem Centrum der Bewegung sind (Satz IV, § 63).

Zus. Das Centrum der Rotationsbewegung bleibt unbeweglich.

Denn das Centrum des Kreissystems entspricht sich selbst (Satz I, § 63).

Def. II. Ist das System ein Parallelsystem (§ 64), so heisst die Bewegung *Translation*. Die Richtung des Systems heisst *die Richtung* der Bewegung.

Bem. III. Die Bahnen sind bei der Translationsbewegung auf der Richtung des Systems senkrechte Grade (Satz II, Def. I, § 64).

Zus. Eine Grade bleibt bei der Translationsbewegung parallel zu sich selbst.

Denn dies gilt von den sich entsprechenden Graden eines Parallelsystems (Satz II, § 64).

Satz III. Die Translationsbewegung kann als eine bezüglich der unendlich grossen Einheit der Abstände unendlich kleine Rotationsbewegung betrachtet werden.

Denn die zu der Richtung des Parallelsystems parallelen Graden können als Kreise angesehen werden, deren Centrum in dem unendlich fernen Punkt des Systems liegt (Satz II, § 32).

Zus. Bei der Translationsbewegung als unendlich kleine Rotation gedacht bleiben zwei Punkte, der eine in relativem, der andre in absolutem Sinn festliegend. Der erste liegt im Unendlichgrossen in der Richtung der Bewegung, der zweite ist das Centrum der Bewegung.

Denn das Rotationscentrum liegt in absolutem Sinn fest (Def. I, § 37), weil jede seiner Lagen mit ihm zusammenfällt (Satz I); dagegen wissen wir, dass es bei der Rotationsbewegung keinen andern festen Punkt gibt, d. h., jeder im Unendlichgrossen liegende Punkt bewegt sich in diesem Fall um ein bezüglich der endlichen Einheit endliches und mithin bezüglich der unendlich grossen Einheit unendlich kleines Segment.

§ 67. *Satz I. Zwei congruente Figuren kann man mittelst einer Rotationsbewegung zur Deckung bringen.*

Die beiden Figuren seien zuerst zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$. In den Mittelpunkten von (AA'), (BB') errichte man die Lothe auf die Graden AA', BB'. Fallen diese Lothe in eine Grade α zusammen, so gehen sie durch den Durchschnittspunkt S der beiden Segmente (AB), $(A'B')$, welche dann bezüglich der Graden α symmetrisch sind (Def. I, § 56). Es ist dann $\widehat{ASA'} \equiv \widehat{BSB'}$, weil sie Scheitelwinkel sind oder zusammenfallen und mithin auch dieselbe Richtung haben (Satz I, § 61). Wenn (AB) um S rotirt, so gelangt der Punkt C in einen Punkt C_1' derart, dass er mit $A'B'$ ein zu ABC und mithin auch zu $A'B'C'$ congruentes Dreieck bildet (Zus. I, Satz V, § 62). Daher fällt C_1' mit C' zusammen (Def. I, § 62; Satz X, § 61 und Satz IX, § 55).

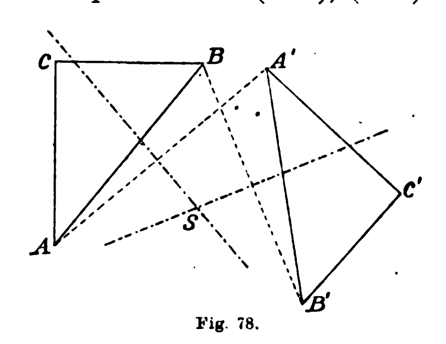


Fig. 78.

Fallen die beiden Lothe nicht zusammen und schneiden sie sich in einem Punkt S, so sind die beiden Dreiecke ASB, $A'SB'$ gleich, weil sie die drei Seiten gleich haben und mithin ist $\widehat{ASB} \equiv \widehat{A'SB'}$. Diese Winkel haben auch dieselbe Richtung, sonst müssten, wie man sich leicht überzeugt, die Lothe zusammenfallen und man käme wieder auf den vorigen Fall zurück. $\widehat{A'SB'}$ kann nun nicht ganz in dem Winkel $\widehat{ASB}$ enthalten sein und umgekehrt; $\widehat{A'SB'}$ liegt also entweder zum Theil innerhalb $\widehat{ASB}$ oder es ist ganz ausserhalb dieses Winkels. In beiden Fällen sind die Winkel $\widehat{ASA'}$, $\widehat{BSB'}$ gleich und gleichgerichtet. Es lässt sich mithin wie im vorigen Fall beweisen, dass, wenn das Dreieck ABC um S rotirt, bis A nach A' gelangt, die Punkte B

und C nach B' und C' kommen. Fällt der Punkt S ins Unendlichgrosse, so erhält man eine Translationsbewegung (Fig. 78).

Dieser Beweis gilt auch für zwei beliebige ebene congruente Figuren.

Bem. I. In dem Identitätszusammenhang, welcher in der Ebene durch den Identitätszusammenhang zweier beliebiger congruenter Figuren bestimmt wird, gibt es daher einen Punkt S, welcher sich selbst entspricht.

Es ist nicht schwer sich zu überzeugen, dass es bei zwei symmetrischen Figuren dagegen eine Grade s ist, welche sich selbst entspricht.

Satz II. Zwei symmetrische Figuren in derselben Ebene können durch eine Bewegung ohne Deformation nicht zur Deckung gebracht werden.

Denn wäre dies möglich, so würden sie zu einem System unveränderlicher Figuren gehören (Def. II, § 37), was nicht der Fall ist (Zus. Satz I, § 65).

Bem. II. Es hat den Anschein als gäbe es einen Fall, welcher mit diesem Satz in Widerspruch steht, nämlich den Fall zweier Halbstreifen $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta')$ in Bem. II, § 65.

Wenn es aber auch in der That möglich ist, einen endlichen Theil des Halbstreifens $(\alpha\beta)$ zur Deckung mit dem Halbstreifen $(\alpha'\beta')$ zu bringen, so lässt sich dies doch für den ganzen Halbstreifen nicht ausführen; der Satz gilt daher in jedem Fall, wenn man die ganze Ebene in Betracht zieht.

Satz III. Eine Figur kann sich in der Ebene nicht bewegen, wenn man zwei ihrer Punkte festhält.

Denn zwei Lagen derselben Figur sind congruent (Zus. Satz II, § 66) und fallen zusammen, wenn sie zwei Paare sich entsprechender Punkte gemeinschaftlich haben (Satz VI, § 62).

Satz IV. Zwei symmetrische Figuren lassen sich in der Ebene bewegen, bis sie bezüglich einer beliebigen gegebenen Graden der Ebene symmetrisch sind.

(A) und (A') seien die beiden Figuren, r die gegebene Grade. Wenn wir die bezüglich der Graden r der Figur (A) symmetrische Figur (A'') betrachten (Def. II, § 56), so ergibt sich, dass (A'') congruent mit (A') ist (Satz VI, § 62) und dass man mithin (A') mit (A'') zur Deckung bringen kann (Satz I).

II. Kapitel.

Die vollständige (oder Riemann'sche) Ebene.

1.

Bestimmung der vollständigen Ebene. — Hypothese VII.

§ 68. *Def. I.* Alle vollständigen Graden eines Büschels (Def. III, § 27) bestimmen, wenn man den Punkt als Element betrachtet, eine Figur, welche *vollständige Ebene* heisst.

Bem. I. Nach Hyp. V (Seite 285) ist die vollständige Ebene die *Riemann*'sche Ebene (Bem. I, § 26; Def. I, § 27).

Zwei parallele Grade des *Euclid*'schen Gebiets liegen sich, in dem vollständigen Gebiet betrachtet, unendlich nahe (Satz I, § 24 und Satz II, § 31; Def. II, § 26 und Uebereink. § 28). In absolutem Sinn schneiden sie sich in zwei Gegenpunkten (Satz II; Def. II, § 30).

Bem. II. Wenn wir in diesem Kapitel ohne Weiteres von der Ebene sprechen, meinen wir die vollständige Ebene.

Satz I. Jeder entgegengesetzte Punkt eines Punktes der vollständigen Ebene liegt in der Ebene.

Denn die Grade des Erzeugungsbüschels, welche durch den gegebenen Punkt geht, enthält auch den entgegengesetzten Punkt (Satz II und Def. II, § 30 und Def. I).

Bem. III. Betrachtet man ein Büschel (Rr) in dem endlichen *Euclid*'schen Gebiet und misst seine Graden mit der unendlichgrossen Einheit (Uebereink. § 28), so liegen die absoluten Grenzpunkte der Graden bezüglich des Punktes R (Def. II, § 32) in einer Linie σ_∞, welche wir, weil sie viele Eigenschaften mit der Graden gemeinschaftlich hat, *die im Unendlichgrossen liegende Grade* des gegebenen Büschels (Rr) genannt haben. Es hat dies den Eigenschaften des *Euclid*'schen Büschels keinen Eintrag gethan (§ 49), da wir nur von den Eigenschaften der Graden im Unendlichgrossen Gebrauch gemacht haben, welche sie mit der Graden gemeinschaftlich hat. Wir wissen aber nicht, ob σ_∞ in der That eine Grade ist, müssen vielmehr nach den in § 49 entwickelten Betrachtungen bis zu dem Beweis des Gegentheils annehmen, dass σ_∞ möglicherweise eine Grade in Uebereinstimmung mit den früheren Hypothesen I—VI nicht sein kann. Diese Eigenschaft geht jedoch aus ihnen nicht hervor, weil man es bei der Vorstellungsweise in Bem. IV, § 18; Bem. I, § 22; Bem. II, § 23 sehr wohl so einrichten kann, dass die Linie σ_∞ eine Grade ist. Wäre dies nicht der Fall, so würden, wenn r_∞ eine absolute Grenzgrade von R ist, die beiden Büschel (Rr) und (Rr_∞) nicht identisch sein und es würde die gradlinige Figur, welche von zwei durch den Punkt R gehenden Strahlen in dem *Euclid*'schen Gebiet bestimmt wird, in diesem Gebiet allein nicht dieselbe bleiben, wenn man auch die im Unendlichgrossen liegenden Punkte derselben Strahlen in Betracht zieht; sie wäre vielmehr ein Theil einer andern gradlinigen Figur, die man durch Anwendung der Construction in Def. I, § 9 erhält und welche ebenfalls durch die nämlichen zwei Strahlen in dem *Euclid*'schen Gebiet bestimmt wird.

Die Betrachtung der im Unendlichgrossen liegenden Punkte der genannten Strahlen würde mithin einer Construction gleichkommen, mittelst welcher man aus ihnen eine andre gradlinige Figur in dem *Euclid*'schen Gebiet um den Punkt R erhielte, von welcher die erste ein Theil wäre. Weil wir aber die Geometrie des endlichen Gebiets unabhängig von unseren Hypothesen über das Unendlichgrosse und Unendlichkleine behandeln können, wie wir für die Ebene in den mit Römischen Ziffern bezeichneten Anmerkungen gezeigt haben und weil überdies die beiden Strahlen bei Anwendung der Construction in Def. I, § 9 eine einzige gradlinige Figur bestimmen, welche unabhängig von den beiden Strahlen (Bem. V, § 15) die Ebene ist (Zus. III, Satz V, § 46), so geben wir die folgende Hypothese und stellen durch sie die Unabhängigkeit des endlichen Gebiets um einen gegebenen Punkt S von den unendlichgrossen und unendlichkleinen Gebieten um diesen Punkt fest:

Hyp. VII. **Die gradlinige Figur, welche von zwei beliebigen durch den Punkt S gehenden Graden in jedem endlichen Gebiet um S bestimmt wird, bleibt bezüglich der Einheit dieses Gebiets dieselbe auch wenn man die Punkte in den im Unendlichgrossen oder Unendlichkleinen liegenden Gebieten um denselben Punkt S auf den beiden Graden in Betracht zieht.**

Satz II. Die Hypothese VII gilt für jeden Punkt (des allgemeinen Raums).

Der Beweis ist derselbe wie für Satz II, § 31; man stützt sich auf Satz I desselben Paragraphen.

Zus. Die absolute Grenzlinie eines Punktes R der Euclid'schen Ebene ist eine Grade (Hyp. VII und Satz II).

Bem. IV. Nachdem dieser Zusatz gegeben, wird das Uebereink. § 49 überflüssig.

Satz III. Eine Grade, welche zwei nicht entgegengesetzte Punkte mit der vollständigen Ebene gemeinschaftlich hat, liegt in der Ebene und wird von sämmtlichen Graden des Erzeugungsbüschels der Ebene geschnitten.

$(R\varrho)$ sei das Erzeugungsbüschel der Ebene und ϱ die absolute Grenzgrade von R, welche die Strahlen des Büschels in den absoluten Grenzpunkten von R theilt (Def. II und Satz III, § 32). r sei eine andre Grade, welche die beiden Strahlen a und b des Büschels $(R\varrho)$ in den beiden bezüglich der *Euclid*'schen Einheit im Unendlichgrossen liegenden Punkten X und Y schneidet (Uebereink. § 28).

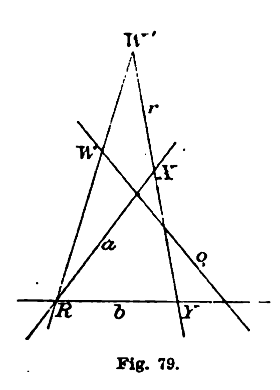


Fig. 79.

Jede Grade des Büschels $(R\varrho)$ ist eine Grade des durch die Strahlen a und b in dem *Euclid*'schen Gebiet um R bestimmten Büschels (Zus. Satz II). Das Büschel (Rr) erzeugt ebenfalls die nämliche *Euclid*'sche Ebene, welche durch die Strahlen a und b bestimmt wird (Hyp. VII und Satz II); mithin fällt jede Grade RW des Büschels $(R\varrho)$ bezüglich der Grundeinheit (Uebereink. § 28) mit einer Graden des Büschels (Rr) zusammen und daher stellt jede Grade des *Euclid*'schen Büschels (ab) in absolutem Sinn zwei Grade der Büschel $(R\varrho)$, (Rr) dar, welche, wenn sie nicht in absolutem Sinn zusammenfallen, sich doch unendlich nahe liegen (Def. und Satz IV, § 22), Wenn sie sich aber so bezüglich der Grundeinheit verhalten, so fallen sie auch bezüglich der unendlich grossen Einheit zusammen (Hyp. IV, Seite 272 und Satz II, § 31). Damit ist bewiesen, dass jede Grade des Büschels $(R\varrho)$ die Grade r bezüglich der unendlich grossen Einheit schneidet und umgekehrt (Fig. 79).[1])

Bem. V. Dasselbe gilt, wenn die Grade r einen oder beide Strahlen a und b des Büschels vom Centrum R in einem R unendlich nahe liegenden Punkt schneidet. Beschränken wir uns, wie wir in der Folge thun werden, auf das *Euclid*'sche und das vollständige Gebiet bezüglich der Einheiten derselben allein, so haben wir die unendlich kleinen Gebiete bezüglich desjenigen der Grundeinheit nicht nöthig (Uebereink. § 28).

Bem. VI. Aus dem Beweis selbst geht hervor, dass man nicht behaupten kann, der Satz III gelte in absolutem Sinn, sondern nur bezüglich der unendlich grossen oder *Riemann*'schen Einheit (Def. I, § 28). Dies genügt für unsere weiteren Untersuchungen. Will man, dass er in absolutem Sinn gelte, so muss man es entweder beweisen oder, kann man dies mit den bisherigen Hypothesen nicht, die Hyp. VII in absolutem Sinn statt nur bezüglich der Einheiten der Gebiete um S gelten lassen.

Da wir indessen die Geometrie in absolutem Sinn nur desshalb behandeln wollen, um den Uebergang von dem *Riemann*'schen zu dem *Euclid*'schen System und umgekehrt besser feststellen zu können (Def. I und Bem. III, § 27), so nehmen wir an, zwei bezüglich der beiden Einheiten dieser Systeme zusammenfallende Graden fielen auch in absolutem Sinn zusammen und geben es besonders an, wenn sie in absolutem Sinn verschieden sind.

Satz IV. Jeder Punkt der vollständigen Ebene ist Centrum eines Büschels, welches alle Punkte der Ebene enthält.

---

1) Wir hätten vorgezogen diese Eigenschaft direct zu beweisen, wie es für die *Euclid*'sche Ebene auf Grund des Satzes I, § 45 geschehen ist; denn wir glauben, dass im Grunde die Axiome I—V und Hyp. V auch unabhängig von der Eigenschaft der Hyp. VI, wie für die *Euclid*'sche Ebene, so auch hier ausreichen, um die Eigenschaften des *Riemann*'schen Büschels vollständig zu bestimmen; es ist uns aber nicht gelungen einen directen Beweis zu finden. Wir haben freilich nicht viele Versuche zu diesem Zweck angestellt (siehe auch Kap. III).

Gibt man einen solchen Beweis, so hat man nicht nöthig, die Hyp. VII zu Hülfe zu nehmen, was man, wie uns scheint, thun muss um festzustellen, dass die Linie σ_∞ im Unendlichgrossen der *Euclid*'schen Ebene eine Grade ist.

$(R\varrho)$ sei das Erzeugungsbüschel der Ebene (Def. I); A einer ihrer Punkte. Jeder Punkt einer beliebigen durch A gehenden Graden r in der Ebene (Satz III) liegt in einer Graden des Büschels $(R\varrho)$ und umgekehrt schneidet jede Grade dieses Büschels die Grade r (Satz III). Mithin bedeckt das Büschel vom Centrum A die Ebene vollständig.

Zus. Zwei Grade der Ebene schneiden sich in zwei Punkten.

r und s seien die beiden Graden, A und B zwei Punkte derselben. Die Graden des Büschels vom Centrum A schneiden alle Graden des Büschels vom Centrum B und mithin die Grade s in einem Punkt und daher auch in dem entgegengesetzten Punkt (Satz I).

Satz V. Drei beliebige nicht in grader Linie liegende Punkte bestimmen die vollständige Ebene und diese ist durch drei beliebige nicht in grader Linie liegende Punkte von ihr bestimmt.

A, B, C seien die drei gegebenen Punkte; die Ebene des Büschels $A \cdot BC$ enthält alle Graden, welche zwei beliebige Punkte der Graden des Büschels verbinden (Satz III) und mithin auch alle Graden der Büschel $B \cdot AC$, $C \cdot AB$. Jede Ebene ferner, in welcher die drei Punkte ABC liegen, enthält auch die Graden der ersten Ebene, weil sie die Graden des Büschels $A \cdot BC$ enthält und umgekehrt enthält die Ebene $A \cdot BC$ die Graden jeder beliebigen durch die Punkte A, B, C gehenden Ebene. Denn jede andre Grade dieser Ebene schneidet in zwei entgegengesetzten Punkten z. B. die beiden Graden AB, BC (Zus. Satz IV), welche in beiden Ebenen liegen. Mithin liegt auch die gegebene Grade in der Ebene $A \cdot BC$ (Satz III).

Satz VI. Jede Figur der Ebene ist, wenn sie von jeder nicht in ihr enthaltenen Graden der Ebene in zwei entgegengesetzten Punkten geschnitten wird, eine Grade.

Der Beweis ist analog demjenigen zu Satz VI, § 48.

2.

Die Polelemente und Lothe.

§ 69. *Def.* Wir sagen zwei Punkte einer vollständigen Ebene seien *conjugirt*, wenn sie die Enden eines rechten Segments (Def. IV, § 29) sind.

Satz I. Die conjugirten Punkte eines Punktes, (welche auch die conjugirten Punkte des entgegengesetzten Punktes sind), liegen in einer Graden.

R sei der gegebene Punkt, X und Y zwei Punkte der Ebene, die mit R conjugirt sind.

Die Grade XY liegt in der Ebene (Satz III) und ihre Punkte bestimmen mit R ein rechtes Segment (Satz I, § 31). Dass die Grade XY dieselbe Eigenschaft bezüglich des zu R entgegengesetzten Punktes hat, geht aus der Definition der entgegengesetzten Punkte hervor (Def. III, § 6 und Def. II, § 30).

Def. II. Die Grade des Satzes I heisst *polare Grade* oder *Pollinie* des gegebenen oder des entgegengesetzten Punktes und diese Punkte heissen *die Pole* der Graden.

Bem. I. Die polare Grade ist eine absolute Grenzgrade des gegebenen Punktes in dem allgemeinen Raum (Def. II und Bem. III, § 2 und Satz III, § 32).

Zus. I. Die Pollinien zweier conjugirten Punkte gehen bezüglich durch diese beiden Punkte.

Zus. II. Die Pollinie eines Punktes der Pollinie eines andern gegebenen Punktes geht durch den gegebenen Punkt.

Denn ein beliebiger Punkt der zu A polaren Graden α ist mit A conjugirt.

Zus. III. Jede durch einen Punkt A gehende Grade ist Pollinie eines Punktes B der Pollinie von A.

Ist X einer der Durchschnittspunkte der durch A gehenden Graden mit der zu A polaren Graden α und (XB) ein rechtes Segment, so hat B die gegebene Grade AX zur Pollinie (Satz I und Def. II).

Zus. IV. Die polare Grade eines Punktes R halbirt das Büschel vom Centrum R und von dem R entgegengesetzten Centrum R'.

Denn die beiden Theile, in welche das Büschel zerlegt wird, sind entgegengesetzte Figuren (Satz III, § 30).

Satz II. Jede Grade hat zwei entgegengesetzte Pole.

Denn die Pollinien zweier Punkte B und C der gegebenen Graden α schneiden sich in zwei entgegengesetzten Punkten A und A' (Zus. Satz IV, § 68), welche mit B und C conjugirt sind; mithin ist die Grade α die Pollinie von A und A'.

Zus. I. Die Grade, welche die Pole zweier Graden verbindet, ist die Pollinie der Durchschnittspunkte der beiden Graden.

Denn sie hat zwei Pole, durch welche die Pollinien ihrer Punkte gehen (Zus. II, Satz I).

Def. III. Zwei Grade, von welchen eine jede die Pole der andern enthält, heissen *conjugirt.*

Satz III. Ein Punkt A ist der Eckpunkt unendlich vieler Dreiecke, deren Seiten die Pollinien der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte sind.

Sind B und C conjugirte Punkte der polaren Graden von A, was für jeden Punkt dieser Graden auf zwei Arten möglich ist (Def. I), so geht die Pollinie von B durch A und C und diejenige von C durch B und A.

Def. IV. Ein Dreieck, welches dem Satz III entspricht, heisst ein *conjugirtes Poldreieck,* oder einfach *Poldreieck.*

Zus. I. Die Seiten eines Poldreiecks sind zu je zweien conjugirt und einem rechten Segment gleich.

Zus. II. Zwei Poldreiecke sind in sechs verschiedenen Arten gleich.

Denn sind ABC, $A'B'C'$ die beiden Dreiecke, so sind BCA, CAB, ACB, CBA, BAC dem Dreieck ABC gleich, weil sie stets die drei Seiten gleich haben (Satz III, § 17) und mithin auch dem Dreieck $A'B'C'$. Mit andern Worten: es lassen sich sechs Identitätszusammenhänge zwischen den beiden Dreiecken aufstellen (Bem. III, § 15).

Satz IV. Die Segmente einer Graden der vollständigen Ebene sind das Mass der Winkel um die Pole der Graden.

Denn den gleichen Segmenten der Graden entsprechen gleiche Winkel um die Pole der Graden; denn die dadurch gebildeten Dreiecke sind gleich, da sie drei Seiten gleich haben (Satz III, § 17); mithin auch die entsprechenden Winkel (Satz I, § 42) und umgekehrt. Ungleichen Segmenten dagegen entsprechen Winkel, welche in demselben Verhältniss der Ungleichheit stehen.

Zus. I. Die Graden, welche einen Punkt mit zwei conjugirten Punkten der Pollinie desselben verbinden, stehen senkrecht aufeinander.

Denn zwei conjugirte Punkte sind die Enden eines rechten Segments (Def. I und Def. VIII, § 38).

Zus. II. Die Winkel zweier Graden haben bezüglich zwei Halbirungsgrade, welche senkrecht zueinander sind.

Analoger Beweis wie zu Satz VII, § 41; man hat nur der Graden im Unendlichgrossen die Pollinie der Scheitel der Winkel der beiden Graden zu substituiren.

Satz V. Zwei conjugirte Grade stehen senkrecht aufeinander und umgekehrt.

A und A', B und B' seien die Pole der beiden Graden α und β. Gegeben ist, dass A und A' in β, B und B' in α liegen (Def. III). Das Segment (AB) ist desshalb ein rechtes und die beiden Graden stehen mithin in ihrem Durchschnittspunkt senkrecht aufeinander.

Umgekehrt werden zwei aufeinander lothrechte Grade α und β durch die Pollinie ihrer Durchschnittspunkte (Zus. Satz IV, § 68) in den Enden eines rechten Segments geschnitten (Satz IV) und diese Enden sind bezüglich die Pole von α und β. Folglich u. s. w. (Def. III).

Zus. Die Seiten eines Poldreiecks sind senkrecht aufeinander.

Denn sie sind zu je zweien conjugirt (Zus. I, Satz III).

Satz VI. Die durch einen Punkt A gehenden Graden stehen senkrecht auf der Pollinie von A und umgekehrt.

A sei der gegebene Punkt, α seine Pollinie, β eine durch A gehende Grade, welche α in den entgegengesetzten Punkten C, C' schneiden muss (Zus. I, Satz IV, § 68). Die Pole B und B' von β liegen in α (Zus. III, Satz I) und geben mit A verbunden ein rechtes Segment. Mithin steht die Grade β in C und C' senkrecht auf der Graden α (Satz IV).

Umgekehrt ist jede Senkrechte auf einer Graden α mit α conjugirt (Satz V) und geht mithin durch die Pole von α (Def. III).

Zus. I. Die Pollinien der Punkte einer Graden stehen senkrecht auf dieser Graden.

Denn die Pollinien der Punkte einer Graden sind Grade, welche durch die Pole dieser Graden gehen (Zus. II, Satz I).

Zus. II. Durch jeden beliebigen Punkt geht nur eine einzige Grade, welche senkrecht auf einer Graden steht, die nicht die Pollinie des Punktes ist.

Es ist die Grade, welche den Punkt mit den Polen der Graden verbindet (Satz II; Satz II, § 30).

Zus. III. Zwei Grade der vollständigen Ebene haben ein Loth gemeinschaftlich.

Es ist dies die Grade, welche die Pole der beiden Graden verbindet (Satz II; Satz II, § 30).

3.

Die Identität der Ebene um ihre Punkte.

§ 70. *Satz I. Alle vollständigen Büschel sind identisch.*

Denn R und R', ϱ und ϱ' seien die Punkte und ihre Pollinien in den beiden Ebenen $(R\varrho)$, $(R'\varrho')$. In Folge der Identität der Graden ϱ und ϱ' (Satz I, § 8 und Hyp. III) und der gleichen Abstände der Punkte R und R' von ihren Pollinien lässt sich mittelst des Satzes III, § 17 u. § 18 ein Identitätszusammenhang zwischen den beiden Figuren $(R\varrho)$ und $(R'\varrho')$ feststellen, indem man R dem R' und die Punkte von ϱ den Punkten von ϱ' entsprechen lässt. Mithin sind die beiden Figuren $(R\varrho)$, $(R'\varrho')$ identisch (Satz III und Zus. II, Satz II, § 15).

Zus. I. Alle vollständigen Ebenen sind identisch (Def. I, § 68).

Satz II. Jedes vollständige Büschel ist in der Position seiner Theile identisch und stetig.

Denn es ist dies auch die Pollinie der Centren des Büschels (Satz IV, § 69).

Zus. I. Jede Grade eines Büschels halbirt dasselbe.

Denn ihre Durchschnittspunkte mit der Pollinie der Scheitel des Büschels sind entgegengesetzte Punkte (Zus. Satz IV, § 68).

Zus. II. Die Ebene ist um jeden ihrer Punkte in der Position ihrer Theile identisch.

4.

Die Theile der vollständigen Ebene bezüglich einer ihrer Graden. — Innerer und äusserer Theil eines Dreiecks.

§ 71. *Satz I. Jede Grade halbirt die Ebene. Die Punkte der einen Hälfte haben die der andern zu entgegengesetzten Punkten.*

Denn die gegebene Grade ϱ hat zwei Pole R und R'. Die Figuren $(R\varrho)$, $(R'\varrho)$ bilden die ganze Ebene (Def. I, § 68). Jeder Punkt X einer jeden derselben z. B. von $(R\varrho)$ hat, wie leicht zu sehen, seinen entgegengesetzten Punkt in der zweiten; die Figuren $(R\varrho)$ und $(R'\varrho)$ sind mithin entgegengesetzte Figuren (Def. II, § 30) und daher gleich (Satz III, § 30).

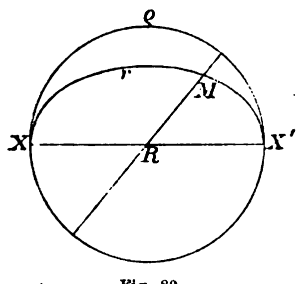


Fig. 80.

Def. I. Die Theile der Ebene, welche durch diejenigen eines Büschels mit den Centren R und R' gegeben sind und durch die Pollinie der Centren bestimmt werden, heissen *die Theile der Ebene bezüglich der Graden* ϱ.

Bem. I. Die Pollinie ϱ eines Punktes R kann durch einen Kreisumfang in dem endlichen *Euclid*'schen Gebiet dargestellt werden. Von dem Radius dieses Umfangs müssen wir voraussetzen, dass er einem rechten Segment entspricht (Def. IV, § 29). Die Hälfte $(R\varrho)$ der vollständigen Ebene, in welcher der Punkt R liegt, wird durch den Kreis selbst dargestellt (Fig. 80).

Ist r eine beliebige Grade der vollständigen Ebene, so schneidet sie die Grade ϱ in zwei entgegengesetzten Punkten X und X' (Zus. Satz IV, § 68) und die Grade RX muss auch durch den Punkt X' gehen. Die Hälften der durch R in dem Theil $(R\varrho)$ gehenden Graden können wir mittelst der Durchmesser darstellen. Wählt man einen Punkt M der Graden r, so liegt der entgegengesetzte Punkt M' in dem entgegengesetzten Theil, welcher in der Zeichnung nicht dargestellt ist.

Der Kreisumfang der Figur kann mithin auch die Grade im Unendlichgrossen der *Euclid*'schen Ebene darstellen. Bei dieser Darstellung kann der Kreisumfang unmöglich als der erste im Unendlichgrossen liegende Kreisumfang betrachtet werden, weil eine Grade, welche zwei im Unendlichgrossen des *Euclid*'schen Gebiets liegende Punkte verbindet, vollständig im Unendlichgrossen liegt und das *Euclid*'sche Gebiet mithin bei dieser Darstellung das unendlich kleine Gebiet um den Punkt R ist.

Zus. Eine Grade kann nicht vollständig auf derselben Seite einer andern Graden liegen.

ϱ sei die Grade, welche die Ebene in zwei Theile zerlegt, R und R' die Pole der Graden. Wenn ein Punkt M einer andern Graden r in einem dieser Theile z. B. $(R\varrho)$ liegt, so ist der entgegengesetzte Punkt M' in dem entgegengesetzten Theil $(R'\varrho)$ gelegen.

Satz II. Eine Grade liegt zur Hälfte in den bezüglich jeder Graden der Ebene entgegengesetzten Theilen der Ebene.

Sind X und X' wieder, wie oben, die Durchschnittspunkte der Graden r mit ϱ (Zus. Satz IV, § 68) und M ein Punkt von R, welcher in der Hälfte $(R\varrho)$ der Ebene liegt (Satz I), so ist die Hälfte der Graden XMX' vollständig in diesem Theil gelegen. Man braucht nur zu beachten, dass alle Punkte der Hälfte $(R\varrho)$ der Ebene, wenn sie nicht auf der Graden ϱ selbst liegen, mit R verbunden ein Segment bilden, welches kleiner als ein rechtes ist (Def. I, Satz I und Def. II, § 69). Wenn ein Punkt M_1 der Hälfte (XMX') der Graden r einen grösseren Abstand von R als einen rechten hätte, so müsste es in (MM_1) einen andern von X und X' verschiedenen Punkt Y derart geben, dass (RY) ein rechtes Segment wäre (Satz VII, § 13) d. h. der Punkt Y würde auf der Graden ϱ liegen (Satz I und Def. II, § 69) oder die beiden Graden r und ϱ hätten ausser X und X' noch den Punkt Y (und mithin auch den entgegengesetzten) gemeinschaftlich, was widersinnig ist (Satz II, § 30 oder Satz II, § 14) (Fig. 80).

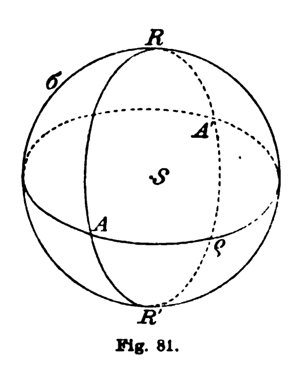


Fig. 81.

Bem. II. Wir können uns die ganze vollständige Ebene in einer Zeichnung dargestellt denken, wie z. B. in Fig. 81. Sind S und S' zwei entgegengesetzte Punkte, σ ihre Pollinie, so bezeichnen wir die Hälfte der Graden, welche in dem Theil $(S\sigma)$ liegt (Satz II) mit ausgezogenen, die auf der entgegengesetzten Seite mit punktirten Linien. Man sieht, dass sich zwei Grade in zwei entgegengesetzten Punkten z. B., wie in der Figur, in A und A' schneiden.

Def. II. Wenn zwei Punkte auf entgegengesetzten Seiten einer Graden in der Ebene liegen, so sagt man, sie seien durch diese Grade *getrennt.*

Zus. I. Zwei entgegengesetzte Punkte in der Ebene sind durch eine beliebige Grade, welche sie nicht enthält, getrennt.

Bem. III. Es gilt der Zus. III, Satz II, § 50 und wird analog bewiesen unter Berücksichtigung des Zus. Satz IV, § 68.

Zus. II. Ein Winkelsector kann dadurch erzeugt werden, dass man den Scheitel C mit den Punkten irgend eines Segments verbindet, dessen Enden in den Schenkeln des Sectors liegen.

Der Beweis ist ähnlich, wie bei der *Euclid*'schen Ebene (Zus. IV, Satz II, § 50).

§ 72. *Satz I. Die Theile der Ebene, welche durch die Winkelsectoren eines Dreiecks bestimmt werden und durch die gegenüberliegenden Seiten begrenzt werden, fallen zusammen.*

Wie bei der *Euclid*'schen Ebene (Satz I, § 51).

Bem. I. Es gelten auch die Def. I und II, § 51; ebenso die Zus. I, II, III u. IV, Satz I, § 51 und werden ebenso bewiesen. Es ist zu beachten, dass in der vollständigen Ebene drei Grade nicht sieben sondern acht Regionen bestimmen und dass diese sämmtlich Dreiecke sind. Bezeichnet man mit $A'B'C'$ die zu den Durchschnittspunkten der drei Graden entgegengesetzten Punkte und bemerkt, dass die Seiten eines Dreiecks immer die kleineren Segmente sind (Def. II, § 9) und mithin, um das Dreieck beschreiben zu können, nicht einmal der Hälfte der Graden gleich sind (Satz II, § 30), so erhält man die acht Dreiecke:

$$ABC,\ A'BC,\ AB'C,\ ABC',$$
$$A'B'C',\ AB'C',\ A'BC',\ A'B'C,$$

welche zu je zweien entgegengesetzt und gleich sind (Def. I und Satz III, § 30).

Satz II. Den inneren Punkten eines Dreiecks sind die inneren Punkte des entgegengesetzten Dreiecks entgegengesetzt.

Die beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ sind gleich (Satz III, § 30); mithin ist einem Punkt E der Seite (BC) ein Punkt E' der Seite $(B'C')$ (Satz IV, § 29) und daher dem Segment (AE) das in dem Sector $\widehat{B'A'C'}$ gelegene Segment $(A'E')$ entgegengesetzt (Def. II, § 29). Wenn also D ein innerer Punkt des Dreiecks ABC in (AE) ist, so liegt sein entgegengesetzter Punkt D' in $(A'E')$ (Satz IV, § 29) in dem Innern des Dreiecks $A'B'C'$ (Def. I, § 51 und Bem. I).

Zus. Wenn ein Punkt D ausserhalb eines Dreiecks und nicht innerhalb des entgegengesetzten Dreiecks liegt, so schneidet eine einzige der drei Graden, die ihn mit den Eckpunkten verbinden, die gegenüberliegende Seite in einem inneren Punkt.

Wird analog bewiesen wie Zus. V, Satz I, § 51.

Satz III. Wenn eine Grade der Ebene eines Dreiecks, welche nicht durch einen der Eckpunkte geht, eine Seite in einem inneren (und in einem äusseren) Punkt schneidet, so trifft sie von den beiden andern die eine in einem inneren (und in einem äusseren), die andre in äusseren Punkten.

Es gilt derselbe Beweis wie für den analogen Satz der *Euclid*'schen Ebene (Satz II, § 51), wenn man sich erinnert, dass eine Grade die Seite eines Dreiecks niemals in zwei inneren Punkten schneiden kann, weil sonst diese Seite grösser als die Hälfte der Graden sein müsste und dies unseren früheren Feststellungen widerspricht (Def. I, § 9 und Def. II und Bem. § 6).

Bem. II. Es gelten auch mit demselben Beweis: Zus. I, Satz II; Satz III und der bezügliche Zusatz in § 51.

Satz IV. Die Seiten eines Poldreiecks theilen die Ebene in acht Poldreiecke.

Denn die drei Seiten schneiden sich zu je zweien in sechs Punkten, von denen sich je zwei entgegengesetzt sind; nämlich A, A'; B, B'; C, C' und die Dreiecke ABC, $A'BC$, $AB'C$, ABC'; $A'B'C'$, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ sind Poldreiecke, weil ihre drei Seiten je einem rechten Segment gleich sind (Zus. I, Satz III, § 69).

5.

Normale Segmente und Abstände. — Eigenschaften der rechtwinkligen Dreiecke.

§ 73. *Def. I.* Das von einem Punkt P auf eine Grade r gefällte Loth schneidet dieselbe in zwei entgegengesetzten Punkten M und M'; die Segmente (PM) und (PM') heissen *die normalen Segmente* vom Punkt P auf die Grade r, M und M' *die Fusspunkte* derselben oder des Lothes.

Die Abstände (PM) und (PM') heissen *normale* Abstände des Punktes P von der Graden r oder auch einfach *Abstände*. Die übrigen Segmente oder Abstände, welche durch P und die übrigen Punkte von r gegeben sind, heissen *schiefe* Segmente oder Abstände.

Bem. I. Ist die Grade r die Pollinie von P, so geben alle Punkte derselben mit P verbunden ein rechtes Segment (Satz I und Def. II, § 69), welches normal zu r ist (Satz VI, § 69). Sprechen wir desshalb ohne Weiteres von normalen und schiefen Segmenten eines Punktes P und einer Graden, so meinen wir natürlich, dass es sich nicht um die Pollinie von P handelt.

Satz I. Die von einem Punkt auf eine Grade normalen Segmente sind Supplementsegmente und wenn sie einem rechten Segment gleich sind, so ist die Grade die Pollinie des gegebenen Punktes.

Denn, wenn man die obigen Bezeichnungen beibehält, so ist MPM' die Hälfte der Graden (Def. III, § 6). Ist $(PM) \equiv (PM')$ also (PM) und (PM') rechte Segmente, so geht die Pollinie π von P durch M und M' und die beiden Graden r und π stehen beide senkrecht auf der Graden PM in M und M', was unmöglich ist, wenn sie verschieden sind (Zus. II, Satz VI, § 69).

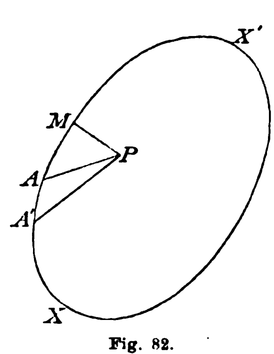


Fig. 82.

Satz II. Von den normalen Segmenten von einem Punkt P auf eine Grade r ist das kleinere das kleinste und das grössere das grösste der schiefen Segmente. Von zwei schiefen Segmenten ist dasjenige das grössere, dessen Punkt in r von dem Fusspunkt des kleinsten normalen Segments am weitesten entfernt oder dem Fusspunkt des grössten normalen Segments am nächsten liegt und umgekehrt.

X und X' seien die Durchschnittspunkte der Graden r mit der Pollinie π von P; (PX) und (PX') sind dann rechte Segmente (Satz I u. Def. II, § 69). Die Punkte X und X' sind die Pole der Graden PM, welche senkrecht auf der Graden r steht, weil PM mit r conjugirt ist (Satz V, § 69) und die Pole von PM in π liegen (Zus. III, Satz I, § 69).

(PM) sei das kleinere normale Segment; wenn es in dem Segment (MX) einen solchen Punkt A gäbe, dass $(PA) < (PM)$ wäre, so würde in (AX) ein Punkt A_1 sein, so dass $(PA_1) \equiv (PM)$ (Satz VII, § 13). Denn (PX) ist ein rechtes Segment, daher grösser als (PM) (Satz I) und mithin auch als (PA) (Einl. d, § 61). Das Dreieck PA_1M wäre aber gleichschenklig und es ginge mithin durch P ein zweites Loth zu der Graden r (Satz IV, § 42), was widersinnig ist (Zus. II, Satz VI, § 69).

Ist (PM) das kleinste, so ist (PM') offenbar das grösste normale Segment. Man sieht leicht, dass auch der zweite Theil des Satzes besteht (siehe Bew. Satz VII, § 54) (Fig. 82).

Satz III. Die schiefen Segmente, welche von einem Punkt zu denjenigen Punkten einer Graden führen, die gleichweit von den Fusspunkten des Lothes von dem Punkt auf die Grade abstehen, sind gleich und bilden mit dem Loth denselben Winkel.

Wie in dem *Euclid*'schen Gebiet (Satz III, § 54).

Bem. II. Es gilt die Def. II, § 54.

Satz IV. Die Projectionen zweier schiefen einander gleichen Segmente sind gleich.

Wie im *Euclid*'schen Gebiet (Satz IV, § 54).

Bem. III. Es gilt auch in der vollständigen Ebene mit demselben Beweis Satz V, § 54 und seine Zusätze. Dagegen gilt Satz VI desselben Paragraphen nicht (Bem. I, § 26).

Satz V. In der vollständigen Ebene kann es kein Viereck mit vier rechten Winkeln geben.

Nehmen wir an, es sei möglich und $ABA'B'$ sei ein solches Viereck. Die Graden AA', BB' stehen senkrecht auf AB und müssen daher durch die Pole R und R' von AB gehen; sie stehen aber auch senkrecht auf der Graden $A'B'$ und gehen also auch durch deren Pole (Satz VI, § 69). Die Pole der beiden Graden AB, $A'B'$ sind aber verschieden, wie es die beiden Graden sind (Satz II, § 69); mithin hätten die Graden AA', BB' vier Punkte gemeinschaftlich, was widersinnig ist (Satz II, § 30).

Bem. IV. Wir beachten, dass dieser Beweis von der Summe der Winkel eines Dreiecks unabhängig ist.

Satz VI. Zwei rechtwinklige Dreiecke, welche eine Kathete und die Hypotenuse gleich haben, sind gleich.

Wie im *Euclid*'schen Gebiet (Satz II, § 55).

Bem. V. Es gibt auch rechtwinklige Dreiecke, von welchen eine Kathete grösser als die Hypotenuse ist. Denn ist r eine Grade, R ein Punkt ausserhalb derselben und (RM) das grösste normale Segment, und man verbindet einen Punkt A von r mit R und M, so erhält man ein bei M rechtwinkliges Dreieck ARM, dessen Kathete (RM) grösser als die Hypotenuse (RA) ist (Satz II).

Def. II. Sind α und β zwei Grade und AB das gemeinschaftliche Loth (Zus. III, Satz VI, § 69), C und C', D und D' die Durchschnittspunkte von AB mit α und β, so bestimmen diese Punkte in AB vier consecutive Segmente, die zu je zweien entgegengesetzt und zu je zweien Supplementsegmente sind. Sie heissen die *normalen* Segmente der beiden Graden.

Satz VII. Zwei Grade haben zwei normale Supplementsegmente, welche bezüglich der einen wie zugleich der andern Graden das kleinste und grösste Segment zwischen ihren Enden sind und welche die Winkel der beiden Graden messen.

Ist (CD) das kleinere auf die beiden Graden α und β normale Segment, so ist (CD) der kleinste Abstand des Punktes C von der Graden β und des Punktes D von α.

Es gibt freilich Segmente (EF) mit den Enden in α und β, welche kleiner als (CD) sind, weil die Graden sich in zwei Punkten schneiden (Zus. Satz IV, § 68). (EF) kann aber nicht zugleich für E und F das kleinste Segment nach den Graden β und α sein. Wenn man den Durchschnittspunkt als zwei auf den beiden Graden zusammenfallende Punkte E und F ansieht, so ist das Segment (EF) Null, es gibt aber keine Grade EF mehr.

Die normalen Segmente messen ferner den Winkel der beiden Graden, weil, wenn X einer der Durchschnittspunkte der beiden Graden ist, CD die Pollinie von X ist (Satz IV, § 69).

Zus. I. Zwei Halbgrade haben nur ein normales Segment, welches den grössten oder kleinsten Abstand zwischen den Punkten der beiden Halbgraden angibt, je nachdem das normale Segment kleiner oder grösser als ein rechtes ist.

Zus. II. Die normalen Segmente zweier conjugirten Graden sind rechte Segmente und umgekehrt.

Denn die beiden Graden stehen senkrecht aufeinander (Satz V, § 69).

Umgekehrt stehen zwei Grade, wenn ein auf sie normales Segment ein rechtes ist, senkrecht aufeinander (Satz IV, § 69) und sind mithin conjugirt (Satz V, § 69).

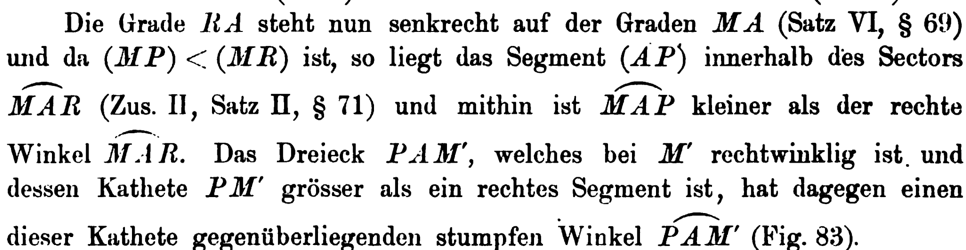


Fig. 83.

Bem. VI. Satz I, § 54 wird durch den folgenden ersetzt:

Satz VIII. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete kleiner als ein rechtes Segment ist, so ist der gegenüberliegende Winkel spitz; ist die Kathete dagegen grösser als ein rechtes Segment, so ist er stumpf.

AMP sei das bei M rechtwinklige Dreieck, M' der zu M entgegengesetzte Punkt und $(PM') > (PM)$. Der Mittelpunkt R von (MM') liegt in dem Segment (PM') und R ist ein Pol der Graden MA (Satz I).

Die Grade RA steht nun senkrecht auf der Graden MA (Satz VI, § 69) und da $(MP) < (MR)$ ist, so liegt das Segment (AP) innerhalb des Sectors $\widehat{MAR}$ (Zus. II, Satz II, § 71) und mithin ist $\widehat{MAP}$ kleiner als der rechte Winkel $\widehat{MAR}$. Das Dreieck PAM', welches bei M' rechtwinklig ist und dessen Kathete PM' grösser als ein rechtes Segment ist, hat dagegen einen dieser Kathete gegenüberliegenden stumpfen Winkel $\widehat{PAM'}$ (Fig. 83).

Zus. Wenn die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ein rechtes Segment ist, so ist auch die Hypotenuse ein rechtes Segment. Die Winkel, welche die Kathete und Hypotenuse mit der andern Kathete bilden, sind rechte.

Denn die zweite Kathete ist die Pollinie des gegenüberliegenden Eckpunktes (Satz I; Satz VI, § 69).

6.

Figuren, die bezüglich einer Graden in der vollständigen Ebene symmetrisch sind.

§ 74. *Bem. I.* Die Sätze IX und X, § 55 gelten mit analogen Beweisen.

Bem. II. Dieselbe Definition symmetrischer Figuren, welche für die *Euclid*'sche Ebene bezüglich einer Graden α gegeben wurde (Def. I, § 56), gilt auch hier.

Es ist zu beachten, dass zwei Punkte A und A' bezüglich einer Graden α auf zweifache Art symmetrisch sind, nämlich bezüglich der beiden Durchschnittspunkte der Graden AA' mit der Graden α.

Satz I. Ein Segment hat zur symmetrischen Figur bezüglich einer Graden ein anderes ihm gleiches Segment. Die Graden der beiden Segmente schneiden sich in zwei Punkten der Symmetrieaxe und bilden gleiche Winkel mit ihr.

Der Beweis ist ähnlich wie zu Satz I, § 56.

Bem. III. Satz II, § 56 gilt ebenfalls mit demselben Beweis.

7.

Der Kreisumfang. — Gemeinschaftliche Punkte zweier Kreisumfänge.

§ 75. *Bem. I.* Auch in der vollständigen Ebene gilt die für das *Euclid*'sche Gebiet gegebene Definition des Kreisumfangs um einen Punkt desselben (Def. I, § 57). Es ist nur zu bemerken, dass die Punkte einer Peripherie auch gleichweit von dem dem Centrum entgegengesetzten Punkt abstehen und dass mithin ein Kreisumfang in der vollständigen Ebene zwei Centren und also auch zwei Radien und zwei Kreise hat.

Uebereink. Unter Centrum und Kreis einer Peripherie verstehen wir immer diejenigen, bezüglich welcher der Radius am kleinsten ist.

Bem. II. Ist der Radius einem rechten Segment gleich, so wird die Peripherie, wie man weiss, die Pollinie des Centrums (Satz I, Def. I, § 69).

Satz I. Die Punkte einer Peripherie stehen gleichweit von der Pollinie des Centrums ab.

Denn der Abstand eines jeden Punktes der Peripherie von der Pollinie des Centrums wird auf dem Radius der Peripherie gemessen, welcher durch den gegebenen Punkt geht und senkrecht auf der genannten Pollinie steht (Satz VI, § 69). Dieser Abstand ist also dem Unterschied zwischen dem Radius und einem rechten Segment gleich (Satz I, Def. II, § 69).

Bem. III. In der *Euclid*'schen Ebene gilt dieselbe Eigenschaft bezüglich der Graden im Unendlichgrossen der Ebene, welche man als absolute Grenzgrade des Centrums ansehen kann (Bem. I, § 39).

Bem. IV. Mit analogen Beweisen gelten, wenn man Def. I berücksichtigt, die Sätze über die Peripherie und die gemeinschaftlichen Punkte zweier Peripherien in den §§ 57 bis 60; nur muss man statt der Graden im Unendlichgrossen da, wo sie benutzt wird, die Pollinie des Centrums der Peripherie substituiren. Dagegen gilt der Satz IX nicht und Satz XII, § 59 ist hier nicht nöthig. Auch bedürfen wir Satz III, § 57 nicht, welcher sich

auf Satz VIII, § 55 stützt und den wir noch zu beweisen haben. [1] Satz I § 58 kann jedoch unabhängig von diesem Satz bewiesen werden, wenn man sich auf Satz II, § 57 bezieht und die Eigenschaft hinzufügt, dass bei der unbegrenzten Abnahme des Bogens nicht nur der Winkel sondern auch die Sehne unbegrenzt abnimmt, ohne den Beweis dieser Eigenschaft von Satz III, § 57 abhängig zu machen.

Bem. V. Einer Peripherie vom Centrum C und Radius r entspricht eine andre Peripherie vom selben Radius und mit dem Centrum in dem zu C entgegengesetzten Punkt, welche die entgegengesetzten Punkte der ersten Peripherie enthält. Eine Grade, welche eine der beiden Peripherien in einem Runkt schneidet, trifft die andre in dem entgegengesetzten Punkt und eine Tangente in einem Punkt der einen ist auch die Tangente in dem entgegengesetzten Punkt der andern und die beiden Peripherien liegen bezüglich dieser Tangente auf entgegengesetzten Seiten.

8.

Andre Eigenschaften der Dreiecke in der vollständigen Ebene.

§ 76. *Satz I. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.*

ABC sei das Dreieck, (AB) die grösste Seite. Für die beiden anderen Seiten gilt der Satz offenbar. Wir wollen annehmen: $(AB) > (AC) + (BC)$. Die beiden Kreise von den Centren A und B und den Radien (AC) und (BC) würden sich in einem Punkt C schneiden, während doch, wenn man $(AB) \equiv d$, $(AC) \equiv r$, $(BC) \equiv r'$ setzt,

$$d > r + r'$$

wäre, was unmöglich ist (Satz IV, § 57 und Satz II, § 60). Ist $(AB) \equiv (AC) + (CB)$ so liegt C auf der Graden AB (Satz IV, § 17); desshalb muss $(AB) < (AC) + (CB)$ sein.

Zus. Jede Seite des Dreiecks ist grösser als die Differenz der beiden übrigen.

Bem. I. Die Sätze VI und Zus. Satz VII, Satz VIII, § 55 gelten und werden ebenso bewiesen.

Def. I. Ist ein Dreieck ABC gegeben, so bestimmen die Pole A_1, B_1, C_1, welche zu seinen Seiten gehören und auf derselben Seite wie die den Seiten gegenüberliegenden Eckpunkte liegen, ein Dreieck, welches wir *reciprokes* oder *Supplement-Dreieck* zu dem gegebenen Dreieck nennen.

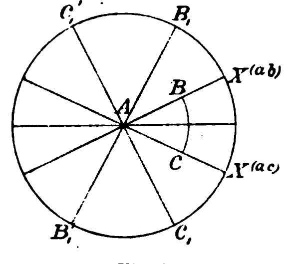


Fig. 84.

Satz II. Ein Dreieck ist reciprok zu seinem reciproken Dreieck.

Denn A, B, C sind die Pole der Seiten B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 des reciproken Dreiecks (Zus. II, Satz I, § 69) und A z. B. liegt auf derselben Seite von B_1C_1 wie A_1, weil A_1 auf derselben Seite von BC liegt wie A, da (AA_1) kleiner als ein rechtes Segment ist, und A_1 sich mithin in dem Theil $A\alpha$ oder $A \cdot B_1C_1$ der Ebene befindet (Fig. 84).

1) Siehe Bem. I, § 76.

Bem. II. In der Zeichnung (Fig. 84) liegen die Punkte B und C in dem Theil $(A\alpha)$ der Ebene; der Satz gilt aber auch dann, wenn ein Punkt oder beide in dem entgegengesetzten Theil $(A'\alpha)$ liegen, wenn A' zu A entgegengesetzt ist.

Satz III. Die Winkel eines Dreiecks werden durch die Supplementsegmente der Seiten des reciproken Dreiecks gemessen.

Wir wollen die Durchschnittspunkte der wenn nöthig von A aus verlängerten Seiten (AB), (AC) des Dreiecks ABC mit der Pollinie α von A mit $X^{(ab)}$, $X^{(ac)}$ bezeichnen. Die Pole B_1 und C_1 von AC und AB liegen in α und ihr Abstand ist supplementär zu demjenigen der Punkte $X^{(ab)}$, $X^{(ac)}$. Denn wenn der Winkel $\widehat{BAC}$ spitz ist, so enthält $\widehat{B_1AC_1}$ den Winkel $\widehat{BAC}$; ist er dagegen stumpf, so ist $\widehat{B_1AC_1}$ in dem Winkel $\widehat{BAC}$ enthalten. In beiden Fällen ist niemals $(B_1C_1) \equiv (X^{(ab)}X^{(ac)})$; mithin ist (B_1C_1) supplementär zu $(X^{(ab)}X^{(ac)})$ (Fig. 84).

Satz IV. Sind in zwei Dreiecken die Winkel gleich, so sind die Dreiecke gleich.

ABC, $A'B'C'$ seien die beiden Dreiecke; $A_1B_1C_1$, A_1', B_1', C_1' ihre reciproken Dreiecke. Die Winkel der beiden ersten werden durch die Supplementsegmente der Seiten der beiden letzten gemessen. Die reciproken Dreiecke haben mithin nach der Voraussetzung des Satzes gleiche Seiten und sind daher gleich und damit auch ihre entsprechenden Winkel, welche die Seiten der gegebenen Dreiecke messen (Satz III, § 17 und Satz III). Da also die Seiten dieser Dreiecke gleich sind, so sind sie es auch selbst (Satz III, § 17).

Bem. III. Dies ist eine weitere Eigenschaft der vollständigen Ebene, welche sie von der *Euclid*'schen unterscheidet; denn in der letzteren reicht die Gleichheit der Winkel nicht aus, damit die Dreiecke gleich seien, wie aus Satz I, § 45 und Satz I, § 40 hervorgeht.

Satz V. In jedem Dreieck ist irgend ein Winkel um zwei Rechte vermehrt grösser als die Summe der beiden andern.

Denn ist ABC das Dreieck, $A_1B_1C_1$ sein reciprokes, so ist:

$$(A_1B_1) < (B_1C_1) + (C_1A_1) \quad \text{(Satz I)}$$

und mithin (Satz III)

$$\pi - \widehat{BCA} < 2\pi - (\widehat{ABC} + \widehat{CAB}),$$

woraus folgt:

$$\widehat{BCA} + \pi > \widehat{ABC} + \widehat{CAB}.$$

Satz VI. In jedem Dreieck ist die Summe der drei Seiten kleiner als vier rechte Segmente.

Man betrachte das Dreieck $A'BC$, wenn A' der zu A entgegengesetzte Punkt ist. Man erhält:

$$(A'C) + (BA') > (BC) \quad \text{(Satz I)};$$

mithin

$$(BC) + (CA) + (AB) < (A'C) + (CA) + (AB) + (BA')$$

(Def. I, § 5 und Einl. e, § 99).

Es ist aber $(A'C) + (CA) \equiv (AB) + (BA') \equiv \pi$; damit ist der Satz bewiesen.

Satz VII. In jedem Dreieck ist die Summe der Winkel grösser als zwei und kleiner als sechs Rechte.

Denn in dem zu ABC reciproken Dreieck $A_1B_1C_1$ ist:

$$(A_1B_1) + (B_1C_1) + (C_1A_1) < 2\pi$$

oder (Satz III)

$$3\pi - (\widehat{ABC}) + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}) < 2\pi$$

das heisst

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} > \pi.$$

Der zweite Theil leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass in dem Dreieck kein Winkel gleich π sein kann.

Bem. IV. Während also in der *Euclid*'schen Ebene die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt (Satz XI, § 55), ist sie in der vollständigen Ebene stets grösser als zwei Rechte.

Satz VIII. Die Summe der Winkel eines Poldreiecks beträgt drei Rechte.

Denn die drei Seiten sind zu je zweien conjugirt und mithin senkrecht zueinander (Zus. I, Satz III und Satz IV, § 69).

9.

Die Richtungen oder der Sinn der Dreieckswinkel und der Büschel der Ebene. — Richtungen der Ebene. — Congruente und symmetrische Figuren. — Stetige Systeme unveränderlicher Figuren.

§ 77. *Bem. I.* In der vollständigen Ebene gelten die Sätze des § 61 mit Ausnahme des Zus. III zu Satz X und dieselben Definitionen und Beweise; es ist aber zu berücksichtigen, dass ein Büschel zwei Centren und ein Winkel zwei Scheitel hat und sie in diesen Sätzen nur in Bezug auf ein Centrum und einen Scheitel betrachtet werden und dass dasselbe Büschel oder der nämliche Winkel von entgegengesetzten Centren oder Scheiteln betrachtet entgegengesetzte Richtungen hat. Bei Satz I braucht man nur den in Anm. LXIV gegebenen Beweis desselben zu substituiren. Dagegen gilt in der vollständigen Ebene der folgende neue Satz:

Satz I. Wenn man in einem Dreieck eine ungrade Anzahl von Eckpunkten mit den entgegengesetzten Punkten vertauscht, so erhält man ein Dreieck von entgegengesetzter Richtung; nimmt man dagegen eine grade Anzahl von Vertauschungen vor, so erhält man ein Dreieck, welches dieselbe Richtung wie das gegebene Dreieck hat.

Denn es seien zwei entgegengesetzte Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gegeben. Die Winkel $\widehat{BCA}$, $\widehat{BC'A}$ haben entgegengesetzte Richtung (Zus. I, Satz X, § 61 und Bem. I); mithin sind die Dreiecke ABC, ABC' entgegengesetzt gerichtet (Satz VIII, § 61 und Bem. I). Ebenso sind es ABC', $A'BC'$; daher haben ABC, $A'BC'$ dieselbe Richtung (Satz VII, Zus. Satz VI, Satz VIII, § 61 und Bem. I). $A'BC'$ und $A'B'C'$ sind aber entgegengesetzt gerichtet, also auch ABC, $A'B'C'$.

Zus. Zwei entgegengesetzte Dreiecke haben entgegengesetzte Richtung.

Bem. II. Es gelten dieselben Sätze über die identischen, congruenten und symmetrischen Figuren mit den nämlichen Beweisen; nur Satz II, § 63 ist ausgenommen. Es gilt aber auch der folgende

Satz II. Zwei entgegengesetzte Figuren sind symmetrisch.

Denn zwei Dreiecke und mithin auch zwei Winkel, die sich entsprechen und entgegengesetzt sind, haben entgegengesetzte Richtung; mithin sind entgegengesetzte Figuren symmetrisch (Satz V, Def. I, § 62 und Bem. II).

Bem. I. In der vollständigen Ebene gelten auch dieselben Eigenschaften der stetigen Systeme unveränderlicher Figuren, die für die *Euclid*'sche Ebene nachgewiesen wurden; nur das Parallelsystem fehlt, welches in der vollständigen Ebene ein Kreissystem wird. Man erhält daher auch dieselben Eigenschaften für die thatsächliche Bewegung ebener Figuren ohne Deformation mit Ausnahme der Translationsbewegung.

10.

Absolute Grenzebenen eines Punktes.

§ 78. *Satz I. Drei Punkte des absoluten Grenzgebiets eines Punktes A bestimmen eine Ebene, welche in diesem Gebiet liegt.*

X_∞, Y_∞, Z_∞ seien die drei gegebenen Punkte; die Graden $X_\infty Y_\infty$, $X_\infty Z_\infty$, $Y_\infty Z_\infty$ liegen sämmtlich in dem absoluten Grenzgebiet von A (Satz III, § 32) und da alle Graden der Ebene $X_\infty Y_\infty Z_\infty$ jede dieser drei Graden in zwei entgegengesetzten Punkten treffen (Zus. Satz IV, § 68), so folgt, dass jede derselben eine absolute Grenzgrade von A ist und dass mithin jeder Punkt der Ebene $X_\infty Y_\infty Z_\infty$ in dem genannten Gebiet liegt d. h. dass alle Punkte der Ebene mit A verbunden ein rechtes Segment liefern.

III. Kapitel.[1])

Weitere Betrachtungen über die Systeme Euclid's, Lobatschewsky's und Riemann's.

1.

Axiom über die Parallelen im Lobatschewsky'schen System. — Das Loth auf eine Grade, welches die Grade schneidet und durch einen Punkt ausserhalb derselben geht, in den drei Systemen der Geometrie unabhängig von den Eigenschaften des Strahlenbüschels und der Ebene betrachtet.

§ 79. *Bem. I.* Ausser den Axiomen I—V, welche für die drei Geometriesysteme gelten (Def. I, § 27), muss man, um das *Lobatschewsky*'sche System zu charakterisiren, der Def. I, § 27 entsprechend das Axiom über die Parallelen geben, wie wir dasselbe in dem

1) Dieses Kapitel benutzen wir aus den in Bem. II, § 27 angegebenen Gründen in den anderen Theilen unsres Buches nicht.

Euclid'schen System in Anm. XVI unter Beschränkung auf das endliche Gebiet allein (Anm. I) und unabhängig von der Ebene gegeben haben. [1])

Ax. VI. **Die Grade, welche einen Punkt X einer gegebenen Graden r mit einem Punkt R ausserhalb derselben verbindet, hat eine Grenzgrade** (Def. I, § 12), **welche die Grade r nicht trifft, wenn der Punkt X die ganze Grade in einer ihrer Richtungen durchläuft und hat eine andre von der ersten verschiedene Grenzgrade, wenn er sie in der entgegengesetzten Richtung durchläuft.**

Bem. II. Aus den Sätzen I, § 4; VIII, § 13 und dem Zus. I der Def. I, § 13 geht hervor, dass die Grade offen ist und mithin der Satz I, § 14 für sie gilt.

Def. I. Die beiden Grenzgraden heissen *die Parallelen* des Punktes R zur Graden r.

§ 80. *Bem. I.* Als Axiom über die Parallelen im *Euclid*'schen Sinn betrachten wir jetzt dasjenige, welches dem obigen analog ist, wenn man voraussetzt, dass die beiden Grenzgraden zusammenfallen, wie Def. II, § 26 oder das Ax. der Anm. XVI zeigt (Satz II, § 46 und Anm. XLIV).

Def. I. Unter den Segmenten, welche durch die Punkte X einer Graden und einen Punkt R ausserhalb derselben bestimmt werden, heisst jedes Segment (RA) *das grösste (oder kleinste)*, für welches die Segmente (RX) kleiner (oder grösser) als (RA) sind und wobei die Punkte X einem hinreichend kleinen Segment ε auf der Graden auf der einen und der andern Seite von A und mit dem Ende A angehören.

Satz I. Ist eine Grade in dem Euclid'schen und Lobatschewsky'schen System gegeben, so gibt es nur ein Loth, welches sie trifft und einen beliebigen Punkt ausserhalb derselben enthält. Das normale Segment ist das einzige kleinste.

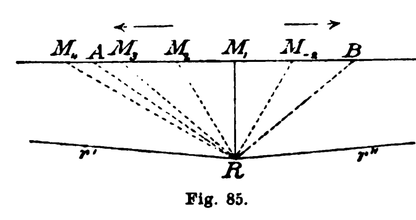


Fig. 85.

AB sei die gegebene Grade, R der gegebene Punkt. Betrachtet man die Grade AB in einer gegebenen Richtung, z. B. in der durch das Segment (AB) gegebenen (Einl. Bez. I, § 64), so gibt es einen durch R gehenden Strahl r'', der die Grenze der durch R gehenden und die Grade AB schneidenden Strahlen ist (Ax. VI; Bem. II, § 78 und Bem. I). Ebenso existirt in der entgegengesetzten Richtung ein analoger Strahl r'.

Wenn sich X auf der Graden befindet und sich ein Strahl RX unbegrenzt dem Strahl r' nähert, so bedeutet dies, dass ein Punkt Y der Graden RX einen Grenzpunkt Y' in r' hat (Def. I, § 12), und sich mithin jeder andre Punkt

1) Behält man unsre abstracten Hypothesen bei, so ist das *Lobatschewsky*'sche System um einen beliebigen Punkt des allgemeinen Raums ausgeschlossen (Bem. II, § 27 und Satz II, § 31). Schickt man dagegen die Hyp. V und VI (§§ 27 und 30) voraus und beschränkt die Hyp. I und II auf die Punktepaare von einem Abstand derselben Art oder einem unendlichkleinen Abstand erster Ordnung bezüglich der ganzen Graden (Einl. Def. I, § 94) derart, dass in dem unendlich kleinen Gebiet zweiter Ordnung um jeden Punkt S ein einziger Punkt existirt, durch welchen absolute Grade gehen, so wäre damit in diesen unendlich kleinen Gebieten und denjenigen höherer Ordnung das *Lobatschewsky*'sche System möglich gemacht. Alsdann würden jedoch Punkte und Graden von verschiedener Beschaffenheit existiren und es würde nicht mehr dieselbe Gleichförmigkeit wie bei Zugrundelegung unsrer Hypothesen bestehen.

X unbegrenzt einem Punkt X_1 von r' nähern kann (Satz IV, § 12). Wenn nun X die Grade AB in der gegebenen Richtung durchläuft, so kann (RX) nicht constant oder kleiner als ein gegebenes Segment bleiben, weil sonst jede der successiven Lagen von X auf der Graden AB einen Grenzpunkt in r' haben könnte und r' die Grade AB schneiden würde, was dem Axiom VI widerspricht. (RX) wird daher unbegrenzt gross, weil es grösser als jedes gegebene Segment werden muss.

Wählt man daher ein Segment (RA), so nimmt das Segment (RX) von r' an nach (RA) hin ab, während es von (RA) an nach r'' hin zunimmt, auch wenn es Anfangs noch kleiner wird. Es muss also wenigstens *ein* kleinstes Segment geben (Def. I). Denn wenn (RB) grösser als (RA) ist (und ein solches Segment muss wie gesagt existiren) und (RA) nicht das kleinste der Segmente (RX) ist, deren Ende X in (AB) liegt, so gibt es andre Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$, für welche $(RA) > (RA_1) > (RA_2) > \ldots > (RA_m) \ldots$ Und wenn (RA_m) noch nicht ein Minimum ist, so hat die Reihe $AA_1 \ldots A_m \ldots$ ein Grenzelement Y, welches mit B nicht zusammenfallen kann und derart ist, dass (RY) kleiner als die vorhergehenden und grösser als die unmittelbar folgenden Segmente ist. Dies gilt wenigstens für diejenigen Segmente, deren Punkte X in einem hinreichend kleinen Segment (YY') von (AB) liegen, es sei denn, dass alle mit ihren Enden in (YY') liegenden Segmente (RY) gleich sind, was für unsre weiteren Folgerungen noch günstiger wäre.

In hinreichend kleinen Segmenten $(Y_1'Y)$ und (YY') auf entgegengesetzten Seiten von Y in AB muss es wenigstens zwei solche Punkte X_1 und X geben, dass $(RX) \equiv (RX_1)$. Denn wählt man einen Punkt X' in $(Y_1'Y)$ und X in (YY'), so weiss man, dass (RX') und (RX) grösser als (RY) sind. Ist $(RX') > (RX)$, alsdann existirt in $(X'Y)$ ein solcher Punkt X_1, dass $(RX_1) \equiv$ $\equiv (RX)$ ist (Zus. I, Def. I und Satz VII, § 13). Der Fall $(RX') < (RX)$ ist dem vorigen analog.

Das Dreieck XRX' ist gleichschenklig und mithin geht durch den Mittelpunkt M von (XX') das von R auf die Grade AB gefällte Loth (Satz IV, § 42 und Anm. XXXVI).

Gäbe es noch ein andres Loth, so sei M_2 sein Fusspunkt und $(M_2M_1) \equiv$ $\equiv (M_1M_{-2})$ (Satz II, § 4). Der Punkt M_{-2} ist der Fusspunkt eines andern Lothes, weil die beiden Dreiecke $M_2M_1R, M_{-2}M_1R$ gleich sind, da die Seite (M_1R) gemeinschaftlich ist, $(M_2M_1) \equiv M_{-2}M_1)$ und die Paare $M_2\dot{M}_1R$, $M_{-2}\dot{M}_1R$ gleich sind (Satz IV, § 42 und Anm. XXXVI).

Ist $(M_3M_2) \equiv (M_2M_1)$ in der Richtung von M_2 nach M_1, so sind die beiden Dreiecke M_3M_2R, M_1M_2R aus demselben Grund gleich; mithin ist $(RM_3) \equiv (RM_1)$ und auch senkrecht auf der Graden AB. Construirt man so die (M_1M_2) gleichen Segmente (M_3M_4), (M_4M_5) u. s. w. $(M_{n-1}M_n)$, so ist $(RM_n) \equiv (RM_1)$ und RM_n senkrecht auf der Graden AB. Jeder Punkt X der Graden in der gegebenen Richtung von M_1 an ist in einem Segment $(M_{n-1}M_n)$ enthalten (Ax. II; Bem. IV, § 4), (RM_n) hat mithin, bei unbegrenzt

wachsendem n, r' zur Grenze. Dies ist aber unmöglich, weil (RM_n) constant ist. Die Annahme, es gebe zwei Lothe, ist daher widersinnig.

Man überzeugt sich jetzt leicht, dass das Minimum (RY) mit (RM_1) zusammenfallen muss. Denn wenn Y nicht mit M_1 zusammenfällt, so sei es z. B. in (AM_1) enthalten. Wählt man in einem Segment $(YY') < (YM_1)$ einen Punkt X auf der entgegengesetzten Seite von Y, so gibt es immer einen solchen Punkt X', dass $(RX) \equiv (RX')$. Weil nun das Dreieck XRX' gleichschenklig ist, so würde der Mittelpunkt von (XX') ein weiteres Loth liefern.

Satz II. 1) Wenn unabhängig von dem Axiom über die Parallelen die Punkte eines Segments (AB) einer Graden gleichen Abstand von einem Punkt R ausserhalb der Graden haben, so sind alle Punkte der Graden gleichweit von R entfernt und jede durch R gehende Grade, welche die Grade r schneidet, ist senkrecht auf r.

2) Ist die Grade geschlossen, so ist der Abstand des Punktes R von den Punkten der Graden ein rechtes Segment, wenn zwei entgegengesetzte Punkte die Grade nicht bestimmen und die Hälfte der Graden, wenn die entgegengesetzten Punkte die Grade bestimmen.

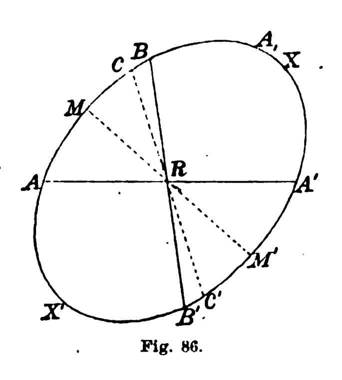


Fig. 86.

1) Da (AR) und (BR) gleich sind, so erhalten wir durch den Mittelpunkt M ein Loth MR zur Graden AB (Satz IV, § 42 und Anm. XXXVI). C sei nun ein Punkt von (AB) und liege z. B. in dem Segment (MB). Die Grade RC steht ebenfalls senkrecht auf AB, weil man zwei Punkte X und Y gleichweit von C entfernt in dem Segment AB auswählen kann; es braucht nur $(CY) < (CB)$ zu sein. Macht man das Segment $(CB_1) \equiv (CB)$ (Zus. I, Satz III, § 4), so steht (RB_1) ebenfalls senkrecht auf AB und mithin auch RB, weil die Dreiecke BCR, B_1CR identisch sind. Aehnlich ist es mit RA.

Man betrachte nun das Segment $(BA_1) \equiv (BA)$; aus der Gleichheit der Dreiecke ARB, A_1RB folgt $(RA) \equiv (RA_1)$ (Zus. Satz III, § 16). Ebenso verhält es sich, wenn Y ein beliebiger Punkt von (BA_1) ist und man das Segment $(BY_1) \equiv (BY)$ in dem Segment (BA) betrachtet; man erhält $(RY) \equiv$ $\equiv (RY_1)$. Mithin stehen alle Punkte des Segments (BA_1) gleichweit von R ab und die Graden, welche diese Punkte mit R verbinden, sind senkrecht zur Graden AB.

Dasselbe gilt für das (AB) gleiche Segment, welches A zum zweiten Ende in der Richtung von A nach B hat (Satz II, § 4).

Nun ist sowohl, wenn die Grade offen als wenn sie geschlossen ist (Satz I, § 4), ein beliebiger Punkt der Graden Punkt eines der (AB) gleichen consecutiven Segmente auf der Graden von A nach B hin und damit ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

2) Ist die Grade geschlossen und bestimmen zwei entgegengesetzte Punkte die Grade nicht [das von uns gewählte Merkmal des absoluten *Riemann*'schen

Systems (Hyp. V und VI)], so schneidet die Grade RA die Grade AB auch in dem entgegengesetzten Punkt A' und es ist $(RA) \equiv (RA')$ und weil (ARA') die Hälfte der Graden ist, so ist (RA) ein rechtes Segment (Def. IV, § 29).

Im zweiten Fall des *Riemann*'schen Systems, wenn nämlich zwei entgegengesetzte Punkte die Grade bestimmen, fällt der Punkt A' mit A zusammen und ist (RA) die Hälfte der Graden. Diese Hälfte kann in Bezug auf die Winkel des Gradenbüschels auch ein rechtes Segment genannt werden.

Bem. II. Satz I, § 31 gilt unabhängig von den Eigenschaften der Ebene ebenfalls.

Satz III. Wenn ein von R auf eine geschlossene Grade r normales Segment (RM) ein rechtes ist, so stehen alle Punkte von r gleichweit von R ab.

Die Punkte in r, welche gleichen Abstand von M haben, sind auch gleichweit von R entfernt (Satz IV, § 42, Anm. XXXVI und Zus. Satz III, § 16). Ist (RM) ein rechtes Segment, so ist dies auch das Supplementsegment (RM'), weil M und M' entgegengesetzte Punkte auf der Graden sind (Def. III, § 6) unabhängig davon ob sie zusammenfallen oder nicht. Ist mithin (RM) z. B. kleiner als (RA), so ist (RM') grösser als (RA'). Ist aber $(AM) \equiv (MB)$ in r, so erhält man $(RA) \equiv (RB)$; es gibt also zwischen B und A' einen Punkt X derart, dass $(RX) \equiv (RM)$ ist. Damit ist der Satz bewiesen (Satz I, § 31 und Bem. II).

Satz IV. Falls die geschlossene Grade r kein einem rechten gleiches normales Segment (RM_1) hat, so geht durch einen Punkt R ausserhalb derselben nur eine einzige Normale, welche die Grade r schneidet.

Dieser Satz wird ähnlich wie Satz I bewiesen. (RM_1) sei ein normales Segment, welches kleiner als ein rechtes Segment sein muss und (RM_1') das entgegengesetzte Segment. Führt man die Construction aus, welche in Satz I unter der Voraussetzung angegeben wurde, dass ein zweites Loth RM_2 existire so erhält man:

$(M_1 M_2)\, n < (M_1 M_1') < (M_1 M_2)\,(n+1)$. (Einl. c', § 81 und Bem. IV, § 4)

Dabei ist $(RM_n) \equiv (RM_{n+1}) \equiv (RM_1)$ kleiner als ein rechtes Segment. (RM_1') ist aber grösser als ein rechtes Segment, mithin müsste es in $(M_n M_1')$, $(M_1' M_{n+1})$ wenigstens zwei solche Punkte X und X_1 geben, dass (XR) und $(X_1 R)$ rechte Segmente sind (Zus. I, Def. I und Satz VII, § 13), was gegen die Voraussetzung ist (Satz I, § 31 und Bem. II). Es ist desshalb nicht möglich, dass es zwei normale Segmente gibt, die in verschiedenen Graden liegen.

Auf dieselbe Art, wie bei dem *Euclid*'schen und *Lobatschewsky*'schen System (Satz I) lässt sich beweisen, dass das normale Segment, welches kleiner als ein rechtes ist, das einzige kleinste und mithin das Supplementsegment das einzige grösste ist. [1])

---

1) Wir haben diese Sätze nicht nur gegeben, um Eigenschaften nachzuweisen, welche die drei Geometriesysteme unabhängig von der Ebene gemeinschaftlich haben, sondern auch, weil man vielleicht mit ihrer Hülfe und mit Hülfe des passend modificirten Satzes I, § 43 dahin kommen kann, die Eigenschaft des Satzes IV, § 46 bezüglich der Ebene für alle Geometriesysteme zu beweisen. Uns ist dieses ohne weitere Axiome nur für das

2.

Bemerkungen über die Lobatschewsky'sche Ebene. — Weitere Eigenschaften, welche das Euclid'sche System unter der Voraussetzung auszeichnen, dass die den drei Ebenen gemeinschaftlichen Eigenschaften gegeben sind. — Die Summe der Dreieckswinkel in dem Lobatschewsky'schen System.

§ 81. *Def. I.* In dem *Lobatschewsky*'schen System verstehen wir unter *unvollständigem Strahlenbüschel* das System einer Dimension von Strahlen, welche die Punkte einer Graden r mit einem Punkt R ausserhalb derselben, die parallelen Strahlen eingeschlossen, verbinden.

Bem. I. Stellt man Betrachtungen an, welche denen beim Beweis des Satzes III, Anm. XLVI analog, aber kürzer sind, so lässt sich beweisen, dass die zwei parallelen Grenzstrahlen, welche sich von einem Punkt aus zu einer Graden r ziehen lassen, denselben Winkel mit dem von R auf die Grade r gefällten Loth bilden (Satz I).

Für das unvollständige Büschel gilt auch Satz I, § 43; nur ist die Grade r' (Fig. 43) nicht parallel zu r, sondern ist eine Grade, welche die Grade r nicht schneidet (Anm. XVI). Die von R aus zu r parallel gezogenen Graden sind wegen der Identität der beiden Figuren Rr, Rr' auch parallel zu r'.

Construirt man ein weiteres unvollständiges Büschel mit dem Centrum in R und einer Transversalen (AB'), welche die beiden früheren Graden r und r' derart trifft, dass $(RA) \equiv \equiv (RB) \equiv (RB')$ (Satz I, § 80 und Fig. 43), so erhält man ein *vollständiges Büschel*. Das vollständige Büschel liefert die Ebene und es bleibt noch die Eigenschaft des Satzes IV, § 46 (Def. I, § 46) zu beweisen, welche wir also hier voraussetzen.[1])

Mit Hülfe ähnlicher Betrachtungen, wie diejenigen waren, welche uns zum Beweis des Satzes III der Anm. XLVI und des Satzes IV derselben Anm. dienten, lässt sich beweisen, dass das vollständige Büschel *Lobatschewsky*'s in der Position seiner Theile identisch und stetig ist. Daraus folgt dann, dass man in einem Punkt einer Graden in der Ebene nur ein Loth auf diese Grade errichten kann (Einl. b, § 99).

Auf Grund dieser Eigenschaft des vollständigen Büschels lassen sich dann einige Eigenschaften der Kreislinie ähnlich wie beim *Euclid*'schen System nachweisen, besonders diejenige, welche sich auf die Abstände eines Punktes von den Punkten einer Kreislinie bezieht und die Eigenschaft bezüglich der Durchschnittspunkte zweier Kreislinien. Wir bemerken hier noch, dass Satz I, § 58 nicht von Satz III desselben Paragraphen abhängt, welcher sich auf Satz VIII, § 55 stützt. Dieser letzte Satz wird später bewiesen und aus ihm wird die Construction gleicher Dreiecke abgeleitet, welche zwei entsprechende Eckpunkte in beliebigen gegebenen Punkten derselben oder verschiedener Ebenen haben. Daraus geht dann die Identität aller vollständigen Büschel und aller Ebenen hervor (Anm. LXII), wie auch die Identität der Theile, in welche eine Ebene durch ihre Graden zerlegt wird.

So wird die Grundeigenschaft bewiesen, dass jede Seite in einem Dreieck kleiner als die Summe der beiden andern ist, entweder wie beim *Euclid*'schen (Satz I, § 55) oder wie beim *Riemann*'schen System. Auf dieselbe Art werden die übrigen Sätze des § 55 bewiesen mit Ausnahme des Satzes XI, von welchem jedoch der Zusatz in dem *Lobatschewsky*'schen System gilt und unabhängig von seinem Hauptsatz wie bei *Euclid* und unter Berücksichtigung der Bemerkung der Anm. LV bewiesen werden kann.

Satz I. Wenn ein ebenes Viereck vier rechte Winkel hat, so ist die Riemann'sche Hypothese ausgeschlossen und die gegenüberliegenden Seiten desselben sind gleich.

Euclid'sche System gelungen, wobei wir uns jedoch auf die Eigenschaften der Parallelen in diesem System gestützt haben (Satz I, § 45).

Wir haben übrigens die übrigen Eigenschaften der *Riemann*'schen Ebene und auch die eben genannte bewiesen und dabei die Hypothese VII für einen einzigen Punkt gelten lassen. Bezüglich der *Lobatschewsky*'schen Ebene siehe den folgenden Paragraphen.

1) Siehe die vorhergehende Anm.

Der erste Theil des Satzes wurde schon bei der Behandlung der vollständigen Ebene bewiesen (Satz V, § 73) und gilt auch für die zweite Form des *Riemann*'schen Systems. Die Grade kann daher nicht geschlossen sein und die Eigenschaft des Zus. Satz XI, § 55 besteht bedingungslos (Bem. I).

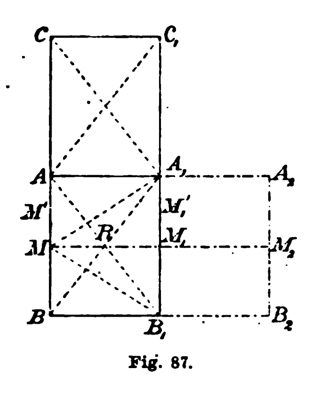


Fig. 87.

AA_1BB_1 sei das Viereck und es möge $(AB) > > (A_1B_1)$ sein. Nimmt man in (AB) das Segment $(AK) \equiv (A_1B_1)$, so sind in dem Viereck AA_1B_1K die Winkel bei A und A_1 rechte und daher gleich, mithin auch $\widehat{AKB_1} \equiv \widehat{A_1B_1K}$ (Satz VI, § 17). Der Winkel $\widehat{A_1B_1K}$ ist aber kleiner als ein Rechter, während $\widehat{AKB_1}$ als Aussenwinkel des Dreiecks KBB_1 grösser als ein rechter sein muss, was widersinnig ist. Mithin muss $(AB) \equiv (A_1B_1)$ und analog $(AA_1) \equiv (BB_1)$.

Satz II. Wenn ein ebenes Viereck vier rechte Winkel hat, so ist in jedem ebenen Viereck, welches drei rechte Winkel hat, auch der vierte ein Rechter.

ABA_1B_1 sei das Viereck mit vier rechten Winkeln. Die Grade MM_1, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten z B. (AB), (A_1B_1) verbindet, steht senkrecht auf diesen Seiten (Satz VI, § 17).

Das Viereck AMA_1M_1 hat ebenfalls vier rechte Winkel und mithin wird auch die Grade, welche die Mittelpunkte von (AM), (A_1M_1) verbindet, senkrecht auf den Graden AB, A_1B_1 stehen. Halbirt man also (AB) und (A_1B_1) und fährt so immer weiter fort, so stehen die Graden, welche die betreffenden Theilungspunkte verbinden, senkrecht auf den Graden AB, A_1B_1. Verfährt man nun ähnlich, wie bei dem Beweis des Satzes I, § 45, so lässt sich zeigen, dass jede Grade, welche zwei von A und A_1 gleichweit abstehende Punkte der Segmente (AB), (A_1B_1) verbindet, auf den Graden AB, A_1B_1 senkrecht steht.

Construirt man ferner auf den Graden AB und A_1B_1 in den Richtungen von B nach A und von B_1 nach A_1 das Viereck CC_1A_1A derart, dass $(AC) \equiv \equiv (A_1C_1)$, so ist $CC_1A_1A \equiv AA_1B_1B$. Denn die Dreiecke CAA_1, BAA_1 sind gleich (Zus. Satz III, § 16) und mithin $(CA_1) \equiv (BA_1)$ und $\widehat{CA_1A} \equiv \equiv \widehat{BA_1A}$ und daher auch $\widehat{CA_1C_1} \equiv \widehat{BA_1B_1}$. Die Dreiecke BA_1B_1, CA_1C_1 sind gleich, weil sie die Seiten (A_1B_1), (C_1A_1); (BA_1), (A_1C) und das eingeschlossene Paar gleich haben; mithin ist der Winkel A_1C_1C ein Rechter. Ebenso ist der Winkel $\widehat{ACC_1}$ ein Rechter (Satz VI, § 17) und mithin $(CC_1) \equiv \equiv (AA_1)$ (Satz I). Folglich sind die beiden Rechtecke BB_1AA_1, AA_1CC_1 gleich (Satz VII, § 17).

Ist N ein beliebiger Punkt der Graden AB, z. B. auf derselben Seite von A wie C, so gibt es immer eine solche Zahl n, dass

$$(AB)n > (AN).$$

Errichtet man in N ein Loth auf AB, so steht dasselbe auch senkrecht auf der Graden A_1B_1.

Dies gilt auch für die Graden AA_1, BB_1.

Ist nun ein beliebiges Viereck $XX'Y'Y$ gegeben, welches drei rechte Winkel hat z. B. die bei X, Y und X', so sei auf der Graden AB das Segment $(AB) \equiv (XY)$ und man ziehe von A und B in dem einen Theil der Ebene die mit (XX'), (YY') identischen normalen Segmente (AA_1), (BB_1') und von A_1 das zu AA_1 normale Segment (A_1B_1). Das Viereck $AA_1B_1'B$ ist dem Viereck $XX'Y'Y$ gleich; denn die Dreiecke AA_1B, $XX'Y$; ABB_1', XYY' sind gleich, weil sie zwei Seiten und das eingeschlossene Paar gleich haben (Satz III, § 16) und mithin ist $(AB_1') \equiv (XY')$, $(BA_1) \equiv (YX')$ und auch $\widehat{A_1BB_1'} \equiv \widehat{X'YY'}$. Daher sind die beiden Dreiecke A_1BB_1', $X'YY'$ gleich und $(A_1B_1') \equiv (X'Y')$ (Zus. Satz III, § 17). Folglich sind die beiden genannten Vierecke gleich (Satz VIII, § 17)

Wenn der Punkt B_1' nicht mit dem Punkt B_1 zusammenfiele, d. h. wenn der Winkel bei B_1' in dem Viereck $AA_1B_1'B$ kein rechter wäre, so würde, weil nach der vorstehenden Construction ein Viereck $AA'_1B_1'B$ mit vier rechten Winkeln existiren muss, der Punkt A_1' nicht mit A_1 zusammenfallen. Es liessen sich also von B_1' zwei Lothe auf die Grade AA_1 fällen, was im Widerspruch mit Satz I, § 80 steht (Fig. 87).

Satz III. Wenn ein Viereck vier rechte Winkel hat, so gilt die Euclid'sche Hypothese.

In der oben beschriebenen Figur könnten wir die Graden AB, A_1B_1 als zwei beliebige Lothe auf der Graden AA_1 ansehen. Die Grade BA_1 macht mit AB, A_1B_1 gleiche Winkel ABA_1, BA_1B_1; denn die Dreiecke BAA_1, A_1BB_1 sind gleich, weil sie die drei Seiten gleich haben.

Die Grade BA_1 kann aber als eine beliebige Transversale der beiden Graden AB, A_1B_1 betrachtet werden, weil sie immer die Diagonale eines der oben beschriebenen Reckteeke ist, von denen sich zwei Seiten auf den Graden AB, A_1B_1 befinden.

Ferner sind die Dreiecke ABA_1, BAB_1 gleich, weil sie zwei Seiten und das eingeschlossene Paar gleich haben, also ist $\widehat{BAB_1} \equiv \widehat{ABA_1}$ und das Dreieck ARB gleichschenklig (Satz V, § 55 und Bem. I). Aus demselben Grund ist auch das Dreieck A_1RB_1 gleichschenklig. Die beiden Dreiecke ARB, A_1RB_1 sind gleich, weil sie drei Winkel und eine Seite gleich haben; mithin ist $(AR) \equiv (RB_1)$, $(BR) \equiv (RA_1)$. Die beiden Figuren $R \cdot AB$, $R \cdot A_1B_1$ sind identisch und die sich entsprechenden Punkte X und X_1 in AB und A_1B_1 liegen daher in einer Linie mit R und haben gleichen Abstand von R. Dies gilt aber für den Mittelpunkt jeder Transversalen BA_1 der beiden Graden AB, A_1B_1; folglich ist die Grade AB parallel zur Graden A_1B_1 in dem *Euclid*'schen Sinn und der Form des in Anm. XVI gegebenen Axioms entsprechend (Fig. 87).

Ist nun eine beliebige Grade r der Ebene und ein ebenfalls beliebiger Punkt P ausserhalb der Graden gegeben, so fälle man von P das normale

Segment (PP_1) auf die Grade r und wähle einen Punkt A derart, dass man ein auf die Grade A_1B_1 normales Segment (AA_1) erhält, welches PP_1 gleich ist. Zu diesem Zweck braucht man nur von A ein Loth auf A_1B_1 zu fällen (Satz I, § 80) und $(AA_1) \equiv (PP_1)$ zu nehmen. Die beiden Figuren $A \cdot A_1B_1$ und Pr sind identisch (Satz V, § 54 und Bem. I) und mithin gibt es nur *eine* Parallele durch P zur Graden r, welche eben der durch A zu A_1B_1 parallel gezogenen Graden AB entspricht. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz IV. Haben drei Punkte einer gegebenen Graden gleichen Abstand von einer andern Graden in der Ebene, so gilt die Euclid'sche Hypothese.

AB sei die gegebene Grade, A, B, C die drei Punkte derselben, welche in einer durch die Grade gehenden Ebene gleichen Abstand von den drei Punkten A', B', C' einer andern Graden $A'B'$ haben, so dass A', B', C' als die Fusspunkte der von A, B, C auf die Grade $A'B'$ gefällten Lothe gegeben sind und $(AA') \equiv (BB') \equiv (CC')$ ist.

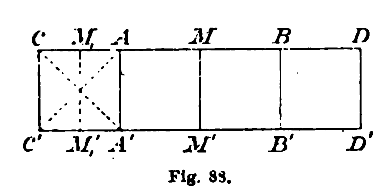


Fig. 88.

In dem Viereck $AA'BB'$ ist $\widehat{A'AB} \equiv \widehat{B'BA}$ (Satz VI, § 17). Einer der drei Punkte A, B, C muss in dem Segment der beiden andern enthalten sein; A liege in dem Segment (BC). In den Vierecken $AA'CC'$, $BB'CC'$ ist

$$\widehat{C'CA} \equiv \widehat{A'AC}, \quad \widehat{C'CB} \equiv \widehat{C'CA} \equiv \widehat{B'BC}.$$

Es ist aber auch $\widehat{B'BC} \equiv \widehat{A'AB}$, folglich $\widehat{A'AB} \equiv \widehat{C'CA} \equiv \widehat{A'AC}$ d. h. die Graden $A'A$, $B'B$, $C'C$ stehen senkrecht auf der Graden AB.

Weil nun das Viereck $AA'BB'$ vier rechte Winkel hat, so ist damit der Satz bewiesen (Satz III) (Fig. 88).

Satz V. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt, so ist sie auch in jedem andern Dreieck so gross und es gilt die Euclid'sche Hypothese.

Denn ABA_1 sei das bei A rechtwinklige Dreieck und die Summe der beiden andern Winkel bei B und A_1 betrage einen Rechten. Man beschreibe das Dreieck BA_1B_1 derart, dass $\widehat{BA_1B_1} \equiv \widehat{ABA_1}$, $\widehat{A_1BB_1} \equiv \widehat{BA_1A}$. Die beiden Dreiecke BAA_1 und A_1B_1B sind in allen drei Geometriesystemen gleich, weil sie eine Seite und die zwei anliegenden Winkel gleich haben (Satz X, § 55; Bem. I, § 74 und Bem. I); mithin ist $(AB) \equiv (A_1B_1)$, $(AA_1) \equiv (BB_1)$ und $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{BB_1A_1}$.

In dem Viereck ABA_1B_1 sind die Winkel bei A und B_1 Rechte, ebenso ist der Winkel bei A_1 ein Rechter, da nach der Voraussetzung $\widehat{ABA_1} + \widehat{AA_1B} \equiv \frac{\pi}{2}$ und weil $\widehat{ABA_1} \equiv \widehat{BA_1B_1}$, so ist auch $\widehat{B_1A_1B} + \widehat{BA_1A} \equiv \frac{\pi}{2}$. Weil ferner die beiden Dreiecke ABB_1, B_1A_1A die drei Seiten gleich haben und desshalb gleich sind, so ist auch der Winkel bei B ein Rechter.

In diesem Fall gilt aber die *Euclid*'sche Hypothese (Satz III). Damit ist der Satz bewiesen (Satz XI, § 55) (Fig. 88).

Bem. II. Ohne auf den Satz XI, § 55 zurückzukommen, kann man mittelst der zum Beweis des Satzes II beschriebenen Figur zuerst zeigen, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt und dann in einem beliebigen Dreieck ABC, indem man von einem beliebigen Eckpunkt A desselben das Loth auf die gegenüberliegende Seite BC fällt.

Satz VI. Falls die Grade offen ist, beträgt die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks zwei Rechte oder weniger als zwei Rechte.

ABC sei das Dreieck und die Summe seiner Winkel sei $\pi + \alpha$. Man verbinde A mit dem Mittelpunkt E von (CB) und mache $(ED) \equiv (AE)$. Die beiden Dreiecke AEC, DEB sind gleich und mithin ist die Summe der Winkel des Dreiecks ABD ebenfalls $\pi + \alpha$. Der Winkel BAC ist in die Theile BAE und EAC getheilt worden und in dem Dreieck ABD ist $\widehat{BDA} \equiv \widehat{DAC}$; mithin ist entweder der Winkel BAD oder der Winkel BDA kleiner als die Hälfte von $\widehat{BAC}$ oder dieser Hälfte gleich, wenn das Dreieck BAC gleichschenklig und CB seine Grundlinie ist (Def. III, § 9). Verfährt man ebenso mit dem Dreieck ABD und halbirt die dem kleineren Winkel gegenüberliegende Seite und fährt so fort mit den so erhaltenen neuen Dreiecken, in welchen die Summe der Winkel $\pi + \alpha$ ist, so kommt man schliesslich zu einem Dreieck, in welchem sich ein Winkel befindet, der kleiner als $\frac{1}{2}\alpha$ ist. In diesem Dreieck müsste mithin die Summe der beiden andern Winkel grösser als zwei Rechte sein, was widersinnig ist nach Zus. I, Satz XI, § 55, welcher unabhängig von Satz XI und in dem *Euclid*'schen und *Lobatschewsky*'schen System bedingungslos gilt. Es muss daher α entweder Null oder negativ sein (Fig. 89).

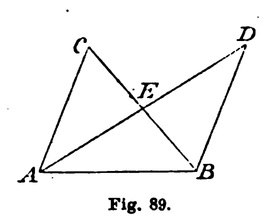


Fig. 89.

Zus. Die Summe der Dreieckswinkel ist in dem Lobatschewsky'schen System kleiner als zwei Rechte.

Denn die Summe dieser Winkel kann nicht grösser als zwei Rechte sein (Bem. II, § 79). Wäre sie aber zwei Rechte, so ziehe man von dem Scheitel des grössten Winkels ein Loth auf eine Seite. Man erhält dann ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem, wie man leicht sieht, die Summe der Winkel ebenfalls zwei Rechte betragen würde, was der Voraussetzung des Satzes widerspricht (Satz V).

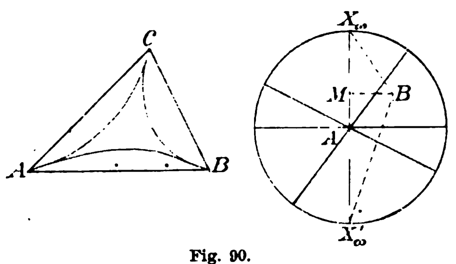


Fig. 90.

Bem. III. Es lässt sich leicht zeigen, dass man, wenn ein Strahl und ein Punkt P ausserhalb desselben gegeben ist, durch P einen andern Strahl ziehen kann, welcher den gegebenen Strahl schneidet und mit ihm einen Winkel macht, der kleiner als jeder gegebene Winkel ist, falls die Grade offen ist. Betrachtet man mithin in dem *Lobatschewsky*'schen System drei zu je zweien parallele Graden, die nicht alle drei zueinander parallel sind,

als Seiten eines Dreiecks, dessen Eckpunkte im Unendlichgrossen liegen, so ist die Summe der Winkel eines solchen Dreiecks gleich Null.

Bem. IV. Das Dreieck *Lobatschewsky*'s kann auf die in Fig. 90 angegebene Art in dem *Euclid*'schen Dreieck dargestellt werden, während die Ebene *Lobatschewsky*'s sich durch die inneren Punkte eines Kreises derart darstellen lässt, dass die Winkel um den Punkt A, das Centrum des Kreises, beibehalten werden und jede Sehne abgesehen von ihren Enden eine Grade in der Ebene *Lobatschewsky*'s vorstellt. Die gleichen Segmente in einem Strahl (BX_∞) werden durch Segmente wiedergegeben, die gegen X_∞ hin abnehmen und die Reihe derselben hat von B an das Segment (BX_∞) zum Grenzsegment.

Buch III.

Der Raum von drei Dimensionen.

I. Kapitel.

Der Euclid'sche Raum von drei Dimensionen.

1.

Die Construction des Sterns und des Raums von drei Dimensionen. — Ihre ersten Eigenschaften.

§ 82. *Def. I.* Eine Ebene π und ein Punkt P ausserhalb derselben sei gegeben (Bem. II, § 2).[1] Wir verbinden den Punkt P mit den Punkten der Ebene π. Die so erhaltenen Graden als Elemente betrachtet bestimmen eine Figur, welche *Stern erster Art* oder einfach *Stern*[2]) heisst, P ist das Centrum, π die Directrix desselben. Diese Figur bezeichnen wir mit $(P\pi)$.[3])

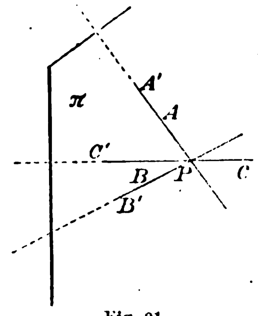


Fig. 91.

Def. II. Wenn man dagegen den durch den Punkt P begrenzten Strahl als Element betrachtet, so behält die aus allen durch den Punkt P auf den obigen Graden begrenzten Strahlen gebildete Figur den Namen Stern und ihre Elemente heissen *die Strahlen* des Sterns.

Bem. I. Nach dieser Definition bestimmt jede Grade und jedes Büschel und mithin jede Ebene des Sterns einen Punkt und eine Grade der Ebene π.

Satz I. Zwei Grade (oder zwei Strahlen) eines Sterns bestimmen ein dem Stern angehöriges Büschel.

Denn zwei Punkte der Ebene π bestimmen eine Grade r, welche in der Ebene liegt (Satz IV, § 46). Weil nun das Büschel durch den Punkt P und

---

1) Siehe Anm. II.

2) Der Kürze wegen ist hier das Wort *Stern* statt des sonst gebräuchlichen *Strahlenbündel* gebraucht worden.

3) In der endlichen *Euclid*'schen Ebene muss man auch die zur Ebene π parallelen Graden berücksichtigen, wenn man nicht den uneigentlichen Punkt im Unendlichgrossen einführen will (Anm. XLIV).

die Grade bestimmt ist (Def. III, § 27 oder Def. I, § 30) und weil jede Grade des Büschels die Grade r schneidet (ist sie parallel zu r, so liegt der Durchschnittspunkt im Unendlichgrossen), so gehört jede Grade des Büschels dem Stern an.

Bem. II. Wie die Ebene bezüglich ihrer Punkte (Def. I, § 46), so ist auch der Stern erster Art bezüglich seiner Strahlen oder Graden ein System von zwei Dimensionen.

Def. III. Betrachtet man in dem Stern den Punkt als Element, so heisst die sich so ergebende Figur *der Raum von drei Dimensionen* oder einfach der *Raum*. Wir bezeichnen ihn mit dem Buchstaben S oder auch mit dem Symbol $(P\pi)$.

Def. IV. Jede Grade von π bestimmt mit P eine Ebene, welche dem Raum S angehört. Wir sagen daher, die Ebene *liege* in dem Raum S und *gehe* durch den Punkt P. Alle Graden von π bestimmen mithin alle durch P gehenden Ebenen von S. Umgekehrt schneidet nach der Definition jede durch P in S gehende Grade und Ebene π bezüglich in einem Punkt und einer Graden (Bem. I).

Bem. III. Die ersten Dinge im Raum sind daher der Punkt, die Grade und die Ebene; sie heissen desshalb Grunddinge.

Die Punkte und Graden wollen wir im Allgemeinen wie bisher mit Römischen grossen bezüglich kleinen, die Ebenen mit griechischen Buchstaben bezeichnen.

Satz II. Eine Grade, welche zwei Punkte mit dem Raum gemeinschaftlich hat, liegt vollständig im Raum.

A und B seien die Punkte, welche die Grade mit dem Raum S gemeinsam hat. Wir verbinden den Punkt P mit A und B mittelst der beiden Graden a und b, welche die Ebene π in den beiden Punkten A' und B' schneiden (Bem. I); die Ebene PAB liegt vollständig in dem Raum (Def. IV) und weil die Grade AB in dieser Ebene liegt (Satz IV, § 46), so liegt sie auch in dem Raum S (Def. I, § 2 und Einl. a, § 13) (Fig. 91).[1]

Satz III. Eine Ebene, welche drei nicht in grader Linie liegende Punkte mit dem Raum gemeinschaftlich hat, liegt vollständig im Raum.

A, B, C seien die drei Punkte, welche die Ebene bestimmen (Zus. II, Satz V, § 46). Die Graden AB, BC, CA liegen in der Ebene und im Raum S (Satz II). Eine beliebige Grade der Ebene schneidet jede dieser drei Graden in einem Punkt, welcher in S liegt (Zus. II, Satz III, § 46) und mithin muss sie selbst vollständig in dem Raum S liegen (Satz II); folglich liegt auch die ganze Ebene in S (Def. IV).

Zus. I. Liegen die drei Punkte im Unendlichgrossen, so liegt ihre Ebene vollständig im Unendlichgrossen.

Denn die drei Graden, welche die drei Punkte zu je zweien verbinden, sind im Unendlichgrossen gelegen (Zus. Satz VII, § 23 und Bem. § 31), wie auch jede andre Grade, welche sie schneidet d. h. jede andre Grade der Ebene.

1) Benutzt man die Grade als Grundform, so muss man offenbar auch diesen Satz beweisen, der schon für sich allein auch ohne Bem. II und Def. II, § 2 die Möglichkeit geometrischer Räume von mehr als drei Dimensionen durchblicken lässt, indem er die Existenz eines Punktes ausserhalb des Raums zulässt.

Satz IV. Der Raum kann durch eine Ebene und einen beliebigen Punkt des Raums erzeugt werden, wenn nur der Punkt nicht in der Ebene liegt.

Die Räume $(P\pi)$, $(P'\pi)$ fallen zusammen, weil jede Grade, welche einen Punkt von π mit P' verbindet, in dem Raum $(P\pi)$ liegt (Satz II) und mithin ist jeder Punkt von $(P'\pi)$ (Def. III) ein Punkt des Raums $(P\pi)$. Und umgekehrt ist P ein Punkt des Raums $(P'\pi)$, weil die Grade PP' die Ebene π in einem Punkt P_1 trifft, da P' ein Punkt des Raumes $(P\pi)$ ist (Bem. I). Ist ein beliebiger Punkt R von $(P\pi)$ gegeben, so schneidet die Grade PR die Ebene π in einem Punkt R_1, der im Unendlichgrossen liegen kann. Die Grade $P'R$ in der Ebene PP_1R_1 schneidet die Grade P_1R_1 in einem Punkt (Zus. II, Satz III, § 46); mithin ist R ein Punkt des Raums $(P'\pi)$, d. h., jeder Punkt von $(P\pi)$ ist ein Punkt von $(P'\pi)$.

Dasselbe gilt von den Räumen $(P\pi)$, $(P\pi')$. Denn wenn A', B', C' drei nicht in grader Linie liegende Punkte von π' sind, so schneiden die Graden PA', PB', PC' die Ebene π in drei Punkten A, B, C, weil A', B', C' in dem Raum $(P\pi)$ liegen. Mithin ist die Ebene π in dem Raum $(P\pi')$ enthalten (Satz III) und jede Grade, welche P mit einem Punkt von π verbindet, liegt vollständig in dem Raum $(P\pi')$ (Satz II). Daraus folgt, dass auch die Räume $(P'\pi')$, $(P\pi')$ und also auch $(P\pi)$, $(P'\pi')$ zusammenfallen (Einl. Anm. 2 zu § 13).

Zus. I. Vier beliebige nicht in einer Ebene gelegene Punkte bestimmen den Raum von drei Dimensionen und dieser wird durch vier beliebige seiner Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, bestimmt.

Denn die Ebene π wird durch drei ihrer Punkte bestimmt (Zus. II, Satz V, § 46 und Def. III).

Wenn $A'B'C'P'$ vier beliebige Punkte des Raums $(P\pi)$ sind, so fällt der Raum $P' \cdot A'B'C'$ mit $(P\pi)$ zusammen.

2.

Schnitte von Graden und Ebenen im Raum.

§ 83. *Satz I. Eine Grade und eine Ebene des Raumes haben einen einzigen Punkt gemeinschaftlich, wenn die Grade nicht in der Ebene liegt.*

π und r seien die gegebene Ebene und Grade. Um den Raum zu con struiren braucht man nur die Ebene π und einen Punkt P auf der Graden r zu wählen (Satz IV, § 82). Unter allen Graden des Raums $(P\pi)$, welche durch P gehen, befindet sich auch die Grade r und da jede Grade des Raums die Ebene π in einem Punkt trifft (Bem. I, § 82), so ist damit der Satz bewiesen.

Satz II. Zwei unabhängige Grade schneiden sich nicht.

Denn sie werden durch zwei Punktepaare bestimmt und vier unabhängige Punkte liegen nicht in einer Ebene und mithin schneiden sich die Graden nicht (Einl. Def. II, § 10; Zus. III, Satz V, § 46).

Def. I. Von zwei Graden des Raums, welche nicht in derselben Ebene liegen, sagen wir, *sie kreuzten sich* oder seien *windschief.*

Satz III. Zwei Ebenen des Raumes schneiden sich in einer Graden.

Dieser Satz kann wie der vorhergehende oder auf die folgende Art bewiesen werden:

σ, σ' seien die zwei Ebenen. Die ihnen gemeinsame Figur wird durch eine beliebige Grade von σ in einem Punkt getroffen, nämlich in dem Durchschnittspunkt der Graden mit der Ebene σ' (Satz I); diese Figur ist mithin eine grade Linie (Satz VI, § 48).

Satz IV. Drei Ebenen, welche nicht eine Grade gemeinschaftlich haben, schneiden sich in nur einem Punkt.

σ, σ', σ'' seien die drei Ebenen; die beiden ersten schneiden σ'' in zwei Graden, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben (Zus. II, Satz III, § 46) und dieser Punkt gehört den drei Ebenen an (Einl. a, § 13).

Bem. I. Die drei Ebenen können auch eine Grade gemeinschaftlich haben.

Satz V. Von einem Punkt kann man nur eine Grade ziehen, welche zwei gegebene sich kreuzende Grade trifft, wenn der Punkt auf keiner von ihnen liegt.

Der Punkt bestimmt mit den zwei Graden zwei Ebenen, welche sich in einer Graden schneiden (Satz III). Diese Grade schneidet die beiden gegebenen Graden und geht durch den gegebenen Punkt. Wenn der Punkt auf einer der beiden Graden liegt, so gibt es offenbar unendlich viele den beiden Graden gemeinsame Transversalen, nämlich alle Graden, die den gegebenen Punkt mit den Punkten der zweiten Graden verbinden.

Satz VI. Drei Grade, welche sich zu je zweien kreuzen, haben ein System einer Dimension von Transversalen gemeinschaftlich, welches eindeutig und in derselben Ordnung der Graden entspricht.

Denn durch jeden Punkt einer jeden derselben geht nur eine Grade welche die beiden andern schneidet (Satz V, Ax. II, a und Hyp. I; Einl. Def. I, § 62 und Def. III, § 42).

Def. II. Alle Ebenen, die eine Grade r enthalten und durch die Punkte einer andern Graden s, welche r nicht schneidet, gehen, bilden bezüglich der Ebene als Element eine Figur, welche *Ebenenbüschel* heisst. Die Grade r ist seine *Axe*, s seine *Directrix*.

Die Richtungen des Büschels sind durch diejenigen der Directrix gegeben.

Satz VII. Alle Ebenen des Raums, welche eine beliebige Grade r des Raums enthalten, bestimmen nur ein Büschel.

Das heisst wenn s die Directrix ist und s' eine beliebige andre Grade, so liefert s' ein zweites Büschel mit der Axe r, welches mit dem ersten zusammenfällt.

Denn eine Ebene, welche r enthält und s schneidet, trifft auch die Grade s' und umgekehrt (Satz I); daher u. s. w.

Zus. Die Ebenen eines Büschels enthalten alle Punkte des Raums.

Satz. VIII. Ein Ebenenbüschel ist ein einfach geschlossenes System einer Dimension.

Ist a die Axe des Büschels und A der Durchschnittspunkt der Axe mit einer Ebene π, so schneidet jede Ebene des Büschels die Ebene π in einer

durch A gehenden Graden (Satz III); und umgekehrt, ist eine Grade in dem Gradenbüschel der Ebene π mit dem Centrum A gegeben, so bestimmt sie mit a eine Ebene, welche dem Büschel angehört (Satz VII). Jeder Graden des Büschels in π entspricht eine Ebene des Ebenenbüschels um a und umgekehrt; das Ebenenbüschel ist mithin einfach geschlossen, weil es auch das Gradenbüschel in der Ebene ist (Satz I, § 30 und Einl. Def. II, § 63).

Def. III. Wie man als Element des Büschels in der Ebene den Strahl oder die vom Centrum begrenzte Halbgrade nehmen kann, so können wir in dem Ebenenbüschel die von der Axe begrenzte Halbebene als Element betrachten (Def. II, § 50 und Zus. II, Satz I, § 47). Alsdann heisst das Büschel auch *Halbebenenbüschel.*

3.

Die Ebene im Unendlichgrossen. — Parallele Graden und Ebenen.

§ 84. *Satz I. Das absolute Grenzgebiet des Raums um einen seiner Punkte ist eine vollständige Ebene und kann als die absolute Grenzebene eines beliebigen Punktes des endlichen Gebiets bezüglich der Einheit dieses Gebiets angesehen werden.*

Die durch drei absolute Grenzpunkte A_∞, B_∞, C_∞ eines Punktes P bestimmte Ebene liegt in dem absoluten Grenzgebiet von P (Def. IV, § 32 und Satz § 78). Weil die Seiten des Dreiecks $A_\infty B_\infty C_\infty$ in den durch P und die drei Punkte A_∞, B_∞, C_∞ bestimmten Ebenen des Raums liegen (Bem. IV, § 68) und jede in der Ebene $A_\infty B_\infty C_\infty$ liegende Grade α zwei Seiten des Dreiecks in zwei Paaren entgegengesetzter Punkte schneidet (Zus. Satz IV, § 68), so befinden sich die Graden, welche diese Paare mit P bestimmen, im Raum und die Grade α ist, da sie in der Ebene dieser Graden liegt, im Raum gelegen.

Der zweite Theil des Satzes folgt aus Satz IV, § 32.

Zus. Man kann das Gebiet im Unendlichgrossen des Raums bezüglich der Euclid'schen Einheit als eine Ebene ansehen.

Denn die durch einen Punkt A zu den Graden eines Sterns vom Centrum P absolut parallel gezogenen Graden (Def. II, § 32) fallen mit den relativen Parallelen zusammen (Satz II und Def. I, § 32), wir können mithin annehmen, dass sich die Grenzpunkte der Graden des Raums bezüglich der *Euclid*'schen Einheit in der absoluten Grenzebene eines jeden Punktes des Raums befinden.

Def. I. Wir nennen eine solche Ebene die bezüglich der *Euclid*'schen Einheit *im Unendlichgrossen des Raums liegende Ebene* (Bem. § 31).

Bem. I. Wie jede Grade bezüglich der *Euclid*'schen Einheit der Abstände (Uebereink. § 28) nur einen Punkt im Unendlichgrossen hat, so entspricht die Ebene im Unendlichgrossen bezüglich dieser Einheit dem Fall, in welchem zwei vollständige Grade keine zwei Punkte gemeinschaftlich haben können, welchen wir in absolutem Sinn durch Hyp VI ausgeschlossen haben (Bem. II, § 30).

§ 85. *Def. I.* Eine Grade und eine Ebene heissen *parallel*, wenn der im Unendlichgrossen liegende Punkt der Graden sich in der im Unendlichgrossen liegenden Graden der Ebene befindet (Def. I, § 84).

Satz I. In einer zu einer Graden parallelen Ebene gibt es unendlich viele Grade, welche der gegebenen Graden parallel sind.

Nämlich alle Graden der Ebene, welche durch den im Unendlichgrossen liegenden Punkt der Graden gehen.

Def. II. Zwei Ebenen heissen *parallel,* wenn sie dieselbe Grade im Unendlichgrossen haben.

Bem. I. Einem System paralleler Graden der Ebene entspricht ein System paralleler Graden der parallelen Ebene, welche mit den ersten denselben Punkt im Unendlichgrossen gemeinschaftlich haben.

Satz II. Von einem Punkt aus kann man unendlich viele Parallelen zu einer Ebene ziehen und diese liegen in der Ebene, welche sich durch den Punkt parallel zur gegebenen Ebene legen lässt.

Denn jede von dem Punkt aus zur Ebene parallel gezogene Grade hat ihren Punkt im Unendlichgrossen auf der im Unendlichgrossen liegenden Graden der Ebene und diese Parallelen liegen in der Ebene, welche durch den Punkt und die im Unendlichgrossen liegende Grade der gegebenen Ebene bestimmt wird.

Satz III. Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten in parallelen Graden geschnitten.

Denn die Durchschnittsgraden s und s' der dritten Ebene mit den beiden parallelen Ebenen schneiden sich in einem Punkt, nämlich dem den drei Ebenen gemeinschaftlichen Punkt (Satz IV, § 83), welcher im Unendlichgrossen liegt, d. h., in dem Durchschnittspunkt der dritten Ebene mit der im Unendlichgrossen liegenden Graden der beiden parallelen Ebenen.

Zus. I. Wenn eine Grade einer Ebene parallel ist, so schneidet jede Ebene, welche der ersten nicht parallel ist und die Grade enthält, die gegebene Ebene in einer Graden, welche der gegebenen Graden parallel ist.

Zus. II. Wenn eine Grade einer Ebene parallel ist, so liegt die Grade, welche durch einen Punkt der Ebene parallel zu ihr gezogen wird, in dieser Ebene.

Satz IV. Zwei parallele Graden schneiden zwei Ebenen, welche einander aber nicht den Graden parallel sind, in vier Punkten, welche die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Die beiden Graden liegen in einer Ebene (Zus. IV, Satz V, § 46), welche die beiden gegebenen Ebenen in zwei parallelen Graden schneidet (Satz III); das Parallelogramm wird mithin durch diese beiden und die zwei gegebenen Graden gebildet (Def. I, § 44).

Satz V. Wenn zwei nicht parallele Ebenen zwei parallele Graden enthalten, so schneiden sie sich in einer den gegebenen Graden parallelen Graden.

Denn der im Unendlichgrossen liegende Punkt der beiden parallelen Graden ist den zwei Ebenen gemeinschaftlich und ist mithin der Punkt im Unendlichgrossen ihrer Durchschnittslinie.

Satz VI. Durch einen Punkt kann man nur eine einzige Ebene legen, welche zwei gegebenen Graden parallel ist, die in einer Ebene liegen oder nicht.

Man braucht nur den Punkt mit der durch die beiden Punkte im Unendlichgrossen der beiden Graden bestimmten Graden zu verbinden. Liegen die beiden Graden in einer Ebene und der Punkt in dieser Ebene, so fällt die parallele Ebene mit der Ebene der beiden Graden zusammen.

Zus. I. Durch eine Grade kann man nur eine einzige die Grade enthaltende Ebene legen, die einer andern Graden, welche die erste nicht schneidet, parallel ist.

Die Ebene enthält die Grade und den Punkt im Unendlichgrossen der andern Graden.

Bem. II. Construction paralleler Dinge mit den Elementen des endlichen Gebiets allein. Wie man Grade, welche von einem Punkt aus einer gegebenen Graden parallel laufen, mittelst der Graden und des Kreises construiren kann (Bem. III, § 60), so lassen sich auch parallele Grade und Ebenen in dem endlichen Gebiet des Raums durch diese Hülfsmittel beschreiben. Um z. B. die Ebene zu construiren, welche durch einen Punkt parallel zu einer Ebene geht, braucht man nur durch den Punkt zwei Parallele zu zwei Graden der gegebenen Ebene zu ziehen; die beiden Parallelen bestimmen dann die verlangte Ebene.

Bem. III. Wenn wir von einer Figur des Raums sprechen, so meinen wir, dass ihre Punkte dem Raum angehören, ohne dass alle Punkte des Raums Punkte der gegebenen Figur zu sein brauchen.

Satz VII. Eine Figur des Raums, welche von jeder Graden des Raums, die der Figur nicht angehört, in einem Punkt geschnitten wird, ist eine Ebene.

Denn die Grade zweier Punkte A, B der Figur gehört nach der Voraussetzung vollständig der gegebenen Figur an. In einer Graden des Raums, welche die Grade AB nicht schneidet, muss es nach der Voraussetzung einen Punkt C der Figur geben; die Graden AC, BC liegen mithin auch in der Figur. Es gehört also auch die Ebene ABC vollständig der gegebenen Figur an, da jede Grade der Ebene mehr als einen Punkt mit ihr gemeinschaftlich hat. Die Figur kann keinen andern Punkt P ausserhalb der Ebene enthalten, weil die Graden, welche den Punkt P mit den Punkten der Ebene ABC verbinden, in der Figur liegen würden und dieselbe mithin nichts Anderes als der Raum selbst sein würde, was gegen die Voraussetzung ist.

Zus. I. Wenn eine Figur des Raums mit allen Ebenen desselben, die nicht zu ihr gehören, eine Grade gemeinschaftlich hat, so ist diese Figur eine Ebene.

Denn aus der Bedingung geht hervor, dass jede Grade des Raums die gegebene Figur in einem Punkt schneidet.

Satz VIII. Wenn eine Figur aus Graden derart gebildet ist, dass ihre Graden sich zu je zweien schneiden, ohne durch den nämlichen Punkt zu gehen, so ist die Figur eine Ebene oder eine ebene Figur.

Denn es seien drei Grade der Figur gegeben, welche sich zu je zweien schneiden und mithin eine Ebene bestimmen; alle ausserhalb dieser Ebene gelegenen Graden schneiden die drei Graden nicht in einem Punkt (Satz IV, § 46) und mithin gehören alle Graden der Figur der Ebene an.

4.

Die Identität des Raums um seine im endlichen und unendlich grossen Gebiet liegenden Punkte. — Die Theile, in welche der Raum durch eine seiner Ebenen zerlegt wird.

§ 86. *Satz I. Der Raum ist um jeden Punkt seines endlichen Gebiets identisch.*

Der Raum kann durch die Ebene π_∞ und den Punkt A oder einen andern Punkt A' erzeugt werden (Satz IV, § 82);[1] die Graden, welche den Punkt A mit den Punkten der Ebene π_∞ verbinden, bestimmen daher den ganzen Raum. Da wir π_∞ als absolute Grenzebene eines beliebigen Punktes des endlichen Gebiets betrachten können (Satz I, § 84), so entspricht, wenn wir in den beiden Sternen von den Centren A und A' die Centren und die Graden, welche dieselben Punkte im Unendlichgrossen verbinden, sich entsprechen lassen, jedem Dreieck mit dem Eckpunkt A in dem andern Stern ein identisches Dreieck. Wählt man daher in dem ersten Stern zwei Punkte X und Y, so entsprechen ihnen in den beiden den Graden AX, AY entsprechenden Graden zwei Punkte X', Y' des zweiten Sterns und weil die beiden Dreiecke AXY, $A'X'Y'$ identisch sind, da sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, so ist $(XY) \equiv (X'Y')$. Folglich sind die beiden Sterne identische Figuren (Satz I, Satz III und Zus. II, Satz II, § 15).

Satz II. Die Sterne des Raums, deren Centren in dem endlichen Gebiet in einer Ebene liegen, werden durch diese Ebene in zwei identische Theile zerlegt, welche in denselben beiden Theilen des Raums gelegen sind.

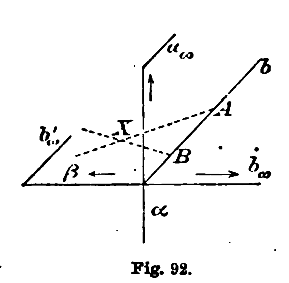


Fig. 92.

Eine Ebene α des Sterns mit dem Centrum A hat eine Grade a_∞ im Unendlichgrossen, welche die Ebene im Unendlichgrossen π_∞ in zwei identische entgegengesetzte Theile zerlegt (Satz I, § 71). Man weiss auch, dass zwei entgegengesetzte Punkte X_∞, X'_∞ auf entgegengesetzten Seiten der Graden a_∞ liegen und dass eine andre Grade b_∞ je zur Hälfte in den beiden bezüglich der Graden a_∞ entgegengesetzten Theilen liegt (Satz II, § 71). Verbindet man die bezüglich der Graden a_∞ entgegengesetzten Theile π'_∞, π''_∞ der Ebene π_∞ mit dem Punkt A, so erhält man die beiden durch die Ebene α bestimmten Theile des Sterns vom Centrum A, welche wegen der Identität von π'_∞ und π''_∞ und der Identität der Abstände des Punktes A von den Punkten der Ebenen π'_∞, π''_∞ identisch sind. Diese beiden Theile der Sterne vom Centrum A bestimmen zwei Theile des Raums (Def. IV, § 82).

---

1) Der Beweis des Satzes IV, § 82 ist unabhängig davon, ob die Erzeugungsebene im Unendlichgrossen liegt oder nicht (Satz I, Def. I, § 84). Mehrere Eigenschaften in diesem Paragraphen werden in den Elementarbüchern stillschweigend oder nicht als Axiome angenommen.

B sei nun ein andrer Punkt der Ebene α und mit b sei die Grade AB bezeichnet. Wählt man nach Belieben einen Strahl AX des Theils $(A\pi'_\infty)$, so können wir beweisen, dass jeder Punkt X desselben in dem Theil $(B\pi'_\infty)$ enthalten ist. Denn die Ebene AXB oder β wird durch die Grade b in zwei Theile zerlegt, von denen der eine in dem Theil $(A\pi'_\infty)$ liegt und im Unendlichgrossen eine Halbgrade b'_∞ hat, deren Enden die beiden im Unendlichgrossen liegenden Punkte der Graden b sind. Der unendlich ferne Punkt des Strahls BX ist in b'_∞ gelegen (Satz II, § 50) und mithin in dem Theil $(B\pi'_\infty)$ des Sterns vom Centrum B.

Da die beiden Theile $(A\pi'_\infty)$, $(B\pi'_\infty)$ zusammenfallen, so decken sich auch die entgegengesetzten Theile $(A\pi''_\infty)$, $(B\pi''_\infty)$, womit der Satz bewiesen ist (Satz III, § 15) (Fig. 92).

Def. I. Diese Theile heissen *die bezüglich der Ebene entgegengesetzten Theile des Raums.*

Def. II. Wir sagen mithin, der Raum werde durch eine Ebene in zwei bezüglich der Ebene entgegengesetzte Theile *zerlegt.*

Zus. I. Die Theile, in welche der Raum durch eine Ebene zerlegt wird, sind identisch.

Denn man erhält jeden dieser Theile dadurch, dass man die Punkte einer derjenigen Hälften der Ebene π_∞, welche durch die im Unendlichgrossen liegende Grade der gegebenen Ebene bestimmt werden, mit einem beliebigen Punkt des endlichen Gebiets der Ebene verbindet.

Satz III. Eine Grade und eine Ebene, welche einer gegebenen Ebene parallel sind, liegen jede für sich auf derselben Seite dieser Ebene.

In der Ebene β sei eine Parallele zu der Graden b gegeben, welche ganz auf derselben Seite von b liegt (Satz I, § 50). Da die durch die Grade b getrennten Theile der Ebene β den beiden Theilen des Sterns vom Centrum A bezüglich der Ebene α angehören, so ist der Satz in Bezug auf die Grade bewiesen. Er gilt auch für die Ebene, weil die Graden jeder Ebene, welche einer gegebenen Ebene parallel ist, dieser letzteren parallel sind (Def. I und II, § 85).

Satz IV. Die beiden Theile einer Ebene, in welche sie durch ihre Durchschnittslinie mit einer andern ihr nicht parallelen Ebene zerlegt wird, liegen in den bezüglich der zweiten Ebene entgegengesetzten Theilen des Raums.

Die Ebene β schneidet die Ebene α in der Graden b, deren Punkte im Unendlichgrossen Y_∞, Y'_∞ den beiden Graden a_∞, b_∞ angehören. Die beiden Punkte Y_∞, Y'_∞ zerlegen aber die Grade b_∞ in zwei gleiche Theile, welche auf entgegengesetzten Seiten der Graden a_∞ in der Ebene π_∞ liegen (Satz II, § 71). Mithin theilt die Grade b die Ebene β in zwei Theile, welche in den beiden bezüglich der Ebene α entgegengesetzten Theilen des Raums gelegen sind.

Zus. I. Die Theile einer Graden, welche durch ihren Durchschnittspunkt mit einer zu ihr nicht parallelen Ebene auf ihr bestimmt werden, liegen bezüglich dieser Ebene in entgegengesetzten Theilen des Raums.

Man braucht nur zwei Segmente a und a' oder die Theile einer Graden in der Ebene β zu betrachten, welche durch A begrenzt werden (Zus. II, Satz II, § 50) (Fig. 92).

Zus. II. Das Segment zweier Punkte, welche auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene liegen, wird von der Ebene in einem inneren Punkt geschnitten und umgekehrt.

Denn die Grade der beiden Punkte schneidet die Ebene in einem Punkt S, welcher auf der Graden zwei auf entgegengesetzten Seiten der Ebene gelegene Theile bestimmt, in denen die beiden gegebenen Punkte liegen. Die beiden Theile der Graden sind aber bezüglich des Durchschnittspunkts S mit der Ebene entgegengesetzt, mithin ist S ein innerer Punkt des Segments der beiden gegebenen Punkte X und Y.

Die Umkehrung des Satzes folgt daraus, dass SX und SY entgegengesetzte Strahlen sind und also auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen.

5.

Senkrechte Graden und Ebenen.

§ 87. *Bem.* Die Ebene π_∞ im Unendlichgrossen des Raums ist eine vollständige Ebene (Satz I, § 84). Die Strahlen, welche zwei im Unendlichgrossen liegende conjugirte Punkte von π_∞ mit einem Punkt A des endlichen Gebiets bestimmen, stehen senkrecht aufeinander (Def. I, § 69 und Def. I, § 39) und zwei Grade des Raums, deren Punkte im Unendlichgrossen conjugirt sind, bilden rechte Winkel miteinander (Def. V, § 40),

Def. I. Eine Grade und eine Ebene heissen senkrecht aufeinander, wenn das normale Segment von dem Punkt im Unendlichgrossen der Graden auf die Grade im Unendlichgrossen der Ebene ein rechtes ist (Def. II, § 73; Satz I und Def. I, § 84).

Satz I. Der Punkt im Unendlichgrossen der Graden ist der Pol der Graden im Unendlichgrossen jeder auf ihr senkrechten Ebene und umgekehrt (Satz I, § 73; Satz I, § 69; Satz VI, und Def. I).

Zus. I. Die zu einem Loth auf einer Ebene parallelen Graden stehen ebenfalls senkrecht auf der Ebene.

Denn sie haben denselben Punkt im Unendlichgrossen.

Zus. II. Alle Lothe auf eine Ebene sind parallel.

Denn sie haben den nämlichen Punkt im Unendlichgrossen.

Zus. III. Alle Ebenen, welche parallel zu einer Ebene sind, die senkrecht auf einer Graden steht, sind senkrecht auf der Graden.

Denn sie haben dieselbe Grade im Unendlichgrossen.

Zus. IV. Alle Ebenen, welche senkrecht auf einer Graden stehen, sind parallel.

Denn sie haben dieselbe Grade im Unendlichgrossen.

Zus. V. Eine Grade, die auf einer Ebene senkrecht steht, ist senkrecht auf allen Graden der Ebene.

Denn wenn eine Grade a_∞ der Ebene π_∞ gegeben ist, so sind ihre beiden Pole A_∞, A'_∞ allen ihren Punkten conjugirt (Satz I, II, § 69). Verbindet man

einen Punkt A mit der Graden a_∞ und den beiden Punkten A_∞, A'_∞, so erhält man eine Ebene α und eine auf ihr senkrechte Grade a (Def. I). Jede Grade b, die in der Ebene α z. B. durch A geht, hat zwei Punkte im Unendlichgrossen B_∞, B'_∞, welche bezüglich A_∞ und A'_∞ conjugirt sind; die Grade b steht daher senkrecht auf a (Def. V, § 40) (Fig. 93).

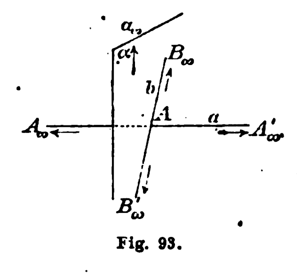


Fig. 93.

Zus. VI. Alle Graden, welche durch einen Punkt in einer Graden oder ausserhalb derselben senkrecht zu der letzteren gezogen werden, liegen in einer Ebene (Def. V, § 40; Satz I, § 69).

Zus. VII. Durch einen Punkt A innerhalb oder ausserhalb einer Graden kann man nur eine Ebene senkrecht auf die Grade legen.

Denn die Pollinie des Punktes im Unendlichgrossen der gegebenen Graden a, mit dem Punkt A verbunden, gibt nur eine Ebene, welche auf dieser Graden senkrecht steht (Def. I).

Constr. I. Um diese Ebene mit den Elementen des endlichen Gebiets allein zu construiren, braucht man nur, wenn der Punkt A auf der Graden liegt, in zwei durch a gehenden Ebenen die beiden Lothe in A auf a zu errichten (Bem. III, § 60), welche die verlangte Ebene bestimmen. Liegt dagegen A ausserhalb a, so fälle man in der Ebene Aa von A aus das Loth auf die Grade a, welches sie in einem Punkt P trifft. Die in dem Punkt P auf der Graden senkrecht stehende Ebene enthält offenbar, wie verlangt, den Punkt A.

Zus. VIII. Von einem Punkt in oder ausserhalb einer Ebene kann man nur ein Loth zu der Ebene ziehen.

Denn die Pole der im Unendlichgrossen der Ebene liegenden Graden bestimmen, wenn sie mit dem gegebenen Punkt verbunden werden, nur eine Grade, welche durch diesen Punkt senkrecht zur Ebene geht.

Constr. II. Um diese Grade mit den Elementen des endlichen Gebiets allein zu construiren, wähle man, wenn der Punkt in der gegebenen Ebene liegt, zwei durch den Punkt gehende Graden der Ebene und lege durch den Punkt zwei Ebenen, die auf den beiden Graden senkrecht stehen (Constr. I). Diese beiden Ebenen schneiden sich in der verlangten Normalen, da sie senkrecht auf den beiden gewählten Graden steht.

Liegt dagegen der Punkt ausserhalb der gegebenen Ebene, so lege man durch den Punkt zwei Ebenen senkrecht auf zwei Graden der Ebene (Constr. I). Die beiden Ebenen schneiden sich in der verlangten Graden.

Def. II. Der Durchschnittspunkt des Loths mit der Ebene heisst *der Fusspunkt* desselben.

Def. III. Zwei Ebenen heissen *senkrecht aufeinander*, wenn die normalen Segmente ihrer Graden im Unendlichgrossen rechte sind (Def. II, § 73). [1]

---

1) Man könnte als Definition des Aufeinandersenkrechtstehens einer Graden und einer Ebene und zweier Ebenen die Eigenschaften der Sätze I und II geben; aber einmal enthalten dieselben eine grössere Anzahl von Bedingungen als nöthig und dann würde sich

Satz II. Die Graden im Unendlichgrossen zweier aufeinander senkrechten Ebenen sind conjugirt (Def. III, § 69; Zus. II, Satz VII, § 73 und Def. III).

Zus. I. Alle Ebenen, welche einer auf einer andern Ebene senkrechten Ebene parallel sind, stehen senkrecht auf der letzteren.

Wie Zus. III, Satz I.

Zus. II. Durch eine Grade lässt sich nur eine diese Grade enthaltende Ebene senkrecht zu einer gegebenen Ebene legen.

Denn die verlangte Ebene hat zur Graden im Unendlichgrossen die Verbindungslinie des Punktes im Unendlichgrossen der Graden mit den Polen der im Unendlichgrossen der Ebene liegenden Graden (Satz VI, V, § 69).

Zus. III. Die von einer Graden senkrecht auf eine Ebene gezogene und die gegebene Grade enthaltende Ebene begreift alle von den Punkten der Graden auf die Ebene gefällten Lothe in sich.

Constr. III. Construirt man eines dieser Lothe, so ist damit auch die gesuchte normale Ebene construirt.

Def. IV. Das Segment der Ebene, welches die Fusspunkte der von den Punkten eines Segments auf die Ebene gefällten Lothe enthält, heisst die *rechtwinklige Projection* oder einfach *Projection* des gegebenen Segments auf die Ebene.

Satz III. Jede von zweien zueinander senkrechten Ebenen enthält unendlich viele Lothe auf die andre.

Und umgekehrt:

Jede Ebene, welche ein Loth auf eine andre Ebene enthält, steht senkrecht auf der letzten Ebene.

Da die beiden Ebenen senkrecht aufeinander stehen, so müssen ihre Graden im Unendlichgrossen, die wir mit a_∞, b_∞ bezeichnen, conjugirt sein, d. h., jede von ihnen geht durch die Pole der andern (Def. III, § 69). Aa_∞ oder α, Ab_∞ oder β seien die beiden gegebenen Ebenen. Die Grade, welche den Punkt A mit den Polen der Graden b_∞ verbindet, liegt in der Ebene α und steht senkrecht auf β und ebenso alle zu ihr parallelen Graden der Ebene α (Zus. I, Satz I). Analog liegt die Grade, welche den Punkt A mit den Polen der Graden a_∞ verbindet, in der Ebene β und steht, wie alle ihr parallelen Graden der Ebene β, senkrecht auf der Ebene α.

Die Umkehrung des Satzes ist nach diesem Beweis einleuchtend (Def. I, III und Satz VI u. V, § 69).

Satz IV. Sind zwei Ebenen gegeben, so gibt es unendlich viele Ebenen, welche senkrecht auf ihnen stehen und derart sind, dass durch jeden Punkt des Raums nur eine von ihnen geht.

Diese senkrechten Ebenen haben zur Graden im Unendlichgrossen die Verbindungslinie der Pole der im Unendlichgrossen der zwei Ebenen liegenden

die Definition auf den Raum von drei Dimensionen beschränken. Man müsste sie also für jeden Raum unter andrer Form wiederholen, während die unsrige unabhängig von der Anzahl der Dimensionen des Raums, in welchem die senkrechten Dinge enthalten sind, Geltung hat.

beiden Graden; mithin geht durch jeden Punkt des Raums und diese Grade nur eine einzige Ebene.

Constr. IV. Man erhält diese Ebene, indem man von dem Punkt aus auf die zwei gegebenen Ebenen die zwei Lothe fällt (Constr. II).

Zus. Die auf zwei gegebenen Ebenen senkrechten Ebenen stehen rechtwinklig auf der Durchschnittslinie der letzteren.

Denn die Grade, welche die Pole der beiden Graden im Unendlichgrossen der gegebenen Ebenen verbindet, ist die Pollinie des Durchschnittspunkts der beiden Graden (Zus. I, Satz II, § 69 und Def. I).

Satz V. Sind zwei Grade des Raums gegeben, so gibt es nur eine auf die beiden Graden senkrechte Richtung.

Denn die Grade, welche die beiden Punkte im Unendlichgrossen der beiden Graden verbindet, hat zwei Pole, welche nur eine einzige zu den beiden Graden senkrechte Richtung liefern (Satz II, § 69 und Def. I).

Durch jeden Punkt des Raums geht nur eine zu den beiden Graden senkrechte Grade.

Constr. V. Um diese Grade zu construiren, lege man durch den Punkt die auf die beiden Graden senkrechten Ebenen (Constr. I), welche sich in der verlangten Graden schneiden.

Zus. Eine auf zwei Graden normale Grade steht auf jeder ihnen parallelen Ebene senkrecht (Def. I, § 85).

Satz VI. Von allen Graden, von welchen zwei sich kreuzende Grade geschnitten werden, ist nur eine senkrecht auf beiden.

a und b seien die beiden Graden. Verbindet man a mit den Polen der Graden, welche die Punkte im Unendlichgrossen der beiden gegebenen Graden verbindet, so erhält man eine Ebene, welche senkrecht auf der durch a parallel zur Graden b gehenden Ebene steht. Denn die Grade im Unendlichgrossen der ersten Ebene geht durch die Pole der Graden im Unendlichgrossen der zweiten Ebene und ist mithin mit dieser Graden conjugirt (Def. II, § 85; Satz VI und V, § 69).

Constr. VI. Um diese Normale mit den Elementen des endlichen Gebiets allein zu construiren, lege man durch eine der Graden die zu der andern parallele Ebene (Zus. Satz VI, § 85) und durch die beiden Graden die auf diese Ebene senkrechten Ebenen (Constr. III), welche sich in der gesuchten Normalen schneiden. Denn diese letztere ist in Ebenen enthalten, welche senkrecht auf den beiden Graden stehen und in welchen die beiden Graden enthalten sind.

Satz VII. Durch einen Punkt des Raums gehen unendlich viele Tripel von Graden, die zu je zweien senkrecht aufeinander stehen.

Denn verbindet man einen Punkt A mit den Eckpunkten eines jeden polaren Dreiecks der Ebene im Unendlichgrossen (Def. IV, § 69), so erhält man je drei Grade, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen.

Constr. VII. Um eines dieser Tripel mit den Elementen des endlichen Gebiets allein zu construiren, wähle man eine dieser Graden aus, ziehe durch

A die auf dieser Graden senkrechte Ebene und betrachte in letzterer zwei aufeinander senkrechte durch A gehende Grade, welche mit der ersten das verlangte Tripel bilden.

6.

Abstand eines Punktes von einer Ebene, zweier parallelen Ebenen, einer Graden und einer Ebene, die parallel sind, zweier Graden.

§ 88. *Satz I. Das Minimum des Abstandes eines Punktes ausserhalb einer Ebene von den Punkten dieser Ebene ist der Abstand des Punktes von dem Fusspunkt des von ihm auf die Ebene gefällten Lothes.*

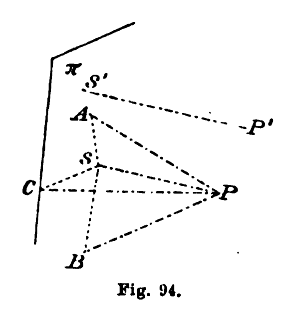


Fig. 94.

π und P seien die Ebene und der Punkt; S der Fusspunkt des vom Punkt P auf die Ebene gefällten Lothes (Zus. VIII, Satz I, § 87).

In dem bei S rechtwinkligen Dreieck PSA ist die Hypotenuse (PA) immer grösser als die Kathete (PS), wo auch der Punkt A in der Ebene π liegen mag (Zus. Satz II, § 55) (Fig. 94).

Def. I. Der kleinste Abstand eines Punktes von einer Ebene heisst *der Abstand* des Punktes von der Ebene.

Die Segmente, deren eines Ende im Punkt P und das andere in der Ebene liegen und welche nicht normal zur Ebene π sind, heissen *schief*.

Satz II. Schiefe Segmente, welche gleiche Projectionen haben, sind gleich und bilden gleiche Winkel mit der Normalen.

Von zwei schiefen Segmenten ist dasjenige das grössere, dessen Ende in der Ebene den grösseren Abstand von dem Fusspunkt der Normalen hat.

Ist C ein andrer Punkt derart, dass $(SC) \equiv (SA)$, so sind die beiden Dreiecke PSA, PSC gleich, weil sie bei S rechtwinklig sind und die beiden den rechten Winkel enthaltenden Seiten gleich sind, nämlich: (PS), (SA); (PS), (SC). Mithin ist auch $(PA) \equiv (PC)$; $\widehat{CPS} \equiv \widehat{APS}$.

Ist $(SB) > (SA)$, so kann man in (SB) einen Punkt C' derart nehmen, dass $(SC') \equiv (SA)$; man erhält dann $(PC') \equiv (PA)$. (PB) ist aber $> (PC')$ (Satz VII, § 54); mithin $(PB) > (PA)$.

Zus. I. Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

Zus. II. Die Punkte eines Kreisumfangs stehen gleichweit von einem beliebigen Punkt des in dem Centrum auf der Ebene des Umfangs errichteten Lothes ab.

Denn alle gleichweit von S abstehenden Punkte stehen auch gleichweit von P ab wie von allen Punkten des in S auf der Ebene errichteten Lothes d. h. der Graden SP.

Zus. III. Alle Punkte einer Ebene, welche gleichen Abstand von einem Punkt ausserhalb der Ebene haben, liegen in einem Kreisumfang, der zum Centrum den Fusspunkt des von dem Punkt auf die Ebene gefällten Lothes hat.

A und B seien zwei von den Punkten der Ebene π, welche gleichen Abstand vom Punkt P ausserhalb π haben, und S sei der Fusspunkt des von P auf die Ebene gefällten Lothes. Die Dreiecke PSA, PSB sind bei S rechtwinklig, haben eine Kathete gemeinschaftlich und die Hypotenusen gleich, sie sind mithin gleich (Satz II, § 55).

Satz III. Alle Punkte, von welchen jeder gleichweit von den Punkten eines Kreisumfangs absteht, liegen auf dem in dem Mittelpunkt des Kreisumfangs auf der Ebene desselben errichteten Loth.

Denn P' sei ein Punkt ausserhalb dieses Loths, S das Centrum, A und B zwei Punkte des Kreisumfangs; S' der Fusspunkt des von P' auf die Ebene des Umfangs gefällten Loths. In den rechtwinkligen Dreiecken $S'AP'$, $S'BP'$ können die Hypotenusen (AP'), (BP') nicht gleich sein, weil im Allgemeinen $(S'A)$ nicht gleich $(S'B)$ ist, da S' das Centrum des Umfangs nicht ist und weil in zwei rechtwinkligen Dreiecken eine Kathete und die Hypotenuse nicht gleich sein können, ohne dass die Dreiecke gleich sind (Satz II, § 55) (Fig. 94).

Satz IV. Wenn zwei Punkte A und A' bezüglich gleichen Abstand von zwei Ebenen α und α' haben, so sind die Segmente, welche sie mit den Punkten dieser Ebenen bestimmen, zu je zweien gleich und die von ihnen gebildeten Figuren sind identisch.

S und S' seien die Fusspunkte der von den Punkten auf die beiden Ebenen α und α' gefällten Lothe. Wir wollen in den beiden Figuren dem Punkt A den Punkt A' entsprechen lassen und zwischen den beiden Ebenen einen solchen Identitätszusammenhang festsetzen, dass S' dem Punkt S entspricht (Satz II und Zus. Satz III, § 47).

(AC); $(A'C')$ seien zwei in den Figuren $(A\alpha)$, $(A'\alpha')$ sich entsprechende Segmente, C und C' dabei Punkte von α und α'. Die beiden Dreiecke ASC, $A'S'C'$ sind bei S und S' rechtwinklig, $(AS) \equiv (A'S')$, $(SC) \equiv (S'C')$ wegen des für α und α' festgesetzten Identitätszusammenhangs; mithin sind die beiden Dreiecke identisch und es ist $(AC) \equiv (A'C')$ und $\widehat{CAS} \equiv \widehat{C'A'S'}$.

Sind X und Y Punkte von $(A\alpha)$, so entsprechen ihnen zwei Punkte X' und Y' von $(A'\alpha')$ in gleichem Abstand von A' derart, dass die Dreiecke AXY, $A'X'Y'$ identisch sind; mithin ist $(XY) \equiv (X'Y')$; die beiden Figuren $(A\alpha)$, $(A'\alpha')$ sind daher identisch (Satz III, § 15).

Zus. I. Wenn zwei Punkte gleichen Abstand von einer Ebene haben, so sind die Segmente, welche sie mit den Punkten der Ebene bestimmen, bezüglich zu je zweien gleich und die beiden von den Punkten mit der Ebene gebildeten Figuren sind identisch.

Zus. II. Wenn zwei Punkte in einer Graden liegen, die normal zu einer Ebene ist und wenn sie gleichen Abstand von dieser Ebene haben, so sind sie von allen Punkten der Ebene gleichweit entfernt.

Satz V. Die Abstände der Punkte einer Graden von einer zu ihr parallelen Ebene sind gleich.

Die von den Punkten der Graden auf die Ebene gefällten Lothe sind parallel (Zus. II, Satz I, § 87) und liegen in einer Ebene (Zus. III, Satz II, § 87) und mithin liegen ihre Fusspunkte auf der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der gegebenen Ebene, welche der gegebenen Graden parallel ist (Zus. I, Satz III, § 85). Die von den Punkten der Graden auf die Ebene normal gezogenen Segmente sind mithin gleich (Satz IV, § 85 und Satz I, § 44).

Def. II. Der Abstand der Punkte einer Graden von einer zu ihr parallelen Ebene heisst *der Abstand der Graden von der Ebene.*

Zus. Der Abstand einer Graden von einer zu ihr parallelen Ebene ist der kleinste Abstand der Punkte der Graden von den Punkten der Ebene (Satz I).

Satz VI. Die Abstände der Punkte einer Ebene von einer andern zu ihr parallelen Ebene sind gleich.

Denn die Lothe auf einer Ebene π stehen auch auf einer zu π parallelen Ebene π' senkrecht (Zus. IV, Satz I, § 87). A und B seien zwei Punkte der Ebene π, die Grade AB ist der Ebene π' parallel und daher sind die Abstände der Punkte A und B von der Ebene π' gleich (Satz V).

Def. III. Der Abstand in den normalen Segmenten der Punkte zweier parallelen Ebenen betrachtet (Def. I, § 5; Satz VI) heisst *der Abstand der beiden Ebenen.*

Zus. Der Abstand zweier parallelen Ebenen ist der kleinste Abstand der Punkte einer Ebene von den Punkten der andern Ebene (Satz I).

Satz VII. Zwei Paare paralleler Ebenen, welche gleichen Abstand haben, sind zwei identische Figuren.

$\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ seien zwei Paare von Ebenen und ihre Abstände gleich. Wir wollen einem Punkt A von α einen Punkt A' von α' entsprechen lassen. Die von dem Punkt A in Verbindung mit den Punkten von β bestimmten Segmente bilden eine Figur, welche derjenigen identisch ist, welche von den durch A' und die Punkte von β' bestimmten Segmente gebildet wird (Satz IV). Setzt man auch einen Identitätszusammenhang für die Ebenen α und α' derart fest, dass die Punkte A und A' von α und α' sich entsprechen, so haben zwei andre sich entsprechende Punkte dieselbe Eigenschaft wie A und A'. Damit ist der Satz bewiesen (Satz III, § 15).

Satz VIII. Zwei gradlinige Figuren, welche durch zwei Gruppen von vier Punkten $ABCD$, $A'B'C'D'$ bestimmt werden, sind identisch, wenn die gradlinigen Segmente, welche die gegebenen Punkte zu Enden haben, der Ordnung nach gleich sind.

Wir geben hier einen andern Beweis eines speciellen Falls des Satzes VII, § 17, der allgemein gültig ist.[1])

$ABCD$ seien die vier gegebenen Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, weil sonst die Figuren eben wären (Satz IV, § 46 und Def. IV, § 38) und $A'B'C'D'$ seien die ihnen entsprechenden Punkte und X, Y zwei Punkte der ersten Figur. Die Graden XD, YD schneiden die Ebene ABC in zwei

1) In dem 13. Abschnitt werden wir den allgemeinen Fall untersuchen, wie es für die Ebene bereits geschehen ist (Satz IV, § 62).

Punkten Z und W (Satz I, § 83). Wir setzen den in den Ebenen durch die vier Dreiecke der vier Punkte bestimmten Identitätszusammenhang fest und bezeichnen mit E und F die Durchschnittspunkte der Graden ZW mit den Seiten AB, BC. In $A'B'$, $B'C'$ existiren die entsprechenden Punkte $E'F'$ derart, dass $(DE) \equiv (D'E')$, $(DF) \equiv (D'F')$, $\widehat{DEF} \equiv \widehat{D'E'F'}$. Da nun die den Punkten Z und W in der Ebene $A'B'C'$ entsprechenden Punkte Z' und W' bezüglich mit E', D' zwei Dreiecke bestimmen, welche den durch die Punkte Z und W mit E und D bestimmten Dreiecken identisch sind, da $(EZ) \equiv (E'Z')$, $(EW) \equiv (E'W')$, so erhält man $(DZ) \equiv (D'Z')$, $(DW) \equiv (D'W')$ und überdies $(ZW) \equiv (Z'W')$. Mithin sind die beiden Dreiecke DZW, $D'Z'W'$ identisch und folglich $\widehat{ZDW} \equiv \widehat{Z'D'W'}$. Weil nun $(DX) \equiv (D'X')$, $(DY) \equiv (D'Y')$, so folgt $(XY) \equiv (X'Y')$ (Fig. 95).

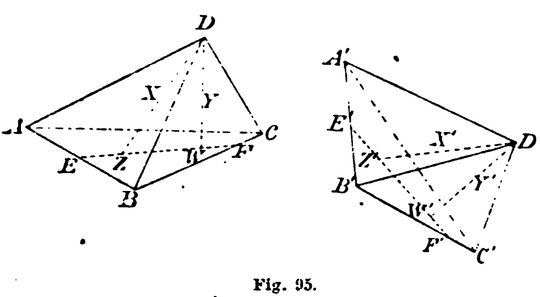


Fig. 95.

§ 89. *Satz I. Das auf zwei sich kreuzenden Graden normale Segment, dessen Enden in den beiden Graden liegen, gibt den kleinsten Abstand eines Punktes einer beliebigen der beiden Graden von einem Punkt der andern an.*

Durch die beiden Graden lege man die zwei zu ihnen bezüglich parallelen Ebenen; das auf die Graden senkrechte Segment, dessen Enden in den Graden liegen, steht auch senkrecht auf den beiden Ebenen (Zus. Satz V, § 87). Da dieses das kleinste von den Segmenten der Punkte der beiden Ebenen ist, so ist es auch das kleinste zwischen den Punkten der beiden Graden (Zus. Satz VI).

Bem. I. In der vollständigen Ebene haben zwei Grade zwei gemeinschaftliche normale Abstände, welche wir den kleinsten und den grössten Abstand der beiden Graden genannt haben (Satz VII, § 73). Der kleinste Abstand ist es aber nur, wenn das Segment mit seinen beiden Enden auf den beiden Graden senkrecht steht; denn da sich diese Graden in zwei entgegengesetzten Punkten schneiden, so gibt es, wie wir gesehen haben, auch Segmente mit ihren Enden auf den beiden Graden, welche kleiner als das normale Segment sind, die aber nicht mit ihren *beiden* Enden auf der Graden senkrecht stehen.

In dem vorliegenden Fall dagegen existirt kein andres Segment $(A_1 B_1)$, welches kleiner oder ebensogross wäre als das Segment (AB).

Satz II. Die schiefen Segmente, deren Enden sich in zwei sich kreuzenden Graden befinden und gleichen Abstand von den Enden des auf beiden Graden senkrechten Segments haben, sind gleich und bilden gleiche Winkel mit den beiden Graden.

a und b seien die beiden gegebenen Graden, α und β die ihnen bezüglich parallelen und sie enthaltenden Ebenen, (AB) das normale Segment. Ferner mögen die Punkte C und D der Graden b und die Punkte E und F der Graden a gleichen Abstand bezüglich von B und A haben. Wir beweisen nun, dass $(EC) \equiv (FD)$. C' und D' seien die Fusspunkte der von C und

D auf die Ebene α gefällten Lothe, welche auf der durch A parallel zu b gezogenen Graden b' liegen (Zus. III, Satz II, § 87 und Zus. I, Satz III, § 85).

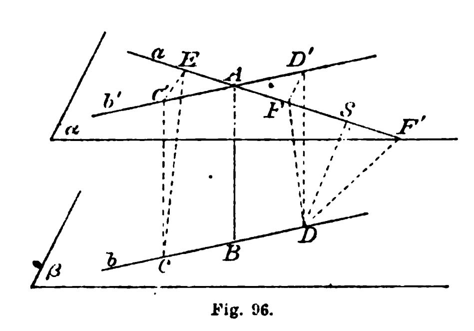


Fig. 96.

Man findet (Zus. II, Satz I, § 87; Satz I, § 44) $(CC') \equiv (AB) \equiv (DD')$. Nun sind die beiden Dreiecke $EC'A$, $FD'A$ gleich, weil sie zwei Seiten und das eingeschlossene Paar gleich haben, nämlich $(C'A) \equiv (AD')$ (Satz IV, § 85; Zus. II, Satz I, § 87 und Satz I, § 44), $(EA) \equiv (AF)$, $\widehat{EAC'} \equiv \widehat{FAD'}$ (Satz II, § 17); mithin ist $(C'E) \equiv (D'F)$ (Zus. Satz III, § 16).

Die beiden Dreiecke $EC'C$, $FD'D$ sind ebenfalls gleich, weil sie bei C' und D' rechtwinklig sind und ihre Katheten der Ordnung nach gleich haben, nämlich $(C'E) \equiv (D'F)$, $(CC') \equiv (DD')$; mithin ist $(EC) \equiv (FD)$, was zuerst zu beweisen war.

Um auch den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, bemerken wir, dass die beiden Dreiecke AEC, AFD gleich sind, weil sie ihre Seiten gleich haben, nämlich: $(AE) \equiv (AF)$, $(EC) \equiv (FD)$ und ferner $(AC) \equiv (AD)$ als schiefe Segmente bezüglich der Graden b, deren Projectionen auf die Grade b gleich sind (Satz III, § 54). Mithin ist $\widehat{AEC} \equiv \widehat{AFD}$. Aehnlich findet man $\widehat{BCE} \equiv \equiv \widehat{BDF}$, wie zu beweisen war.[1]) (Fig. 96.)

Bem. II. Wenn zwei schiefe Segmente nur gleich sind, so folgt daraus nicht, dass ihre Enden gleichweit von den Enden des zu den beiden Graden normalen Segments abstehen. Denn wenn S der Fusspunkt des von D auf die Grade a gefällten Lothes ist, so fällt S nicht mit A zusammen, und wählt man den Punkt F'' so, dass $(F''S) \equiv (FS)$, so erhält man $(FD) \equiv (F''D) \equiv (EC)$. Desshalb ist aber nicht $(AF) \equiv (AF'') \equiv (AE)$.

Zus. I. Sind a und a', b und b' die Theile zweier sich kreuzender Graden von den Endpunkten ihres kleinsten Segments (AB) an, so sind die Figuren (ab), $(a'b')$ oder auch (ab'), $(a'b)$ identisch.

Denn nimmt man in a und b die Punkte E und C und bezüglich in gleichem Abstand von den Punkten A und B in a' und b' die Punkte E' und C', so sind die beiden gradlinigen Figuren $ABEC$, $ABE'C'$ identisch, weil die von den ersten vier Punkten bestimmten Segmente den von den andern vier Punkten bestimmten gleich sind (Satz VII, § 17 oder Satz VIII, § 88).

Bem. III. Sind zwei gleiche schiefe Segmente zweier sich kreuzenden Graden gegeben und bilden sie mit einer von ihnen gleiche Winkel, so sind auch die Winkel gleich, welche sie mit der zweiten Graden machen und die Grade, welche die Mittelpunkte der durch ihre

1) Lässt man die Lehre von den Winkeln und den Dreikanten derjenigen von den Abständen vorausgehen, so könnte man den Satz auch so beweisen. Aus dem gleichschenkligen Dreieck CAD folgt $\widehat{CAB} \equiv \widehat{DAB}$ und ferner ist $\widehat{EAB} \equiv \widehat{FAB}$ als Rechte. Die Winkel $EABC$, $FABD$ sind Scheitelwinkel mit der gemeinsamen Kante AB, sind also gleich; mithin sind auch die Dreikante $A \cdot BCE$, $A \cdot BDF$ und daher die Winkel EAC, FAD gleich. Weil nun in den Dreiecken EAC, FAD, $(EA) \equiv (FA)$, $(AC) \equiv (AD)$ und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gleich ist, so sind diese Dreiecke identisch.

Enden auf den beiden Graden bestimmten Segmente verbindet, ist das gemeinschaftliche Loth (Satz VI, § 17).

Satz III. Zwei Strahlenpaare, welche gleiche Winkel bilden und gleichen Abstand haben, sind identisch.

ab, $a'b'$ seien die beiden Strahlenpaare, α und β, α' und β' die Ebenen, die der Reihe nach durch einen Strahl eines Paares gehen und parallel zu dem andern sind, (AB), $(A'B')$ die beiden normalen Segmente. In den Ebenen α und α' ziehen wir durch A und A' die Strahlen b_1 und b_1' den Strahlen b und b' parallel und gleichgerichtet; es ist dann $(ab_1) \equiv (a'b_1')$ (Zus. I, Satz I, § 40).

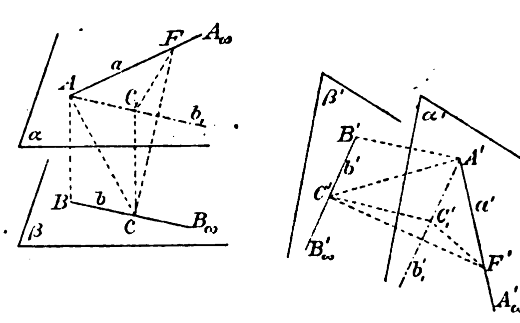


Fig. 97.

C und C', F und F' seien zwei Punktepaare bezüglich in gleichem Abstand von B und B', A und A' auf den Strahlen b und b', a und a'. Wir ziehen durch C und C' die Parallelen zu (AB) und $(A'B')$, welche die beiden Strahlen b_1 und b_1' in C_1 und C_1' schneiden; es ist dann $(AC_1) \equiv (A'C_1')$, weil $(BC) \equiv (B'C')$ gegeben ist (Zus. II, Satz I, § 87; Satz I, § 44). Die Dreiecke AC_1F, $A'C_1'F'$ sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; mithin ist $(C_1F) \equiv (C_1'F')$. Die Dreiecke FC_1C, $F'C_1'C'$ sind ebenfalls gleich, weil sie bei C_1 und C_1' rechtwinklig sind und ihre Katheten gleich haben; daher ist $(FC) \equiv (F'C')$.

Man erhält ferner $(AC) \equiv (A'C')$, $(BF) \equiv (B'F')$; denn A und A' z. B. haben gleichen Abstand von den Graden b und b' und die Projectionen der Segmente (AC), $(A'C')$ auf b und b' sind gleich. Die vier Punkte $ABCF$, $A'B'C'F'$ haben daher zu je zweien gleichen Abstand voneinander und bestimmen also zwei identische gradlinige Figuren (Satz VII, § 17 oder Satz VIII, § 88), in welchen die Strahlenpaare (ab), $(a'b')$ und ihre Enden A und A sich entsprechen.

Zus. Zwei Paare sich kreuzender Graden, welche gleiche Winkel miteinander machen und gleichen Abstand haben, sind identisch.

Bem. IV. Zwei Strahlenpaare, welche gleiche Winkel miteinander machen *oder* gleichen Abstand haben, sind im Allgemeinen nicht identisch, weil im ersten Fall die zu den Strahlen der beiden Paare normalen Segmente im Allgemeinen ungleich sind und sie im zweiten Fall im Allgemeinen nicht gleiche Winkel miteinander machen.

7.

Winkel der Strahlen, Graden, Halbebenen und Ebenen.

§ 90. *Der Winkel eines Strahls und einer Graden mit einer Ebene.*

Bem. I. Es sei ein Strahl a und eine Ebene β gegeben und vorerst mag das Ende A des Strahls in der Ebene liegen.

A_∞ und b_∞ seien ferner der Punkt und die Grade im Unendlichgrossen des Strahls a und der Ebene β. Der Abstand des Punktes A_∞ von den Punkten der Graden b_∞ hat ein Minimum und ein Maximum, die von A_∞ aus auf dem von A_∞ auf die Grade b_∞ gefällten Loth gemessen werden und die Abstände des Punktes A_∞ von der Graden b_∞ sind (Satz VII, § 73) (Fig. 98). Wählt man eine andre Grade b'_∞ und einen andern Punkt A'_∞ und es ist alsdann der kleinste oder grösste Abstand des Punktes A'_∞ von der Graden b'_∞ dem entsprechenden des Punktes A_∞ von der Graden b_∞ gleich, so sind die durch die beiden Graden b_∞, b'_∞ mit den beiden Punkten A_∞, A'_∞ gebildeten ebenen Figuren identisch. Das heisst, die Abstände der Punkte der Graden b_∞ von dem Punkt A_∞ sind bezüglich den Abständen der entsprechenden Punkte der Graden b'_∞ von dem Punkt A'_∞ gleich. Dabei verstehen wir unter entsprechenden Punkten der Graden b_∞ und b'_∞ diejenigen, welche in einer gegebenen Richtung von dem Fusspunkt des von A_∞ und A'_∞ auf b_∞ und b'_∞ gefällten kleinsten oder grössten normalen Segments gleichen Abstand haben (Satz III, § 15).

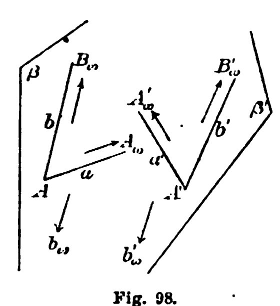


Fig. 98.

Wenn aber ein schiefes Segment, dessen Enden in A_∞ und b_∞ liegen, einem schiefen Segment mit den Enden in A'_∞ und b'_∞ gleich ist, so sind aus diesem Grund allein die beiden Figuren $(A_\infty b_\infty)$, $(A'_\infty b'_\infty)$ im Allgemeinen nicht identisch d. h. die Abstände der beiden Punkte A_∞, A'_∞ von den beiden Graden b_∞, b'_∞ sind nicht gleich. Man darf daher als Winkel des Strahls a mit der Ebene β nicht denjenigen nehmen, welchen a mit einem beliebigen z. B. durch A begrenzten Strahl b der Ebene β macht, wenn man den Winkel zwischen Strahl und Ebene als Vergleichungselement zwischen zwei identischen Figuren ansehen will.

Hat man eine andre Ebene β' und einen andern Strahl a' und bildet der Strahl b' von β' mit a' denselben Winkel, wie a mit b, so können wir also daraus nicht schliessen, dass die Winkel, welche die Strahlen a und a' mit allen entsprechenden Strahlen ihrer Ebenen β und β' machen, gleich sind; es lässt sich vielmehr behaupten, dass sie es im Allgemeinen nicht sind.

Wenn wir dagegen den kleinsten Abstand des Punktes A_∞ von der Graden b_∞ als Mass des Winkels zwischen dem Strahl a und der Ebene β betrachten und ebenso für den Strahl a' und die Ebene β' und wenn alsdann die beiden kleinsten Abstände der Punkte A_∞ und A'_∞ von ihren entsprechenden Graden b_∞ und b'_∞ gleich sind, so sind auch der Ordnung nach die Winkel gleich, welche die Strahlen a und a' mit den Strahlen der entsprechenden Ebenen β und β' bilden und mithin die Figuren $(a\beta)$ und $(a'\beta')$ identisch (Fig. 98). Daher:

Def. I. Unter *dem Winkel zwischen einem Strahl und einer Ebene* verstehen wir den Winkel, welcher durch den kleinsten Abstand des Punktes im Unendlichgrossen des Strahls von der Graden im Unendlichgrossen der Ebene gemessen wird.

Satz I. Der Winkel, welchen ein Strahl mit einer Ebene macht, ist derjenige, welchen dieser Strahl mit seiner Projection auf die Ebene macht.

Denn das von dem Punkt A_∞ auf die Grade b_∞ gefällte Loth geht durch die Pole dieser Graden und mithin steht die durch den Strahl a und dieses Loth bestimmte Ebene senkrecht auf der gegebenen Ebene und enthält den Strahl a (Zus. II, Satz II, § 87) und ist a' der Schnitt dieser Ebene mit der Ebene β, so ist a' die Projection des Strahls auf die Ebene und der Winkel (aa') wird durch den kleinsten Abstand des Punktes A_∞ von b_∞ gemessen.

Zus. Der Winkel eines Strahls mit einer Ebene ist der kleinere der beiden Winkel, welche der Strahl mit der Graden seiner Projection auf die Ebene macht.

Denn der zweite Winkel wird durch den grössten Abstand des Punktes A_∞ von b_∞ gemessen und der grösste und kleinste Abstand sind supplementär (Satz VII, § 73).

Satz II. Der Winkel, welchen ein Strahl mit seiner Projection auf eine Ebene macht, ist von den Winkeln, welche der Strahl mit allen Strahlen der Ebene macht, der kleinste.

Denn der Abstand des Punktes A_∞ von jedem Punkt der Graden b_∞, welcher nicht der Fusspunkt des kleinsten normalen Segments ist, ist grösser als dieses kleinste Segment (Satz VII, § 73).

Zus. Der Winkel, welchen der Strahl mit der Verlängerung seiner Projection auf die Ebene macht, ist der grösste.

Def. II. Unter *den Winkeln einer Graden mit einer Ebene* verstehen wir diejenigen, welche durch den kleinsten und grössten Abstand der beiden entgegengesetzten Punkte im Unendlichgrossen der Graden von der unendlich fernen Graden der Ebene gemessen werden.

Bem. II. Da diese Abstände auf dem von dem einen oder andern der beiden Punkte im Unendlichgrossen der Graden auf die unendlich ferne Grade der Ebene gefällten Loth liegen, so folgt daraus, dass sie zusammengenommen vier rechte Segmente ausmachen und gerade das Mass der Winkel liefern, welche die gegebene Grade mit ihrer Projection auf die gegebene Ebene macht.

Bem. III. Die Def. I gilt offenbar auch dann, wenn das Ende des Strahls nicht in der Ebene liegt. Alsdann sind zwei auf solche Weise gegebene Figuren offenbar identisch, wenn das zwischen dem Endpunkt des Strahls und dem Durchschnittspunkt seiner Verlängerung oder des Strahls selbst mit der Ebene enthaltene Segment in beiden Figuren gleich ist.

Probl. Mit den Elementen des endlichen Gebiets einen Strahl zu beschreiben, welcher durch einen Punkt P geht und einen gegebenen Winkel mit einer Ebene macht.

Man ziehe nur von dem gegebenen Punkt P die Normale zur Ebene (Zus. VIII, Satz IV, § 87) und lege durch die Normale eine Ebene, welche die Normale enthält, also senkrecht auf der gegebenen Ebene steht (Satz III, § 87) und sie in einer durch den Fusspunkt A der Normalen gehenden Graden schneidet. Wenn man einen in A begrenzten Strahl dieser letzten Graden betrachtet und von A aus in der senkrechten Ebene einen zweiten Strahl zieht, der mit dem ersten den gegebenen Winkel bildet (Bem. III, § 60) und durch den Punkt P den ihm parallelen Strahl zieht, so ist dieser einer der gesuchten Strahlen. Aus der Construction geht hervor, dass das Problem unendlich viele Auflösungen hat.

§ 91. *Keil und Keilwinkel.*

Def. I. Ein Ebenenbüschel schneidet die im Unendlichgrossen liegende Ebene π_∞ in einem Gradenbüschel, dessen Centren die im Unendlichgrossen liegenden entgegengesetzten Punkte X_∞, X'_∞ der Axe des Büschels sind. Und den Halbebenen des Büschels entsprechen die durch die beiden Punkte X_∞, X'_∞ begrenzten Strahlen oder Halbgraden des Büschels in der Ebene π_∞. Den Winkelsectoren zweier Halbgraden a_∞, b_∞ des Büschels entsprechen zwei Theile des Ebenenbüschels, welche durch die beiden Halbebenen α und β bestimmt werden, *Keile* heissen und zusammengenommen das ganze Büschel bilden.

Unter *Keil* zweier Halbebenen verstehen wir immer denjenigen, welcher dem kleinsten Winkelsector ihrer Halbgraden im Unendlichgrossen entspricht,

es sei denn, die beiden Keile der beiden Halbebenen wären gleich. Die beiden Halbebenen heissen die *Schenkel*, die Axe des Büschels *die Kante oder Scheitellinie* des Keils.

Betrachtet man einen Keil als einem andern identischen in jedem Verhältniss zu andern Keilen substituirbar, so heisst er *Keilwinkel.*[1])

Sind α und β die Schenkel eines Keils, so bezeichnen wir ihn mit $(\alpha\beta)$.

Def. II. Wie die beiden Halbgraden a_x, b_x um den Punkt X_x oder X'_x betrachtet zwei ebene Winkelsectoren bestimmen, welche zusammengenommen die vollständige Ebene bilden, wenn man den Punkt als Element betrachtet, so bestimmen zwei Halbebenen eines Büschels zwei Theile des Raums um die Axe des Büschels, welche ebenfalls *Keile* genannt werden. Auch in diesem Fall verstehen wir unter *Keil* zweier Halbebenen den Theil des Raums, welcher dem Keil in dem Büschel entspricht.

Bem. I. Wir gebrauchen in dem einen wie dem andern Fall dasselbe Wort, weil jeder Keil des Büschels einen Keil des Raums bestimmt und umgekehrt, wiewohl sie wesentlich verschiedene Dinge sind, da der erste die Halbebene, der zweite den Punkt zum Element hat und der erste daher ein Ding einer Dimension, der zweite dagegen dreier Dimensionen ist (Einl. § 110).

Satz I. Ein Keil ist aus den Halbebenen zusammengesetzt, welche die Axe mit den Strahlen eines Winkels verbinden, dessen Schenkel in den Schenkeln des Keils liegen (Zus. II, Satz II, § 71 und Def. I, II).

Satz II. Ein Keil wird von parallelen Ebenen so geschnitten, dass gleiche Winkel entstehen.

Denn die parallelen Ebenen schneiden die Schenkel des Keils in parallelen Strahlen (Satz III, § 85). Diejenigen, welche in demselben Schenkel liegen, sind gleichgerichtet, weil sie denselben Punkt im Unendlichgrossen haben (Def. II, § 33); mithin sind die Winkelsectoren, in welchen der Keil durch die Reihe paralleler Ebenen geschnitten wird, gleich (Satz I, § 40).

Zus. Zwei beliebige Halbebenen werden von parallelen Ebenen in Strahlen geschnitten, die denselben Winkel miteinander machen.

Denn sie werden in parallelen Strahlen geschnitten und die Strahlen derselben Halbebene haben die nämliche Richtung.

Satz III. Gleichen Winkeln der Ebene im Unendlichgrossen entsprechen gleiche Keile der Ebenenbüschel, deren Axen durch die Scheitelpunkte der gegebenen Winkel gehen.

$a_x b_x$, $a_{1x} b_{1x}$ seien die beiden Schenkelpaare der beiden Winkel im Unendlichgrossen; $X_x X'_x$, $X_{1x} X'_{1x}$ ihre Scheitel, welche Paare entgegengesetzter Punkte sind, x und x_1 seien die Kanten der beiden Keile, in deren Unendlichgrossem die beiden gegebenen Winkel liegen. Man setze einen Identitätszusammenhang zwischen den beiden Winkeln derart fest, dass den Punkten X_x und X'_x die Punkte X_{1x} und $X_1{}'_x$ entsprechen, und es sei ein Identitätszusammenhang zwischen den beiden Kanten x und x_1 der beiden Keile gegeben, in welchem A und A_1 zwei entsprechende Punkte sind. Die Ebene π_x lässt sich bezüglich

1) Der Keilwinkel ist die intensive Grösse des Keils (Einl. Def. II, a u. c, § 111).

der endlichen Einheit als eine absolute Grenzebene jeden Punktes des endlichen Gebiets und also auch der Punkte A und A_1 betrachten (Satz I, § 84). Wählt man zwei Punkte Y und Z in dem ersten Keil und verbindet sie mit A, so erhält man zwei Strahlen AY, AZ, welche im Unendlichgrossen zwei Punkte Y_∞, Z_∞ des Winkels $(a_\infty b_\infty)$ bestimmen. Construirt man in dem Winkel $(a_{1\infty} b_{1\infty})$ die entsprechenden Punkte $Y_{1\infty}$, $Z_{1\infty}$, so ist $(Y_\infty Z_\infty) \equiv (Y_{1\infty} Z_{1\infty})$. Die Dreiecke $Y_\infty A Z_\infty$, $Y_{1\infty} A_1 Z_{1\infty}$ sind identisch (Satz III, § 34) und mithin $\widehat{Y_\infty A Z_\infty} \equiv \widehat{Y_{1\infty} A_1 Z_{1\infty}}$ (Satz III, § 42). Bestimmt man daher in den Strahlen $A_1 Y_{1\infty}$, $A_1 Z_{1\infty}$ die Punkte Y_1 Z_1 in dem gleichen Abstand vom Punkt A_1 wie die Punkte Y Z von A, so sind die Dreiecke $A YZ$, $A_1 Y_1 Z_1$ gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 42). Folglich ist $(YZ) \equiv (Y_1 Z_1)$ und die beiden Keile sind daher identische Figuren (Satz III, Zus. II, Satz II, § 15).

Zus. I. Zwei ungleiche Winkel $(a_\infty b_\infty) > (a_{1\infty} b_{1\infty})$ bestimmen um zwei Grade x und x_1, welche durch ihre Scheitel gehen, ungleiche Keile $x \cdot a_\infty b_\infty > x_1 \cdot a_{1\infty} b_{1\infty}$.

Man braucht sich nur zu denken, der Winkel $(a_\infty b'_\infty)$ sei in $(a_\infty b_\infty)$ enthalten und dem Winkel $(a_{1\infty} b_{1\infty})$ gleich. Die Halbebene xb'_∞ ist in dem Keil $x \cdot a_\infty b_\infty$ enthalten und weil das Ebenen- und Halbebenenbüschel einfach geschlossen ist (Satz VIII, § 83), so ist

$x \cdot a_\infty b'_\infty < x \cdot a_\infty b_\infty$ und mithin $x \cdot a_\infty b_\infty > x_1 \cdot a_{1\infty} b_{1\infty}$. (Einl. Def. II, § 61)

Zus. II. Zwei Keile mit bezüglich parallelen Schenkeln sind gleich oder supplementär.

Satz IV. Zwei gleiche Keile bestimmen im Unendlichgrossen gleiche Winkel.

$x \cdot a_\infty b_\infty$, $x_1 \cdot a_{1\infty} b_{1\infty}$ seien die beiden Keile und es möge $(a_\infty b_\infty) > (a_{1\infty} b_{1\infty})$ sein. Die beiden Keile wären alsdann nicht gleich (Zus. I, Satz III). Mithin u.s.w.

Satz V. Der Keilwinkel wird durch den Normalabstand der beiden Halbgraden im Unendlichgrossen der Schenkel des Keils gemessen.

Denn die Winkel eines Ebenenbüschels lassen sich nach den vorstehenden Sätzen mittelst der Winkel des Büschels vergleichen (messen), welches durch das Ebenenbüschel im Unendlichgrossen bestimmt wird. Die Winkel des Büschels in dieser Ebene, welche eine vollständige Ebene ist (Satz I und Def. I, § 84) lassen sich aber mittelst der Segmente vergleichen, welche sie auf der Pollinie der Centren des Büschels bestimmen (Satz IV, § 69). Sind nun $a_\infty b_\infty$ die zwei Halbgraden eines Winkels, $A_\infty B_\infty$ ihre Durchschnittspunkte mit der Pollinie der Scheitel des Winkels, so ist $(A_\infty B_\infty)$ das auf die beiden Halbgraden normale Segment (Def. II, § 73), welches ihren normalen Abstand angibt.

Satz VI. Ein Ebenenbüschel ist in der Position seiner Theile identisch und stetig.

Denn dies ist die Eigenschaft der Pollinie des Punktes im Unendlichgrossen der Axe des Büschels.

Satz VII. Ein Keil $(\alpha\beta)$ ist mit demselben Keil in der entgegengesetzten Richtung betrachtet identisch.

Denn dies ist die Eigenschaft eines gradlinigen Segments (Einl. g, § 99 oder c, § 104).

Def. III. Wenn man ein Ebenenbüschel oder einen Keil mit einer zur Axe oder Kante senkrechten Ebene schneidet, so heisst das Gradenbüschel oder der Winkel, der sich ergibt, *Normalschnitt* des Büschels oder des Keils.

Satz VIII. Sind zwei Keile gleich oder ungleich, so sind ihre Normalschnitte gleich oder ungleich und umgekehrt.

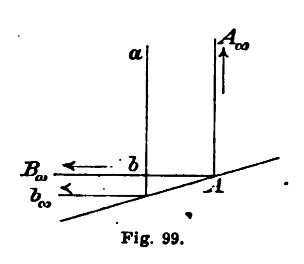


Fig. 99.

Verbindet man einen Punkt A der Kante eines Keils mit den beiden Endpunkten A_∞ B_∞ des zu den beiden Halbgraden a_∞ b_∞ normalen Segments, so erhält man eine auf der Kante im Punkt A senkrechte Ebene, weil die Grade $A_\infty B_\infty$ die Pollinie des Punktes im Unendlichgrossen dieser Kante ist (Satz I, § 87). Sind daher die zu den Paaren der Halbgraden im Unendlichgrossen der Schenkel zweier Keile normalen Segmente gleich, so sind die beiden Winkel der Normalschnitte gleich (Def. I, § 39).

Sind dagegen die Normalschnitte gleich, so heisst dies, dass die auf den Paaren der Halbgraden im Unendlichgrossen der Schenkel normalen Segmente gleich sind; mithin sind die beiden Keile gleich. Ueberdies entsprechen grösseren oder kleineren Keilen der Ordnung nach grössere oder kleinere Normalschnitte (Fig. 99).

Def. IV. Unter *dem Winkel zweier beliebigen Halbebenen* versteht man denjenigen, welcher durch das normale Segment ihrer Halbgraden im Unendlichgrossen gemessen wird (Zus. I, Satz VII, § 73).

Satz IX. Der Winkel zweier Halbebenen ist der kleinste oder grösste derjenigen Winkel, welche ein Strahl der einen von ihnen mit einem Strahl der andern macht und umgekehrt.

Denn α und β seien die beiden Halbebenen, a_∞, b_∞ ihre Halbgraden im Unendlichgrossen, $(A_\infty B_\infty)$ das normale Segment. Das normale Segment $(A_\infty B_\infty)$ der beiden Halbgraden gibt auch, wenn die Enden der Halbgraden nicht zusammenfallen, den kleinsten Abstand zwischen den Punkten der einen und der andern Graden an, wenn es kleiner, und den grössten Abstand, wenn es grösser als ein rechtes Segment ist (Zus. I, Satz VII, § 73 und Def. IV) (Fig. 99).

Bem. II. Man kann zwei Punkte C_∞, D_∞ so wählen, dass ihr Segment kleiner als $(A_\infty B_\infty)$ ist, aber nicht kleiner als jeder Abstand des Punktes C_∞ sowohl als des Punktes D_∞ von den Punkten der andern Graden. Daraus folgt, dass es auch in den beiden Halbebenen Strahlen c und d gibt, deren Winkel zwar kleiner als der Winkel der Halbebenen, aber weder für c bezüglich der Strahlen der Halbebene α, noch zu gleicher Zeit für d bezüglich der Strahlen der Halbebene β der kleinste ist.

Zus. Der Supplementwinkel der beiden Halbebenen ist im ersten Fall der grösste, im zweiten der kleinste von den Winkeln, welche die Strahlen der beiden Halbebenen miteinander machen.

Def. V. Keile, welche dieselbe Kante haben und deren Schenkel in zwei

Ebenen derart liegen, dass die Schenkel des einen denjenigen des andern bezüglich der gemeinschaftlichen Kante entgegengesetzt sind, heissen *Scheitelkeile.*

Satz X. Zwei Scheitelkeile sind gleich.

Denn sie haben im Unendlichgrossen zwei Scheitelwinkel, welche gleich sind (Satz II, § 40 und Bem. I, § 69).

Def. VI. Unter *Keilen und Winkeln zweier Ebenen* α und β verstehen wir die Keile und Winkel der Halbebenen (ab), (ba'), $(a'b')$, $(b'a)$, wenn a und a', b und b' die in α und β durch ihre Durchschnittslinie bestimmten Halbebenen sind.

Bem. III. Es ist:

$$(ab) \equiv (a'b'), \quad (b'a) \equiv (ba')$$

und in Bezug auf ihr Mass

$$(ab) + (ba') = \pi.$$

Der kleinere der Winkel zweier Ebenen oder sein Scheitelwinkel heisst auch der *Keilwinkel* oder einfach *der Winkel zweier Ebenen.* Sind sie alle gleich, so braucht man offenbar nur einen in Betracht zu ziehen.

Satz XI. Die Keile zweier Ebenen haben zwei Halbirungsebenen, welche senkrecht aufeinander stehen.

Denn die Winkel der beiden Graden a_{1x}, b_{1x}, welche die Halbgraden a_x, a'_x, b_x, b'_x im Unendlichgrossen von α und α', β und β' enthalten, haben zwei Halbirungslinien (Zus. II, Satz IV, § 69), die mit dem Punkt A verbunden die Halbirungsebenen der Keile der beiden Ebenen liefern und senkrecht aufeinander stehen (Satz II, § 87).

Probl. Mit den Elementen des endlichen Gebiets eine Halbebene zu beschreiben, welche einen gegebenen Winkel mit einer andern Halbebene von derselben Grenzgraden macht.

Durch einen Punkt A der Grenzgraden x der gegebenen Halbebene α lege man eine auf x senkrechte Ebene, welche α in einem bestimmten Strahl a schneidet. In dieser normalen Ebene ziehe man dann einen andern Strahl b durch den Punkt A, welcher mit a den gegebenen Winkel bildet (Bem. III, § 60). Die durch die Grade x und den Strahl b bestimmte Halbebene ist die verlangte. Man sieht daraus, dass das Problem zwei Auflösungen zulässt.

8.

Die Identität des Raums um seine Punkte im Unendlichgrossen und um seine Graden.

§ 92. *Satz I. Der Raum ist um jeden seiner Punkte im Unendlichgrossen identisch.*

X_x, Y_x seien zwei seiner Punkte im Unendlichgrossen. Wir legen durch die Sterne, deren Scheitel in X_x und Y_x liegen, zwei Ebenen senkrecht auf ihrer Richtung. Die Identität der beiden Sterne kann man mittelst der Identität der beiden Ebenen feststellen, indem man die Scheitel einander entsprechen lässt.

Satz II. Alle Büschel nicht paralleler Ebenen sind identisch.

Denn die Graden im Unendlichgrossen, welche die Büschel messen, sind identisch (Satz V, § 91; Zus. III, Satz VI; Zus. I, Satz II, § 69 und Satz I, § 8).

Zus. Der Raum ist um jede seiner Graden des endlichen Gebiets identisch.

Satz III. Ein Büschel paralleler Ebenen ist in der Position seiner Theile identisch und stetig.

Denn wählt man eine auf die Richtung der Ebenen senkrechte Grade, so entsprechen gleichen Segmenten der Senkrechten gleiche Theile des Büschels und umgekehrt (Satz IV, § 85). Der Beweis dieser Gleichheit ist demjenigen analog, welcher für die Büschel paralleler Graden gegeben wurde (Satz III, § 48). Die Eigenschaften der Segmente des auf die Richtung der Ebenen gefällten Lothes verwandeln sich mithin in andre Eigenschaften des Büschels.

Satz IV. Alle Büschel paralleler Ebenen sind identisch.

Denn die Graden, welche die Büschel messen, sind identisch.

Zus. I. Der Raum ist um jede seiner Graden im Unendlichgrossen identisch.

9.

Das körperliche Vieleck. — Das Dreikant.

§ 93. *Def. I.* Die durch n von einem Punkt P ausgehende Strahlen $a\ b\ c \ldots$ bestimmte gradlinige Figur heisst *körperliches Vieleck* oder auch *Vielkant.* Die Strahlen $a, b, c, \ldots$ sind *die Kanten,* der Punkt P *der Scheitel,* die durch die Strahlen gebildeten Sectoren $(ab), (ac), \ldots$ *die Seiten* und die durch die Seiten gebildeten Keile *die Winkel* des Vielecks.

Den durch die beiden Seiten (ab) und (bc) gebildeten Keil oder Winkel bezeichnen wir mit dem Symbol $\widehat{abc}$ oder auch $\widehat{cba}$.

Die Gesammtheit der als ebene Sectoren (Def. II, § 46) betrachteten Seiten des Vielkants heisst *die Oberfläche* des Vielkants.

Def. II. Hat das Vielkant nur drei Kanten a, b, c, so heisst es *Dreikant.* Wir bezeichnen es mit abc oder $P \cdot ABC$, wenn P der Scheitel ist und $A\ B\ C$ drei Punkte der Kanten.

$a\ b\ c$ seien die drei von einem Punkt P des Raums ausgehenden Strahlen, $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ ihre Punkte im Unendlichgrossen. Die Seiten des Dreikants werden durch die Seiten des Dreiecks $A_\infty\ B_\infty\ C_\infty$ gemessen (Def. I, § 39). Dagegen messen die Winkel dieses Dreiecks die Keile des Dreikants (Def. II, § 91).

Der innere und äussere Theil des Dreiecks $A_\infty B_\infty C_\infty$ gibt den Theil des Raums *innerhalb* und *ausserhalb* des Dreikants (Bem. I, § 72).

Def. III. Wie wir bei dem Dreieck die Verlängerungen der Seiten haben, welche mit den Seiten die drei Graden des Dreiecks zusammensetzen, so bilden die Verlängerungen der Seiten des Dreikants mit den Seiten die drei Ebenen des Dreikants. Wie jeder Eckpunkt des Dreiecks der Seite, welche die beiden andern verbindet, gegenüberliegt, so sagen wir auch von jeder Kante des Dreikants *sie liege* der Seite, welche die beiden andern verbindet, *gegenüber.* Jeder Keil des Dreikants *liegt* der seiner Kante gegenüberliegenden Seite *gegenüber.*

Die Kanten eines Dreikants sind die Verlängerungen der Kanten eines andern Dreikants; die beiden Dreikante heissen *Scheiteldreikante.* Sie haben im Unendlichgrossen zwei entgegengesetzte Dreiecke.

Satz I. Die von den Keilen $\widehat{abc}$, $\widehat{bca}$, $\widehat{cab}$ *eines Dreikants* abc *eingeschlossenen Theile des Raums, welche durch die gegenüberliegenden Seiten begrenzt werden, fallen zusammen.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem analogen Satz der vollständigen Ebene (Satz I, § 72 und Def. II).

Zus. I. Ein Winkel, der denselben Scheitelpunkt hat, wie das Dreikant und dessen Strahlen im Innern oder auf der Oberfläche des Dreikants liegen, ist, wenn er nicht ganz auf der Oberfläche liegt, im Innern des Dreikants gelegen (Bem. I, § 72 und Def. II).

Zus. II. Zwei innere Punkte eines Dreikants oder zweier Seiten desselben bestimmen ein inneres Segment des Dreikants (Zus. IV, Satz H, § 50 und Zus. I).

Zus. III. Der innere Theil eines jeden Dreiecks, dessen Eckpunkte im Innern eines Dreikants oder wenigstens auf zwei Seiten liegen, befindet sich innerhalb des Dreikants.

Zus. IV. Zwei Ebenen, welche je eine Kante enthalten und je durch einen inneren Punkt der gegenüberliegenden Seite des Dreikants gehen, schneiden sich in einem Strahl des inneren Theils und umgekehrt (Bem. I, § 72; Def. II).

Bem. I. Wie drei Grade der Ebene im Unendlichgrossen acht Dreiecke bestimmen, deren innere Theile zusammengenommen die ganze Ebene bilden, so *bestimmen drei durch einen Punkt des Raums gehende Ebenen acht Dreikante*, deren innere Theile den ganzen Raum ausmachen.

Satz II. Den inneren Strahlen eines Dreikants sind die inneren Strahlen des Scheiteldreikants entgegengesetzt (Satz II, § 72 und Def. II).

Zus. I. Wenn ein durch den Scheitel eines Dreikants gehender Strahl ausserhalb des Dreikants und nicht innerhalb des Scheiteldreikants liegt, so schneidet nur eine der drei Ebenen, welche den Strahl mit den Kanten verbinden, eine gegenüberliegende Seite in einem inneren Strahl (Zus. Satz II, § 72).

Zus. II. Eine Grade, welche keine Kante schneidet, trifft entweder zwei Seiten des Dreikants, auch die des Scheiteldreikants eingeschlossen, in inneren Punkten und die dritte in einem äusseren Punkt oder sie trifft die drei Seiten in äusseren Punkten.[1])

Man betrachte nur die Ebene, welche durch den Scheitel des Dreikants geht und die gegebene Grade enthält. Wenn diese Ebene das Dreikant in zwei äusseren Strahlen schneidet, so liegen auch ihre Graden ausserhalb des Dreikants und des Scheiteldreikants, womit der Zusatz bewiesen ist. Schneidet

---

1) Das z. B. von *Sannia* und *d'Ovidio* a. a. O. S. 405 gegebene Postulat: „Wenn man durch einen inneren Punkt einer Seite eines convexen Körpervielecks (der sich aber nicht auf einer Kante befindet) eine Grade zieht, welche nicht in der Ebene dieser Seite liegt, so trifft diese Grade die Oberfläche des Vielecks in einem zweiten Punkt und nur in einem" geht ohne Weiteres aus dem analogen Satz hervor, den wir (Anm. § 51) für ein convexes Polygon in der Ebene im Unendlichgrossen gegeben haben und welcher auch für die vollständige Ebene gilt.

sie dagegen das Dreikant in zwei inneren Strahlen, so liegen die Verlängerungen innerhalb des Scheiteldreikants und der Satz ist auch für diesen Fall bewiesen.

Bem. II. Es kann so kommen, dass die inneren Punkte der Graden statt einem einzigen, den beiden Scheiteldreikanten angehören; alsdann trifft die Grade die Oberfläche eines jeden der beiden Dreikante in nur einem inneren Punkt.

Satz III. Eine durch den Scheitel des Dreikants gehende Ebene schneidet entweder zwei Seiten innerhalb und die dritte ausserhalb oder sämmtliche drei Seiten ausserhalb (Satz III und Bem. II, § 72 und Def. II).

Satz IV. In jedem Dreikant ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte (Satz I, § 76).

Zus. Jede Seite eines Dreikants ist grösser als der Unterschied der beiden andern (Zus. Satz I, § 76).

Satz V. In einem Dreikant liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber und umgekehrt liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber (Bem. I, § 76).

Zus. I. Sind zwei Winkel eines Dreikants gleich, so sind die gegenüberliegenden Seiten gleich.

Und umgekehrt:

Sind zwei Seiten gleich, so sind auch die gegenüberliegenden Winkel gleich (Satz III, § 42; Satz V, § 55; Bem. I, § 76).

Def. IV. Hat ein Dreikant zwei Seiten gleich, so heisst es *gleichschenklig.* Die dritte Seite ist *die Basis.*

Jedem gleichseitigen Dreieck im Unendlichgrossen entspricht ein Dreikant, dessen drei Seiten und drei Winkel gleich sind; es heisst *gleichseitig.*

Wenn das Dreieck im Unendlichgrossen des Dreikants ein conjugirtes Polardreieck ist (Def. IV, § 69), so sind die Winkel des Dreikants rechte (Def. I, § 39) und das Dreikant wird alsdann *rechtwinklig gleichseitiges Dreikant* genannt.

Satz VI. In einem gleichschenkligen Dreikant steht die Ebene, welche die Mittellinie der Basis mit der gegenüberliegenden Kante verbindet, senkrecht auf der Basis und halbirt das Dreikant mit den gleichen Seiten.

Dies folgt aus den Eigenschaften des Dreiecks im Unendlichgrossen des gleichschenkligen Dreikants, welches gleichschenklig ist (Satz IV, § 42 und Def. II; Satz V, § 69 und Satz II, § 87).

Satz VII. In zwei Dreikanten, welche zwei Seiten gleich haben, ist in demjenigen Dreikant die dritte Seite grösser, in welchem ihr der grössere Winkel gegenüberliegt und umgekehrt (Bem. I, § 76).

Def. V. Dem reciproken oder Supplementdreieck eines in der Ebene im Unendlichgrossen gegebenen Dreiecks (Def. I, § 76) entspricht *das reciproke oder Supplementdreikant* eines gegebenen Dreikants.

Bem. III. Ist das Dreikant abc gegeben, so erhält man das nach Def. V reciproke Dreikant dadurch, dass man in dem Scheitel des ersteren senkrechte Strahlen auf die Ebenen der Seiten und nach derselben Seite zieht, auf welcher die übrigbleibende Kante liegt.

Satz VIII. Ist ein Dreikant supplementär zu einem andern, so ist das letzte supplementär zum ersten (Satz II, § 76).

Satz IX. Die Seiten- und die Winkel eines Dreikants sind bezüglich den Winkeln und den Seiten des Supplementdreiecks gleich (Satz III, § 76).

Satz X. In einem Dreikant ist jeder Winkel um zwei Rechte vermehrt grösser als die Summe der beiden übrigen Winkel (Satz V, § 76).

Satz XI. In jedem Dreikant ist die Summe der Seiten kleiner als vier rechte Winkel (Satz VII, § 76).

Satz XII. In jedem Dreikant ist die Summe der Winkel grösser als zwei und kleiner als sechs Rechte (Satz VII, § 76).

Satz XIII. Die Summe der Winkel und der drei Seiten eines rechtwinklig gleichseitigen Dreikants beträgt je drei Rechte (Satz VIII, § 76).

10.

Gleiche Dreikante.

§ 94. *Satz I. Dreikante mit parallelen und gleichgerichteten Kanten sind gleich.*

Denn ein Dreieck im Unendlichgrossen liefert für jeden Punkt des endlichen Gebiets des Raums ein Dreikant und diese Dreikante sind sämmtlich gleich, weil man die Ebene im Unendlichgrossen als absolute Grenzebene bezüglich jeden Punktes des endlichen Gebiets ansehen kann (Satz I, § 84).

Satz II. Zwei Dreikante sind gleich, wenn ihre Seiten bezüglich gleich sind.

Denn ihre Dreiecke im Unendlichgrossen sind gleich, weil ihre drei Seiten bezüglich gleich sind (Satz III, § 17 und Def. II, § 93).

Satz III. Zwei Dreikante sind gleich, wenn ihre Winkel bezüglich gleich sind (Satz IV, § 76 und Satz III, § 15).

Satz IV. Zwei Dreikante, welche zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, sind gleich.

Denn ihre Dreiecke im Unendlichgrossen sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Satz II, § 42 und Bem. I, § 69).

Satz V. In gleichen Dreikanten liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.

Dies folgt aus der analogen Eigenschaft der Dreiecke im Unendlichgrossen der beiden Dreikante (Satz I, § 42).

Satz VI. In einem der Theile, in welche der Raum durch eine Ebene zerlegt wird, gibt es keine zwei gleiche Dreikante, welche eine in der gegebenen Ebene liegende Seite gemeinschaftlich haben (Bem. I, § 74).

Satz VII. Zwei Dreikante, welche zwei Winkel und die ihnen gemeinschaftliche Seite gleich haben, sind gleich (Bem. I, § 76).

Satz VIII. Zwei Scheiteldreikante sind gleich.

Denn ihre Dreiecke im Unendlichgrossen sind entgegengesetzt und mithin gleich (Satz III, § 30).

Satz IX. Die rechtwinklig gleichseitigen Dreikante sind in sechs verschiedenen Arten gleich.

Denn ihre Dreiecke im Unendlichgrossen besitzen dieselbe Eigenschaft (Zus. II, Satz III, § 69).

Satz X. Die Ebenen der Seiten eines rechtwinklig gleichseitigen Dreikants theilen den Raum in acht rechtwinklig gleichseitige Dreikante (Satz IV, § 72).

11.

Das Tetraeder.

§ 95. *Def. I.* Die gradlinige durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte des Raums bestimmte Figur (Def. I, § 9) heisst *Tetraeder.* Die gegebenen Punkte sind die *Eckpunkte,* die durch sie bestimmten Segmente und Dreiecke *die Kanten* und *Seitenflächen* des Tetraeders. Unter Kanten und Seitenflächen verstehen wir auch die durch die vier Eckpunkte bestimmten Graden und Ebenen. Unter *Dreikanten* des Tetraeders verstehen wir diejenigen, welche von den durch einen beliebigen der Eckpunkte begrenzten Kanten bestimmt werden, und unter *Keilen* des Tetraeders diejenigen seiner Dreikante.

Def. II. Von einem Eckpunkt sagt man, *er liege* der Seitenfläche der drei andern *gegenüber;* ebenso *liegt* eine Kante derjenigen *gegenüber,* welche die beiden nicht auf der ersteren liegenden Eckpunkte enthält.

Bez. I. Das Tetraeder der Punkte A, B, C, D bezeichnen wir mit $ABCD$.

Def. III. Die durch die Seitenflächen (Dreiecke) des Tetraeders gebildete Figur heisst *Oberfläche* des Tetraeders.

Satz I. Die Theile des Raums innerhalb der vier Dreikante des Tetraeders, welche durch die gegenüberliegenden Seitenflächen begrenzt werden, fallen zusammen.

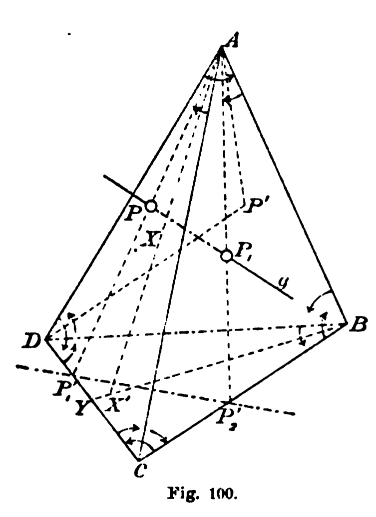


Fig. 100.

Der innere Theil des Dreiecks ABC liegt im Innern des Dreikants $D \cdot ABC$ des Tetraeders $ABCD$ (Zus. III, Satz I, § 93). P' sei ein Punkt im Innern des Dreiecks ABC; das Segment DP' liegt dann innerhalb desselben Dreikants. T sei ein Punkt dieses Segments. Es genügt, wenn wir beweisen, dass er innerhalb eines beliebigen der übrigen drei Dreikante des Tetraeders liegt.

Der Strahl AP' liegt im Innern des Winkels CAB (Satz I, § 51) und mithin ist der Winkel $\widehat{DAP'}$ innerhalb des Dreikants $A \cdot BCD$ (Zus. I, Satz I, § 93) und also auch das Segment AT. Der Punkt T liegt daher in dem inneren Theil des Dreikants $A \cdot BCD$ und aus demselben Grund auch der übrigen zwei Dreikante des Tetraeders (Fig. 100).

Def. IV. Die inneren Theile der Dreikante eines Tetraeders bilden das, was *der innere Theil* des Tetraeders heisst. Der übrig bleibende Theil des Raums mit Einschluss der Oberfläche heisst *der äussere Theil* des Tetraeders.[1])

1) Diese Theile könnten, ohne dass man nöthig hätte die folgenden Sätze, soweit sie

Def. V. Unter innerem oder äusserem Punkt eines Tetraeders versteht man einen Punkt des inneren oder äusseren Theils, welcher nicht auf der Oberfläche liegt.

Liegen die Punkte einer Figur innerhalb oder ausserhalb des Tetraeders, so sagt man, auch wenn sich einige Punkte auf der Oberfläche desselben befinden, die Figur sei *innerhalb* oder *ausserhalb* des Tetraeders.

Zus. I. Die inneren Theile der Keile der Dreikante des Tetraeders, welche durch die Seitenflächen desselben begrenzt werden, fallen zusammen (Satz I, § 93).

Zus. II. Das Segment zweier innerer Punkte des Tetraeders oder zweier Seitenflächen desselben liegt im Innern des Tetraeders.

X, T seien die beiden Punkte; der Winkel $A \cdot XT$ liegt im Innern des Dreikants $A \cdot BCD$ (Zus. I, Satz I, § 93).

Sind X' und T' die Durchschnittspunkte der Strahlen AX und AT mit der Seitenfläche BCD, so befindet sich das Segment $(X'T')$ innerhalb dieser Seitenfläche (Zus. III, Satz I, § 51). Das Dreieck $AX'T'$ liegt aber im Innern des Dreikants $A \cdot BCD$ (Zus. III, Satz I, § 93); folglich ist (XT) innerhalb des Tetraeders (Einl. a, § 13).

Zus. III. Der innere Theil eines Dreiecks, dessen Eckpunkte innerhalb des Tetraeders oder auf der Oberfläche jedoch nicht auf derselben Seitenfläche desselben liegen, ist innerhalb dieses Tetraeders.

X, T, Z seien die Eckpunkte des Dreiecks; seine Seiten liegen innerhalb des Tetraeders (Zus. II) und ebenso auch die Segmente, deren Enden in den Seiten liegen (Zus. III, Satz I, § 51). Diese Segmente aber enthalten alle Punkte des inneren Theils des Dreiecks (Zus. I, Satz III, § 51), mithin u. s. w.

Bem. I. Die vier Ebenen des Tetraeders theilen den Raum, abgesehen vom Tetraeder selbst, in vierzehn Theile, nämlich: die vier Theile innerhalb der vier Dreikante des Tetraeders, die nicht dem Tetraeder selbst angehören, die vier durch die Scheiteldreikante und die sechs durch die den Kanten gegenüberliegenden Keile gebildeten Theile.

Satz II. Eine Ebene, welche nicht durch einen der Eckpunkte des Tetraeders geht und eine Kante in einem inneren Punkt schneidet, trifft entweder

1) zwei andre Kanten, welche mit der ersten durch denselben Eckpunkt gehen, innerhalb oder schneidet

2) drei andre Kanten in inneren Punkten, von denen die eine der ersten Kante gegenüberliegt und die beiden andern einander gegenüberliegen.

$ABCD$ sei das Tetraeder und (AB) die Kante, welche in einem inneren Punkt von einer Ebene π geschnitten wird. Die Durchschnittsgrade mit der Seitenfläche ABC schneidet eine andre Seite dieses Dreiecks in einem inneren Punkt (Satz III, § 51) z. B. (AC) und mithin (BC) in einem äusseren Punkt. Die Durchschnittsgrade mit dem Dreieck ACD trifft (AC) in einem inneren Punkt und also eine andre Seite des Dreiecks z. B. (AD) in einem inneren und die dritte Seite (DC) in einem äusseren Punkt.

---

sich auf sie beziehen, zu ändern, auch derart definirt worden, dass die Oberfläche, wie es beim Kreis geschehen ist (Def. III, § 57), nicht zu ihnen gehörte; man müsste es dann aber auch bei dem Dreieck und daher auch dem Dreikant so halten (Def. I, § 51; Bem. I, § 72; Def. II, § 93).

Die Durchschnittsgrade mit der Seitenfläche BCD schneidet die zwei Kanten (BC), (DC) in äusseren Punkten und daher auch die dritte Kante in einem äusseren Punkt (Zus. Satz III, § 51).

Schneidet dagegen die Ebene die Kante (BC) in einem inneren Punkt, so trifft sie die Kante (AC) nicht. Um alsdann einen von dem vorigen verschiedenen Fall zu bekommen, lassen wir sie in dem Dreieck BCD die Seite (CD) und nicht die Seite (BD) in einem inneren Punkt schneiden (was möglich ist); sie geht dann nothwendiger Weise durch die Seite (AD) des Dreiecks ADC. Die Ebene schneidet daher die Paare sich gegenüberliegender Kanten (AB), (CD); (BC), (DA) innerhalb (Fig. 100).

Zus. I. Sondert man die Eckpunkte des Tetraeders in zwei Gruppen, so kann eine Ebene innerhalb nur die Kanten treffen, welche die Eckpunkte einer Gruppe mit denjenigen der andern verbinden und wenn die Ebene eine Kante innerhalb schneidet und keinen Eckpunkt enthält, so sondern sich die Eckpunkte bezüglich der inneren Durchschnittspunkte mit den übrigen Kanten immer in zwei solche Gruppen.

Dies geht offenbar aus dem vorigen Beweis hervor. Die möglichen Gruppen haben daher die Gestalt (A) (BCD) oder (AB) (CD).

Zus. II. Wenn eine Ebene die drei durch einen beliebigen Eckpunkt des Tetraeders gehenden Kanten in äusseren Punkten trifft, so schneidet sie alle Kanten in äusseren Punkten.

Satz III. Wenn eine Grade g, welche keine Kante des Tetraeders trifft, eine Seitenfläche in einem inneren Punkt P_1 schneidet, so geht sie durch eine andre Seitenfläche in einem inneren und durch die andern in äusseren Punkten.

Die Ebene Ag schneidet die Seitenfläche ABC in der Graden AP_1, welche durch (BC) in einem inneren Punkt P'_2 gehen muss (Zus. IV, Satz II, § 50). Die Ebene Ag schneidet auch die Seitenfläche BCD in einer Graden, welche durch P'_2 geht und eine zweite Seite dieses Dreiecks in einem inneren Punkt treffen muss, z. B. (CD) in P'_1. Ebenso schneidet die Ebene Ag die Seitenfläche ACD in dem Segment AP'_1. Das Dreieck $AP_1'P_2'$ liegt innerhalb des Tetraeders und die Grade g, welche durch einen inneren Punkt einer Seite nämlich (AP'_2) geht, muss eine andre Seite z. B. (AP_1') in einem inneren Punkt P treffen (Satz III, § 51) und schneidet mithin eine andre Seitenfläche des Tetraeders in einem inneren Punkt. Weil die Grade überdies die Seite $(P'_1P'_2)$ ausserhalb schneidet, so trifft sie die Seitenfläche BCD ausserhalb. Wir behaupten, dass sie die übrig bleibende Seitenfläche nicht in einem inneren Punkt treffen kann. Denn bezeichnen wir mit P'' den Durchschnittspunkt der Graden $P'_1P'_2$ mit der Seite BD des Dreiecks BCD, so liegt P'' ausserhalb des Segments (BD) (Satz III, § 51) und der Strahl AP'' befindet sich mithin ausserhalb des Winkels BAD (Zus. IV, Satz II, § 50). Weil nun der Durchschnittspunkt von g mit der Seitenfläche ABD auf der Graden AP'' liegt, so ist damit der Satz bewiesen (Fig. 100).

Zus. I. Eine Grade, welche drei Seitenflächen in äusseren Punkten trifft, schneidet auch die vierte Seitenfläche des Tetraeders in einem äusseren Punkt.

Satz IV. Eine Grade, welche einen Punkt im Innern des Tetraeders hat, schneidet die Oberfläche des Tetraeders in zwei Punkten.

X sei der Punkt einer Graden g innerhalb des Tetraeders $ABCD$. Wir verbinden A mit X und AX möge die gegenüberliegende Seitenfläche BCD in X' treffen; X' liegt dann im Innern der Seitenfläche BCD (Satz I). Y sei der Durchschnittspunkt von BX' mit (DC); Y liegt dann innerhalb (DC), weil X' innerhalb der Seitenfläche BCD ist (Satz I, § 50 und Zus. IV, Satz II, § 50). Das Tetraeder $ABCY$ hat mit dem ersten die Seitenfläche ABC gemeinschaftlich und die Seitenflächen AYC, BCY sind Theile der Seitenflächen ADC, BDC. Die Grade g geht durch einen inneren Punkt der Seitenfläche ABY, trifft daher, wenn sie keine Kante schneidet, eine andre Seitenfläche in einem inneren Punkt und mithin auch eine Seitenfläche des gegebenen Tetraeders in einem inneren Punkt. Damit ist der Satz bewiesen (Satz III) (Fig. 100, S. 453).[1])

Satz V. Es gibt keine zwei gleichen Tetraeder, welche eine Seitenfläche gemeinschaftlich haben und deren gegenüberliegende Eckpunkte auf derselben Seite dieser Seitenfläche liegen.

$ABCD$, $A'BCD$ seien die zwei Tetraeder mit der gemeinsamen Seitenfläche BCD. Liegen die Eckpunkte A und A' auf derselben Seite bezüglich der Ebene BCD, so erhielte man zwei gleiche Dreikante z. B. $B \cdot ACD$, $B \cdot A'CD$, die zwei Kanten BC, BD gemeinschaftlich hätten und deren beiden andern Kanten BA, BA' auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Seitenfläche lägen, was unmöglich ist (Satz VI, § 94).

12.

Die Richtungen oder Sinne der Sterne, Keile, Dreikante und Tetraeder. — Die Richtungen des Raums.

§ 96. *Def. I.* In dem Stern $(P\pi)$ (Def. I, § 82) bestimmen die Richtungen der Directrix (der leitenden Ebene) (Def. III, § 61) *die Richtungen des Sterns.*

Bem. I. Als Directrix eines jeden Sterns betrachten wir hier die Ebene im Unendlichgrossen.

Satz I. Die Richtungen des Sterns werden durch diejenigen eines seiner Keile bestimmt.

Denn die Richtungen der Ebene im Unendlichgrossen werden durch diejenigen eines ihrer Winkel bestimmt (Bem. I; Satz IX, § 61 u. Bem. I, § 77).

Zus. Eine Richtung eines Sterns bestimmt gleiche Richtungen seiner Keile (Zus. Satz IX, § 61 u. s. w.).

Satz II. Eine Richtung eines Keils $(\alpha\beta)$ bestimmt die zwei Richtungen eines Sterns, welchem er angehört, je nachdem man ihn von dem einen oder dem andern Punkt im Unendlichgrossen seiner Kante betrachtet.

---

1) Auch dieser Satz wird in den Elementarbüchern als Postulat gegeben oder stillschweigend vorausgesetzt. Wie er für ein convexes Polygon in der Ebene bewiesen wurde (Anm. § 51), ähnlich lässt er sich auch für ein *convexes Polyeder* beweisen.

Denn eine Richtung der Ebene im Unendlichgrossen wird durch die Richtung eines Winkels $(a_x b_x)$ nur dann bestimmt, wenn man festgesetzt hat, welcher von seinen Scheiteln in Betracht kommt (Bem. I, § 77).

Uebereink. Unter dem Symbol $\widehat{abc}$ verstehen wir nicht nur einen Keil eines Sterns — das heisst wenn die Kante des Keils durch einen Punkt begrenzt wird — sondern auch die Richtung des Keils, welcher von dem Schenkel (ab) nach dem Schenkel (bc) hin betrachtet wird.

Satz III. Die Keile $\widehat{abc}$, $\widehat{bca}$, $\widehat{cab}$ *des Dreikants* abc *haben dieselbe Richtung. Die Keile* $\widehat{acb}$, $\widehat{cba}$, $\widehat{bac}$ *haben unter sich die gleiche und zu den ersten drei die entgegengesetzte Richtung* (Bem. I; Satz III, § 61; Bem. I, § 77).

Def. II. Die Richtungen der Keile des Dreikants heissen *die Richtungen oder der Sinn des Dreikants* und werden mit den Symbolen abc und acb bezeichnet, wenn a, b, c die Kanten sind.

Mit denselben Symbolen bezeichnen wir die Richtungen der Oberfläche des Dreikants, welche den Richtungen des Umfangs des Dreiecks im Unendlichgrossen entsprechen (Def. II, § 61 und Bem. I, § 77).

Satz IV. Die Richtung abc *des Dreikants, welche durch seine Keile* $\widehat{abc}$, $\widehat{bca}$, $\widehat{cab}$ *bestimmt wird, ist der Richtung* acb *der Oberfläche gleich* (Satz IV, § 61 und Bem. I, § 77).

Satz V. Die Symbole abc, bca, cab *bestimmen sowohl für die Keile wie für die Oberfläche des Dreikants dieselbe Richtung, während* acb, cba, bac *die entgegengesetzte Richtung angeben* (Satz V, § 61 u. Bem. I, § 77).

Satz VI. Wenn zwei Keile zweier Dreikante eines Sterns gleichgerichtet sind, so haben die beiden Dreikante dieselbe Richtung (Satz VIII, § 61 und Bem. I, § 77).

Satz VII. Wenn zwei Keile $\widehat{abc}$, $\widehat{a'b'c'}$ *zweier Dreikante* abc, $a'b'c'$ *gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, so sind auch die gegebenen Dreikante gleich oder entgegengesetzt gerichtet.*

Denn die Richtung $\widehat{abc}$ eines Keils ist eine Richtung des Dreikants abc (Def. II).

Satz VIII. Zwei Dreikante abc, abd, *welche den nämlichen Scheitel und eine Seite gemeinschaftlich haben, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem die andern nicht gemeinschaftlichen Kanten auf derselben oder entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Seite liegen.*

Denn im ersten Fall haben sie denselben Sinn, weil ihre Dreiecke im Unendlichgrossen dieselbe Richtung haben. Aehnlich im zweiten Fall (Satz X, § 61 und Bem. I, § 77).

Zus. I. Zwei Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot BCD$, *deren Kanten durch dieselben drei Punkte* B, C, D *einer Ebene gehen, haben dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung, je nachdem* A *und* A' *auf derselben Seite der Ebene* BCD *liegen oder nicht.*

Denn in dem ersten Fall sind die Dreikante $C \cdot ABD$, $C \cdot A'BD$ und mithin auch ihre Keile $A \cdot \widehat{BCD}$, $A' \cdot \widehat{BCD}$ in dem Stern vom Centrum C gleichgerichtet. Dieselben Keile in der entgegengesetzten Richtung der Kante d. h. in den Sternen mit den Centren A und A' betrachtet haben dagegen die entgegengesetzte Richtung wie die beiden ersten (Satz II) oder dieselbe Richtung wie die Scheitelkeile mit dem gemeinsamen Scheitel C, welche gleichgerichtet sind (Bem. I; Satz I, § 61; Bem. I, § 77). Die beiden Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot BCD$ sind daher gleichgerichtet, weil es zwei ihrer Keile sind (Satz VII).

Zus. II. Eine Richtung einer Ebene bestimmt gleiche Richtungen in den Sternen, deren Centren auf derselben Seite der Ebene liegen und entgegengesetzte in denjenigen, deren Centren sich auf entgegengesetzten Seiten derselben befinden (Def. II und Satz I).

Satz IX. Die Richtungen zweier Sterne sind gleich, wenn sie der Richtung eines dritten Sterns gleich (oder entgegengesetzt) sind.

Dies folgt aus Satz e, § 8 der Einleitung. Wir wollen aber wie für Satz VII, § 61 einen zweiten Beweis geben. P, P', P'' seien die Centren dreier Sterne und die Sterne P und P' mögen dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung haben wie der Stern P''. Schneiden wir sie mit der Ebene π_x, so haben die beiden Durchschnittsfiguren von π_x mit den Sternen P und P'', P' und P'' dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung (Zus. Satz I, Bem. I) und mithin sind P und P' gleich gerichtet (Satz VII, Zus. Satz VI, § 61; Bem. I, § 77; Bem. I, Satz I und II).

Zus. Zwei Sterne, von welchen der eine dieselbe der andre die entgegengesetzte Richtung wie ein dritter Stern hat, sind entgegengesetzt gerichtet.

Satz X. Zwei Dreikante abc, $ab'c'$, welche eine Kante und den Scheitel gemeinschaftlich haben und deren Seiten (bc), $(b'c')$ in derselben Ebene liegen und dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung haben, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet.

Denn wenn die Winkel (bc), $(b'c')$ dieselbe Richtung haben wie das Büschel um den gemeinschaftlichen Scheitel und in der gemeinschaftlichen Ebene, so sind die Dreiecke $A_x B_x C_x$, $A_x B'_\infty C'_x$ im Unendlichgrossen der beiden Dreikante gleichgerichtet. Sind dagegen die Winkel (bc), $(b'c')$ entgegengesetzt gerichtet, so sind es auch die Dreiecke im Unendlichgrossen (Zus. IV, Satz X, § 61 und Bem. I, § 77) und mithin auch die beiden Dreikante.

Satz XI. Zwei Dreikante $A \cdot BCD$, $A \cdot B'C'D'$, welche denselben Scheitel A haben und deren Kanten eine Ebene in zwei Dreiecken BCD, $B'C'D'$ von derselben oder entgegengesetzter Richtung schneiden, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet.

Denn die Richtung der beiden Dreiecke gibt im ersten Fall die nämliche Richtung der Ebene an (Satz IX, § 61) und mithin auch des Sterns vom Centrum A (Zus. II, Satz VIII) und folglich der beiden Dreikante (Zus. Satz I und Def. II). Im zweiten Fall sind die Richtungen der Dreiecke entgegengesetzt und daher auch diejenigen der beiden Dreikante (Fig. 101).

Satz XII. Zwei Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$ sind gleichsinnig oder nicht, wenn ihre Schnitte BCD, $B'C'D'$ mit einer Ebene π dieselbe Richtung haben und ihre Scheitel auf derselben Seite der Ebene π liegen oder nicht.

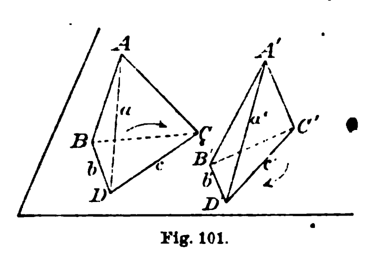


Fig. 101.

Sind dagegen die beiden Dreiecke BCD, $B'C'D'$ entgegengesetzt gerichtet, so haben die beiden Dreikante im ersten Fall entgegengesetzten, im zweiten gleichen Sinn.

Denn im ersten Fall haben die Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot BCD$ gleiche Richtung (Zus. I, Satz VIII). $A' \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$ sind aber auch gleichgerichtet (Satz XI), mithin auch die Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$ (Satz IX, Satz I und Def. II) (Fig. 101).

Zus. I. Zwei Dreikante abc, $a'b'c'$, von welchen zwei Kanten bc, $b'c'$ in einer Ebene liegen und die Winkel (bc), $(b'c')$ dieselbe Richtung haben, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem die Kanten a und a' auf derselben Seite der Ebene liegen oder nicht.

Wenn dagegen (bc), $(b'c')$ entgegengesetzte Richtung haben, so sind im ersten Fall die beiden Dreikante entgegengesetzt, im zweiten gleich gerichtet.

Denn sind D und D' die Scheitel der beiden Dreikante und man wählt auf a, b, c; a', b', c' die Punkte A, B, C; A', B', C', so haben im ersten Fall die Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$ dieselbe Richtung und mithin auch die Keile $A \cdot \widehat{BDC}$, $A' \cdot \widehat{B'C'D'}$ (Satz III und II). Folglich sind die beiden Sterne mit den Centren D und D' gleichgerichtet (Satz I) und also auch die beiden Dreikante $D \cdot ABC$, $D' \cdot A'B'C'$. Aehnlich verhält es sich in den andern Fällen (Fig. 101).

Zus. II. Zwei Dreikante abc, $a'b'c'$, von welchen zwei Kanten b und b' in derselben Graden liegen und entgegengesetzte Richtung haben, deren Kanten c und c' sich in einem Punkt C schneiden und deren Kanten a und a' auf derselben Seite der Ebene $bb'cc'$ liegen, sind entgegengesetzt gerichtet. Liegen a und a' dagegen auf entgegengesetzten Seiten dieser Ebene, so haben die beiden Dreikante denselben Sinn.

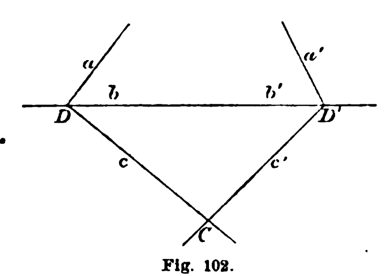


Fig. 102.

Sind b und b' gleichgerichtet, so sind es im ersten Fall auch die beiden Dreikante; im zweiten sind sie entgegengesetzten Sinnes.

Denn wenn in dem vorliegenden Fall b und b' auf derselben Graden liegen und entgegengesetzte Richtung haben und D, D' die Scheitel der beiden Dreikante sind, so haben die Winkel (bc), $(b'c')$ in dem Dreieck $DD'C$ entgegengesetzte Richtung (Satz III, § 61). Die Dreikante abc, $a'b'c'$ sind, wenn a und a' auf derselben Seite der Ebene $DD'C$ liegen, entgegengesetzt, sonst gleich gerichtet (Zus. I).

Aehnlich verhält es sich, wenn b und b', (bc) und $(b'c')$ dieselbe Richtung haben (Fig. 102).

Satz XIII. Wenn man eine Vertauschung einer ungraden Anzahl von Kanten eines Dreikants und ihrer Verlängerungen vornimmt, so erhält man ein Dreikant von entgegengesetztem Sinn zu dem gegebenen, vertauscht man dagegen eine grade Anzahl, so hat das sich ergebende Dreikant denselben Sinn wie das gegebene (Satz I, § 77; Bem. I, Satz I und Def. II).

Zus. I. Die acht Dreikante, welche von drei Ebenen gebildet werden, die sich in einem Punkt des endlichen Gebiets schneiden, zerfallen in zwei Gruppen zu je vier; die Dreikante einer Gruppe haben dieselbe, diejenigen verschiedener Gruppen entgegengesetzte Richtung.

Zus. II. Zwei Scheiteldreikante oder zwei Scheitelvielkante sind entgegengesetzt gerichtet (Satz II, § 77).

Zus. III. Wenn die Kanten eines Dreikants denjenigen eines andern parallel sind und überdies eine oder die drei Kanten des einen Dreikants dieselbe Richtung wie diejenigen des andern haben, so sind die beiden Dreikante gleichsinnig; in den andern Fällen haben sie entgegengesetzten Sinn.

Denn so verhalten sich die Dreiecke im Unendlichgrossen der Dreikante (Satz I, § 77).

Satz XIV. Die Richtungen der Dreikante $A \cdot BCD$, $B \cdot ADC$, $C \cdot DAB$, $D \cdot CBA$ des Tetraeders $ABCD$ sind gleich.

Es genügt zu beweisen, dass die so bestimmte Richtung des Dreikants $A \cdot BCD$ der Richtung eines beliebigen der letzten drei z. B. von $B \cdot ADC$ gleich ist.

Von den beiden Dreikanten $A \cdot BCD$, $B \cdot ADC$ liegen zwei Kanten (AB), (BA) auf der Graden AB und haben entgegengesetzte Richtung; die Kanten (AC), (BC) liegen ferner in derselben Ebene und schneiden sich im Punkt C und die übrigen Kanten (AD) und (BD) liegen schliesslich auf derselben Seite der Ebene ABC. Sie haben daher denselben Sinn (Zus. II, Satz XII und Satz V) und damit ist der Satz bewiesen.

Bezeichnet $A \cdot BCD$ den Sinn der Keile des Dreikants in A, so ist dieser dem mit demselben Symbol bezeichneten Sinn der Oberfläche entgegengesetzt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die übrigen drei Dreikante (Fig. 100, Seite 453).

Def. III. Der Sinn der Dreikante eines Tetraeders heisst *der Sinn des Tetraeders.*

Zus. Der Sinn des Tetraeders wird durch die Richtungen eines beliebigen seiner Keile bestimmt (Def. II).

Bez. I. Ein durch die Punkte A, B, C, D bestimmter Sinn des Tetraeders kann mit dem Symbol $ABCD$ bezeichnet werden, welches nach einer leicht zu erkennenden Regel die Richtungen der Dreikante des Tetraeders angibt nämlich $A \cdot BCD$, $B \cdot ADC$, $C \cdot DAB$, $D \cdot CBA$. Wenn diese Symbole die Richtungen der Keile der Dreikante und nicht ihrer Oberfläche bezeichnen, so wird die Richtung des Keils des ersten Dreikants, dessen Kante AC ist, mit dem Symbol $B\overline{CA}D$ bezeichnet. Ist umgekehrt diese Richtung des Keils gegeben, so ergibt sich aus ihr sofort die Richtung der A gegen-

überliegenden Seite des Tetraeders, nämlich BCD und mithin auch der Sinn des Tetraeders in A nämlich $A \cdot BCD$.

Bem. II. Ist eine geordnete Gruppe oder eine Permutation einer natürlichen Gruppe von Elementen gegeben, so erhält man durch Vertauschung der Stelle consecutiver Elemente alle geordneten Gruppen oder alle Permutationen der gegebenen Elemente (Einl. c, § 48). Diejenigen, welche man durch eine grade Anzahl von Stellenvertauschungen erhält, heissen *grade*, diejenigen, welche man durch eine ungrade Anzahl solcher Vertauschungen bekommt, *ungrade* Permutationen.

Satz XV. Die graden Permutationen in dem Symbol $ABCD$ eines Tetraeders geben einen Sinn, die ungraden den entgegengesetzten Sinn an.

Da die Dreikante

$$A \cdot BCD,\ B \cdot ADC,\ C \cdot DAB,\ D \cdot CBA$$

dieselbe Richtung haben (Satz XIV), so sind die Keile dieser Dreikante, welche dieselbe Richtung haben und mithin einen Sinn des Tetraeders angeben, die folgenden:

$$(1) \quad \begin{cases} B\overline{CA}D,\ C\overline{DA}B,\ D\overline{BA}C \\ A\overline{DB}C,\ D\overline{CB}A,\ C\overline{AB}D \\ D\overline{AC}B,\ A\overline{BC}D,\ B\overline{DC}A \\ C\overline{BD}A,\ B\overline{AD}C,\ A\overline{CD}B \end{cases}$$

Diejenigen, welche den entgegengesetzten Sinn des Tetraeders angeben, sind:

$$(2) \quad \begin{cases} D\overline{CA}B,\ B\overline{DA}C,\ C\overline{BA}D \\ C\overline{DB}A,\ A\overline{CB}D,\ D\overline{AB}C \\ B\overline{AC}D,\ D\overline{BC}A,\ A\overline{DC}B \\ A\overline{BD}C,\ C\overline{AD}B;\ B\overline{CD}A \end{cases}$$

Die Symbole $BCAD$, $CDAB$ u. s. w. bezeichnen denselben Sinn des Tetraeders wie das Symbol $ABCD$, während $DCAB$, $BDAC$ u. s. w. den entgegengesetzten Sinn angeben.

Lässt man die Striche weg, so sind die Gruppen (1) und (2) die Gruppen der graden und ungraden Permutationen der vier Buchstaben.

Satz XVI. Wenn zwei Dreikante $A \cdot BCD$, $A' . B'C'D'$ zweier Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, so sind die beiden Tetraeder gleichen oder entgegengesetzten Sinnes.

Wird bewiesen, wie Satz VIII, § 61.

Def. IV. Anstatt zu sagen, zwei Sterne von den Centren P und P' hätten gleiche oder entgegengesetzte Richtung, sagen wir auch, der Raum um die beiden Punkte P und P' habe dieselbe oder entgegengesetzte Richtung und da die Richtungen der Sterne gleich oder entgegengesetzt sind, so sind dies auch die Richtungen des Raums um seine Punkte. Wir können mithin behaupten, die Richtungen des Sternes bestimmten *die Richtungen des Raums.*

Satz XVII. Die Richtungen des Raums werden durch diejenigen eines Keiles eines beliebigen Dreikants des Raums bestimmt (Satz I).

Denn die Richtungen des Raums werden durch diejenigen seiner Sterne,

diese aber ihrerseits durch diejenigen eines Sterns und diejenigen eines Sterns durch die eines einzigen Keiles bestimmt (Satz I).

Zus. Eine Richtung des Raums bestimmt gleiche Richtungen seiner Keile, deren Kanten durch einen Punkt begrenzt sind.

Wird analog wie Zus. Satz IX, § 61 bewiesen.

Satz XVIII. Eine Richtung eines Keils ($\alpha\beta$) *bestimmt die beiden Richtungen des Raums, je nachdem man ihn von dem einen oder dem andern Punkt im Unendlichgrossen der Kante betrachtet* (Satz II).

Bem. III. In diesem Abschnitt hätte man eine ähnliche Methode befolgen können, wie bei der Ebene (§ 61).

Nachdem man die Sätze I, III, IV, V, VIII für die Dreikante eines Sterns wie für die Dreiecke der Ebene bewiesen, bemerkt man, dass, wenn die Richtung der Oberfläche eines Dreikants des Tetraeders z. B. $A \cdot BCD$ gegeben ist, auch die Richtung der Oberfläche der andern drei Dreikante nämlich $B \cdot ADC$ u. s. w. bestimmt ist. Diese Dreikante heissen gleichgerichtet wie bei den Dreiecken (Bem. II und Def. II, § 61) (Fig. 100). Bemerkt man dann, dass man durch das Symbol $B \cdot ACD$ gerade die entgegengesetzten Richtungen dieser Dreikante erhält, die nach der gegebenen Definition gleich sind, und dass die Richtungen der Dreikante durch ihre Keile bestimmt werden (Satz IV), so folgt daraus die Eigenschaft des Satzes II, nämlich, dass jeder Keil zwei entgegengesetzte Richtungen hat, je nachdem man ihn in der einen oder andern Richtung betrachtet.

Man gibt alsdann den Satz, dass zwei beliebige Sterne gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, mit einem ähnlichen Beweis wie bei Satz VI, § 61, wie auch Satz IX, der wie Satz VII, § 61 bewiesen wird, indem man sich auf das Tetraeder bezieht. Dann folgen Satz XVI (analog Satz VIII, § 61), Zus. I Satz VIII und ebenso Zus. II Satz X, XI, XII und Zus. und schliesslich Def. IV und Satz XVII, XVIII. [1])

13.

Die Richtungen der identischen Figuren. — Congruente und symmetrische Figuren.

§ 97. *Def.* Zwei Punkte, welche denselben Abstand von einer Ebene haben und auf derselben Normalen zu dieser Ebene liegen, heissen *symmetrisch bezüglich der Ebene* und die letztere ist die *Symmetrieebene.*

Zwei Figuren heissen dann *symmetrisch bezüglich einer Ebene,* wenn die Punkte der einen symmetrisch zu den Punkten der andern sind.

Zus. I. Die zwei Theile, in welche der Raum durch eine Ebene zerlegt wird, sind bezüglich dieser Ebene symmetrisch.

Denn jeder Punkt A des einen Theils hat einen symmetrischen Punkt im andern Theil. Um ihn zu construiren, braucht man nur das Loth vom Punkt A auf die Ebene zu fällen und wenn S der Fusspunkt des Lothes ist, auf dem Loth ein Segment $(SA') \equiv (SA)$ zu nehmen. Der Punkt A' ist der verlangte Punkt.

Satz I. Ein Segment hat zur symmetrischen Figur bezüglich einer Ebene ein andres ihm gleiches Segment und die Graden beider Segmente schneiden sich in einem Punkt der Symmetrieebene.

1) Diese Methode ist zu empfehlen, wenn man in dem endlichen Gebiet allein bleiben will.

Sind zwei Paare symmetrischer Punkte A, A', B, B' gegeben, so stehen die beiden Graden AA', BB' senkrecht auf der Symmetrieebene α, sind mithin parallel zueinander und in einer auf der Ebene α normalen Ebene gelegen (Zus. III, Satz II, § 87), deren Spur in α die Grade RS ist, welche die Fusspunkte S und R der Normalen AA', BB' verbindet. Die Graden AA', BB' stehen aber senkrecht auf der Graden RS (Zus. V, Satz I, § 87); folglich sind die Segmente (AB), $(A'B')$ in der Normalebene symmetrisch bezüglich der Graden RS (Satz I, § 56). Aber zwei bezüglich der Graden RS symmetrische Punkte X und X' der beiden Segmente sind auch bezüglich der Ebene α symmetrisch, weil jedes Loth auf die Grade RS in der obigen Ebene auch senkrecht auf der Ebene α steht (Zus. III, Satz II, § 87). Damit ist der Satz bewiesen (Fig. 103).

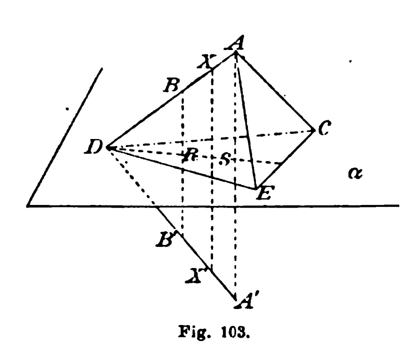


Fig. 103.

Satz II. Jeder Ebene ist bezüglich einer gegebenen Ebene eine andre Ebene symmetrisch, welche die erste in einer Graden der Symmetrieebene schneidet.

Denn den Graden einer Ebene sind die Graden einer andern Figur symmetrisch, welche sich zu je zweien in den Punkten schneiden, die zu den Durchschnittspunkten der entsprechenden Graden in der gegebenen Ebene symmetrisch sind. Diese Figur ist mithin eine Ebene (Satz VIII, § 85). Die symmetrischen Graden der beiden Ebenen schneiden sich in den Punkten der Durchschnittslinie der zwei Ebenen, welche mithin in der Symmetrieebene liegt.

Satz III. Zwei bezüglich einer Ebene symmetrische Figuren sind identisch.

Denn die Paare sich entsprechender symmetrischer Punkte haben denselben Abstand voneinander (Satz II).

Satz IV. Zwei bezüglich einer Ebene symmetrische Dreikante (und mithin auch Tetrader) haben entgegengesetzte Richtung.

Denn BCD sei ein Dreieck der Symmetrieebene α, A und A' zwei bezügl. der Ebene α symmetrische Punkte; die beiden Dreikante $A \cdot BCD$, $A'.BCD$ sind identisch und entgegengesetzt gerichtet (Zus. Satz VIII, § 96).

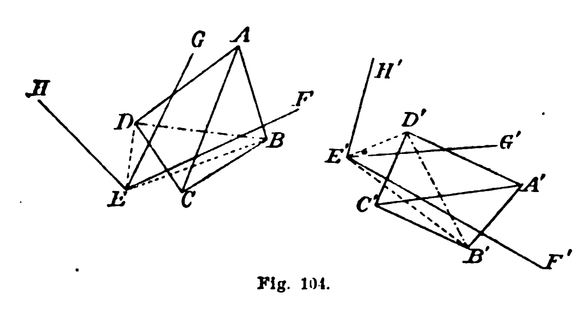


Fig. 104.

§ 98. *Satz I. Der Zusammenhang zwischen zwei identischen Figuren wird vollständig durch zwei sich entsprechende Dreikante bestimmt.*

abc, $a'b'c'$ seien zwei gleiche Dreikante mit den Scheiteln A und A'. Nimmt man auf a, b, c drei Punkte B, C, D und auf den entsprechenden Kanten a', b', c' die drei Punkte B', C', D' in einem Abstand von A', welcher demjenigen der entsprechenden Punkte B, C, D von A gleich ist, so erhält man

zwei einander gleiche Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ (Satz VII, § 17 oder auch VIII, § 88).

E sei ein Punkt der ersten Figur. Die Grade, welche ihn mit A verbindet, treffe die A gegenüberliegende Seitenfläche in einem Punkt X. Da die Figur in der Ebene BCD mit derjenigen in der entsprechenden Ebene $B'C'D'$ identisch sein muss, so folgt, dass in dieser Ebene ein Punkt X' existirt, welcher dem Punkt X entspricht (Satz I, § 62). Nimmt man auf der Graden $A'X'$ einen Abstand $(A'E') \equiv (AE)$ und derart, dass $(E'X') \equiv (EX)$, so entspricht der Punkt E' dem Punkt E (Fig. 104).

Zus. I. Der Identitätszusammenhang zweier identischer Figuren wird durch zwei sich entsprechende Tetraeder bestimmt.

Sind $ABCD$, $A'B'C'D'$ die zwei Tetraeder, so sind die Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$ identisch, mithin u. s. w.

Zus. II. Zwei identische Figuren können nicht vier entsprechende Punkte gemeinschaftlich haben, die nicht in einer Ebene liegen.

Satz II. In dem Zusammenhang zwischen den Punkten des Raums, welcher durch zwei seiner identischen Figuren bestimmt wird, entspricht die Ebene im Unendlichgrossen sich selbst.

Denn einem unendlich grossen Abstand der ersten Figur entspricht ein unendlich grosser Abstand in der zweiten Figur (Satz I, § 34).

Satz III. Die sich entsprechenden Dreikante zweier identischer Figuren haben gleichen oder entgegengesetzten Sinn, wenn zwei beliebige von ihnen gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

$A \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$ seien zwei sich entsprechende Dreikante der beiden Figuren. Wir nehmen zuerst an, sie seien gleichgerichtet. Ferner seien zwei beliebige andre sich entsprechende Dreikante $E \cdot FGH$, $E' \cdot F'G'H'$ mit den Scheiteln E und E' gegeben. Die Dreikante $E \cdot BCD$, $E' \cdot B'C'D'$ haben beide denselben oder den entgegengesetzten Sinn wie die zwei gegebenen Dreikante, weil E und E' entweder beide auf derselben oder der entgegengesetzten Seite wie die Punkte A und A' bezüglich der Ebenen BCD, $B'C'D'$ liegen. Die beiden Dreikante $E \cdot BCD$, $E' \cdot B'C'D'$ sind daher gleichgerichtet, weil es die beiden gegebenen Dreikante sind (Satz IX, § 96). FGH, $F'G'H'$ seien die Durchschnittsdreiecke der Dreikante $E \cdot FGH$, $E' \cdot F'G'H'$ bezüglich mit den Ebenen BCD, $B'C'D'$. Die Dreiecke FGH, $F'G'H'$ haben dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie die beiden Dreiecke BCD, $B'C'D'$ (Satz V, § 62; Satz VIII; VII, § 61). In dem ersten Fall sind die Dreikante $E \cdot FGH$, $A \cdot BCD$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem E und A auf derselben Seite der Ebene BCD liegen oder nicht (Satz XII, § 96). Dasselbe gilt für die Dreikante $E'F'G'H'$ und $A' \cdot B'C'D'$, wegen der Identität der beiden Figuren. Die beiden Dreikante $E \cdot FGH$, $E' \cdot F'G'H'$ haben also dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie die Dreikante $A \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$, welche gleichgerichtet sind; ihre Richtung ist folglich dieselbe. Aehnlich verhält es sich im zweiten Fall.

Mit diesem Beweis des ersten Theils ist zugleich auch der zweite Theil des Satzes bewiesen.

Def. I. Zwei identische Figuren, deren entsprechende gleiche Dreikante dieselbe Richtung haben, heissen *gleichgerichtet* oder auch *congruent*, andernfalls *entgegengesetzt gerichtet* oder *symmetrisch.*

Bem. Wir beachten jedoch, dass die mittelst eines Symbols $ABCD\ldots$ gegebene Richtung einer durch mehr als vier Punkte A, B, C, D, ... gebildeten Figur im Allgemeinen eine der Richtungen des Raums nicht angeben kann, weil sie auch Dreikante von der entgegengesetzten Richtung wie die Dreikante einer andern mit demselben Symbol bezeichneten Figur enthalten kann.

Zus. I. Zwei mit einer dritten congruente oder symmetrische Figuren sind congruent.

Zus. II. Zwei Figuren, von denen die eine mit einer dritten congruent, die andre symmetrisch ist, sind symmetrisch.

Diese Zusätze folgen unmittelbar aus dem vorhergehenden Satz und Satz IX, § 96.

Satz IV. Wenn zwei congruente Figuren des Raums drei nicht in grader Linie gelegene entsprechende Punkte gemeinschaftlich haben, so decken sie sich; und wenn sie zwei Punkte gemeinschaftlich haben, so haben sie alle Punkte der Graden der beiden Punkte gemeinschaftlich.

Die drei gemeinschaftlichen Punkte bezeichnen wir mit A, B, C, wenn sie als zur ersten, mit A', B', C', wenn sie als zur zweiten Figur gehörig betrachtet werden. D sei ferner ein andrer Punkt der ersten Figur, welcher in einem der beiden Theile des Raums bezüglich der Ebene ABC liegt. Ist nun der dem Punkt D entsprechende Punkt D' gegeben, so ist das Tetraeder $A'B'C'D$ dem Tetraeder $ABCD$ congruent und D, D' müssen daher auf derselben Seite der Ebene ABC liegen (Zus. I, Satz VIII, XVI, § 96). Dies ist unmöglich (Satz V, § 95), folglich müssen die Punkte D und D' zusammenfallen.

In Bezug auf den letzten Theil des Satzes seien $A(A')$, $B(B')$ die gemeinschaftlichen entsprechenden Punkte. Der Graden AB entspricht dann die Grade $A'B'$ der andern Figur d. h. die Grade AB entspricht in beiden Figuren sich selbst. Wählt man ferner einen Punkt X in AB, so muss der entsprechende Punkt denselben Abstand von A' und B' haben, wie X von A und B; weil nun A und A', B und B' zusammenfallen, so fallen auch X und X' zusammen (Zus. Satz V, § 15).

Satz V. Wenn zwei symmetrische Figuren drei nicht in grader Linie liegende entsprechende Punkte gemeinschaftlich haben, so haben sie alle Punkte der Ebene dieser Punkte gemeinschaftlich und sind bezüglich dieser Ebene symmetrisch.

Denn es seien $ABCD\ldots M$, $A'B'C'D'\ldots M'$ die beiden Figuren; die in der Ebene ABC gelegenen Theile derselben fallen zusammen (Zus. II, Satz I, § 62). Die bezüglich der Ebene ABC der Figur $ABCD\ldots M$ symmetrische Figur hat dieselbe Richtung wie die Figur $A'B'C'D'\ldots M'$ und fällt daher mit ihr zusammen (Satz IV). Damit ist der Satz bewiesen.

Satz VI. Die gradlinigen durch zwei Gruppen von m Punkten bestimmten Figuren sind identisch, wenn die gradlinigen Segmente, welche $m-4$ der Punkte

mit den übrigen und die Segmente, welche diese letzteren vier miteinander verbinden, der Ordnung nach gleich sind.

Wir wollen annehmen, die beiden Gruppen von vier Punkten seien $ABCD$, $A'B'C'D'$. Ist ein beliebiger Punkt X in der ersten Figur gegeben, so entspricht ihm in dem durch die beiden Figuren $ABCD$, $A'B'C'D'$ bestimmten Identitätszusammenhang ein Punkt X' (Zus. I, Satz I). Dagegen sei X_1' der Punkt der zweiten gegebenen Figur, welcher dieselben Abstände von $A'B'C'D'$ hat wie X von $ABCD$. Die Punkte X' und X_1' müssen zusammenfallen, weil es keine zwei verschiedenen Punkte geben kann, welche dieselben Abstände von vier gegebenen Punkten haben. Denn ist ein Punkt Z gegeben, so existirt nur ein andrer Punkt Z' mit denselben Abständen von den drei Punkten ABC und dieser ist symmetrisch zu Z bezüglich der Ebene ABC (Def. § 97; Satz IV, § 88 und Satz V, § 95). Ist nun noch ein vierter Punkt D gegeben, welcher nicht in der Ebene ABC liegt, und hätten Z und Z' auch denselben Abstand vom Punkt D, so müsste die Grade ZZ' senkrecht auf der Ebene BCD stehen (Def. § 97 und Zus. VIII, Satz II, § 87). Mithin müssten die beiden Ebenen ABC, BCD senkrecht auf der Graden ZZ' stehen, was unmöglich ist. Damit ist der Satz bewiesen.

14.

Kegel und Cylinder.

§ 99. *Def. I.* Das System einer Dimension der Graden, welche einen Punkt P mit den Punkten einer Peripherie C_∞ im Unendlichgrossen, deren Centrum A_∞ ist (§ 75), verbinden, heisst *Oberfläche eines Kreiskegels* oder *Kegeloberfläche, Kegelmantel* und die Graden *Erzeugende.*

Die Richtungen der Kegeloberfläche werden durch die Richtungen der Peripherie C_∞ gegeben.

Die Graden, welche die Punkte des von der Peripherie C_∞ umschlossenen Kreises mit dem Punkt P verbinden, bestimmen *den* Theil des Sterns vom Centrum P, welcher durch die Kegeloberfläche eingeschlossen ist und *Kreiskegel* oder *Kegel* heisst. Der Punkt P ist *die Spitze,* die Grade PA_∞ *die Axe,* die Peripherie C_∞ die Directrix des Kegelmantels und des Kegels.

Eine durch die Axe gehende die Axe enthaltende Ebene heisst *Diametralebene* des Kegels.

Bem. I. Man gebraucht das Wort Kegel auch oft um den Mantel zu bezeichnen, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind.

Satz I. Der Kegelmantel hat im Unendlichgrossen zwei entgegengesetzte Peripherien von demselben Halbmesser.

Ist A das Centrum von C_∞, so ist der entgegengesetzte Punkt A' das Centrum einer C_∞ entgegengesetzten Peripherie C'_∞ vom selben Halbmesser, d. h., die Punkte von C'_∞ sind den Punkten der Peripherie C_∞ entgegengesetzt (Bem. V, § 75) und liegen mithin auf den durch P gehenden Graden (Zus. Satz II, § 30).

Zus. Der Kegel besteht aus zwei bezüglich der Spitze entgegengesetzten Theilen.

Jeder der Theile hat im Unendlichgrossen eine der beiden Peripherien C_∞ und C'_∞.

Def. II. Diese beiden Theile heissen *Scheitelkegel.*

Bem. II. Bezüglich der *Euclid*'schen Einheit der Abstände (Uebereink. § 28 und Bem. § 31) fallen diese beiden Peripherien zusammen (Zus. I, Satz III, § 19 und Zus. Satz I und Def. I, § 84).

Satz II. Die Erzeugenden des Kegels bilden denselben Winkel mit der Axe des Kegels.

Und umgekehrt:

Die Graden, welche mit einer gegebenen Graden denselben Winkel machen und diese Grade in demselben Punkt P schneiden, bilden einen Kegel.

Denn der Winkel einer Erzeugenden mit der Axe wird durch den Halbmesser der Peripherie C_∞ gemessen (Def. I, § 39).

Umgekehrt liegen die Punkte im Unendlichgrossen dieser Graden in zwei entgegengesetzten Peripherien, deren Centren sich in den Punkten im Unendlichgrossen der Axe befinden.

Def. III. Der durch zwei Erzeugende bestimmte Theil des Kegelmantels, welcher einem Bogen der Peripherie C_∞ entspricht, heisst *Kegelsector.*

Satz III. Die Eigenschaften der Peripherie im Unendlichgrossen gelten ohne Weiteres auch für den Kegelmantel, wenn man den Punkten und Bogen der Peripherie die Erzeugenden und Sectoren des Kegelmantels substituirt.

Denn das Strahlenbüschel, welches das Centrum der Peripherie C_∞ zum Mittelpunkt hat, verhält sich offenbar in derselben Art zur Peripherie, wie das Halbebenenbüschel, welches die Axe des Kegels zur Axe hat, sich zum Kegelmantel verhält (siehe Satz I, § 57 und Bem. IV, § 75).

Satz IV. Eine durch die Spitze des Kegels gehende Ebene kann mit dem Kegel nicht mehr als zwei Erzeugende gemeinschaftlich haben (Satz I, § 59 und Bem. IV, § 75).

Def. IV. Wenn die Ebene den Kegel in zwei Erzeugenden schneidet, so heisst sie *Schnittebene* und der Winkel der beiden Erzeugenden *der Durchschnittswinkel.*

Bem. III. Der Durchschnittswinkel entspricht der Länge der Sehne der Peripherie C_∞ (Def. VIII, § 57, Def. I, § 5).

Def. V. Einer Tangente an den Kreis C_∞ entspricht beim Kegel eine Ebene, welche mit dem Kegel nur eine Erzeugende gemeinschaftlich hat und *Berührungsebene* heisst, während die Erzeugende *Berührungsgrade* genannt wird.

Zus. I. Jede durch die Spitze und einen Punkt im Innern des Kegels gehende Ebene schneidet den Kegelmantel in zwei Erzeugenden (Zus. I, Satz I, § 59; Bem. IV, § 75; Def. I).

Zus. II. Die eine Erzeugende enthaltende Berührungsebene steht auf der Ebene senkrecht, welche durch diese Erzeugende und die Axe gelegt wird (Zus. II, Satz I, § 59; Bem. IV, § 75; Satz V, § 69; Zus. II, Satz VII, § 73 und Def. III, § 87).

Zus. III. Jede durch eine Erzeugende des Kegels gehende Ebene schneidet den Kegel in einer andern Erzeugenden (Zus. III, Satz I, § 59; Bem. IV, § 75 und Def. I).

Zus. IV. Alle Ebenen, welche denselben Winkel mit einer Graden bilden und diese Grade in dem nämlichen Punkt P schneiden, sind Tangenten an einen Kegel. Die Berührungsgraden sind die Durchschnittsgraden dieser Ebenen mit den durch die gegebene Grade senkrecht auf die letzteren gelegten Ebenen (Zus. IV, Satz I, § 59 u. s. w.).

Zus. V. Die Scheiteltheile des Kegels liegen bezüglich einer Berührungsebene des Kegels auf entgegengesetzten Seiten.

Eine Tangente an die Peripherie C_∞ ist auch Tangente an die Peripherie C'_∞ und hat die letztere auf der entgegengesetzten Seite (Bem. V, § 75 und Def. II).

Zus. VI. Eine Grade kann nicht mehr als zwei Punkte mit dem Kegel gemeinschaftlich haben.

Denn die Ebene, welche die Grade mit der Spitze verbindet, hat nicht mehr als zwei Erzeugungsgrade mit dem Kegel gemeinschaftlich.

Satz V. Die durch die Axe normal auf eine Schnittebene gelegte Ebene geht durch die Halbirungslinie des Durchschnittswinkels und umgekehrt (Satz III u. IV, § 59; Bem. IV, § 75; Satz V, § 69; Satz II, § 87 und Def. I).

Zus. Eine Diametralebene zerlegt den Kegel in zwei symmetrische Theile (Zus. Satz III, § 59 u. s. w.).

Satz VI. Drei von einem Punkt ausgehende nicht in einer Ebene liegende Strahlen bestimmen einen Kegel und der Kegel wird durch drei beliebige seiner Strahlen bestimmt (Satz V, § 59 und Bem. IV, § 75).

Satz VII. Die Ebene, welche die Axe mit der Durchschnittsgraden zweier Berührungsebenen verbindet, halbirt den Winkel der Ebenen, welche durch die Axe und die Berührungsgraden gehen (Satz X, § 59; Bem. IV, § 75).

Bem. IV. Ebenso könnte man die Sätze bezüglich der Figuren innerhalb und ausserhalb des Kegels denjenigen bezüglich des Kreises der vollständigen Ebene entnehmen, welche ihrerseits aus den Sätzen bezüglich des Kreises der *Euclid*'schen Ebene abgeleitet werden.

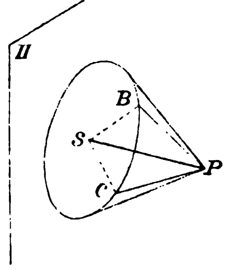


Fig. 105.

Aehnlich liessen sich auch die Sätze über die Durchschnitte zweier Kegel mit derselben Spitze hier aufstellen, welche sich aus denjenigen über die Durchschnitte zweier Peripherien ergeben.

Satz VIII. Eine auf die Axe des Kegels senkrechte Ebene schneidet ihn in einem Kreis.

Denn S sei der Durchschnittspunkt der Normalebene π mit der Axe, B und C die Durchschnittspunkte mit zwei beliebigen Erzeugenden b und c. Die Dreiecke PBS, PCS sind, wenn P die Spitze des Kegels ist, bei S rechtwinklig, haben die Kathete (PS) gemeinschaftlich und überdies $\widehat{BPS} \equiv \widehat{CPS}$ (Satz II); mithin sind auch die dritten Winkel gleich und $(BS) \equiv (SC)$, $(BP) \equiv (CP)$ (Satz X, § 55). Die Durchschnittspunkte der Ebene π mit den Erzeugenden liegen also gleichweit vom Punkt S entfernt (Fig. 105).

Satz IX. Das Gradensystem, welches durch einen Kreisumfang und einen Punkt P auf dem in dem Centrum des Kreisumfangs auf demselben errichteten Loth erzeugt wird, ist ein Kegelmantel.

Denn die Dreiecke PBS, PCS sind bei S rechtwinklig, haben die Kathete (PS) gemeinschaftlich und die Katheten (BS), (CS) nach der Voraussetzung gleich. Mithin sind die Winkel BPS, CPS gleich (Satz II).

Satz X. Durch eine Grade, welche die Spitze des Kegels enthält und ausserhalb des Kegels liegt, gehen zwei Berührungsebenen des Kegels (Satz IV, § 60 und Satz VIII).

§ 100. *Def. I.* Wenn C ein Kreis ist und a_1 das in seinem Centrum auf seine Ebene errichtete Loth, so bestimmt jeder Punkt von a_1 mit C einen Kreiskegel (Satz IX). Liegt der Punkt P im Unendlichgrossen, so erhält man einen speciellen Fall des Kegelmantels, *den Cylindermantel.* Der Theil des Sterns paralleler Graden, welcher von dem Cylindermantel eingeschlossen wird, heisst *Cylinder.*

Bem. Für den Cylinder gelten die für den Kegel gegebenen Sätze, wenn man sich gegenwärtig hält, dass der Cylinder ein Kegel mit der Spitze im Unendlichgrossen ist und als Directrix einen Kreis in einer auf die Axe senkrechten Ebene nimmt.

Der Kreis im Unendlichgrossen reducirt sich alsdann auf einen Punkt, nämlich den der Spitze C_∞ entgegengesetzten Punkt. Der Cylinder kann mithin auch als die Gesammtheit der Kreise von gleichem Halbmesser betrachtet werden, deren Ebenen senkrecht auf der Axe stehen und deren Mittelpunkte in der Axe liegen.

15.

Kugeloberfläche und Kugel.

§ 101. *Def. I.* Alle von einem Punkt P gleichweit abstehende Punkte bilden eine Figur, welche *Kugeloberfläche* genannt wird. Die durch den Punkt P und die Punkte der Kugeloberfläche bestimmten Segmente heissen *Radien* oder *Halbmesser*, der Punkt P das Centrum oder der *Mittelpunkt* der Oberfläche.

Bem. I. Wie der Stern bezüglich seiner Strahlen zwei Dimensionen hat (Def. III, § 82), so kann man auch von der Kugelfläche sagen, sie habe bezüglich ihrer Punkte zwei Dimensionen.

Zus. Die Grenzebene im Unendlichgrossen kann als eine Kugeloberfläche von unendlich grossem Halbmesser und mit dem Mittelpunkt in einem Punkt des endlichen Gebiets angesehen werden (Satz I und Def. I, § 84).

Def. II. Zwei Punkte der Kugelfläche, welche in entgegengesetzten Strahlen des Sterns mit dem Centrum in dem Centrum der Kugelfläche liegen, heissen *entgegengesetzt* und das sie verbindende Segment *Durchmesser.*

Def. III. Alle Durchmesser oder alle Halbmesser der Kugelfläche bilden einen Theil des Raums (Def. I, § 2), welcher *Kugel* heisst.

Die Kugel mit Ausnahme ihrer Oberfläche heisst *der innere Theil* der Kugel. Die Verlängerungen der Radien mit Ausnahme ihrer Enden geben *den äusseren Theil* des Raums bezüglich der Kugel.

Bem. II. Wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, gebraucht man das Wort Kugel häufig, um die Kugeloberfläche zu bezeichnen, obgleich beide verschiedene Dinge

sind. So versteht man unter Durchmesser auch die Grade, welche zwei entgegengesetzte Punkte der Kugel verbindet.

Def. IV. Die Ebenen, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, heissen *Diametralebenen.*

Zus. Jede Diametralebene schneidet die Kugel in einem Kreis.

Denn alle Punkte stehen vom Centrum um den Halbmesser ab und liegen daher in einem Kreis (Def. I).

Satz I. Jede Grade kann die Kugel in nicht mehr als zwei Punkten treffen.

Denn man lege durch die Grade und das Centrum eine Ebene. Diese schneidet die Oberfläche in einer Peripherie, welche höchstens zwei Punkte mit der gegebenen Graden gemeinschaftlich hat (Satz I, § 59) und diese Punkte gehören auch der Kugel an (Bem. II; Einl. a, § 13).

Def. V. Ein Segment, dessen Enden auf der Kugel liegen, heisst *Sehne.*

Satz II. Eine beliebige Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis oder Punkt oder in keinem Punkt, je nachdem ihr Abstand vom Centrum kleiner, ebensogross oder grösser als der Radius ist.

P sei das Centrum der Kugel, π die gegebene Ebene, r der Radius, S der Fusspunkt des von P auf die Ebene π gefällten Lothes.

Das Segment (PS) gibt den Abstand des Punktes P von der Ebene an und ist das kleinste der von P und den Punkten der Ebene bestimmten Segmente (Satz I, § 88). Wenn daher in der Ebene π ein von S verschiedener Punkt A der Kugeloberfläche liegt, so muss

$$(PA) > (PS) \text{ sein.}$$

In diesem Fall liegen aber alle Punkte der Ebene π, welche von P um das Segment (PA) abstehen, in einer Peripherie vom Centrum S und Halbmesser SA (Zus. III, Satz II, § 88).

Ist dagegen

$$(PA) \equiv (PS),$$

so reducirt sich der Durchschnittskreis mit der Ebene π auf den Punkt S. Und wenn schliesslich

$$(PA) < (PS),$$

so hat die Ebene π keinen Punkt mit der Kugel gemeinschaftlich (Fig. 105, S. 468).

Satz III. Eine Diametralebene schneidet die Kugel in einem Kreis von grösstem Halbmesser.

Denn alsdann ist immer

$$(PA) > (SA),$$

da die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks grösser als die Katheten ist (Zus. Satz II, § 54).

Def. VI. Ein in einer Diametralebene gelegener Kugelkreis heisst mithin *grösster oder Hauptkreis* der Kugel.

Def. VII. Eine Tangente an einen Hauptkreis heisst auch *Tangente* an die Kugel in demselben Punkt und dieser letztere wird *Berührungspunkt* der Tangente mit der Kugel genannt.

Satz IV. Die Tangenten in einem Punkt der Kugel liegen in einer auf dem durch den gegebenen Punkt gehenden Radius senkrechten Ebene.

Denn in dem zweiten Fall des Satzes II schneidet jede durch PS gehende Diametralebene die Ebene π in einer Graden s, welche den Punkt S enthält und weil sie senkrecht auf PS steht, den in der Diametralebene gelegenen Hauptkreis berührt (Zus. II, Satz I, § 59). Wenn man nun zwei Tangenten an einem Punkt S der Kugel betrachtet, so hat die Ebene derselben den Radius der Kugel zum Abstand vom Centrum, weil PS senkrecht auf der Ebene steht. Mithin u. s. w. (Zus. VI, VII, Satz I, § 87).

Def. VIII. Die Ebene, welche die an einen Punkt der Kugel gezogenen Tangenten enthält, heisst *Berührungsebene* an die Kugel in dem gegebenen Punkt und der letztere *Berührungspunkt.*

Satz V. Die Kugel liegt ganz auf der einen Seite einer ihrer Berührungsebenen.

Denn ausser dem Berührungspunkt steht jeder Punkt der Berührungsebene α um mehr als den Radius von P ab und umsomehr jeder Punkt, welcher auf der entgegengesetzten Seite von α wie der Punkt P liegt (Zus. II, Satz IV, § 86).

Satz VI. Die in dem Mittelpunkt einer Sehne auf dieser Sehne senkrecht stehende Ebene geht durch das Centrum der Kugel und umgekehrt.

(AB) sei die Sehne, M ihr Mittelpunkt. Das Dreieck PAB ist gleichschenklig. Mithin steht PM senkrecht auf der Sehne (AB) und geht durch PM die in M auf (AB) senkrechte Ebene (Zus. V, VI, Satz I, § 87).

Zus. Eine Diametralebene zerlegt die Kugel in zwei bezüglich dieser Ebene symmetrische Theile.

Denn wählt man einen Punkt A, so liegt der bezüglich der Diametralebene π symmetrische Punkt A' auf der Kugel, weil die von A senkrecht zur Ebene π gezogene Sehne durch π halbirt wird (Def. § 97).

Satz VII. Vier nicht in einer Ebene liegende Punkte bestimmen eine Kugel und diese wird durch vier beliebige ihrer Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, bestimmt.

$ABCD$ seien die vier gegebenen Punkte. Die auf den Segmenten (AB), (BC), (CD) senkrechten und durch die Mittelpunkte derselben gehenden Ebenen schneiden sich in einem Punkt M, welcher gleichweit von den vier gegebenen Punkten absteht (Zus. II, Satz IV, § 88) und können sich, wie man leicht sieht, weder in einer Graden noch in einem Punkt im Unendlichgrossen schneiden.

Die Kugel, welche den gegebenen Punkt zum Centrum hat und den Abstand des Punktes von den Punkten $ABCD$ zum Radius, ist die einzige Kugel, die durch die vier gegebenen Punkte geht. Denn gäbe es eine andre, so hätte diese nach Satz VI dasselbe Centrum und denselben Radius. Daraus folgt, dass, wenn vier andre nicht in einer Ebene liegende Punkte $A'B'C'D'$ auf der Kugel gegeben sind, diese dasselbe Centrum und mithin dieselbe Kugel bestimmen.

Satz VIII. Von einem Punkt des äusseren Theils der Kugel gehen unendlich viele Tangenten an die Kugel, welche gleich sind und in einem Kegel liegen, dessen Axe der durch den gegebenen Punkt gehende Durchmesser ist.

C sei das Centrum der Kugel, O der gegebene Punkt und OC daher der durch den gegebenen Punkt gehende Durchmesser. Man betrachte eine durch diesen Durchmesser gehende beliebige Ebene, welche die Oberfläche in einem Hauptkreis schneidet, an welchen man von O aus zwei bezüglich des Durchmessers CO symmetrische (Zus. Satz III, § 59) Tangenten ziehen kann (Satz IV, § 60). Legen wir durch CO eine andre Ebene, so erhalten wir in derselben mit demselben Centrum eine der ersten identische Peripherie (Zus. I, Satz I, § 57). Mithin sind die beiden Tangenten an diese Peripherie vom Punkt O bis zu ihren Berührungspunkten den ersten beiden gleich und machen denselben Winkel mit dem Durchmesser CO. Da man auf diese Weise alle Tangenten von O an die Kugel erhält, so ist damit der Satz bewiesen (Satz II, § 99).

Zus. I. Die Berührungspunkte der von einem Punkt an die Kugel gezogenen Tangenten liegen auf einem Kreisumfang, dessen Ebene senkrecht auf der Axe des Berührungskegels mit der Spitze in dem gegebenen Punkt steht.

Denn die Ebene der Berührungspunkte dreier Tangenten steht senkrecht auf dem Durchmesser CO, der Axe des Kegels (Zus. III, Satz II, § 88) und enthält alle Berührungspunkte der genannten Tangenten (Zus. VII, Satz I, § 88).

Def. IX. Diese Peripherie heisst *Berührungs- oder Tangentialcurve* des Kegels mit der Kugel.

Zus. II. Die Tangentialebenen eines eine Kugel berührenden Kegels berühren diese Kugel in den Punkten der Tangentialcurve (Satz IV).

Zus. III. Durch eine Grade kann man zwei die Kugel berührende Ebenen legen, welche mit der durch die gegebene Grade gehenden Diametralebene denselben Winkel machen (Satz X, § 99).

Bem. III. Die Eigenschaften der Kugeloberfläche sind also, wie man sieht, dieselben wie die Eigenschaften der vollständigen Ebene, welche wir ohne das Gebiet der Ebene zu verlassen und ohne die Kugel zu benutzen nur mit Hülfe unsrer abstracten Hypothesen behandelt haben (Kap. II, Buch II). Zwei Punkte auf der Kugel bestimmen einen Hauptkreis, dessen Ebene durch das Centrum geht und bestimmen diesen Kreis nicht, wenn sie entgegengesetzt sind.

Die Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln eines Dreikants lassen sich ohne Weiteres in Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln der auf der Kugel durch Bogen von Hauptkreisen gebildeten Dreiecke umsetzen.

Die Figuren, welche in dem *Euclid*'schen Raum von drei Dimensionen die vollständige Ebene mit allen ihren Eigenschaften darstellen, sind also die Kugel und der Strahlenstern (Def. II, § 82). Die in Bezug auf die *Euclid*'sche Einheit betrachtete Ebene im Unendlichgrossen oder der Gradenstern stellt die zweite *Riemann*'sche Form vor (Bem. II, § 30).

16.

Schnitte zweier und dreier Kugeln.

§ 102. *Def. I.* Wenn zwei Kugeln dieselbe Berührungsebene in einem gemeinschaftlichen Punkt A haben und beide auf derselben Seite der Ebene liegen, so sagt man, *sie berührten sich von Innen;* liegen sie auf entgegengesetzten Seiten, so *berühren sie sich von Aussen.*

Bem. I. In dem ersten Fall ist eine der beiden Kugeln, nämlich diejenige mit dem kleineren Radius, in der andern enthalten.

Satz I. Wenn zwei Kugeln einen Punkt gemeinschaftlich haben, welcher nicht auf der Verbindungsgraden ihrer Centren, der Centralaxe, liegt, so haben die beiden Kugeln einen Kreis gemeinschaftlich, dessen Centrum in der Centralaxe liegt und dessen Ebene auf dieser Axe senkrecht steht.

C und C' seien die Centren der beiden Kugeln, r und r' ihre Radien. Legt man durch die Centren eine beliebige Ebene, so theilt sie die beiden Kugeln bezüglich ihrer selbst in symmetrische Theile (Zus. Satz VI, § 101). Der gemeinschaftliche Punkt, welcher, wenn er nicht in dieser Ebene liegt, auf einer Seite derselben sich befinden muss, hat einen bezüglich der Ebene symmetrischen Punkt, welcher ebenfalls in beiden Kugeln liegen wird. Wählt man mithin drei den beiden Kugeln gemeinschaftliche Punkte A, B, C, so schneidet ihre Ebene die beiden Kugeln in zwei Kreisen, welche drei Punkte gemeinschaftlich haben und daher zusammenfallen (Satz V, § 59). Die Ebene dieses Kreises steht senkrecht auf der Graden CC', weil die Punkte C und C' gleichen Abstand von den Punkten des Kreises haben (Satz III, § 88). Ferner können die beiden Kugeln keine andern Punkte ausserhalb der Ebene ABC gemeinsam haben, weil sie sonst zusammenfallen würden (Satz VII, § 101).

Zus. I. Jede Diametralebene schneidet den den beiden Kugeln gemeinschaftlichen Kreis in zwei bezüglich der Centralaxe symmetrischen Punkten.

Denn die Diametralebene schneidet die Ebene des Kreises in einer Graden, welche senkrecht auf der Centralaxe steht, weil die letztere Ebene normal zu dieser Axe ist (Zus. V, Satz I, § 88) und diese Durchschnittsgrade ist ein Durchmesser des Kreises.

Satz II. Wenn zwei Kugeln von den Radien r und r' gegeben sind und $r' \geqq r$ und d der Abstand der Mittelpunkte ist und berühren sich die Kugeln

1) von aussen, so ist $d = r + r'$,

2) von innen, so ist $d = r' - r$; schneiden sie sich,

3) $r + r' > d > r' - r$ und haben sie keinen Punkt gemeinschaftlich,

4) $r' - r > d$ oder $d > r' + r$.

Und umgekehrt:

Wenn der Abstand der Centren die Bedingungen 1, 2, 3, 4 erfüllt, so berühren sich die Kugeln von Aussen, von Innen, schneiden sich oder schneiden sich nicht.

Denn zieht man eine gemeinschaftliche Diametralebene, so schneidet diese die Kugeln in zwei grössten Kreisen, welche unter den Bedingungen des Satzes sich in einem Punkt der Centralaxe von Innen oder von Aussen berühren oder sich in zwei bezüglich dieser Axe symmetrischen Punkten schneiden oder sich nicht treffen (Satz III, § 60 und Satz I).

Wie der Satz für diese beiden Kreise gilt, welches auch die Diametralebene sei, so gilt er auch für die beiden Kugeln.

Satz III. Drei Kugeln, welche sich nicht in demselben Kreis schneiden und sich nicht in demselben Punkt berühren, schneiden sich in zwei bezüglich der Ebene der drei Centren, der Centralebene, symmetrischen Punkten oder in zwei zusammenfallenden Punkten oder in keinem Punkt.

In dem zweiten Fall haben die Kugeln eine gemeinschaftliche Tangente, welche auf der Centralebene in dem gemeinschaftlichen Punkt senkrecht steht.

C, C', C'' seien die drei Centren; die Centralebene zerlegt jede der drei Kugeln in zwei symmetrische Theile (Zus. Satz VI, § 101). Wenn die Kugeln daher einen Punkt A gemeinschaftlich haben, so haben sie auch den bezüglich der Centralebene symmetrischen Punkt A' gemeinschaftlich.

Hätten die Kugeln noch einen andern Punkt B gemeinschaftlich, so würde die Ebene $AA'B$ die drei Kugeln in Peripherien schneiden, welche drei Punkte A, A', B gemeinschaftlich haben und daher in eine einzige Peripherie zusammenfallen (Satz V, § 59).

Ist der Punkt A in der Centralebene gelegen, so ist es auch der Punkt A'. Legt man durch CA die auf der Centralebene normale Ebene, so steht die in dieser Ebene liegende im Punkt A an den Hauptkreis der Kugel C gezogene Tangente senkrecht auf dem Radius CA und mithin auch auf der Centralebene Dasselbe gilt für die andern Kugeln; mithin berührt in diesem Fall das in A auf die Centralebene errichtete Loth die drei Kugeln.

17.

Stetige Systeme unveränderlicher Figuren.

§ 103. *Kreissystem um eine Grade.*

Def. I. Aus den stetigen Systemen unveränderlicher Figuren in der Ebene im Unendlichgrossen (Def. I, § 65 und Bem. III, § 77) erhält man um einen Punkt P des Raums stetige Systeme unveränderlicher Figuren, welche wir *Kugelsysteme* nennen. P heisst ihr *Centrum* (Def. III, § 36; Bem. III, § 101).

Def. II. Aus einem Kreissystem von Winkeln um einen Punkt R_∞ erhalten wir um eine Grade PR_∞ ein System unveränderlicher Keile, welche wir *Kreissystem* von Keilen nennen. Die Grade PR_∞ ist *die Axe,* deren Richtung gegeben ist, und die Keile sind *die Keile um die Axe des Systems* (Satz III, IV, § 91).

Satz I. Die Axe des Systems entspricht sich selbst (Satz I, § 63 u. Bem. III, § 77).

Satz II. Das Kreissystem von Keilen kann durch die Axe und ein beliebiges stetiges System unveränderlicher Segmente auf der Pollinie des Punktes im Unendlichgrossen der Axe erzeugt werden.

Denn das Kreissystem um einen Punkt der Ebene im Unendlichgrossen wird durch den Punkt und seine Pollinie erzeugt (Def. I, § 63 und Bem. III, § 77).

Satz III. Ein Kreissystem um eine Axe in einer gegebenen Richtung ist auch ein Kreissystem bezüglich derselben Axe in der entgegengesetzten Richtung.

Denn um den zu R_∞ entgegengesetzten Punkt R'_∞ haben wir im Unendlichgrossen ein Kreissystem von Winkeln, welche denen vom Centrum R_∞ identisch und entgegengesetzt sind (Bem. I u. III, § 77).

Satz IV. Die Keile um die Axe eines Kreissystems sind congruent.

Denn die Winkel des Kreissystems im Unendlichgrossen sind congruent (Satz II, § 63 und Bem. III, § 77) und die Richtungen dieses Systems geben die Richtungen der Keile des Kreissystems um die Axe an.

Zus. I. Zwei symmetrische Keile um dieselbe Axe können keinem Kreissystem angehören (Zus. I, Satz II, § 63 und Bem. III, § 77).

Zus. II. Die sich entsprechenden Schenkel zweier Keile um die Axe des Kreissystems machen denselben Winkel miteinander (Zus. II, Satz I, § 63 und Bem. III, § 77).

Satz V. Eine auf die Axe senkrechte Ebene schneidet das Kreissystem in einem Kreissystem von Winkeln um den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Axe.

Denn die Durchschnittswinkel einer auf der Axe senkrechten Ebene messen die Keile des Systems (Satz VIII, § 91).

Satz VI. Zwei Keile eines Kreissystems können keinen entsprechenden Punkt gemeinschaftlich haben.

Hätten sie einen entsprechenden Punkt gemeinschaftlich, so hätten sie auch die Halbebene, welche den Punkt mit der Axe verbindet, gemeinschaftlich und dies ist unmöglich (Satz III, § 63 und Bem. III, § 77).

Satz VII. Wenn eine beliebige Figur gegeben ist, so kann man ein stetiges System unveränderlicher Figuren construiren, dessen entsprechende Punkte sich auf einer Peripherie befinden, deren Centrum in einer gegebenen Graden liegt und deren Ebene senkrecht auf dieser Graden steht.

Man wähle ein Segment (AB) und $(\alpha\beta)$ sei der durch dieses Segment und die Axe a bestimmte Keil. Von A und B ziehe man die Segmente (AS), (AS_1) normal zu a und denke sich das Kreissystem mit der Axe a und den dem Keil $(\alpha\beta)$ gleichen Keilen.

$(\alpha'\beta')$ sei also ein andrer Keil des Systems und in ihm mögen die Punkte A' und B' denselben Abstand von S und S_1 haben, wie A und B auf den Normalen zur Graden a. Die beiden Dreikante $S \cdot S_1AB$, $S \cdot S_1A'B'$ sind identisch, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben. Mithin ist $(AB) \equiv (A'B')$.

Die Punktreihe (A) liegt auf der Peripherie mit dem Centrum S in der Ebene, welche in S senkrecht auf die Axe gezogen ist (Zus. VI, Satz I, § 87).

Auf diese Art lässt sich, wenn eine beliebige Figur $ABCD \ldots M \ldots$ gegeben ist, ein stetiges System unveränderlicher Figuren construiren, weil der Abstand der Paare sich entsprechender Punkte gleich ist und die Punkte, welche sich in dem Identitätszusammenhang der Figuren entsprechen, sich auch in dem System entsprechen (Def. III, § 36).

Def. III. Ein solches System von Figuren nennen wir *Kreissystem unveränderlicher Figuren* oder einfach *Kreissystem,* von welchem das oben beschriebene Kreissystem von Keilen ein specieller Fall ist.

Satz VIII. Jeder Punkt der Axe eines beliebigen Kreissystems entspricht sich selbst.

Denn in dem vorigen Beweis entspricht das Segment $(A'S)$ dem Segment (AS) und mithin S sich selbst.

Satz IX. Die Figuren eines Kreissystems sind congruent.

Betrachtet man die Axe des Systems als zu einer Figur gehörig, so entspricht sie in allen Figuren sich selbst. Wenn (AB), $(A'B')$ zwei sich entsprechende Segmente zweier Figuren des Systems sind, so verbinde man A, B, A', B' mit einem Punkt P der Axe. Die Dreikante $P \cdot P_\infty AB$, $P \cdot P_\infty A'B'$ sind congruent, weil die beiden Keile $P_\infty \cdot \widehat{APB}$, $P_\infty \cdot \widehat{A'PB'}$ congruent sind (Satz IV). Weil also zwei sich entsprechende Dreikante der beiden Figuren, mit welchen man sich auch die Axe des Systems verbunden denkt, congruent sind, so sind die Figuren congruent (Satz III, § 98) und sind es mithin auch ohne die Axe des Systems (Fig. 106).

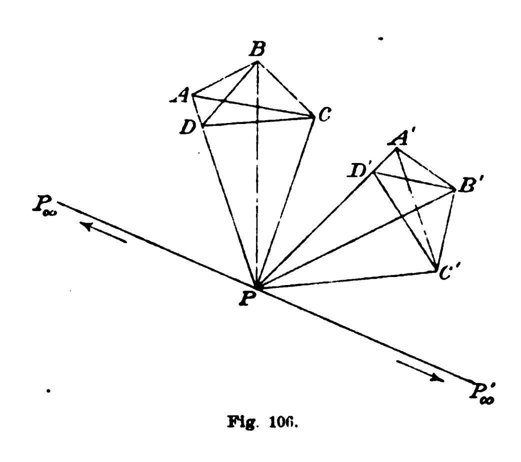


Fig. 106.

Satz X. Die sich entsprechenden Graden und Ebenen eines Kreissystems machen gleiche Winkel mit der Axe.

Denn ihre Punkte im Unendlichgrossen liegen auf einem Kreisumfang, dessen Centrum der Punkt im Unendlichgrossen der Axe ist und die entsprechenden Graden im Unendlichgrossen der sich entsprechenden Ebenen berühren einen Kreisumfang vom selben Centrum (Def. II, § 63; Bem. III, § 77 und Def. II). Oder auch: Sie bilden mit der Axe congruente Figuren.

Zus. I. Wenn eine Grade die Axe trifft, so sind ihre entsprechenden Graden in dem System die Erzeugungsgraden eines Kreiskegels, dessen Axe in der Axe des Systems und dessen Spitze in dem auf der Axe gelegenen Punkt liegt (Satz II, § 99).

Zus. II. Die einer Ebene entsprechenden Ebenen berühren einen Kreiskegel, dessen Axe in der Axe des Systems und dessen Centrum in dem Durchschnittspunkt der gegebenen Ebene mit der Axe liegt (Zus. IV, Satz IV, § 99).

Satz XI. Die sich entsprechenden Graden haben denselben Abstand von der Axe.

a sei die Axe, g eine beliebige Grade, (AB) das auf beide senkrechte Segment (Satz VI, § 88). Die (AB) entsprechenden Graden schneiden die Axe in demselben Punkt A (Satz VIII) und bilden bezüglich mit den g entsprechenden Graden und mit a congruente Figuren (Satz X u. Satz VI, § 87).

Satz XII. Die Tangenten an die Peripherie, welche von entsprechenden Punkten des Kreissystems beschrieben wird, sind sich entsprechende Grade.

Die Linien entsprechender Punkte $AA_1A_2\ldots$, $A'A_1'A_2'\ldots$ in einem Kreissystem sind Kreise, deren Centrum auf der Axe liegt und deren Ebenen senk-

recht auf der Axe stehen (Satz III). Jeder Sehne (AA_{m}) einer Peripherie entspricht eine gleiche Sehne $(A'A'_{m})$ desselben Kreises, weil die Winkel $a \cdot (AA_{m})$, $a \cdot (A'A'_{m})$ gleich sind (Satz IV). Da nun die Tangente im Punkt A die Grenze der Secante ist (Satz XII, § 59), so folgt, dass die Tangenten in den entsprechenden Punkten A und A' der Peripherie sich entsprechende Graden sind.

Satz XIII. Zwei bezüglich einer Graden symmetrische Figuren in einer Ebene gehören einem Kreissystem um die gegebene Grade als Axe an.

Es seien z. B. zwei bezüglich der Graden AB symmetrische Dreiecke ABC, ABC' gegeben. Das Halbebenensystem um die Grade AB bildet auch ein Kreissystem und die Punkte C, C' gehören derselben Peripherie des Systems an, welche das Loth von dem Punkt C oder C' auf die Grade AB zum Radius und den Fusspunkt dieses Loths zum Centrum hat. Die Punkte der Peripherie mit A und B, welche sich selbst entsprechen, verbunden, liefern ein Kreissystem von Dreiecken um die Grade AB, welchem die gegebenen beiden Dreiecke angehören.

§ 104. *Das Parallelsystem.*

Def. I. Wenn die Grade a im Unendlichgrossen liegt, sind alle durch sie gehenden Ebenen parallel, und wählt man eine Grade s senkrecht zur Richtung der Ebenen, so dienen die Segmente von s als Mass der durch die Ebenen bestimmten Theile des Büschels (Satz VI, § 88). Betrachtet man auf dem Loth ein stetiges System unveränderlicher Segmente, so erhält man ein stetiges System von Theilen des Büschels, welches *Parallelsystem* heisst. Die Richtung der Ebenen des Systems wird *die Richtung* des Systems genannt.

Die Theile eines Büschels paralleler Ebenen heissen *Zonen.*

Satz I. Die Axe des Parallelsystems entspricht sich selbst.

Denn $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$ seien zwei sich entsprechende Zonen; es entspricht dann die Grade $(\alpha\beta)$ der Graden $(\alpha_1\beta_1)$, welche die Axe des Systems sind (Fig. 107).

Satz II. Die Zonen des Parallelsystems sind congruent.

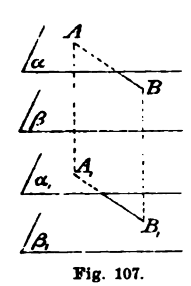


Fig. 107.

Denn die Segmente auf der zur Richtung des Systems Senkrechten, welche die Zonen messen, sind congruent (Satz I, § 36 und Def. I).

Satz III. Zwei Zonen des Parallelsystems können ausserhalb der Axe des Systems keine zwei sich entsprechende Punkte gemeinschaftlich haben.

Denn sie hätten dann auch zwei entsprechende zusammenfallende Ebenen gemeinschaftlich, nämlich die Ebene, welche den gegebenen Punkt mit der Axe des Büschels verbindet (Satz II, § 36 und Def. I).

Satz IV. Ist eine Figur gegeben, so gehört sie einem stetigen System unveränderlicher Figuren derart an, dass die entsprechenden Punkte in Lothen auf eine gegebene Ebene liegen und die entsprechenden Graden und Ebenen einander parallel sind.

Man betrachte ein Segment (AB). α und β seien die durch A und B gehenden zur gegebenen Ebene parallelen Ebenen und man denke sich das

Zus. III. Jede durch eine Erzeugende des Kegels gehende Ebene schneidet den Kegel in einer andern Erzeugenden (Zus. III, Satz I, § 59; Bem. IV, § 75 und Def. I).

Zus. IV. Alle Ebenen, welche denselben Winkel mit einer Graden bilden und diese Grade in dem nämlichen Punkt P schneiden, sind Tangenten an einen Kegel. Die Berührungsgraden sind die Durchschnittsgraden dieser Ebenen mit den durch die gegebene Grade senkrecht auf die letzteren gelegten Ebenen (Zus. IV, Satz I, § 59 u. s. w.).

Zus. V. Die Scheiteltheile des Kegels liegen bezüglich einer Berührungsebene des Kegels auf entgegengesetzten Seiten.

Eine Tangente an die Peripherie C_∞ ist auch Tangente an die Peripherie C'_∞ und hat die letztere auf der entgegengesetzten Seite (Bem. V, § 75 und Def. II).

Zus. VI. Eine Grade kann nicht mehr als zwei Punkte mit dem Kegel gemeinschaftlich haben.

Denn die Ebene, welche die Grade mit der Spitze verbindet, hat nicht mehr als zwei Erzeugungsgrade mit dem Kegel gemeinschaftlich.

Satz V. Die durch die Axe normal auf eine Schnittebene gelegte Ebene geht durch die Halbirungslinie des Durchschnittswinkels und umgekehrt (Satz III u. IV, § 59; Bem. IV, § 75; Satz V, § 69; Satz II, § 87 und Def. I).

Zus. Eine Diametralebene zerlegt den Kegel in zwei symmetrische Theile (Zus. Satz III, § 59 u. s. w.).

Satz VI. Drei von einem Punkt ausgehende nicht in einer Ebene liegende Strahlen bestimmen einen Kegel und der Kegel wird durch drei beliebige seiner Strahlen bestimmt (Satz V, § 59 und Bem. IV, § 75).

Satz VII. Die Ebene, welche die Axe mit der Durchschnittsgraden zweier Berührungsebenen verbindet, halbirt den Winkel der Ebenen, welche durch die Axe und die Berührungsgraden gehen (Satz X, § 59; Bem. IV, § 75).

Bem. IV. Ebenso könnte man die Sätze bezüglich der Figuren innerhalb und ausserhalb des Kegels denjenigen bezüglich des Kreises der vollständigen Ebene entnehmen, welche ihrerseits aus den Sätzen bezüglich des Kreises der *Euclid*'schen Ebene abgeleitet werden.

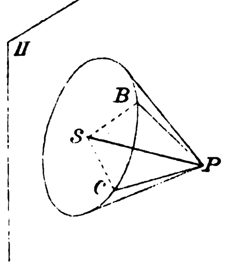


Fig. 105.

Aehnlich liessen sich auch die Sätze über die Durchschnitt[illegible] zweier Kegel mit derselben Spitze hier aufstellen, welche sich a[illegible] denjenigen über die Durchschnitte zweier Peripherien ergeben.

Satz VIII. Eine auf die Axe des Kegels senkrech[illegible] Ebene schneidet ihn in einem Kreis.

Denn S sei der Durchschnittspunkt der Normaleben[illegible] π mit der Axe, B und C die Durchschnittspunkte mit zw[illegible] beliebigen Erzeugenden b und c. Die Dreiecke PBS, P[illegible] sind, wenn P die Spitze des Kegels ist, bei S rechtwink[illegible] haben die Kathete (PS) gemeinschaftlich und über[illegible] $\widehat{BPS} = \widehat{CPS}$ (Satz II); mithin sind auch die dritten Winkel gleich und $(BS) = (SC)$, $(BP) = (CP)$ (Satz X, § 55). Die Durchschnittspunkte der Ebene π mit den Erzeugenden liegen also gleichweit vom Punkt S entfernt (Fig. 105).

Wie in der Ebene (Satz II, § 66) mit der analogen Bem.

Zus. Zwei Lagen einer Figur, welche sich bewegt und dabei unverändert bleibt, sind congruent.

Denn die Figuren eines stetigen Systems unveränderlicher Figuren sind congruent (Satz II, § 105).

Def. I. Ist das von einer Figur beschriebene System ein Kreissystem (§ 103), so heisst die Bewegung *Rotationsbewegung* um die Axe des Systems und diese Axe *die Axe der Rotationsbewegung.*

Bem. I. Bei der Rotationsbewegung sind die Bahnen der Punkte Kreisumfänge, deren Ebenen senkrecht auf der Axe stehen und deren Mittelpunkte in der Axe liegen (Satz VII, Def. III, § 103)

Satz IV. Die Punkte der Axe bleiben bei der Bewegung fest liegend.

Denn sie entsprechen in dem System sich selbst (Satz VIII, § 103 und Def. I, § 37).

Satz V. Jede Grade, welche die Axe schneidet, bewegt sich auf einem Kreiskegel, dessen Spitze in der Axe liegt, und jede Ebene, welche die Axe nicht enthält, hüllt einen Kegel ein. Die Spitze des Kegels ist der Durchschnittspunkt der Graden und der Ebene mit der Axe, welche auch die Axe des Kegels ist (Zus. I, II, Satz X, § 103).

Def. II. Wenn das System, längs dessen die Bewegung stattfindet, ein Parallelsystem ist (§ 104), so heisst die Bewegung *Translationsbewegung.*

Satz VI. Die Bahnen bei der Translationsbewegung sind Grade, welche auf der Richtung des Systems senkrecht stehen (Satz IV, Def. II, § 104).

Def. III. Die Richtung der Bahnen heisst *Richtung* der Bewegung.

Satz VII. Eine Grade und eine Ebene bleiben bei der Translationsbewegung parallel zu sich selbst (Satz IV, § 104).

Satz VIII. Die Translationsbewegung kann als eine unendlich kleine Rotationsbewegung bezüglich der Einheit der Abstände des unendlich grossen Gebiets betrachtet werden.

Denn die auf der Richtung des Parallelsystems senkrechten Graden kann man als Kreisumfänge ansehen, deren Centrum auf der Axe der Bewegung d. h. im Unendlichgrossen liegt (Satz II, § 32).

Zus. Bei der Translationsbewegung kann man einen Punkt und eine Grade, den einen in relativem die andre in absolutem Sinn als festliegend ansehen. Der Punkt liegt in der Richtung der Bewegung im Unendlichgrossen und die Grade ist die Axe der Bewegung.

Denn die Rotationsaxe ist in absolutem Sinn unbeweglich, während es, wie wir wissen, ausserhalb der Axe bei der Rotationsbewegung keinen festliegenden Punkt gibt. Dies bedeutet, dass sich in diesem Fall jeder Punkt im Unendlichgrossen bezüglich der endlichen Einheit um ein endliches d. h. bezüglich der unendlich grossen Einheit unendlich kleines Segment bewegt.

Def. IV. Ist das System, längs welchem die Bewegung stattfindet, ein Kugelsystem (Def. I, § 103), so heisst die Bewegung *Rotationsbewegung um einen Punkt.*

Satz X.[1]) ***Zwei congruente Figuren kann man mittelst einer Translation und einer Rotation oder auch mittelst zweier Rotationen zur Deckung bringen.***

$ABCD\ldots M\ldots$, $A_1B_1C_1D_1\ldots M_1\ldots$ seien die gegebenen Figuren. Die Figur $ABCD\ldots M\ldots$ lasse man sich parallel zu sich selbst fortbewegen, bis A mit A_1 zusammenfällt. Die Punkte $ABCD\ldots M\ldots$ kommen auf die Punkte $A_1B'C'D'\ldots M'\ldots$ derart zu liegen, dass die Figur $A_1B'C'D'\ldots M'\ldots$ der Figur $ABCD\ldots M\ldots$ und mithin auch der Figur $A_1B_1C_1D_1\ldots M_1\ldots$ congruent ist (Zus. Satz II).

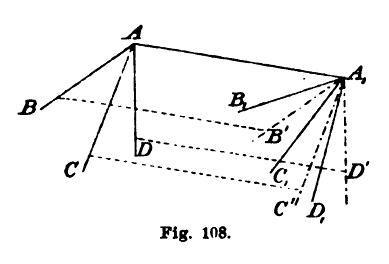


Fig. 108.

Die beiden Figuren $A_1B_1C_1D_1\ldots M_1\ldots$, $A_1B'C'D'\ldots M'\ldots$ bestimmen im Unendlichgrossen zwei congruente Figuren, welche man mittelst einer Rotation um einen Punkt S_∞ zur Deckung bringen kann (Satz I, § 67 und Bem. III, § 77). Mithin lassen sich die beiden genannten Figuren in dem Stern vom Centrum A_1 mittelst einer Rotation um die Axe A_1S_∞ so bewegen, dass sie zusammenfallen. Oder auch:

Wenn man in dem Mittelpunkt O von (AA_1) ein Loth auf (AA_1) errichtet und um dieses Loth rotiren lässt, bis A mit A_1 zusammenfällt, so kommt die erste Figur auf eine Figur $A_1B'''C'''D'''\ldots M'''\ldots$ zu liegen, welche der Figur $A_1B_1C_1D_1\ldots M_1\ldots$ congruent ist und durch eine Rotation um eine durch A_1 gehende Axe zur Deckung mit der Figur $A_1B_1C_1D_1\ldots M_1\ldots$ gebracht werden kann, wie es oben mit der Figur $A_1B'C'D'\ldots M'\ldots$ geschehen ist.

Bem. II. In dem ersten Fall entspricht in dem Identitätszusammenhang zwischen den beiden gegebenen Figuren der Punkt S_∞ und mithin auch die Richtung aller von ihm bestimmter Graden sich selbst, das heisst, einer zu AS_∞ parallelen Graden der ersten Figur entspricht eine ihr parallele Grade der zweiten Figur und mithin entsprechen den auf der genannten Richtung senkrechten Ebenen der einen parallele Ebenen der andern Figur. Es ist leicht zu beweisen, dass es eine der genannten Richtung parallele Grade gibt, welche sich selbst entspricht.

Satz XI. *Zwei symmetrische nicht ebene Figuren lassen sich nicht zur Deckung bringen.*

Denn wäre dies möglich, so würden sie einem stetigen System unveränderlicher Figuren angehören, was nicht der Fall ist (Zus. Satz II, § 106).

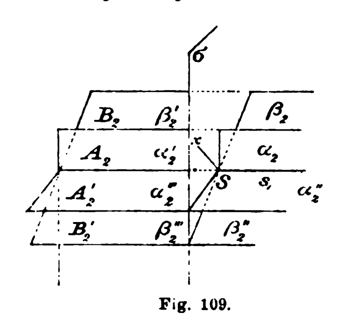


Fig. 109.

Bem. III. Zwei Fälle scheinen mit dieser Eigenschaft im Widerspruch zu stehen, nämlich der Keil zweier Halbebenen A_2B_2 und die durch zwei parallele Ebenen gegebenen Zonen. Aber auch diese Ausnahmen sind nur scheinbar.

1) Ein Keil (A_2B_2) sei gegeben, und eine auf der Axe s_1 senkrechte Ebene σ. S sei der Durchschnittspunkt von σ mit s_1 und x das in S auf die Halbebene B_2 errichtete Loth. A_2' sei die der Halbebene A_2 bezüglich der Ebene s_1x symmetrische Halbebene. Die Ebene σ theilt die Keile (A_2B_2), $(A_2'B_2')$ in zwei bezüglich σ entgegengesetzte Theile, welche wir bezüglich mit $(\alpha_2\beta_2)$, $(\alpha_2'\beta_2')$; $(\alpha_2''\beta_2'')$,

1) Satz IX ist mit Satz XIII identisch.

$(\alpha_2''' \beta_2''')$ bezeichnen wollen, so dass $(\alpha_2 \beta_2)$, $(\alpha_2'' \beta_2'')$ und mithin $(\alpha_2' \beta_2')$, $(\alpha_2''' \beta_2''')$ auf derselben Seite von σ liegen. Lässt man um die Grade x rotiren, so kommt nach einer halben Umdrehung der Theil $(\alpha_2' \beta_2')$ auf den Keil $(\alpha_2'' \beta_2'')$ zu liegen, während der Theil $(\alpha_2 \beta_2)$ auf den Theil $(\alpha_2''' \beta_2''')$ fällt. Die Keile $(\alpha_2 \beta_2)$, $(\alpha_2''' \beta_2''')$ sind congruent und mithin auch $(\beta_2''' \alpha_2''')$, $(\alpha_2' \beta_2')$. Lässt man um s_1 rotiren, so fällt $(\beta_2''' \alpha_2''')$ auf den Theil $(\alpha_2' \beta_2')$ und $(\beta_2'' \alpha_2'')$ auf $(\alpha_2 \beta_2)$; d. h. $(\alpha_2 \beta_2)$ kommt auf $(\beta_2' \alpha_2')$ und $(\alpha_2' \beta_2')$ auf $(\beta_2 \alpha_2)$ zu liegen oder der Keil $(A B_2)$ fällt mit dem Keil $(B_2 A_2)$ zusammen.

Dies scheint dem obigen Satz zu widersprechen. Der Widerspruch verschwindet aber, wenn man bedenkt, dass ein Keil die beiden Richtungen des Raums liefert, je nach der Richtung, in welcher man die Kante des Keils betrachtet (Satz XVIII, § 96). Mit andern Worten: die beiden Halbebenen $A_2 B_2$ sind die Schenkel zweier Keile von entgegengesetzter Richtung und die beiden Keile $(A_2 B_2)$, $(B_2 A_2)$ sind mithin bezüglich der beiden entgegengesetzten Richtungen der Axe gleichgerichtet oder congruent.

Ein zweiter Fall bietet sich, wenn man eine Translation in der zu s_1 parallelen Richtung vor sich gehen lässt; $(\alpha_2 \beta_2)$ fällt alsdann durch eine Bewegung in sich selbst auf $(\alpha_2' \beta_2')$. Es ist aber wie schon früher bei dem ebenen Streifen (Bem. I, § 67) zu beachten, dass nicht das ganze $(\alpha_2 \beta_2)$ mit $(\alpha_2' \beta_2')$ zusammenfällt, sondern nur ein Theil desselben, d. h. ein beliebiger in dem endlichen Gebiet gegebener Theil (Fig. 109).

2) Hat man schliesslich eine Zone paralleler Ebenen, so kann man bezüglich ihrer wiederholen, was wir über den ebenen Streifen in dieser Beziehung gesagt haben.

Satz XII. Zwei symmetrische Figuren in einer Ebene lassen sich im Raum zur Deckung bringen.

Man kann sie in derselben Ebene so bewegen, dass sie schliesslich bezüglich einer Graden symmetrisch sind (Satz IV, § 67). Aber zwei bezügl. einer Graden symmetrische Figuren in einer Ebene gehören einem Kreissystem an, das die gegebene Grade zur Axe hat (Satz XIII, § 103); mittelst einer Rotation um diese Grade lassen sich daher die beiden Figuren alsdann zur Deckung bringen.

Satz XIII. Eine Figur des Raums kann sich in dem Raum nicht bewegen, wenn man drei ihrer Punkte fest hält.

Denn zwei verschiedene Lagen der Figur sind congruent (Zus. Satz II) und hätten drei Punkte gemeinschaftlich, was widersinnig ist (Satz IV, § 98).

Satz XIV. Zwei symmetrische nicht ebene Figuren lassen sich im Raum bewegen, bis sie bezüglich einer beliebigen Ebene symmetrisch sind.

Wird analog wie Satz IV, § 67 bewiesen.

Zus. Geht die Ebene σ durch drei Punkte einer Figur, so haben die beiden bezüglich σ symmetrischen Figuren alle Punkte von σ gemeinschaftlich (Zus. II, Satz I, § 62).

II. Kapitel.

Der vollständige Raum von drei Dimensionen.

1.

Der vollständige Stern und Raum. — Ihre ersten Eigenschaften. — Schnitte von Graden und Ebenen.

§ 107. *Def. I.* Verbindet man die Punkte einer vollständigen Ebene mit einem Punkt ausserhalb derselben, so heisst das sich so ergebende System vollständiger Graden *vollständiger Stern* und sein Centrum ist der gegebene Punkt.

Wenn man den Punkt als Element betrachtet, so gibt der vollständige Stern eine Figur, welche wir *den vollständigen oder Riemann'schen Raum von drei Dimensionen* nennen.

Bem. I. In diesem Abschnitt sagen wir, wenn Zweideutigkeiten ausgeschlossen sind, statt vollständiger Raum nur Raum.

Bem. II. Wir lassen die für den *Euclid*'schen Raum gegebenen Definitionen, welche ohne Weiteres auch für den vollständigen Raum gelten, weg.

Satz I. Jeder einem Punkt des Raums entgegengesetzte Punkt liegt im Raum.

Denn in der Graden des Erzeugungssterns des Raums, welche durch den gegebenen Punkt geht, ist auch der entgegengesetzte Punkt enthalten (Def. III, § 6, und Zus. Satz II, § 30).

Satz II. Eine Grade, von welcher zwei nicht entgegengesetzte Punkte im Raum liegen, ist vollständig im Raum enthalten.

Wie beim *Euclid*'schen Raum (Satz II, § 82) unter Bezugnahme auf Satz III, § 68.

Satz III. Eine Ebene, welche drei nicht in grader Linie gelegene Punkte mit dem Raum gemeinschaftlich hat, liegt vollständig im Raum.

Wie beim *Euclid*'schen Raum (Satz III, § 82), wenn man beachtet, dass sich zwei Grade in der vollständigen Ebene in zwei entgegengesetzten Punkten schneiden (Zus. Satz IV, § 68).

Bem. III. Es können keine zwei von den drei Punkten entgegengesetzt sein, denn sonst würden die drei Punkte in grader Linie liegen.

Satz IV. Der vollständige Raum kann durch eine Ebene und einen beliebigen Punkt des Raums erzeugt werden, wenn nur der Punkt nicht in der Ebene liegt.

Wie beim *Euclid*'schen Raum (Satz IV, § 82), wenn man den aus Satz I, § 68 und dem obigen Satz I sich ergebenden Unterschied berücksichtigt.

Zus. Vier beliebige nicht in einer Ebene liegende Punkte bestimmen einen vollständigen Raum von drei Dimensionen und dieser wird durch vier beliebige seiner Punkte bestimmt.

Bem. IV. Wären zwei von den vier Punkten entgegengesetzt, so würde die durch einen von den zwei entgegengesetzten Punkten und die beiden andern gelegte Ebene auch durch den zu dem ersten entgegengesetzten Punkt gehen (Satz I, § 68).

Satz V. Eine Grade und eine Ebene des Raums haben nur zwei entgegengesetzte Punkte gemeinschaftlich, wenn die Grade nicht in der Ebene liegt.

Wie beim *Euclid*'schen Gebiet (Satz I, § 83). Man beachte nur, dass eine Grade, welche eine Ebene in einem Punkt schneidet, sie auch in dem entgegengesetzten Punkt schneidet (Zus. Satz II, § 30 und Satz I, § 68).

Satz VI. Zwei unabhängige Graden des Raums treffen sich nicht.

Wie beim *Euclid*'schen Gebiet (Satz II, § 83).

Satz VII. Zwei Ebenen des Raums schneiden sich in einer Graden.

Wie beim *Euclid*'schen Gebiet (Satz III, § 83). Bei dem zweiten Beweis muss man statt Satz VI, § 48 den Satz VI, § 68 zu Hilfe nehmen.

Satz VIII. Drei Ebenen, welche keine Grade gemeinschaftlich haben, schneiden sich in zwei entgegengesetzten Punkten.

Wie beim *Euclid*'schen Gebiet (Satz IV, § 83). Man beachte, dass drei Ebenen, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, auch den entgegengesetzten Punkt gemeinschaftlich haben (Satz I, § 68).

Bem. V. Es gelten mit denselben Beweisen die Sätze V, VI, Def. II, die Sätze VII und Zus., VIII und Def. III, § 83; die Sätze VII und Zus. und VIII, § 85.

2.

Polarfiguren.

§ 108. *Satz I. Die mit einem gegebenen Punkt oder seinem entgegengesetzten Punkt conjugirten Punkte liegen in einer Ebene.*

R sei der gegebene Punkt, X, Y, Z drei mit R conjugirte Punkte (Def. I, § 69). Die Ebene XYZ liegt im Raum und ihre Punkte stehen gleichweit von R ab (Satz I, § 78).

Def. I. Die Ebene, welche dem Satz I entspricht, heisst *Polarebene* des gegebenen Punktes und seines entgegengesetzten Punktes und diese Punkte heissen *die Pole* der Ebene.

Bem. I. Die Polarebene ist eine absolute Grenzebene des gegebenen Punktes in dem allgemeinen Raum bezüglich der *Euclid*'schen Einheit (Uebereink. § 28 und Satz I, § 78) und ist die Ebene im Unendlichgrossen eines jeden Punktes des endlichen *Euclid*'schen Gebiets des Raums von drei Dimensionen um den gegebenen Punkt (Satz I u. Def. I, § 84).

Zus. I. Die Polarebenen zweier conjugirten Punkte gehen bezüglich durch die beiden Punkte.

Zus. II. Die Polarebene eines Punktes der Polarebene eines andern Punktes geht durch den letzteren Punkt.

Zus. III. Jede durch einen Punkt gehende Ebene ist Polarebene zweier entgegengesetzter Punkte der Polarebene des gegebenen Punktes.

Denn die gegebene Ebene schneidet die Polarebene des Punktes in einer Graden, welche in der Polarebene zwei Pole hat (Satz II, § 69) und diese sind die Pole der gegebenen Ebene (Def. I).

Zus. IV. Jede durch einen Punkt gehende Ebene schneidet die Polarebene des Punktes in einer Graden, welche die Pollinie des Punktes in der gegebenen Ebene ist.

Denn in der gegebenen Ebene sind die Punkte der Graden dem gegebenen Punkt conjugirt (Def. II, § 69).

Def. II. Zwei Ebenen, von welchen die eine die Pole der anderen enthält, heissen *conjugirt.*

Bem. II. Auch die zweite Ebene enthält die Pole der ersten (Zus. III).

Satz II. Die Polarebenen der Punkte einer Graden gehen durch eine andre Grade und die Polarebenen der Punkte der letzten Graden gehen durch die erste Grade.

Denn zwei Punkte A und B haben zwei Polarebenen α und β, welche sich in einer Graden schneiden (Satz VII, § 107). Wählt man einen beliebigen Punkt O dieser Graden, so geht seine Polarebene ω durch A und B (Zus. II, Satz I). Und da jeder Punkt der Graden AB in ω liegt, so geht seine Polarebene durch jeden Punkt O der Graden $(\alpha\beta)$ und somit durch die Grade selbst. Damit ist der Satz bewiesen.

Def. III. Zwei Grade, welche dem Satz II genügen, nennen wir *conjugirte Pollinien* oder einfach *Pollinien* oder *conjugirte Grade.**

Zus. I. Die Punkte zweier Pollinien sind conjugirt oder: die Segmente, deren Enden auf zwei Pollinien liegen, sind rechte.

Denn jeder Punkt einer Graden hat seine Polarebene, welche durch die Pollinie der ersten Graden geht und die Punkte der Polarebene sind alle dem Pol conjugirt (Def. I).

Def. IV. Ein Punkt und eine Grade heissen *conjugirt,* wenn die Grade in der Polarebene des Punktes liegt.

Zus. II. Wenn eine Grade durch einen Punkt geht, so liegt ihre Pollinie in der Polarebene des Punktes.

Zus. III. Ein einer Graden conjugirter Punkt liegt auf der Pollinie der gegebenen Graden.

Denn die Grade liegt in der Polarebene des Punktes (Def. IV) und die Polarebene eines jeden Punktes der Graden geht durch den gegebenen Punkt (Zus. II, Satz I).

Zus. IV. Eine Ebene, welche durch eine Grade a geht, schneidet die Pollinie a' von a in den Polen von a in der gegebenen Ebene.

Denn in der gegebenen Ebene sind die Durchschnittspunkte mit a' den Punkten von a conjugirt (Def. II, § 69; Zus. I).

Satz III. Jede Polarebene hat zwei entgegengesetzte Pole.

Wählt man in der Ebene drei nicht in grader Linie liegende Punkte A, B, C, so schneiden sich ihre drei Polarebenen nicht in einer Graden; denn sonst lägen auch die drei Punkte A, B, C in einer Graden (Satz II). Mithin schneiden sie sich in zwei entgegengesetzten Punkten (Satz VIII, § 107), welche die Pole der gegebenen Ebene sind (Zus. III, Satz I).

Satz IV. Die Pole der durch eine Grade gehenden Ebenen liegen auf der Pollinie dieser Graden.

α sei eine durch die Grade a gehende Ebene, A und B zwei Punkte von a. Die Polarebenen von A und B gehen durch die Pole von α (Zus. II, Satz I). Sie schneiden sich aber in der Pollinie der gegebenen Graden a (Satz VII, § 107; Satz II). Die Pole von α liegen daher in dieser Graden.

Zus. I. Wenn eine Grade in einer Ebene liegt, so geht ihre Pollinie durch den Pol der Ebene.

Def. V. Eine Ebene und eine Grade heissen *conjugirt*, wenn die Grade durch die Pole der Ebene geht.

Zus. II. Eine einer Graden conjugirte Ebene enthält die Pollinie dieser Graden und umgekehrt (Satz II und Def. V).

Zus. III. Ein Punkt einer Graden in der Ebene, welche ihn mit der conjugirten Graden verbindet, hat diese Grade zur Pollinie (Def. II, § 69 u. Zus. I, Satz II).

Zus. IV. Eine Ebene ist mit allen Pollinien ihrer Graden conjugirt.

Denn wählt man eine Grade der Ebene, so hat die Ebene ihre Pole auf der Pollinie dieser Graden; mithin u. s. w. (Def. V).

Satz V. Ein Punkt A ist der Eckpunkt unendlich vieler Tetraeder, deren Seitenflächen die Polarebenen der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte sind. Diese Tetraeder entsprechen den conjugirten Polardreiecken der Ebene.

Denn ist ein Punkt A und ein Polardreieck BCD in der Polarebene von A gegeben (Def. IV, § 69), so sind die Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen, weil z. B. die Polarebene von B durch A und die Pollinie von B in der Ebene BCD d. h. durch CD geht (Satz I und Def. I).

Def. VI. Ein solches Tetraeder heisst *conjugirtes Polartetraeder* oder einfach *Polartetraeder.*

Zus. Die gegenüberliegenden Kanten eines Polartetraeders sind Pollinien (Def. III).

3.

Die Identität des Raums um seine Punkte und seine Graden. — Die Theile, in welche er durch eine seiner Ebenen zerlegt wird.

§ 109. *Satz I. Die Sterne sind identisch.*

Denn A und B seien zwei beliebige Punkte, α und β ihre Polarebenen. Die durch einen Punkt und die Punkte seiner Polarebene bestimmten Segmente sind einem rechten Segment gleich (Satz I, § 108; Def. I, § 69). Setzt man mithin einen Identitätszusammenhang zwischen den beiden Ebenen α und β fest und lässt dem Punkt A den Punkt B entsprechen, so sind die beiden Figuren $(A\alpha)$, $(B\beta)$ identisch, weil alsdann zwei Punkten der einen zwei Punkte der andern von demselben Abstand entsprechen (Satz III, Satz I und Zus. II. Satz II, § 15).

Satz II. Die Ebenenbüschel sind identisch.

Das durch eine Grade a und ihre Pollinie bestimmte Ebenenbüschel erfüllt den ganzen Raum (Zus. Satz VII, § 83 und Bem. V, § 107). Es sei eine andre Grade b und ihre Pollinie b' gegeben. Da die Punkte zweier Pollinien gleichen Abstand haben (Zus. I, Satz II, § 108), so setze man einen Identitätszusammenhang zwischen a und b, a' und b' fest; es folgt dann leicht, dass zwei Punkten von (aa') zwei Punkte von (bb') von demselben Abstand entsprechen. Die beiden Figuren (aa'), (bb') sind daher identisch (Satz III, § 15).

Zus. Der Raum ist um jede seiner Graden identisch.

Satz III. Die Polarebene des Centrums eines Sterns zerlegt den Stern in zwei identische Theile und die Punkte des einen Theils sind denjenigen des andern entgegengesetzt.

α sei die Ebene, A und A' ihre Pole. Die Punkte der Ebene stehen gleichweit von den Punkten A und A' ab, weil sie mit A und A' conjugirt sind (Satz I, § 108; Def. I, § 69) und die Durchschnittspunkte einer jeden durch A, A' gehenden Graden mit der Ebene sind die Mittelpunkte der beiden durch die Punkte A, A' bestimmten Hälften der Graden. Die Ebene zerlegt die Sterne mit den Centren A und A' in zwei Theile und mithin auch den Raum. Lässt man A und A' sich entsprechen und die Punkte der Polarebene sich selbst, so sind die beiden Figuren $(A\alpha)$, $(A'\alpha)$ identisch. Denn wählt man zwei Punkte der ersten Figur, so entsprechen denselben in der zweiten zwei Punkte von demselben Abstand (Satz III, § 15).

Zus. Eine Ebene zerlegt den Raum in zwei entgegengesetzte Theile.

Satz IV. Eine Grade liegt bezüglich einer Ebene zur Hälfte in einem und zur Hälfte in dem entgegengesetzten Theil des Raums.

Wird wie Satz II, § 71 bewiesen; ϱ bezeichnet im vorliegenden Fall die Ebene, welche den Raum in zwei entgegengesetzte Theile zerlegt, R einen ihrer Pole und r die gegebene Grade.

Zus. I. Zwei entgegengesetzte Punkte werden durch eine beliebige Ebene des Raums getrennt.

Denn jede durch die Punkte gehende Grade liegt zur Hälfte auf entgegengesetzten Seiten der Ebene und die beiden entgegengesetzten Punkte liegen in diesen beiden Hälften.

Bem. I. Es gilt mit analogem Beweis auch Zus. II, Satz IV, § 86.

Satz V. Jede Ebene liegt bezüglich einer gegebenen Ebene zur Hälfte in den entgegengesetzten Theilen des Raums.

Denn die Ebene σ schneidet die gegebene Ebene π in einer Graden s. Jede Grade der Ebene σ hat Punkte, die auf der einen und die auf der andern Seite der Ebene π liegen; mithin ist es auch so mit der Ebene σ. A sei ein Punkt der Ebene σ, welcher in einem der Theile liegt, in die σ durch die Grade s zerlegt wird. Jede durch A gehende Grade in der Ebene σ liegt zur Hälfte auf derselben Seite von π wie der Punkt A (Satz IV) und alle diese durch die Grade s begrenzten Theile der durch A gehenden Graden bestimmen eben den Theil der Ebene σ, in welchem der Punkt A liegt; der Punkt A

liegt mithin auf einer Seite der Ebene π. Analog liegt der entgegengesetzte Theil der Ebene σ bezüglich der Graden s auf der entgegengesetzten Seite des Raums bezüglich der Ebene π.

4.

Senkrechte Grade und Ebenen.

§ 110. *Satz I. Die Segmente einer Ebene messen die Winkel um die Pole dieser Ebene.*

Denn wählt man zwei identische Segmente (AB), (CD) in der Polarebene π eines Punktes P, so sind die Dreiecke PAB, PCD identisch, weil sie ihre Seiten gleich haben (Satz I, § 108 und Satz III, § 17); mithin ist $\widehat{APB} \equiv \widehat{CPD}$. Grösseren oder kleineren Segmenten entsprechen grössere oder kleinere Winkel und umgekehrt.

Zus. I. Die Graden, welche einen Punkt mit zwei conjugirten Punkten seiner Polarebene verbinden, stehen senkrecht aufeinander (Def. I, § 69 u. Def. V, § 40).

Bem. I. In dem vollständigen Raum gelten auch die Def. I und III, § 87 von durch einen Punkt gehenden senkrechten Ebenen und Graden, wenn man die Ebene im Unendlichgrossen des *Euclid*'schen Gebiets durch die Polarebene des Punktes ersetzt.

Satz II. Die Durchschnittspunkte und Durchschnittsgrade einer senkrechten Graden und einer senkrechten Ebene mit der Polarebene ihrer Durchschnittspunkte sind Pole und Pollinie und umgekehrt (Satz I, § 73; Satz VI, Satz I, Def. I, § 69 und Bem. I).

Zus. Eine auf einer Ebene senkrecht stehende Grade steht senkrecht auf allen Graden der Ebene, welche durch die Durchschnittspunkte der Graden mit der Ebene gehen.

P sei ein Durchschnittspunkt der Graden a mit der auf ihr senkrecht stehenden Ebene α; π die Polarebene von P; A und a' ein Durchschnittspunkt und die Durchschnittsgrade der Graden a und der Ebene α mit der Ebene π. Die Punkte von a' sind dem Punkt A conjugirt (Def. I, § 69), da A und a' Pol und Pollinie in der Ebene π sind. Mithin steht die gegebene Grade auf jeder durch den Punkt P gehenden Graden in der Ebene α senkrecht (Zus. Satz I).

Satz III. Eine Grade und eine Ebene, welche conjugirt sind, stehen senkrecht aufeinander.

a und α seien die conjugirte Grade und Ebene. Ist P einer ihrer gemeinschaftlichen Punkte, so enthält die Polarebene π von P die in α liegende (Zus. II, Satz IV, § 108) Pollinie a' der Graden a (Satz II, § 108) und schneidet die Grade a in den Polen der Graden a' in der Ebene π (Zus. IV, Satz II, § 108). Mithin stehen die Grade und die Ebene senkrecht aufeinander (Satz II).

Zus. I. Die durch einen Punkt gehenden Graden stehen senkrecht auf der Polarebene des Punktes.

Denn ihre Pollinien liegen in der Polarebene des Punktes und die gegebenen Graden und die Polarebene des gegebenen Punktes sind mithin conjugirt (Def. V und Satz IV, § 108).

Satz IV. Eine Grade und eine Ebene, die aufeinander senkrecht stehen, sind conjugirt.

a sei die Grade und α die Ebene; P und P' ihre Durchschnittspunkte. Die Polarebene π von P trifft die Grade a in zwei Punkten A, A', welche Pole der Graden a' sind, in welcher die Ebene π die Ebene α schneidet (Satz II). Die Polarebene von A geht durch a' (Satz I, § 108; Def. II, § 69); mithin ist a' die Pollinie von a und α und a sind daher conjugirt (Satz IV und Def. V, § 108).

Zus. I. Die Lothe auf eine Ebene gehen durch die Pole der Ebene.

Denn sie sind der Ebene conjugirt (Def. VI, § 108).

Zus. II. Durch einen Punkt einer Ebene oder ausserhalb der Ebene geht nur ein Loth auf die Ebene.

Es ist die Grade, welche den Punkt mit den Polen der Ebene verbindet und welche der gegebenen Ebene conjugirt ist.

Zus. III. Von einem Punkt kann man nur eine Ebene senkrecht auf eine gegebene Grade ziehen.

Die Ebene, welche den Punkt mit der Pollinie der gegebenen Graden verbindet, ist dieser Graden conjugirt (Satz IV, § 108) und mithin senkrecht auf der Graden.

Zus. IV. Zwei Ebenen haben ein Loth gemeinschaftlich.

Es ist dies die Grade, welche die Pole der beiden Ebenen verbindet.

Satz V. Zwei conjugirte Ebenen stehen senkrecht aufeinander und umgekehrt.

α und β seien die beiden Ebenen, von denen jede die Pole A, A'; B, B' der andern enthält (Def. II, und Bem. II, § 108). Die Grade r', welche die Pole der beiden Ebenen verbindet, ist die Pollinie ihrer Durchschnittsgraden r; mithin geht die Polarebene π eines jeden Punktes P von r durch r'; die Durchschnittsgraden a und b der beiden gegebenen Ebenen mit der Ebene π gehen also bezüglich durch B, B'; A, A'. Da ferner die Grade a der Schnitt der beiden Ebenen α und π ist, so hat sie die Grade PA zur Pollinie und A ist mithin der Pol von a in der Ebene π. Aus demselben Grund ist B der Pol von b in π; mithin sind a und b conjugirte Grade in der Ebene π und stehen die beiden Ebenen α und β senkrecht aufeinander (Zus. II, Satz VII, § 73 und Bem. I).

Wenn umgekehrt zwei Ebenen α und β senkrecht aufeinander stehen, so gibt es einen Punkt P ihrer Durchschnittsgraden r, dessen Polarebene π die gegebenen Ebenen in zwei conjugirten Graden a und b schneidet, von denen jede in der Ebene π den Pol der andern enthält, weil ihr normales Segment ein rechtes ist (Zus. II, Satz VII, § 73 und Bem. I). A und B seien die Pole der beiden Graden a und b in π; die Grade AB in der Ebene π ist die Pollinie der Durchschnittspunkte R und R' der Graden r mit π; mithin geht die Polarebene von A durch P, B, R und ist also die Ebene α. Ebenso ist die

Polarebene von B die Ebene PRA oder β. Folglich sind die Ebenen α und β conjugirt (Def. II, § 108).

Zus. I. Die auf einer Ebene senkrecht stehenden Ebenen gehen durch die Pole der Ebenen.

Denn zwei aufeinander senkrechte Ebenen sind conjugirt und jede derselben enthält die Pole der andern (Def. II und Bem. II, § 108).

Zus. II. Durch eine Grade geht eine und nur eine Ebene, welche senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht.

Es ist die Ebene, welche die Grade mit den Polen der Ebene verbindet.

Zus. III. Es gibt eine Ebene, welche zu drei Ebenen gleichzeitig senkrecht ist.

Es ist dies die Ebene, welche die drei Pole verbindet.

Satz VI. Die Polarebene eines beliebigen Punktes der Durchschnittsgraden zweier aufeinander senkrechten Ebenen schneidet diese beiden Ebenen in conjugirten in der ersteren Ebene liegenden Graden (Satz V; Zus. II und IV, Satz I, § 108 und Def. III, § 69).

Satz VII. Eine Grade und eine Ebene haben eine zu ihnen senkrechte Ebene und eine zu ihnen normale Grade gemeinschaftlich.

Die Ebene nämlich, welche den Pol der Ebene mit der Pollinie der gegebenen Graden verbindet, ist der Graden und der Ebene conjugirt (Satz IV, Def. V, Def. II, § 108; Satz III, V). Die gemeinschaftliche normale Grade geht durch den Durchschnittspunkt der Normalebene mit der Graden (Zus. II, Satz IV, Satz V und Zus. I, Satz IV; Satz III, § 68).

Satz VIII. Eine auf einer Graden c senkrechte Grade schneidet auch die Pollinie c' von c und steht senkrecht auf ihr.

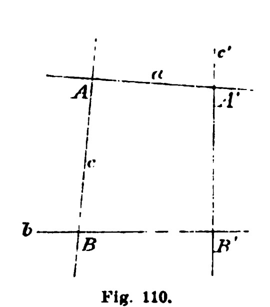


Fig. 110.

a stehe senkrecht auf der Graden c, welche a nach der Definition in einem Punkt schneidet (Bem. I). Die Ebene ac trifft die Grade c' in den beiden Polen der Graden c in der Ebene selbst (Zus. IV, Satz II, § 108), und jede auf der Graden c senkrechte Grade geht in dieser Ebene durch diese Pole (Satz VI, § 69) (Fig. 110).

Zus. I. Steht eine Transversale senkrecht auf zwei Graden, so ist ihre Pollinie auch senkrecht auf den beiden Graden.

a und b seien die beiden Graden, c die auf ihnen senkrechte Transversale, A und B die Durchschnittspunkte von c mit a und b und schliesslich c' die Pollinie zu c. Die Graden a und b schneiden c und stehen senkrecht auf c; mithin schneiden sie auch c' rechtwinkig (Fig. 110).

Zus. II. Sind die Enden eines auf zwei Graden normalen Segments gegeben, so bestimmen die Enden des polaren Segments mit den ersten ein rechtes Segment.

Denn die Enden sind conjugirte Punkte (Zus. I, Satz II, § 108).

Satz IX. Jede Grade, welche zwei Pollinien schneidet, steht senkrecht auf ihnen.

a und b seien die beiden Pollinien, c die Transversale, A und B zwei ihrer Durchschnittspunkte mit a und b. Die Ebene ac schneidet b in dem

Punkt B, welcher der Pol von a in dieser Ebene ist (Zus. IV, Satz II, § 108); AB steht also senkrecht auf a (Satz VI, § 69). Aus demselben Grund steht AB auch senkrecht auf b (Fig. 110).

Satz X. Zwei sich schneidende Graden a und b haben zwei Lothe gemein.

P sei einer ihrer Durchschnittspunkte und π die Polarebene von P. Die Ebene π schneidet die Ebene ab in einer auf die beiden Graden senkrechten Graden, weil jede durch P gehende Grade senkrecht auf allen Graden der Ebene π steht, welche durch ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene π gehen (Zus. I, Satz III; Zus. Satz II). Ferner geht durch P ein Loth auf die Ebene ab (Zus. II, Satz IV), welches senkrecht auf den beiden Graden steht (Zus. Satz II).[1]

Satz XI. Die Kanten eines Polartetraeders sind einem rechten Segment gleich. Die Seitenflächen, welche sich in einer Kante schneiden, stehen senkrecht aufeinander und ebenso die Kanten, welche in derselben Seitenfläche liegen.

Denn die Eckpunkte sind zu je zweien conjugirt, ebenso ihre Seitenflächen und schliesslich auch die auf diesen Seitenflächen liegenden Kanten einer Seitenfläche.

Satz XII. Zwei Polartetraeder sind auf 24 verschiedene Arten einander gleich.

$ABCD$, $A'B'C'D'$ seien die beiden Tetraeder; die beiden Dreiecke BCD, $B'C'D'$ sind identisch und die Abstände der Punkte A und A' von den Punkten BCD, $B'C'D'$ sind gleich. Man kann so einen Identitätszusammenhang zwischen den beiden Figuren $A \cdot BCD$, $A' \cdot B'C'D'$ derart feststellen, dass zwei Punkten der einen zwei Punkte der anderen von demselben Abstand entsprechen (Satz III, § 15). Es sind aber die Tetraeder, welche man durch die 24 Permutationen der vier Eckpunkte $ABCD$ desselben Tetraeders erhält, identisch, weil stets die Kanten einem rechten Segment gleich sind. Damit ist der Satz bewiesen.

5.

Abstand eines Punktes von einer Ebene, einer Graden von einer Ebene und zweier Ebenen voneinander.

§ 111. *Def. I.* Das von einem Punkt P auf eine Ebene π gefällte Loth trifft diese Ebene in zwei entgegengesetzten Punkten M und M', welche *die Fusspunkte* des Loths sind. Die Segmente (PM), (PM') heissen *die Normalsegmente* von dem Punkt auf die Ebene.

Die durch P und die übrigen Punkte der Ebene bestimmten Segmente heissen *schief.*

1) Bezüglich des Satzes IX wissen wir, dass es Paare sich kreuzender Graden gibt, welche eine und mithin mindestens noch eine Normale gemein haben. — Später werden wir sehen, dass zwei unabhängige Grade in der That zwei Normale gemein haben (siehe § 117).

Bem. I. Ist die Ebene π die Polarebene von P, so machen alle Punkte von π mit P ein rechtes Segment (Satz I, Def. I, § 108). Spricht man also von normalen und schiefen Segmenten des Punktes P bezüglich einer Ebene σ, so meint man, dass σ nicht die Polarebene von P sein soll.

Satz I. Die normalen Segmente von einem Punkt nach einer Ebene ergänzen sich zu zwei rechten und sind sie einem rechten Segment gleich, so ist die Ebene die Polarebene des gegebenen Punktes.

Wird wie Satz I, § 73 bewiesen, nur muss man hier statt Zus. II, Satz VI, § 69 den Zus. III, Satz IV, § 110 zu Hülfe nehmen.

Satz II. Von den normalen Segmenten eines Punktes P nach einer Ebene ϱ ist das kleinere das kleinste und das grössere das grösste der schiefen Segmente.

Von zwei schiefen Segmenten ist dasjenige das grössere, dessen Punkt in ϱ weiter entfernt von dem Fusspunkt des kleinsten normalen Segments oder näher an demjenigen des grössten normalen Segments liegt und umgekehrt.

M und M' seien die Fusspunkte des Lothes von P auf die Ebene ϱ. (PA) sei ein schiefes Segment. Die Ebene PAM schneidet die Ebene ϱ in einer zu PM senkrechten Graden (Zus. Satz II, § 110) und in der Ebene PAM ist (PM) das kleinste Segment, wenn $(PM) < (PM')$ und (PM') das grösste Segment (Satz II, § 73). Es ist daher $(PM) < (PA) < (PM')$.

Wenn A und B die in ϱ liegenden Punkte der schiefen Segmente (PA) und (PB) sind, so braucht man nur die Dreiecke PAM, PBM zu betrachten und in der Ebene PAM ein dem Dreieck PBM gleiches Dreieck, dessen eine Kathete PM ist und dessen andre auf die Grade AM fällt und alsdann Satz II, § 73 anzuwenden.

Satz III. Die schiefen Segmente, welche einen Punkt mit denjenigen Punkten einer Ebene verbinden, die gleichweit von einem Fusspunkt des von dem Punkt auf die Ebene gefällten Lothes abstehen, bilden denselben Winkel mit der Normalen.

Wie im *Euclid*'schen Raum (Satz II, § 88).

Zus. I. Es gilt die Umkehrung des Satzes.

Def. II. Die normalen Abstände eines Punktes von einer Ebene heissen *die Abstände* des Punktes von der Ebene. Wenn wir nicht anders bestimmen, so verstehen wir unter Abstand eines Punktes von der Ebene den kleinsten Abstand.

Bem. II. Es gelten mit denselben Beweisen auch in dem vollständigen Raum die Zusätze II, III des Satzes II und Satz III, § 88, wenn man sich auf Satz VI, § 73 statt auf Satz II, § 55 bezieht, und ebenso Satz IV und Zus. und Satz VIII, § 88, wenn man berücksichtigt, dass eine Grade eine Ebene in zwei entgegengesetzten Punkten schneidet.

Def. III. Das Loth auf zwei Ebenen α und β trifft sie in zwei Paar Punkten A, A'; B, B', welche vier consecutive Segmente bestimmen, die zu je zweien gleich sind und von denen je zwei nicht gleiche sich zu zwei rechten Segmenten ergänzen (Zus. IV, Satz IV, § 100). Sie heissen *die normalen Segmente der beiden Ebenen.*

Satz IV. Zwei Ebenen α und β haben zwei normale Supplementsegmente, welche in Bezug auf beide Enden das kleinste und grösste Segment bezüglich der einen wie der andern Ebene sind.

Ist (AB) das kleinere normale Segment, so ist (AB) der kleinste Abstand des Punktes A von der Ebene β *und* des Punktes B von der Ebene α. Es gibt Segmente (EF), deren Enden in den beiden Ebenen liegen und die kleiner als (AB) sind, sie sind aber nicht die kleinsten Segmente von *beiden* Endpunkten nach den zwei Ebenen. Fällt E mit F zusammen, so gibt es eine Grade EF nicht mehr.

Bem. III. Sprechen wir von dem normalen Segment zweier Ebenen, so meinen wir nur das eine der kleinsten Segmente, wenn nicht anders bestimmt wird.

Zus. I. Die normalen Segmente zweier conjugirten Ebenen sind rechte und umgekehrt.

Denn wenn A und A', B und B' die Pole der zwei Ebenen sind, so liegen sie in den beiden Ebenen (Def. II, § 108); (AB) steht mithin senkrecht auf den beiden Ebenen und ist ein rechtes Segment (Zus. I, Satz III, § 100; Satz I, Def. I, § 108 und Def. I, § 69).

Zus. II. Zwei Halbebenen haben ein einziges normales Segment, welches den kleinsten oder grössten Abstand zwischen den Punkten der beiden Halbebenen angibt je nachdem das normale Segment kleiner oder grösser als ein rechtes ist.

Denn die Paare entgegengesetzter Punkte A und A', B und B' werden durch eine beliebige Grade einer jeden der beiden gegebenen Ebenen getrennt (Zus. I, Satz II, § 71).

Zus. III. Zwei Paare von Ebenen, welche denselben Abstand voneinander haben, sind gleich.

Denn man kann einen Identitätszusammenhang zwischen ihnen festsetzen, in welchem sich die Durchschnittsgraden und die Fusspunkte der gleichen normalen Segmente entsprechen (Satz III, § 15).

Def. IV. Bezeichnet man mit A und A', B und B' die Durchschnittspunkte der auf einer Graden und einer Ebene senkrecht stehenden Graden, so heissen ihre consecutiven Segmente *die normalen Segmente der Graden und der Ebene.*

Satz V. Die zu einer Graden und einer Ebene normalen Segmente ergänzen sich zu zwei rechten und geben den kleinsten und grössten Abstand zwischen den Punkten der Ebene und der Graden von der Graden und der Ebene aus.

(AB) sei das kleinere Segment; es ist das kleinste Segment, welches vom Punkt A nach der Ebene, und das kleinste Segment, welches vom Punkt B nach der Graden führt. Auch hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie bei Satz IV.

Zus. I. Die normalen Segmente einer Graden und einer der Graden conjugirten Ebene sind rechte und umgekehrt.

Denn die gemeinschaftliche Normale geht durch den auf der Graden gelegenen Pol A der Ebene und trifft die in der Ebene gelegene Pollinie der Graden in einem Punkt B (Def. V; Zus. II, Satz IV, § 108; Zus. I, Satz III und Satz IX, § 110); mithin ist (AB) ein rechtes Segment.

Zus. II. Ist eine Halbgrade und eine Halbebene gegeben, so gibt es ein auf beiden normales Segment, welches den kleinsten oder grössten Abstand zwischen den

Punkten der Halbgraden und denjenigen der Halbebene liefert, je nachdem es kleiner oder grösser als ein rechtes Segment ist.

Zus. III. Die Figuren, welche von zwei Graden bezüglich mit zwei Ebenen gebildet werden, sind identisch, wenn die Graden von den Ebenen denselben Abstand haben.

Denn es existirt ein Identitätszusammenhang zwischen ihnen, in welchem sich die Durchschnittspunkte der Graden und der Ebenen und die Enden ihrer normalen Segmente entsprechen (Satz III, § 15).

6.

Die Winkel zwischen Strahlen, Graden, Halbebenen und Ebenen.

§ 112. *Bem. I.* Die für das *Euclid*'sche Gebiet gegebene Definition des Winkels eines Strahls und einer Graden mit einer Ebene (Def. I, II, § 90) gilt auch für das vollständige Gebiet des Raums, wenn man der Ebene im Unendlichgrossen die Polarebene eines der Durchschnittspunkte des Strahls oder der Graden mit der Ebene substituirt.

Es gelten mithin mit ähnlichen Beweisen die Sätze I u. II und ihre Zusätze in § 90. Bei Satz II existirt ein Unterschied. In dem *Euclid*'schen Gebiet gilt nämlich der Satz für alle Strahlen der Ebene, welche parallel zu den durch den Durchschnittspunkt des Strahls mit der Ebene gehenden Strahlen sind und daher denselben Winkel mit dem gegebenen Strahl bilden. In dem vollständigen Raum dagegen verhält es sich anders, da für ihn die früher gegebene Definition des Winkels zweier Strahlen nur dann gilt, wenn sie sich in einem Punkt schneiden.

Bem. II. Unter *Keil zweier Halbebenen* verstehen wir, wie in dem *Euclid*'schen Gebiet, einen Theil eines Halbebenenbüschels, welcher durch zwei Halbebenen bestimmt wird.

Die Grade, welche den Abstand der Halbgraden im Unendlichgrossen der Seiten des Keils misst, ist in dem vollständigen Gebiet die Pollinie der Kante des Keils.

Es gilt mit ähnlichem Beweis der Satz I, § 91.

Satz I. Gleichen (ungleichen) Segmenten einer Graden entsprechen gleiche (ungleiche) Keile um die Pollinie.

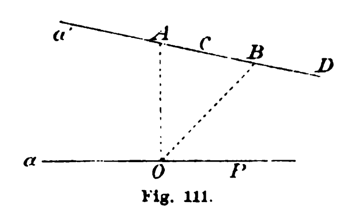


Fig. 111.

Denn es seien (AB), (CD) zwei gleiche Segmente einer Graden a' und O und P zwei Punkte ihrer Pollinie a. Die Tetraeder $OPAB$, $OPCD$ sind gleich, weil sie die Kanten bezüglich gleich haben, nämlich (OP) gemeinschaftlich, $(AB) \equiv (CD)$ ist und die übrigen Kanten einem rechten Segment gleich sind (Zus. I, Satz II, § 108); mithin sind die beiden Keile $a \cdot (AB)$, $a \cdot (CD)$ gleich.

Wenn $(AB) \gtrless (CD)$ ist, so wähle man im ersten Fall in (AB) einen Punkt B_1 derart, dass $(AB_1) \equiv (CD)$; alsdann ist der Keil $a \cdot (AB_1) \equiv a \cdot (CD)$. Der Keil a (AB_1) ist aber ein Theil des Keils $a \cdot (AB)$ (Bem. II); mithin u. s. w.

Zus. Zwei gleiche oder ungleiche Keile um eine Grade bestimmen gleiche oder ungleiche Segmente auf ihrer Pollinie.

Satz II. Die normalen Schnitte eines Keils sind gleich.

Ist $(\alpha\beta)$ der Keil, a seine Kante und a' deren Pollinie, so sind die Ebenen der Normalschnitte diejenigen, welche durch die Grade a' gehen (Satz IV, § 110).

A und B seien die Durchschnittspunkte von α und β mit a', O und P zwei Punkte von a. Die Dreiecke ABO, ABP sind gleich, weil sie die drei Seiten gleich haben (Zus. I, Satz II, § 108); mithin ist $\widehat{AOB} \equiv \widehat{APB}$ (Fig. 111).

Satz III. Sind zwei Keile gleich oder ungleich, so sind ihre Normalschnitte gleich oder ungleich und umgekehrt.

a und b seien die Kanten der beiden Keile, α und α_1, β und β_1 ihre Seiten, a' und b' die Pollinien von a und b, (AA_1), (BB_1) die durch die beiden Keile auf den Graden a' und b' bestimmten Segmente.

Die Winkel der Normalschnitte eines und desselben Keils z. B. des ersten sind durch die Strahlen gegeben, welche einen Punkt der Kante mit den Punkten A und A_1 verbinden. Weil nun $(AA_1) \equiv (BB_1)$, so folgt daraus, dass auch ihre Normalschnitte gleich sind. Und wenn $(AA_1) \gtrless (BB_1)$, so sind auch die Normalschnitte ungleich. Und umgekehrt, wenn diese gleich sind, ist $(AA_1) \equiv (BB_1)$ und die beiden Keile sind gleich, und sind die Normalschnitte ungleich, so ist $(AA_1) \gtrless (BB_1)$ und mithin sind auch die Keile ungleich (Satz I u. II).

Bem. III. Mit analogen Beweisen gelten die Sätze VI, VII, IX u. Zus., X u. XI in § 91, wenn man beachtet, dass es in dem vollständigen Raum keine parallelen Ebenen gibt.

7.

Dreikante.

§ 113. *Bem. I.* Die für das *Euclid*'sche Gebiet gegebenen Definitionen von Vielkant und Dreikant (§ 93) gelten auch für das vollständige Gebiet des Raums.

Bezüglich des Vielkants oder eines Dreikants muss man der Ebene im Unendlichgrossen die Polarebene des Scheitels substituiren. Wir bemerken nur, dass die Kanten eines Vielkants sich in zwei entgegengesetzten Punkten schneiden und mithin zwei Vielkante bilden, je nachdem man den einen oder den andern Punkt betrachtet.

Bem. II. In dem vollständigen Raum gelten alle Sätze des § 93, die unter Berücksichtigung der Bem. I auf dieselbe Weise bewiesen werden.

Ebenso gelten mit Ausnahme des Satzes I alle Sätze des § 94 über gleiche Dreikante im *Euclid*'schen Raum.[1])

8.

Die Abstände zweier Graden.

§ 114. *Def. I.* Wenn A und A', B und B' die Durchschnittspunkte eines zweien Graden a und b gemeinschaftlichen Lothes mit diesen Graden sind, so heissen ihre consecutiven Segmente *die normalen Segmente der beiden Graden.*

Satz I. Die auf derselben Graden gelegenen normalen Segmente zweier Graden ergänzen sich zu zwei rechten und geben den kleinsten und grössten Abstand der Punkte einer jeden Graden von den Punkten der andern an.

1) Auch hier sehen wir also, dass aus den Sätzen über die Dreiecke der *Euclid*'schen Ebene, wenn man zur vollständigen Ebene übergeht, Sätze des *Euclid*'schen und vollständigen Raums abgeleitet werden, welche dann dazu dienen, andre Eigenschaften dieser Räume zu beweisen.

Denn wenn (AB) das kleinere normale Segment ist, so gibt es den kleinsten Abstand des Punktes A von den Punkten der Graden b und den kleinsten Abstand des Punktes B von den Punkten der Graden a an (Satz II, § 73).

Satz II. Zwei Grade, deren beide normale Polarsegmente einem rechten gleich kommen, sind Pollinien zueinander.

Denn a und b seien die beiden Graden, (AB) ein normales rechtes Segment, $(A'B')$ das normale Polarsegment. Wir ziehen durch A die auf die Grade a senkrechte Ebene α; in der Ebene α ist die Pollinie des Punktes A die Pollinie a' von a (Zus. IV, Satz II, § 108), welche wie auf allen andern durch A gehenden und in α liegenden Graden auch auf der Graden AB in B senkrecht steht (Satz VI, § 69).

Ebenso geht die Grade a' durch B' und fällt daher mit der Graden b zusammen (Fig. 110).

Bem. I. Es gilt Satz II, § 89. Da man den im Text gegebenen Beweis nicht gebrauchen kann, so benutze man den in der Anmerkung gegebenen Beweis. Es ist jedoch zu beachten, dass zwei sich kreuzende Grade zwei normale Grade gemein haben und auch unendlich viele (wie wir bald sehen werden) gemein haben können und dass der Satz für jedes gemeinschaftliche normale Segment gilt. Auch Bem. III, § 89 bleibt in Geltung, welche nichts Anderes als Satz VI, § 17 ist, den wir unabhängig von den Dimensionen des Raums und dem Axiom über die Parallelen bewiesen haben.

Satz III. Sind zwei auf zwei Graden AB, CD senkrechte Segmente (AC), (BD) gleich, so sind die Segmente (AB), $CD)$ gleich.

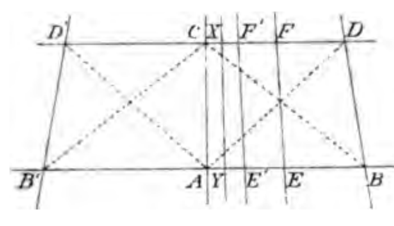


Fig. 112.

Die Dreiecke CAB, BDC sind bei A und D rechtwinklig gegeben, haben eine Kathete und die Hypotenuse gleich und sind daher gleich (Satz VI, § 73). Daher ist $(AB) \equiv (CD)$ (Fig. 112).

Satz IV. Sind zwei auf zwei Graden senkrechte Segmente gleich, so ist jeder Punkt der Graden das Ende eines gemeinschaftlichen und den beiden ersten Segmenten gleichen normalen Segments.

Gebraucht man wieder die Bezeichnungen des vorigen Satzes und halbirt (AB) und (CD) in den Punkten E und F, so steht die Grade EF senkrecht auf den beiden Graden AB und CD (Satz VI, § 17) und da $(CF) \equiv (AE)$ (Satz III), so folgt $(EF) \equiv (AC) \equiv (BD)$ (Satz III).

Sind E', F' die Mittelpunkte der Segmente (AE), (CF), so steht die Grade $E'F'$ senkrecht auf den Graden AB und CD (Satz VI, § 17) und es ist $(E'F') \equiv (AC) \equiv (EF) \equiv (BD)$ (Satz III). Setzt man die Halbirung der so erhaltenen neuen Segmente fort, so erhält man ebensoviele auf den beiden Graden senkrechte Segmente, die den gegebenen Segmenten gleich sind.

Ist X ein Punkt von (CD) und kein Punkt F, so ist er die Grenze einer unbegrenzten Reihe erster Art von Punkten F, z. B. von D nach C hin (Einl. h, § 99). Die Reihe der entsprechenden Punkte E in (AB) hat einen Grenzpunkt Y der Art, dass $(DX) \equiv (BY)$ (Einl. d', § 97); mithin ist $(CX) \equiv$

$\equiv (AY)$. Das Segment (XY) ist daher die Grenze des Segments (EF) (Def. I, § 12) und da (EF) constant ist, so ist $(XY) \equiv (EF) \equiv (AC)$ (Satz II, § 12).[1])

Nun sind in dem Viereck $ACXY$ die Dreiecke ACX, XYA gleich, weil sie die drei Seiten gleich haben, und da das erste bei C rechtwinklig ist, so ist es auch das zweite bei Y. Ebenso ist das Dreieck CXY bei X rechtwinklig; daher steht die Grade XY senkrecht auf den beiden gegebenen Graden.

Betrachten wir nun auf den beiden Graden CD und AB die (CD) und (AB) gleichen Segmente (CD'), (AB'). Aus den gleichschenkligen Dreiecken DAD', BCB' folgt $(AD') \equiv (AD)$, $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'AC}$.

Die Keile $B'\overline{AC}D'$, $B\overline{AC}D$ sind gleich, weil sie Scheitelkeile mit der gemeinsamen Kante AC sind; mithin sind die Dreikante $A \cdot BCD$, $A \cdot B'CD'$ gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Keil gleich haben; es ist also $\widehat{D'AB'} \equiv \widehat{DAB}$ und die beiden Dreiecke $D'AB'$, DAB sind gleich. Aus demselben Grund sind auch die Dreiecke $D'B'C$, DBC gleich. $B'D'$ steht daher senkrecht auf den Graden AB, CD und ist (BD) gleich.

Wenn nun auf der Graden CD ein Punkt X ausserhalb des Segments (CD) gegeben ist, so gibt es immer eine Zahl n derart, dass

$$(CD)n < (CX) < (CD)(n+1). \qquad \text{(Einl. c' § 81)}$$

Bezeichnet man dann mit D_n, D_{n+1} die zweiten Enden der Segmente $(CD)n$, $(CD)(n+1)$ und mit B_n, B_{n+1} die entsprechenden Punkte in AB, so ist das Tetraeder $B_n D_n B_{n+1} D_{n+1}$ dem Tetraeder $ACBD$ identisch. Da für jeden Punkt X des Segments (CD) der Satz bewiesen ist, so ist er damit auch für jeden Punkt der Graden CD und mithin auch für jeden Punkt der Graden AB bewiesen (Fig. 112).

Def. II. Zwei Grade, deren beide normale Segmente gleich sind, heissen *Grade von gleichem Abstand.*

Zus. Eine Grade, welche gleichen Abstand von einer andern Graden hat, steht auch gleichweit von der Pollinie der letzteren ab.

Denn die auf den beiden Graden senkrechten Graden stehen auch senkrecht auf den Pollinien und da die Segmente, deren Enden auf den Pollinien liegen, rechte sind (Zus. Satz II, § 108), so ist damit der Satz bewiesen.

Satz V. Eine zwei Graden von gleichem Abstand gemeinschaftliche Transversale bildet mit ihnen gleiche innere Wechselwinkel.

AB, CD seien die beiden Graden, BC die gemeinschaftliche Transversale. Von B und C ziehe man die senkrechten Segmente (AC) und (BD). In dem Viereck $ABCD$ sind die rechtwinkligen Dreiecke ABC, DCB gleich (Satz III) und es ist $\widehat{DCB} \equiv \widehat{ABC}$ (Fig. 112).

1) Es ist dies dasselbe Verfahren, welches wir Satz I, § 45 und Satz I, § 80 angewendet haben.

Satz VI. Wenn drei Punkte, welche dieselben Abstände von einer Graden haben und nicht mit ihr in einer Ebene liegen, in grader Linie gelegen sind, so ist diese Linie eine Grade von gleichem Abstand von der gegebenen Graden.

Nach Satz IV, § 81 ist es im vollständigen Raum nicht möglich, dass die Punkte in einer Ebene mit der Graden liegen.

Der Beweis dieses Satzes gilt auch hier (Fig. 88, S. 421). Da das Viereck $AA'BB'$ rechtwinklig und in diesem Fall nicht eben ist, so steht die Grade r' gleichweit von der gegebenen Graden r ab (Def. II und Satz IV).

Satz VII. Ist eine Grade und ein Punkt ausserhalb derselben gegeben, so gehen durch diesen Punkt zwei Grade von gleichem Abstand von der gegebenen Graden.

CD sei die Grade, A der gegebene Punkt, (AC) das normale Segment von dem Punkt A nach der Graden. Ist ein beliebiger Punkt D von CD gegeben, so ist das Dreieck ACD bei C rechtwinklig. Wir wollen die Winkel $\widehat{CAD}$, $\widehat{CDA}$ mit α und β bezeichnen. Ist AB eine Grade gleichen Abstands von CD und steht BD auf den beiden Graden senkrecht, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABD:

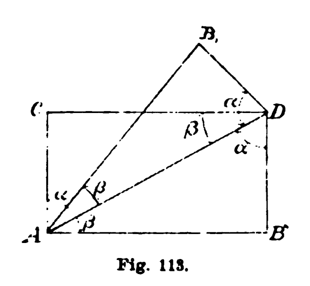


Fig. 113.

$$\widehat{DAB} \equiv \widehat{CDA} \equiv \beta, \quad \widehat{ADB} \equiv \widehat{CAD} \equiv \alpha \quad \text{(Satz V)}.$$

Die Dreiecke ACD, ABD sind überdies gleich, weil sie drei Seiten gleich haben (Satz III).

Der Strahl DB liegt in der auf CD in D senkrechten Ebene (Satz IV, VIII, § 110). Er muss mit AD den Winkel α bilden, d. h. der Strahl DB ist die Kante eines Dreikants, von dem die drei Seiten bekannt sind und die Seite $\widehat{CDA}$ der Lage nach gegeben ist. Es gibt daher zwei Dreikante $D \cdot CAB$ und $D \cdot CAB_1$, welche diese Bedingungen erfüllen und die auf entgegengesetzten Seiten von $\widehat{CDA}$ liegen (Bem. II, § 113), da $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ ist (Satz VII, § 76 und Bem. I, § 113).

Macht man $(DB) \equiv (CA) \equiv (DB_1)$, so haben die Graden AB und AB_1 gleichen Abstand von der gegebenen Graden.

Bem. II. Die Graden gleichen Abstands im vollständigen Raum haben analoge Eigenschaften wie die parallelen Graden der *Euclid*'schen Ebene (Satz I, § 52); nur lassen sich von einem Punkt zwei solche Grade zu einer gegebenen Graden ziehen.

9.

Das Tetraeder.

§ 115. *Bem. I.* Die für das *Euclid*'sche Gebiet gegebene Definition des Tetraeders (Def. I, § 95) gilt auch in dem vollständigen Raum.

Satz I u. Zus. in § 95 mit ihren Beweisen und mit den Def. II u. III, IV u. V bleiben in Geltung.

Bem. II. Die Ebenen eines Tetraeders theilen den vollständigen Raum statt in 15 in 16 Regionen (Bem. I, § 95), welche ebenfalls Tetraeder sind. Bezeichnet man mit A,

B, C, D die Eckpunkte eines Tetraeders und mit A', B', C', D' die entgegengesetzten Punkte, so sind die 16 Tetraeder die folgenden:

$$\begin{array}{llll} ABCD, & ABCD', & ABC'D, & AB'CD, \\ A'BCD, & ABC'D', & AB'CD', & A'BCD', \\ AB'C'D, & A'BC'D, & A'B'CD, & A'B'CD', \\ A'B'C'D, & AB'C'D', & A'BC'D', & A'B'C'D'. \end{array}$$

Satz I. Den inneren Punkten eines Tetraeders sind die inneren Punkte des entgegengesetzten Tetraeders entgegengesetzt.

Denn wenn X ein innerer Punkt ist, so trifft die Grade AX die gegenüberliegende Seitenfläche BCD in einem inneren Punkt Y. Der dem Punkt Y entgegengesetzte Punkt Y' liegt in dem inneren Theil des Dreiecks $B'C'D'$ (Satz II, § 72); der Punkt X' liegt daher in dem inneren Theil des dem Segment (AY) entgegengesetzten Segments $(A'Y')$ (Satz IV, § 29).

Bem. III. Es gilt in dem vollständigen Raum mit demselben Beweis auch Satz II mit seinen Zusätzen in § 95, nur beachte man, dass eine Ebene, welche eine Kante in einem inneren Punkt schneidet, sie auch in einem äusseren trifft; ebenso gelten Satz III u. Zus. und die Sätze IV, V desselben Paragraphen.

Satz II. Die vier Ebenen eines Polartetraeders theilen den Raum in 16 Polartetraeder, die zu je zweien entgegengesetzt sind.

Denn ihre Eckpunkte haben die gegenüberliegenden Seitenflächen zu Polarebenen (Bem. II).

10.

Die Richtungen oder der Sinn des Raums, seiner Keile, Dreikante und Tetraeder. — Congruente und symmetrische Figuren.

§ 116. *Bem. I.* Die Richtungen eines Sterns werden in derselben Weise bestimmt wie bei dem *Euclid*'schen Gebiet, nur wird der Ebene im Unendlichgrossen die Polarebene des Centrums des Sterns substituirt.

Verfährt man so, wie in Bem. III, § 96 angegeben wurde, so behalten die Sätze des § 96 mit Ausnahme des Zusatzes III, Satz XIII ihre Geltung, wenn man berücksichtigt, dass ein Stern zwei entgegengesetzte Centren hat und mithin die Seiten eines Dreikants zwei entgegengesetzte Richtungen des Raums bestimmen, je nachdem man sie von dem einen oder dem andern Scheitel betrachtet. Auch der folgende Satz gilt.

Satz I. Wenn man die Eckpunkte eines Tetraeders $ABCD$ in ungrader Anzahl mit ihren entgegengesetzten Punkten vertauscht, so erhält man Tetraeder, welche den entgegengesetzten Sinn zu dem gegebenen und mithin dieselbe Richtung untereinander haben; macht man eine grade Anzahl von Vertauschungen, so erhält man Tetraeder von derselben Richtung wie das gegebene.

Denn die beiden Tetraeder $ABCD$, $A'BCD$ haben entgegengesetzten Sinn, weil A und A' auf entgegengesetzten Seiten der Ebene BCD liegen (Zus. I, Satz VIII und Bem. I). Mithin hat $A'B'CD$ denselben Sinn wie $ABCD$ und $A'B'C'D$ ist entgegengesetzt gerichtet wie $A'B'CD$ und folglich auch wie $ABCD$ und $A'B'C'D'$ hat entgegengesetzte Richtung wie $A'B'C'D$ und daher dieselbe wie $ABCD$.

Zus. I. Zwei entgegengesetzte Tetraeder haben gleichen Sinn.

Bem. II. In dem vollständigen Raum gelten mit analogen Beweisen die Sätze über die congruenten und symmetrischen Figuren in den §§ 97 u. 98 mit Ausnahme des Satzes II, § 98. Es gilt aber auch der folgende

Satz II. Zwei entgegengesetzte Figuren sind congruent (Zus. I, Satz I; Satz III, § 98 und Bem. II).

11.

Kegel, Cylinder und Kugel.

§ 117. *Bem. I.* Die für das *Euclid*'sche Gebiet gegebene Definition des Kegels behält ihre Geltung (§ 99); nur ist die Ebene im Unendlichgrossen durch die Polarebene der Spitze des Kegels zu ersetzen.

Es ist jedoch zu beachten, dass ein Kegel im vollständigen Raum zwei Spitzen hat, welche entgegengesetzte Punkte sind. Um den Theil des Kegels zu erhalten, welcher einem Scheiteltheil des Kegels im *Euclid*'schen Gebiet entspricht, muss man den Kegel auf eine Spitze und die Polarebene derselben beschränken; man erhält auf diese Art die Hälfte des vollständigen Kegels.

Die in dem *Euclid*'schen Gebiet für den Kegel gegebenen Sätze bleiben bestehen; nur muss man bei der Fassung einiger Sätze (z. B. I u. III) und in den Beweisen die Ebene im Unendlichgrossen mit der Polarebene der Spitzen vertauschen und berücksichtigen, dass zwei Grade, welche sich in einem Punkt schneiden, sich auch in dem entgegengesetzten Punkt schneiden und dass auf diese Art eine Grade und eine Ebene immer zwei entgegengesetzte Punkte gemeinschaftlich haben. Daher ist Zus. VI, Satz IV dahin abzuändern, dass eine Grade *vier* zu je zweien entgegengesetzte Punkte mit dem Kegel gemeinschaftlich haben kann, welche mithin zu je zweien auf entgegengesetzten Seiten einer beliebigen Ebene und daher auch der Polarebene der Spitzen liegen.

Bem. II. In dem vollständigen Raum wird der Cylinder des *Euclid*'schen Gebiets zu einem Kegel, dessen Erzeugungsgraden mit der Axe des Kegels einen unendlichkleinen Winkel bilden.

Def. I. Alle Kreislinien von gleichem Radius, deren Centren in einer Graden und in Ebenen liegen, die auf dieser Graden senkrecht stehen, bilden eine Figur, welche *Cylindermantel* heisst, während der durch die Kreise bestimmte Theil des Raums *Cylinder* genannt wird. Die Grade heisst *die Axe* des Cylinders.

Bem. III. Dies ist in gewisser Art die dem Cylinder des *Euclid*'schen Gebiets entsprechende Figur, weil auch der Cylinder in dem letzteren Gebiet auf diese Weise erzeugt werden kann (Bem. I, § 104).[1]

Satz I. Der Cylinder hat auch die Pollinie zur Axe. Die Radien der Peripherien um die beiden Axen des Cylinders sind complementär.

Denn a sei die Axe des Cylinders (Def. I). Die Ebenen der Peripherien des Cylinders gehen durch die Pollinie a', welche in diesen Ebenen die Pollinie der Centren ist. P sei ein Punkt der Graden a', P_1 sein entgegengesetzter Punkt. In einer beliebigen durch die Grade a' gehenden Ebene σ, welche a in zwei entgegengesetzten Punkten A und A_1 schneidet, gibt es zwei Kreise

1) Dieser Cylinder wurde von *Clifford* gefunden (Math. Papers, London, 1882). Wir beweisen hier, da wir ihn im zweiten Theil nöthig haben, die Haupteigenschaften auf rein geometrischem und elementarem Weg. Die Graden gleichen Abstands werden von *Clifford* parallele Grade genannt. Wir haben diese Definition nicht adoptirt, um keine Verwechslung mit unsrem Merkmal des Parallelismus namentlich bei dem Uebergang von dem *Riemann*'schen zu dem *Euclid*'schen System in dem Raum von vier Dimensionen zu verursachen.

vom gegebenen Radius r und mit den Mittelpunkten A und A_1. Wir verbinden a mit P; in der Ebene aP ist der Punkt P der Pol der Graden a und die Ebene σ schneidet aP in der Graden AP und mithin die beiden Kreise in vier Punkten, welche gleichweit von P und P_1 entfernt sind. Die Punkte näher an P befinden sich in einem Abstand, welcher dem Complement des gegebenen Radius gleich ist (Def. V, § 29), und die beiden andern in demselben Abstand von P_1. Lässt man die durch a' gehende Ebene variiren, so sieht man, dass es in der Ebene Pa zwei Peripherien des Cylinders gibt, deren Radius complementär zu dem Radius der Kreislinie bezüglich der Axe a ist und deren Mittelpunkte P und P_1 sind.

Def. II. Die Radien der Kreise, deren Mittelpunkte in den beiden Axen liegen, heissen *die Radien des Cylinders* bezüglich der beiden Axen.

Satz II. Der Cylinder wird durch jede Ebene, die durch eine seiner Axen geht, in zwei bezüglich dieser Ebene symmetrische Theile zerlegt.

Jede Ebene α, die durch eine der Axen z. B. a' geht, steht auf der andern. Axe a senkrecht (Satz III, § 100). Bezeichnet man mit A und A' die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit a, so sind in dieser Ebene zwei Kreise des Cylinders von den Centren A und A' und gleichem Radius enthalten. Denken wir uns zwei durch a' gehende Ebenen β, β_1, welche gleiche Winkel mit der Ebene α machen. Sie schneiden die Grade a in Punkten B und B_1, welche gleichweit von α abstehen (Zus. Satz I, § 112). X sei ein Punkt des Cylinderkreises in der Ebene α vom Centrum B und Radius r. Man fälle von X das Loth b auf die Ebene β, welches durch die in a liegenden Pole der Ebene α gehen muss. Y sei der Fusspunkt des kleineren normalen Segments von X nach α und X_1 sein Durchschnittspunkt mit der Ebene β_1, so dass (XX_1) den Punkt Y enthält. Die Ebene ab steht senkrecht auf der Graden a' und schneidet sie in zwei Punkten Z, Z'. Die Winkel YZX, YZX_1 messen die Keilwinkel $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta_1)$ (Satz III, § 112); die Dreiecke ZXY, ZX_1Y sind mithin gleich, weil sie die Seite ZY gemeinschaftlich haben, $\widehat{XZY} \equiv \widehat{X_1ZY}$ und die Winkel bei Y rechte sind (Bem. I, § 74).

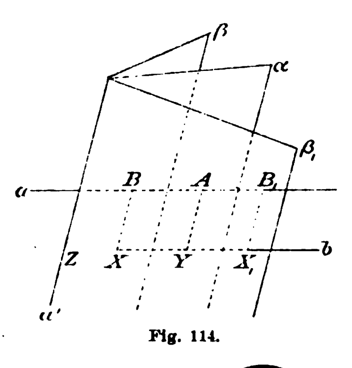


Fig. 114.

Folglich ist

$$(XY) \quad (X_1Y).$$

Das heisst, der Punkt X_1 ist bezüglich der Ebene α symmetrisch zu X.

Es bleibt zu beweisen, dass X_1 auch ein Punkt des Cylinderkreises vom Centrum B_1 in der Ebene β_1 ist. In der That sind die rechtwinkligen Dreiecke AXY, AX_1Y gleich, weil sie zwei Katheten gleich haben; mithin ist $(AX) = (AX_1)$.

Die Winkel BAY, B_1AY sind rechte, weil die Grade a senkrecht auf der Ebene α und mithin auf jeder durch den Punkt A in der Ebene gehenden Graden steht (Zus. Satz II, § 110). Da in demselben Strahlenbüschel

$\widehat{XAY} = \widehat{X_1AY}$ ist, so folgt $\widehat{BAX} = \widehat{B_1AX_1}$. Die beiden Dreiecke BAX, B_1AX_1 sind gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; es ist daher

$$(BX) = (B_1X_1). \qquad \text{(Fig. 114)}$$

Satz III. Durch jeden Punkt des Cylinders gehen zwei auf dem Cylinder liegende Grade.

Es sind dies die beiden Graden gleichen Abstandes von einer oder der andern Axe des Cylinders, welche durch den gegebenen Punkt gehen (Satz IV und Def. II, § 114 und Satz I).

Satz IV. Eine Grade kann nicht mehr als zwei Punkte (und die beiden entgegengesetzten Punkte) mit dem Cylinder gemein haben ohne auf ihm zu liegen.

b sei die Grade und sie habe drei nicht entgegengesetzte Punkte A, B, C mit dem Cylinder gemeinschaftlich. Von A, B, C ziehe man die normalen Segmente zur Axe a, welche dem Cylinderradius bezüglich a gleich sind. Die Grade b wäre mithin eine Grade gleichen Abstandes von a (Satz VI, § 114) und in dem durch den Cylinderradius gegebenen Abstand, d. h., die Grade b läge auf dem Cylinder.

Zus. Die Graden des Cylinders können sich nicht alle zu je zweien schneiden und nicht alle Graden einer Ebene können dem Cylinder angehören.

Denn in dem ersten Fall würden die Graden des Cylinders entweder durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen, was nicht möglich ist. Ebenso ist auch der zweite Fall ausgeschlossen.

Satz V. Jede Ebene, welche durch eine Grade des Cylinders geht, schneidet den Cylinder in einer zweiten Graden und hat keine andern Punkte ausserhalb der beiden Graden mit dem Cylinder gemeinschaftlich.

g sei die Grade des Cylinders und π eine durch g gehende Ebene. g kann nicht von allen Graden des Cylinders geschnitten werden, weil sonst die durch einen Punkt ausserhalb g gehenden Graden des Cylinders mit g in einer Ebene lägen und alle Graden dieser Ebene auf dem Cylinder liegen würden (Satz IV), was widersinnig ist (Zus. Satz III). B und C seien also die Durchschnittspunkte von π mit zwei andern Graden des Cylinders, welche die Grade g nicht treffen. Die Grade BC schneidet die Grade g in einem Punkt D und da mithin die Grade BC drei Punkte mit dem Mantel gemeinschaftlich hat, so liegt sie vollständig in ihm (Satz IV).

Wenn die Ebene ausserhalb der beiden Graden BC und g einen andern Punkt E mit dem Cylindermantel gemeinschaftlich hätte, so würde jede durch E gehende Grade, welche die beiden Graden BC und g in zwei Punkten schneidet, auf dem Cylinder liegen; d. h. jede Grade der Ebene würde dem Cylinder angehören und die Ebene wäre ein Theil des Cylinders, was widersinnig ist (Zus. Satz III).

Satz VI. Auf dem Cylinder gibt es zwei Systeme von Graden; diejenigen desselben Systems schneiden sich nicht, während eine Grade eines beliebigen von ihnen die Graden des andern Systems schneidet.

Denn g und l seien die Graden, welche durch einen Punkt P des Cylinders gehen. Die Ebene, welche durch die Grade g und einen andern beliebigen Punkt P_1 des Cylinders geht, schneidet den Cylinder in einer andern Graden l_1, welche die Grade g trifft. Die Grade l_1 aber kann die Grade l nicht schneiden; denn sonst würden die Graden g, l, l_1 in einer Ebene liegen, was unmöglich ist (Satz V).

Verfährt man so mit jedem Punkt P der Oberfläche, so erhält man alle Graden l eines Systems. Die Ebenen, welche durch die Graden l gehen, liefern dagegen die Graden des andern Systems.

Satz VII. Eine Grade, welche den Cylinder in einem Punkt (oder seinem entgegengesetzten) schneidet, trifft ihn in einem zweiten Punkt (und seinem entgegengesetzten), welcher mit dem ersten zusammenfallen kann.

b sei die gegebene Grade, A der gegebene Punkt und g eine durch A gehende Grade des Cylinders. Die Ebene bg schneidet die Oberfläche in einer weiteren Graden l, welche b in einem Paar entgegengesetzter Punkte B, B', die dem Cylinder angehören, trifft. Wenn B mit A zusammenfällt, so bedeutet dies, dass die Grade b nicht nur in der Ebene gl liegt, sondern auch durch ihre Durchschnittspunkte geht.

Def. III. Eine Grade, welche den Cylinder in nur zwei entgegengesetzten Punkten trifft, heisst *die Tangente* in diesen Punkten an den Cylinder.

Satz VIII. Eine Tangente an den Cylinder hat von jeder der Axen einen dem Cylinderradius bezüglich der betrachteten Axe gleichen Abstand.

Denn fällt man von B das Loth auf die Axe a, so steht dieses senkrecht auf den beiden Graden g und l, weil g und l mit a Grade gleichen Abstandes sind (Def. II, § 114 und Satz III); mithin ist das von B auf die Axe a gefällte Loth auch senkrecht auf der Ebene gl und daher auch auf der Graden b, welche durch B geht (Zus. Satz II, § 110).

Satz IX. Alle Tangenten in einem Punkt an den Cylinder liegen in einer Ebene, welche die beiden durch den gegebenen Punkt gehenden Graden des Cylinders enthält und auf dem von dem Punkt auf die eine und die andre Axe gefällten Loth senkrecht steht.

Denn g und l seien die durch den Punkt A gehenden Graden. Auf jeder Graden, die in A berührt, steht das von A auf die Axe a des Cylinders gefällte Loth p senkrecht. Nun liegen die in A auf der Graden p errichteten Lothe in einer Ebene (Satz IV, § 110; Def. V, Zus. II, Satz IV, § 108; Satz VIII, § 110), welche auch die beiden Graden g und l enthält.

Def. IV. Die Ebene, welche alle in einem Punkt an den Cylinder gezogenen Tangenten enthält, heisst *Berührungsebene* in diesem Punkt und seinem entgegengesetzten Punkt.

Satz X. Zwei sich kreuzende Grade a und b, welche nicht Grade gleichen Abstandes sind, haben zwei ungleiche gemeinschaftliche normale Segmente.

Denn man wähle einen Punkt B von b und A sei der Fusspunkt des von B auf a gefällten Lothes. Construirt man den Cylinder mit der Axe a und dem Radius (AB), so schneidet die Grade b den Cylinder in einem zweiten

Punkt B' (und seinem entgegengesetzten Punkt). Der Fusspunkt des von B' auf a gefällten Lothes sei A' (Fig. 110 S. 489).

Es ist $(AB) \equiv (A'B')$ und überdies $\widehat{ABB'} \equiv \widehat{A'B'B}$ (Satz VI, § 17). Die Grade, welche die Mittelpunkte der Segmente (BB'), (AA') verbindet, ist das a und b gemeinschaftliche Loth (Satz VI, § 17). Das andre Loth ist die Pollinie (Zus. I, Satz VIII, § 110).

Bem. IV. Zwei Grade im vollständigen Raum haben mithin entweder zwei gemeinschaftliche und ungleiche oder unendlich viele gleiche normale Segmente und sind Grade gleichen Abstandes oder sie haben unendlich viele einem rechten gleiche normale Segmente und sind alsdann Pollinien.

Wenn der Radius des Cylinders einem rechten Segment gleich ist, so reducirt sich der Cylinder auf die Pollinie der bezüglichen Axe.

Satz XI. Zwei Paare von Graden, welche denselben Abstand haben, sind identisch.

Denn wenn (ab), $(a_1 b_1)$ zwei Gradenpaare sind und (AB), $(A'B')$; $(A_1 B_1)$, $A_1' B_1')$ die normalen Segmente derselben, so ist $(AB) \equiv (A'B')$ gegeben. Da

$$(AA') \equiv (BB') \equiv (A_1 A_1') \equiv (B_1 B_1') \equiv \frac{\pi}{2},$$

so sind die Dreiecke ABB', $A_1 B_1 B_1'$ gleich und mithin auch ihre Seiten (AB'), $(A_1 B_1')$. Ebenso sind (BA') und $(B_1 A_1')$ gleich.

Die rechtwinkligen Dreiecke $AB'A'$, $A_1 B_1' A_1'$ sind gleich, weil sie eine Kathete und die Hypotenuse gleich haben; mithin ist $(A'B') \equiv (A_1' B_1')$. Die beiden Figuren $ABB_1 A_1$, $A_1 B_1 B_1' A_1'$ sind daher identisch (Satz VII, § 17 oder Bem. II, § 116).

§ 118. *Bem. I.* Für die Kugeloberfläche und Kugel gelten dieselben Definitionen, die in dem *Euclid*'schen Raum gegeben wurden (§ 101); nur ist zu beachten, dass eine Kugeloberfläche vom Centrum C noch ein zweites Centrum hat, nämlich den entgegengesetzten Punkt und mithin auch einen zweiten Radius, welcher supplementär zum ersten ist und dass sie daher zwei Kugeln begrenzt. Die Kugeloberfläche, welche ein rechtes Segment zum Radius hat, ist daher die Polarebene des Centrums; mithin liegt jede Kugeloberfläche, die keine Ebene ist, ganz auf der einen Seite der Polarebene ihrer Centren und selbstverständlich auf der Seite, auf welcher sich der Radius befindet, der kleiner als ein rechter ist.

Wie bei den Kreislinien in der vollständigen Ebene, können wir, wenn nicht anders bestimmt wird, annehmen, eine Kugeloberfläche habe nur ein Centrum und einen Radius, welcher kleiner als ein rechtes Segment ist, und sie bestimme daher nur eine Kugel.

Bem. II. Für die Kugeln gelten in dem vollständigen Raum dieselben Sätze mit denselben Beweisen, wie sie in § 101 für die Kugeln des *Euclid*'schen Gebiets gegeben wurden.

Satz I. Alle Punkte der Kugel stehen gleichweit von der Polarebene des Centrums der Kugel ab.

Denn alle Radien der Kugel stehen senkrecht auf der Polarebene des Centrums (Zus. I, Satz III, § 110) und sind, wenn man sie so weit verlängert, dass sie diese Ebene treffen, rechte Segmente. Mithin steht jeder Punkt der Kugel von der Polarebene des Centrums um ein Segment ab, welches complementär zum Radius ist.

Bem. III. Ist eine Kugel mit dem Centrum C und dem Radius r gegeben, so bestimmt sie eine andre Kugel von demselben Radius und mit dem Centrum in dem zu C

entgegengesetzten Punkt C'; diese Kugel enthält die den Punkten der ersten Kugel entgegengesetzten Punkte.

Eine Grade, welche die erste Kugel in einem Punkt schneidet, trifft die zweite in dem entgegengesetzten Punkt; eine Tangente in einem Punkt an die erste ist Tangente an die zweite in dem entgegengesetzten Punkt; eine Berührungsebene an die erste Kugel berührt mithin auch die zweite. Die beiden entgegengesetzten Kugeln liegen auf entgegengesetzten Seiten einer ihrer Berührungsebenen, weil ihre Centren auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen (Zus. I, Satz IV, § 109; Satz V, § 101 und Bem. II).

Bem. IV. Die Sätze I, II, III des § 96 gelten mit denselben Beweisen.

12.

Stetige Systeme identischer Figuren und thatsächliche Bewegung im vollständigen Raum. — Räume von drei Dimensionen, welche absolute Grenzräume eines Punktes sind.

§ 119. *Bem.* Es gelten dieselben Definitionen der stetigen Systeme und dieselben Sätze, wie sie für die Kreissysteme unveränderlicher Figuren in dem *Euclid*'schen Gebiet gegeben wurden (§§ 103, 105); ausgenommen ist das Parallelsystem (§ 104).

Nur beachte man, dass bei den Beweisen der Ebene im Unendlichgrossen bezüglich eines Punktes die Polarebene des Punktes zu substituiren ist.

Es gelten auch im vollständigen Raum die Eigenschaften der thatsächlichen Bewegung der Figuren, die im *Euclid*'schen Gebiet gegeben sind (§§ 106, 107) mit Ausnahme der Translationsbewegung, welche in dem vollständigen Gebiet einer unendlich kleinen Rotation gleich kommt.

Satz I. Vier Punkte des absoluten Grenzgebiets eines Punktes A bestimmen einen ganz in demselben Gebiet gelegenen Raum.

Sind vier Punkte X_x, Y_x, Z_x, W_x des absoluten Grenzgebiets eines Punktes A gegeben, so liegen die durch sie bestimmten Graden und Ebenen in diesem Gebiet (Satz I, § 32; Satz I, § 78) und da alle Graden des Raums $X_x Y_x Z_x W_x$ diese Ebenen schneiden, so folgt, dass jede derselben absolute Grenzgrade des Punktes A ist und mithin jeder Punkt des genannten Raums in dem absoluten Grenzgebiet von A liegt.

13.

Praktisches Axiom III.

§ 120. *Bem.* Obgleich wir unsre bisherigen Erörterungen mit der räumlichen Anschauung begleitet haben, welche wohl für die Geometrie aber nicht für die logische Entwicklung der Geometrie unentbehrlich ist (Def. II, § 2 und Vorr.), so hatten wir doch bis jetzt noch nicht nöthig zu erklären, welche Figur dem Anschauungsraum entspricht, von welchem wir ausgegangen sind (Emp. Bem. I, S. 225), um unsre Axiome aufzustellen. Wir können jetzt sagen:

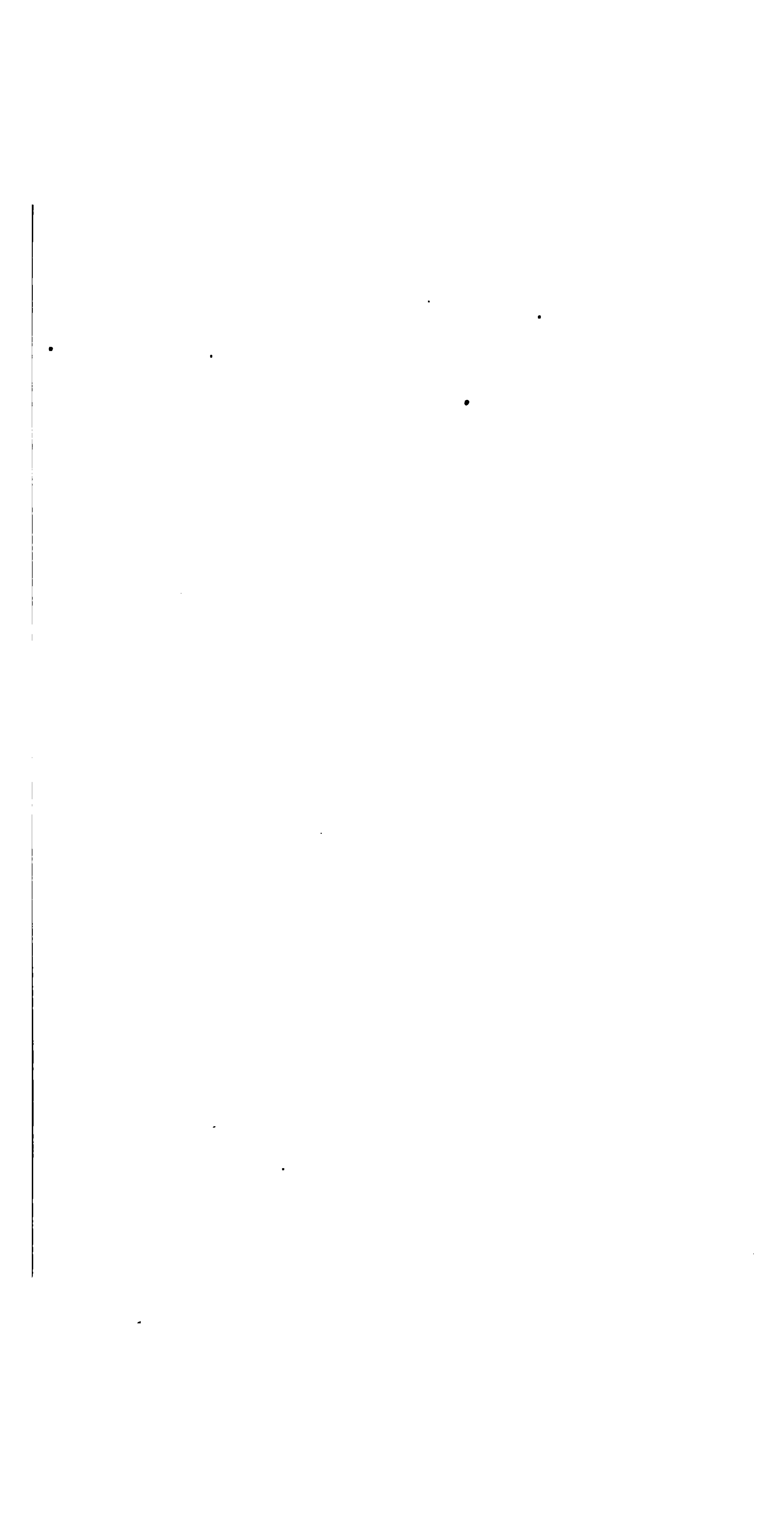
Prakt. Ax. III. **Der Anschauungsraum ist eine Figur von drei Dimensionen bezüglich seiner Punkte.**

Beschränkt man sich gemäss dem prakt. Ax. I (§ 28), welches unter andrer Form das Axiom der Anm. XVI ist, auf die Anschauungsgrössen, so erhält man den

Satz. In dem Anschauungsraum gelten die Eigenschaften des Euclid'schen Raums von drei Dimensionen.

Zweiter Theil.

Der Raum von vier und von n Dimensionen in dem allgemeinen Raum.



Buch I.

Der Raum von vier Dimensionen.

I. Kapitel.

Der Euclid'sche Raum von vier Dimensionen.

1.

Construction des Sterns zweiter Art und des Raums von vier Dimensionen. — Ihre ersten Eigenschaften.

§ 121. *Def. I.* Es sei ein Raum von drei Dimensionen S_3 und ein Punkt S_0 gegeben, welcher ausserhalb desselben liegt oder mit andern Worten nicht zu S_3 gehört (Bem. II, § 2). Verbindet man alle Punkte des Raums S_3 mit dem Punkt S_0, so bestimmen die so erhaltenen Graden als Elemente betrachtet eine Figur (Def. I, § 2), welche wir *Stern zweiter Art* nennen. S_0 heisst sein *Centrum*, S_3 *der erzeugende Raum*.

Wir bezeichnen diesen Stern mit dem Symbol $(S_0 S_3)$.

Dasselbe gilt, wenn man statt der Graden den durch den Punkt S_0 begrenzten Strahl als Element betrachtet (Fig. 115).[1])

Fig. 115.

Bem. I. Aus dieser Definition geht hervor, dass jede Grade des Sterns, jede Ebene und jeder Raum von drei Dimensionen den Erzeugungsraum bezüglich in einem Punkt, einer Graden und einer Ebene treffen.

Beip. Wir geben das folgende Beispiel nur zum Zweck der Aufklärung und um, sagen wir, unsre Construction in Def. I anschaulicher zu machen, nicht aber als Beleg für die

1) Man könnte mittelst eines Postulats den Satz aufstellen, dass ausserhalb S_3 ein Punkt existirt und darunter verstehen, dass es nicht nur möglich ist, sich einen Punkt ausserhalb S_3 vorzustellen (wie in § 37 der Einleitung gezeigt wurde), sondern dass man diesen Punkt auch den vorhergehenden Postulaten unterwerfen kann. Da man aber in dem gewöhnlichen Raum mittelst passender Definitionen Mannigfaltigkeiten von Punkten wie auch andre geometrische Mannigfaltigkeiten mit andern Grundelementen construiren kann, für welche die in unsern früheren Postulaten aufgestellten Sätze gelten, so ist offenbar in diesem Fall kein Postulat nothwendig, um den Satz auszudrücken: Es gibt einen Punkt ausserhalb S_3.

Wir geben desshalb diesem Satz nicht den Namen Postulat; dieser Name ist durchaus unnöthig.

materielle Existenz der vierten Dimension oder unsres allgemeinen Raums — wir haben nie daran gedacht, diese Existenz auch nur zu discutiren — ebensowenig als Beleg für die Gültigkeit der Def. I oder der Def. des allgemeinen Raums (Def. II, § 2), welche sich auf das Princip a, § 37 der Einleitung und auf die Betrachtungen der Bem. II, § 2 wie Def. I, § 82 stützt.

Denken wir uns, in der Ebene existire ein vernünftiges Wesen von zwei Dimensionen, dessen Welt nur die Ebene ist und welches mit seiner Erfahrung nur die Existenz *des* Theils der Ebene beweisen kann, auf den sich seine Beobachtungen erstrecken. Um uns dieses hypothetische Wesen besser vorstellen zu können, denken wir uns unsern Schatten auf einer Ebene: Jeder unsrer Bewegungen entspricht eine Bewegung desselben und wenn wir von unsrer Person abstrahiren, so haben wir den Eindruck, als ob dieser Schatten ein Wesen sei, das Leben habe und sich in der Ebene bewege.

Setzen wir ferner voraus, für diesen Schatten hätten die gewöhnlichen Begriffe, die wir in Kap. I der Einleitung entwickelt haben, ihre Gültigkeit und begaben wir ihn überdies mit Sinnen, mit welchen er jedoch nur einen Theil der Ebene, in der er sich befindet, beobachten kann. [1])

Dieses so gegebene Wesen kann durch die Erfahrung nicht beweisen, dass eine Grade einen Punkt mit seiner Ebene gemeinschaftlich haben kann, ohne vollständig in ihr zu liegen: es sieht, dass man in einem Punkt einer Graden seiner Ebene nur *ein* Loth auf die Grade errichten kann, welches in der Ebene liegt; dagegen kann es aber nicht auf Grund seiner Beobachtungen beweisen, dass man in unsrem Raum unendlich viele solche Lothe errichten kann und dass diese in einer auf der Graden senkrechten Ebene liegen u. s. w.

Es kann aber durch Vernunftschlüsse seine Ebene erzeugen und da für diese Ebene das Princip a, § 37 der Einleitung gilt, so kann es ganz ebenso wie wir es thun auf Grund der Analogie mit Hülfe seiner Vernunft sich denken, es existire ein Punkt ausserhalb der Ebene. *Ist dieser Satz angenommen,* so unterwirft das geschilderte Wesen alle Punkte den von uns gegebenen Axiomen, welche auch für es Geltung haben, und gelangt so zu unsrer Construction des Raums von drei Dimensionen. Für es wäre die Geometrie zu drei Dimensionen rein ideell, aber mathematisch wahr. Dieses Wesen könnte die Eigenschaften der Figuren unsres Raums benutzen, um Eigenschaften der Figuren seiner Ebene zu beweisen, die direct mit den Elementen der Ebene behandelt weniger leicht nachgewiesen werden können, ganz ebenso wie auch wir es oft thun. Aber auch abgesehen davon würde die Geometrie von drei Dimensionen für dieses Wesen logisch dieselbe Existenzberechtigung haben wie die Geometrie seiner Ebene.

Wir wollen uns nun an die Stelle dieses Wesens bezüglich der unsren Beobachtungen zugänglichen Umgebung versetzen. Wir können, ohne unlogisch zu sein, annehmen, dass es ausserhalb unsres Raumes einen weiteren Punkt gibt; diese Hypothese allein führt aber noch nicht zu dem Raum von vier Dimensionen; erst wenn man diesen Punkt den früher aufgestellten Axiomen unterwirft, erhält man die ideelle Existenz des Raums von vier Dimensionen (Def. II), in welchem der gewöhnliche Raum enthalten ist ebenso, wie die Ebene des obigen Wesens in dem gewöhnlichen Raum.

Satz I. Zwei Grade (oder zwei Strahlen) eines Sterns zweiter Art bestimmen ein dem Stern angehöriges Büschel. Drei einem Büschel nicht angehörige Strahlen bestimmen einen dem gegebenen Stern angehörigen Stern erster Art.

Denn die beiden Punkte, in welchen die zwei gegebenen Graden den Raum S_3 treffen (Bem. I), bestimmen eine in S_3 liegende Grade r (Satz II, § 82), deren Punkte mit S_0 verbunden das Büschel des durch die beiden Graden bestimmten Sterns ergeben. Da jede Grade des Büschels durch den Punkt S_0 und einen

---

1) *Beltrami* bezieht sich in einer kurzen Anmerkung auf S. 28 seiner Abhandlung: „Saggio d'interpretazione della geometria non Euclidea“ auf ein Wesen, dessen Beobachtungen das Gebiet von zwei (wie die unsrigen das Gebiet von drei) Dimensionen nicht überschreiten. Dieser hypothetischen Wesen hat sich dann auch *Helmholtz* in seinen: „Populären Vorlesungen“ bedient jedoch zu anderen Zwecken, als den unsrigen (siehe Anhang).

Punkt der Graden r bestimmt ist — sind sie parallel, so schneiden sie sich im Unendlichgrossen —, so ist damit der erste Theil des Satzes bewiesen (Fig. 115, S. 507).

Analog bestimmen die drei Durchschnittspunkte der drei gegebenen Strahlen mit S_3 eine vollständig in S_3 liegende Ebene (Satz III, § 82), deren Punkte mit S_0 verbunden einen Stern erster Art geben (Def. I, § 82), welcher dem Stern $(S_0 S_3)$ angehört. Da jede Grade des Sterns erster Art die erzeugende Ebene trifft (Bem. I, § 82), so gehören diese Graden dem Raum S_3 an. Damit ist auch der zweite Theil des Satzes bewiesen.

Bem. II. Von jetzt an benutzen wir auch die in § 110 der Einleitung gegebenen Definitionen der Formen von mehreren Dimensionen.

Aus ihnen folgt sofort, dass der Stern zweiter Art bezüglich seiner Graden oder Strahlen drei Dimensionen hat, weil der erzeugende Raum soviele Dimensionen besitzt.

Def. II. Wenn man in dem Stern zweiter Art den Punkt als Element betrachtet, so hat die sich ergebende Figur bezüglich des Punktes als Element vier Dimensionen und heisst *der Raum von vier Dimensionen.*

Wir bezeichnen ihn mit einem Buchstaben und dem Index 4, z. B. S_4.

Def. III. Jede Ebene von S_3 und der Punkt S_0 individualisiren einen Raum von drei Dimensionen (Def. IV, § 82). Der grösseren Klarheit wegen sagen wir, die Ebene mit dem Punkt S_0 ausserhalb derselben *verbunden* bestimme einen Raum von drei Dimensionen, welcher durch den Punkt und die Ebene *gehe.*

Bem. III. Die ersten Elemente des Raums von vier Dimensionen sind mithin der Punkt, die Grade, die Ebene und der Raum von drei Dimensionen, welche wir die Grundelemente nennen und bezüglich durch Buchstaben mit einem Index, der die Anzahl der Dimensionen bezüglich ihrer Punkte angibt, bezeichnen, z. B. bezügl. mit S_0, S_1, S_2, S_3.

Sprechen wir nur von Raum, so meinen wir den Raum von drei Dimensionen.

Satz II. Eine Grade, welche zwei Punkte mit dem Raum von vier Dimensionen gemeinschaftlich hat, liegt vollständig in diesem Raum.

Sind A_0, B_0 die Punkte, welche die Grade mit dem Raum S_4 gemeinschaftlich hat (Fig. 115, S. 507), so sind die Graden $S_0 A_0$, $S_0 B_0$ in S_4 enthalten und schneiden den Erzeugungsraum S_3 in zwei Punkten A_0', B_0', deren Verbindungsgrade in S_3 liegt (Bem. I; Satz II, § 82). Die Ebene $S_0 A_0' B_0'$ liegt aber in dem Raum S_4, während die Grade $A_0 B_0$ sich in der Ebene $S_0 A_0' B_0'$ befindet (Bem. I und Satz IV, § 46). Damit ist der Satz bewiesen.

Satz III. Eine Ebene, welche drei unabhängige Punkte mit dem Raum von vier Dimensionen gemeinschaftlich hat, liegt ganz in diesem Raum.

Denn A_0, B_0, C_0 seien die drei Punkte (Fig. 115, S. 507). Nach dem vorhergehenden Satz gehören die Graden $A_0 B_0$, $A_0 C_0$, $B_0 C_0$ dem Raum S_4 an. Eine beliebige Grade der Ebene schneidet die beiden Graden $A_0 B_0$, $B_0 C_0$ in zwei Punkten, welche in S_4 liegen. Mithin gehören alle Graden der gegebenen Ebene (Satz II) und folglich auch die Ebene selbst dem Raum S_4 an (Def. I, § 2 oder Einl. Def. IV, § 13).

Satz IV. Wenn ein Raum vier nicht in einer Ebene liegende Punkte mit dem Raum S_4 gemeinschaftlich hat, so liegt er vollständig in demselben.

Denn wenn A_0, B_0, C_0, D_0 die vier unabhängigen Punkte sind (Def. I, § 15), welche ein Raum S_3 mit dem Raum S_4 gemeinschaftlich hat, so liegen die durch die vier Punkte bestimmten Graden und Ebenen in S_4 (Satz II und III); mithin gehört jede Grade von S_3, da sie alle Ebenen des Tetraeders $A_0B_0C_0D_0$ schneidet (Satz I, § 83), dem Raum S_4 vollständig an (Satz II). Damit ist der Satz bewiesen (Fig. 115, S. 507).

Satz V. Der Raum von vier Dimensionen (S_0S_3) *kann durch einen beliebigen Raum* S_3' *und einen Punkt* S_0' *des ersten Raums erzeugt werden, wenn nur der Punkt ausserhalb* S_3' *liegt.*

Die Räume (S_0S_3), $(S_0'S_3)$ fallen zusammen, weil jede Grade, welche einen Punkt von S_3 mit S_0' verbindet, in dem Raum (S_0S_3) liegt (Satz II) und mithin jeder Punkt von $(S_0'S_3)$ ein Punkt des Raums (S_0S_3) ist. Umgekehrt ist S_0 ein Punkt des Raums $(S_0'S_3)$, weil S_0' ein Punkt des Raumes (S_0S_3) ist und die Grade S_0S_0' daher den Raum S_3 in einem Punkt P_0 schneidet (Bem. I). Ist ein beliebiger Punkt R_0 von (S_0S_3) gegeben, so schneidet die Grade S_0R_0 den Raum S_3 in einem Punkt R_0', welcher auch im Unendlichgrossen liegen kann (Bem. I).

Die Grade $S_0'R_0$ in der Ebene $S_0S_0'R_0'$ schneidet die Grade P_0R_0 in einem Punkt (Zus. II, Satz III, § 46); mithin ist R_0 ein Punkt des Raums $(S_0'S_3)$ d. h. jeder Punkt von S_0S_3 gehört dem Raum $(S_0'S_3)$ an.

Dasselbe gilt für die Räume (S_0S_3), (S_0S_3'). Denn wenn A_0, B_0, C_0, D_0 vier nicht in einer Ebene von S_3' gelegene Punkte sind, so schneiden die vier Graden S_0A_0, S_0B_0, S_0C_0, S_0D_0 den Raum S_3 in vier Punkten A_0', B_0', C_0', D_0', weil A_0, B_0, C_0, D_0 in (S_0S_3) liegen (Bem. I); mithin ist der Raum S_3 in dem Raum (S_0S_3') enthalten (Satz IV) und jede Grade, welche S_0 mit einem Punkt von S_3 verbindet, liegt vollständig in dem Raum (S_0S_3') (Satz II). Es folgt dann weiter, dass auch die Räume (S_0S_3'), $(S_0'S_3')$ und folglich auch (S_0S_3), $(S_0'S_3')$ zusammenfallen.

Zus. Fünf unabhängige Punkte bestimmen einen einzigen Raum von vier Dimensionen und dieser Raum wird durch fünf beliebige seiner unabhängigen Punkte bestimmt. [1])

2.

Schnitte von Graden, Ebenen und Räumen von drei Dimensionen. — Büschel von Räumen.

§ 122. *Satz I. Eine Grade und eine Ebene des Raums* S_4 *schneiden sich nicht und wenn sie sich schneiden, so liegen sie in einem Raum von drei Dimensionen.*

1) Wie man sieht, sind die Beweise dieser ersten Eigenschaften den in § 82 für den Raum von drei Dimensionen gegebenen Beweisen analog; ebenso verhält es sich mit vielen anderen Eigenschaften, die uns in der Folge beschäftigen werden und von welchen man einige, wie z. B. Satz II und V aus den Sätzen des Raums von drei Dimensionen erhält, wenn man mehrere Grundwesen miteinander vertauscht. Wir haben diese Beweise für den Anfang in voller Ausdehnung gegeben, um den Vergleich mit den früheren zu erleichtern und den rein geometrischen Charakter derselben mehr hervortreten zu lassen.

Denn man betrachte fünf nicht in einem Raum S_3 des Raums S_4 liegende Punkte A_0, B_0, C_0, D_0, E_0; die Grade, welche zwei von ihnen verbindet, schneidet die von den übrigen drei bestimmte Ebene nicht, weil sonst die fünf Punkte in einem Raum von drei Dimensionen liegen würden, welcher durch den gemeinschaftlichen Punkt, zwei Punkte der Ebene und einen andern Punkt der Graden bestimmt wird (Zus. Satz IV, Satz II, III, § 82).

Satz II. Eine Grade und ein Raum von drei Dimensionen des Raums S_4 schneiden sich in einem Punkt, wenn die Grade nicht in dem Raum liegt.

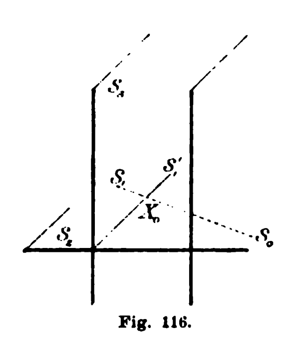


Fig. 116.

Denn S_3 und S_1 seien der Raum und die Grade (Fig. 116). Auf der Graden betrachten wir einen Punkt S_0, welcher nicht in dem Raum S_3 liegt; dieses ist immer möglich, weil die Grade nach der Voraussetzung ausserhalb des Raumes S_3 liegt (Einl. Def. VI, § 13). Der Raum S_4 kann durch den Punkt S_0 und den Raum S_3 erzeugt werden; alle Graden aber, die durch S_0 in S_4 gehen, erhält man durch Verbindung der Punkte von S_3 mit S_0 (Satz V, Bem. I, § 121); mithin schneidet die Grade S_1 den Raum S_3 in einem Punkt X_0.

Satz III. Eine Ebene S_2 und ein Raum von drei Dimensionen des Raums S_4 schneiden sich in einer Graden.

Dies lässt sich ähnlich wie der vorige Satz oder auch auf folgende Art beweisen (Fig. 116).

S_3 und S_2 seien der gegebene Raum und die gegebene Ebene. Jede Grade von S_2 schneidet S_3 in einem Punkt. Die S_2 und S_3 gemeinsame Figur hat mithin in S_2 mit jeder Graden von S_2 nur einen Punkt gemeinschaftlich und ist daher eine Grade (Satz VI, § 48).

Satz IV. Zwei Räume von drei Dimensionen des Raums S_4 schneiden sich in einer Ebene.

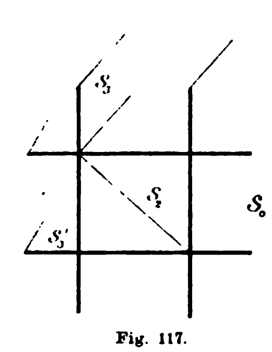


Fig. 117.

Dieser Satz wird wie die beiden vorigen bewiesen, indem man einen Punkt S_0 betrachtet, welcher in einem der beiden Räume, aber nicht in dem andern enthalten ist oder auch indem man beachtet, dass jede Grade des einen Raums den andern in einem einzigen Punkt schneidet; daraus folgt dann, dass die gemeinschaftliche Figur eine Ebene ist (Satz VII, § 84) (Fig. 117).

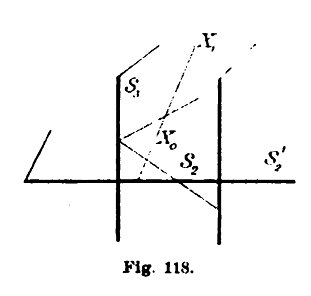
Satz V. Drei Räume von drei Dimensionen, welche keine Ebene gemeinschaftlich haben, schneiden sich in einer Graden und vier Räume in einem einzigen Punkt.

Denn sind S_3, S_3', S_3'' die drei Räume, so schneidet die zweien von ihnen gemeinschaftliche Ebene den dritten Raum in einer den drei Räumen gemeinschaftlichen Graden (Satz III).

Ebenso sieht man, dass vier Räume von drei Dimensionen sich im Allgemeinen in einem Punkt treffen (Satz II).

Bem. I. Drei Räume (Bem. III, § 121) können auch eine Ebene und vier Räume eine Ebene oder eine Grade gemeinschaftlich haben.

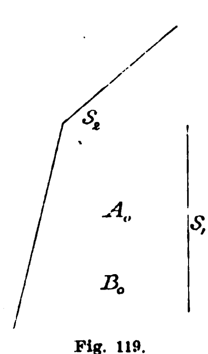
Satz VI. Zwei Ebenen des Raums S_4 schneiden sich in einem Punkt; schneiden sie sich in einer Graden, so liegen sie in einem Raum S_3.


Fig. 118.

Die beiden Ebenen S_2, S_2' seien gegeben (Fig. 118). Wir legen durch eine derselben z. B. S_2 einen Raum S_3. Die Ebene S_2' schneidet diesen Raum in einer Graden X_1, welche die Ebene S_2 in einem Punkt X_0 trifft, welcher den beiden Ebenen gemeinschaftlich ist (Satz I, § 83).

Haben dagegen die beiden Ebenen S_2, S_2' zwei Punkte und daher die sie verbindende Grade gemeinschaftlich (Satz IV, § 46), so liegen sie in dem Raum von drei Dimensionen, welcher durch die gemeinschaftliche Grade und zwei andre bezüglich auf den beiden Ebenen S_2, S_2' ausgewählte Punkte bestimmt wird (Satz III, § 82).

Satz VII. Alle Ebenen des Raumes S_4, welche durch eine Grade gehen, erhält man dadurch, dass man die Grade mit allen Punkten einer Ebene verbindet, die die Grade nicht trifft. Diese Ebenen bilden ein System von zwei Dimensionen und enthalten alle Punkte des Raums S_4.


Fig. 119.

S_1 und S_2 seien eine Grade und eine Ebene, welche sich nicht treffen (Fig. 119). Jeder Punkt A_0 von S_2 liefert eine und nur eine durch S_1 gehende Ebene. Denn lägen zwei Punkte A_0 und B_0 in derselben Ebene mit der Graden S_1, so würde die Grade S_1 die Ebene S_2 in dem Durchschnittspunkt von S_1 mit der Graden A_0B_0 treffen, was der Voraussetzung widerspricht. Verbindet man daher die Punkte von S_2 durch Ebenen mit der Graden S_1, so bilden diese ein Ebenensystem von zwei Dimen[illegible]en, da auch die Ebene bezügl. ihrer Punkte ein solches [illegible] ist (Def. II, § 46). Betrachtet man eine andre [illegible] S_2', so fällt das System von zwei Dimensionen, welches S_2' auf die a[illegible]ebene Art mit der Graden S_1 bestimmt, mit dem von S_2 bestimmten System zusammen, weil alle Ebenen, die S_2 in einem Punkt schneiden, auch S_2' in einem Punkt treffen und umgekehrt (Satz VI).

Def. I. Die Grade S_1 heisst *die Axe* des Systems.

Satz VIII. Alle Räume von drei Dimensionen des Raums S_4, welche durch eine Ebene gehen, erhält man dadurch, dass man die Ebene mit den Punkten einer sie nicht schneidenden Graden verbindet. Sie bilden ein System einer Dimension und enthalten alle Punkte des Raums S_4.

Jeder Punkt der Graden S_1 gibt mit S_2 verbunden einen durch S_2 gehenden Raum von drei Dimensionen und auch in diesem Fall können zwei Punkte von S_1 nicht denselben durch S_2 gehenden Raum von drei Dimensionen liefern,

weil sonst der Voraussetzung zuwider die Grade in diesem Raum liegen müsste (Fig. 119).

Das so erhaltene System durch die Ebene S_2 gehender Räume von drei Dimensionen hat nur eine Dimension, weil auch die Grade S_1 bezüglich ihrer Punkte im System einer Dimension ist.

Def. II. Dieses System heisst *Büschel von Räumen von drei Dimensionen* und die Ebene S_2 seine *Axe*.

Satz IX. Es gibt nur eine Grade, welche drei nicht in einem Raum S_3 liegende gegebene Grade S_1', S_1'', S_1''' schneidet.

Die drei Graden bestimmen zu je zweien drei Räume S_3', S_3'', S_3''', welche sich in der gemeinschaftlichen Transversalen schneiden. Denn der Raum S_1' S_1'' oder S_3''' schneidet die dritte Grade S_1''' in einem Punkt, welcher den drei Räumen gemeinschaftlich ist. Zieht man daher von diesem Punkt die Transversale zur Graden S_1', S_1'' in S_3'' (Satz V, § 83), so erhält man die verlangte Transversale, welche den drei Räumen S_3 gemeinschaftlich ist.

Satz X. Sind zwei nicht in einem Raum S_3 liegende Ebenen und ein Punkt ausserhalb derselben gegeben, so gibt es nur eine Ebene, welche durch den Punkt geht und jede der beiden Ebenen in einer Graden schneidet.

Man braucht nur den Punkt mit den beiden Ebenen durch zwei Räume von drei Dimensionen zu verbinden, welche sich in einer Ebene schneiden, die jede der beiden gegebenen Ebenen in einer Graden trifft (Satz III, § 83).

Satz XI. Sind drei unabhängige Ebenen und ein Punkt gegeben, so gibt es nur eine Grade, welche durch den Punkt geht und die drei Ebenen trifft.

Verbindet man den Punkt mit den drei Ebenen, so erhält man drei Räume von drei Dimensionen, welche die in dem Satz erwähnte Grade gemeinschaftlich haben (Satz V).

Satz XII. Sind vier Ebenen gegeben, so existiren unendlich viele Grade, welche die vier Ebenen schneiden, von denen nur eine durch einen Punkt einer jeden dieser Ebenen geht, wenn man die sechs Durchschnittspunkte der vier Ebenen ausnimmt. Die durch jeden dieser Punkte gehenden Graden liegen in einer Ebene.

Ist leicht mit Hülfe der Sätze XI und IV zu beweisen.

Bem. II. Wenn wir von einer Figur des Raums sprechen, so meinen wir, dass ihre Punkte dem Raum angehören ohne dass alle Punkte des Raums der gegebenen Figur angehören müssen.

Satz XIII. Wenn eine in dem Raum S_4 enthaltene Figur von jeder nicht in der Figur enthaltenen Graden dieses Raums in einem Punkt geschnitten wird, so ist diese Figur ein Raum von drei Dimensionen.

Denn zwei Punkte A_0B_0 der Figur bestimmen eine der Voraussetzung nach der Figur angehörige Grade. In einer Graden des Raums S_4, welche die Grade A_0B_0 nicht schneidet, muss sich ein zu der Figur gehörender Punkt C_0 befinden; mithin gehört eine durch C_0 gehende Grade, welche A_0B_0 trifft, ebenfalls derselben an und also auch die Ebene $A_0B_0C_0$. Wenn man eine andre Grade des Raums, welche diese Ebene nicht trifft, betrachtet, so muss diese

einen andern Punkt D_0 der Figur enthalten; also liegt auch der Raum von drei Dimensionen $A_0B_0C_0D_0$ in der Figur. Wir behaupten, dass es ausserhalb dieses Raumes keine weiteren Punkte der gegebenen Figur gibt. Gäbe es einen z. B. X_0, so würde er mit dem Raum $A_0B_0C_0D_0$ den Raum S_4 bestimmen (Satz V, § 121); die Figur wäre mithin der ganze Raum S_4, was gegen die Voraussetzung ist.

Zus. Wenn eine Figur des Raums S_4 mit allen Ebenen oder mit allen Räumen von drei Dimensionen desselben eine Grade oder eine Ebene gemeinschaftlich hat, so ist diese Figur ein Raum von drei Dimensionen.

Denn es geht daraus hervor, dass jede in der Figur nicht enthaltene Grade mit ihr nur einen Punkt gemein hat.

Satz XIV. Wenn eine aus Ebenen gebildete Figur derart ist, dass ihre Ebenen sich zu je zweien in einer Graden schneiden und wenn die Ebenen der Figur nicht durch denselben Punkt oder durch dieselbe Grade gehen, so ist die Figur ein Raum von drei Dimensionen oder liegt in einem dieser Räume.

Wird wie Satz VIII, § 85 bewiesen (Satz VI).

3.

Raum im Unendlichgrossen. — Parallele Graden, Ebenen und Räume des Raums S_4. — Ihre Construction mit Elementen des endlichen Gebiets.

§ 123. *Satz I. Das absolute Grenzgebiet des Raums S_4 um jeden seiner Punkte ist ein vollständiger Raum S_3, den man als absoluten Grenzraum eines beliebigen Punktes des bezüglich der Einheit dieses Gebiets endlichen Gebiets ansehen kann.*

Man kann in dem Raum S_4 vier Strahlen betrachten, welche durch den Punkt A_0 gehen und nicht in einem Raum S_3 liegen. Ihre vier absoluten Grenzpunkte (Def. II, § 32) sind mithin nicht in einer Ebene gelegen; sie bestimmen einen Raum von drei Dimensionen $\pi_{3\infty}$, welcher sich in dem absoluten Grenzgebiet von A_0 befindet (Satz I, § 119).

Die Graden des von den vier unendlich fernen Punkten bestimmten Tetraeders liegen in dem Raum S_4, d. h. in den Ebenen der vier genannten Strahlen (Bem. IV, § 68). Mithin liegen in S_4 alle Graden, welche zwei von diesen Graden und also auch alle Ebenen des Tetraeders treffen (Satz I, § 84) und ebenso alle Graden, welche zwei von diesen Ebenen schneiden und diese Graden sind eben diejenigen des Raums $\pi_{3\infty}$.

Der zweite Theil des Satzes folgt aus Satz IV, § 32.

Zus. Das unendlich ferne Gebiet des Raums S_4 kann bezügl. der Euclid'schen Einheit als ein Raum von drei Dimensionen angesehen werden.

Wird ähnlich wie Zus. zu Satz I, § 84 bewiesen.

Def. I. Wir nennen einen solchen Raum *den unendlich fernen Raum des Raums* S_4 bezügl. der *Euclid*'schen Einheit (Bem. § 31).

Bem. I. Es gilt die der Bem. I, § 84 analoge Bem.

§ 124. *Bem. I.* Die Definitionen des Parallelismus zweier Graden, einer Graden und einer Ebene und zweier Ebenen, die im § 26 und § 85 gegeben wurden, gelten auch für den Raum S_4. Man sieht daher, dass eine Grade und eine Ebene oder zwei Ebenen, welche im Raum S_4 parallel sind, einem Raum S_3 angehören. Es gelten mithin in dem Raum S_4 für sie dieselben Sätze, die früher in der Ebene und dem Raum S_3 bewiesen wurden.

Def. I. Eine Grade oder eine Ebene und ein Raum sind *parallel*, wenn der unendlich ferne Punkt der Graden oder die unendlich ferne Grade der Ebene in der unendlich fernen Ebene des Raums liegen.

Def. II. Zwei Räume von drei Dimensionen sind *parallel*, wenn sie dieselbe unendlich ferne Ebene haben.

Satz I. In einem einer Graden parallelen Raum S_3 gibt es unendlich viele Grade, welche einer gegebenen Graden parallel sind.

Wird ähnlich wie Satz I, § 85 bewiesen.

Satz II. Von einem Punkt ausserhalb eines Raums von drei Dimensionen lassen sich unendlich viele dem Raum parallele Grade ziehen, welche in dem Raum liegen, der parallel zu dem ersten Raum ist.

Beweis wie bei Satz II, § 85.

Satz III. Ist eine Grade und eine Ebene gegeben, welche sich nicht schneiden, so geht durch die Grade ein einziger Raum von drei Dimensionen, welcher der Ebene parallel ist und umgekehrt.

Denn der Punkt im Unendlichgrossen der Graden und die Grade im Unendlichgrossen der Ebene bestimmen die Ebene im Unendlichgrossen der Räume von drei Dimensionen, welche der Graden und der Ebene parallel sind und von welchen nur einer durch die Grade und einer durch die Ebene geht (Def. I).

Satz IV. Durch einen Punkt ausserhalb einer Graden und einer Ebene lässt sich nur ein Raum von drei Dimensionen legen, der beiden parallel ist.

Es ist der Raum, welcher von dem Punkt und der durch den Punkt im Unendlichgrossen der Graden und der Graden im Unendlichgrossen der Ebene gegebenen Ebene bestimmt wird.

Satz V. Zwei parallele Räume von drei Dimensionen werden von einer Ebene, die ihnen nicht parallel ist, in zwei parallelen Graden geschnitten.

Denn die Ebene schneidet die beiden Räume in zwei Graden, welche denselben Punkt im Unendlichgrossen haben, nämlich den Durchschnittspunkt der Ebene mit der Ebene im Unendlichgrossen der beiden Räume.

Zus. I. Wenn eine Grade einem Raum von drei Dimensionen parallel ist, so schneidet jede durch sie gelegte Ebene, welche dem Raum nicht parallel ist, den Raum in einer der gegebenen Graden parallelen Graden.

Zus. II. Wenn eine Grade einer Ebene parallel ist, so schneidet jeder durch die Grade gehende Raum von drei Dimensionen, welcher der Ebene nicht parallel ist, die Ebene in einer zur ersten Graden parallelen Graden.

Satz VI. Wenn eine Ebene und ein Raum von drei Dimensionen parallel sind, so werden sie von einem beliebigen ihnen nicht parallelen Raum von drei Dimensionen bezüglich in einer Graden und einer Ebene geschnitten, die parallel sind.

Denn der Durchschnittspunkt des zweiten Raumes mit der der gegebenen Ebene und dem gegebenen Raum gemeinschaftlichen Graden im Unendlichgrossen gehört eben sowohl der Graden als der Ebene an, in welchen der zweite Raum die gegebene Ebene und den gegebenen Raum schneidet.

Zus. I. Wenn eine Ebene einem Raum von drei Dimensionen parallel ist, so schneidet jeder Raum von drei Dimensionen, der durch die Ebene geht und dem ersten Raum nicht parallel ist, diesen Raum in einer zur gegebenen Ebene parallelen Ebene.

Satz VII. Zwei parallele Grade schneiden zwei parallele Räume von drei Dimensionen, welche ihnen nicht parallel sind, in den Eckpunkten eines Parallelogramms.

Beweis wie bei Satz IV, § 85.

Satz VIII. Zwei parallele Ebenen werden von einem Raum von drei Dimensionen, der ihnen nicht parallel ist, in zwei parallelen Graden geschnitten.

Denn die beiden Durchschnittsgraden haben denselben Punkt im Unendlichgrossen nämlich den Durchschnittspunkt des gegebenen Raums mit der Graden im Unendlichgrossen der beiden Ebenen.

Satz IX. Wenn zwei Grade parallel sind, so schneiden sich zwei Räume von drei Dimensionen, welche bezüglich durch sie gehen und nicht parallel sind, in einer den gegebenen Graden parallelen Ebene.

Denn die Grade im Unendlichgrossen ihrer gemeinschaftlichen Ebene enthält den den beiden gegebenen Graden gemeinschaftlichen Punkt.

Bem. II. Auf ähnliche Art werden die folgenden Sätze bewiesen:

Satz X. Wenn zwei Grade parallel sind, so schneiden sich eine Ebene und ein Raum von drei Dimensionen, welche bezüglich durch sie gehen und nicht parallel sind, in einer zu den gegebenen Graden parallelen Graden (Satz III, § 122).

Satz XI. Wenn eine Grade und eine Ebene parallel sind, so schneiden sich eine Ebene und ein Raum von drei Dimensionen, die nicht parallel sind und bezüglich durch die Grade und durch die Ebene gehen, in einer zur gegebenen Graden und Ebene parallelen Graden (Satz III, § 122).

Satz XII. Wenn zwei Ebenen parallel sind, so schneiden sich zwei bezüglich durch sie gehende und nicht parallele Räume von drei Dimensionen in einer zu den beiden Ebenen parallelen Ebene (Satz IV, § 122).

§ 125. *Bem. I.* Zwei Ebenen sind nach Def. II, § 85 parallel, wenn sie dieselbe Grade im Unendlichgrossen haben. Sie liegen dann aber in einem Raum von drei Dimensionen (Satz VI, § 122). Sind dagegen zwei Ebenen in S_4 unabhängig, so schneiden sie sich in einem einzigen Punkt, welcher im Allgemeinen dem endlichen Gebiet angehört (Satz VI, § 122; Zus. Satz I, § 123).

Def. I. Zwei Ebenen, welche keine Grade gemeinschaftlich haben, heissen *parallel von der zweiten Art*, wenn ihr gemeinschaftlicher Punkt im Unendlichgrossen liegt. Die nach Def. II, § 85 parallelen Ebenen nennen wir daher *parallel von der ersten Art* oder nur *parallel.*

Bem. II. In jeder der beiden parallelen Ebenen zweiter Art gibt es nur eine Richtung von zur andern Ebene parallelen Graden.

Zus. Wenn eine Ebene und eine Grade parallel sind, so sind alle durch die Grade gehenden Ebenen zur gegebenen Ebene parallel von der zweiten Art.

Bem. III. Wenn eine Ebene und ein Raum von drei Dimensionen gegeben ist, welcher die Ebene nicht enthält, so gibt es in dem Raum ein System von Ebenen, welche zur gegebenen Ebene parallel von der zweiten Art sind, nämlich aller derjenigen in dem Raum enthaltenen Ebenen, welche durch den Punkt gehen, in dem die Ebene im Unendlichgrossen des Raums die Grade im Unendlichgrossen der gegebenen Ebene schneidet.

Satz I. Wenn zwei Ebenen, die nicht parallel von der ersten Art sind und sich in einer Graden schneiden oder nicht, und eine Grade, welche nicht mit jeder derselben in einem Raum von drei Dimensionen liegt, gegeben sind, so gibt es nur eine Ebene, welche durch die Grade geht und zu den gegebenen Ebenen parallel von der zweiten Art ist.

Wenn die beiden gegebenen Ebenen parallel von der ersten Art sind, so gehen durch die Grade unendlich viele Ebenen, die zu den beiden ersten parallel von der zweiten Art sind.

Denn durch den Punkt im Unendlichgrossen der Graden geht eine einzige Grade, welche die Graden im Unendlichgrossen der beiden Ebenen schneidet (Satz II, § 30; Satz I, § 123 und Satz I, § 68; Satz V, § 83 und Bem. V, § 107).

Daraus folgt auch der zweite Theil des Satzes.

Satz II. Durch einen Punkt ausserhalb zweier parallelen Ebenen der zweiten Art geht ein zu ihnen paralleler Raum.

Es ist der Raum, welcher den Punkt mit den Graden im Unendlichgrossen der beiden Ebenen verbindet (Def. I).

Satz III. Durch einen Punkt ausserhalb zweier parallelen Ebenen zweiter Art geht nur eine zu ihnen parallele Grade.

Es ist die Grade welche durch den gegebenen Punkt und durch den Punkt im Unendlichgrossen geht, der den beiden Ebenen gemeinschaftlich ist.

§ 126. *Construction paralleler Dinge mit den Elementen des endlichen Gebiets.*

a) Von einem Punkt ausserhalb eines Raums einen Raum parallel zu dem gegebenen Raum zu legen.

Man ziehe durch den Punkt drei Grade, welche drei Graden, die nicht in einer Ebene des gegebenen Raums liegen, parallel sind (Bem. III, § 60); diese drei Parallelen bestimmen den gesuchten Raum.

b) Einen Raum parallel zu einer Ebene durch eine Grade zu legen, welche die Ebene nicht schneidet.

Man lege durch einen Punkt der Graden eine Ebene, welche der gegebenen Ebene parallel ist, wie in dem Raum von drei Dimensionen (Bem. II, § 85).

c) Einen Raum parallel zu einer Graden durch eine Ebene zu legen, welche die gegebene Grade nicht trifft.

Man ziehe durch einen Punkt der Ebene die Parallele zur gegebenen Graden, welche mit der Ebene den verlangten Raum bestimmt.

d) Einen Raum durch einen Punkt parallel zu einer Graden und einer Ebene zu legen.

Man ziehe durch den Punkt die Parallele zur Graden und die zur gegebenen Ebene parallele Ebene, wie bei dem Raum von drei Dimensionen (Bem. II, § 85). Die Grade und die Ebene bestimmen den verlangten Raum.

e) Durch eine Grade eine Ebene parallel von der zweiten Art zu zwei gegebenen Ebenen zu legen.

Durch die Grade lege man die den beiden Ebenen parallelen Räume (*b*), welche sich in der verlangten Ebene schneiden (Satz I, § 125).

f) Einen Raum durch einen Punkt parallel zu zwei Ebenen zu legen, die parallel von der zweiten Art sind.

Man ziehe durch den Punkt die Ebenen, welche den gegebenen parallel von der ersten Art sind; diese liegen in dem gesuchten Raum (Bem. II, § 85).

g) Durch einen Punkt eine Grade parallel zu zwei Ebenen zu ziehen, welche parallel von der zweiten Art sind.

Da die beiden Ebenen parallel von der zweiten Art sind, so ist ihr Punkt im Unendlichgrossen durch eine Grade bestimmt; es genügt daher durch den Punkt die Parallele zu dieser Graden zu ziehen (Bem. III, § 60).

4.

Identität des Raums S_4 um seine Punkte des endlichen und unendlich grossen Gebiets. — Die Theile, in welche S_4 durch einen seiner Räume von drei Dimensionen zerlegt wird.

§ 127. *Satz I. Der Raum S_4 ist um jeden seiner Punkte des endlichen Gebiets identisch.*

Beweis wie bei Satz I, § 86.

Satz II. Die Sterne des Raums, deren Mittelpunkte in dem endlichen Gebiet auf einer Ebene liegen, werden durch diese Ebene in zwei identische Theile zerlegt, welche denselben beiden Theilen des Raums angehören.

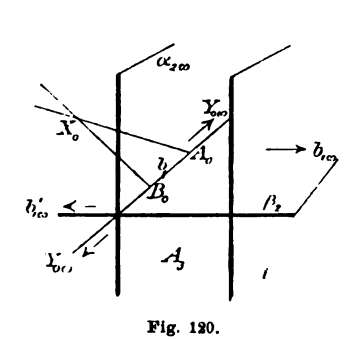


Fig. 120.

Ein Raum A_3 des Sterns vom Centrum A_0 hat eine Ebene $\alpha_{2\infty}$ im Unendlichgrossen, welche den Raum $\pi_{3\infty}$ in zwei identische Theile zerlegt (Zus. I, Satz III, § 109). Wie man ebenfalls weiss, liegen zwei entgegengesetzte Punkte $X_{0\infty}$, $X'_{0\infty}$ auf entgegengesetzten Seiten von $\alpha_{2\infty}$ und liegt jede Grade $\beta_{1\infty}$ und jede andre Ebene $\beta_{2\infty}$ zur Hälfte in den bezüglich der Ebene $\alpha_{2\infty}$ entgegengesetzten Theilen des Raums (Satz IV, V, § 109).

Verbindet man A_0 mit den auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $\alpha_{2\infty}$ liegenden Theilen $\pi'_{3\infty}$, $\pi''_{3\infty}$ des Raums $\pi_{3\infty}$, so sind die beiden Theile $(A_0\pi'_{3\infty})$, $(A_0\pi''_{3\infty})$ des Sterns vom Centrum A_0 in S_4 identisch, weil $\pi'_{3\infty}$ und $\pi''_{3\infty}$ identisch und die Abstände des Punktes A_0 von den Punkten von $\pi'_{3\infty}$ und $\pi''_{3\infty}$ gleich sind (Fig. 120).

Diese beiden Theile des Sterns vom Centrum A_3 bestimmen zwei Theile des Raums.

B_0 sei nun ein andrer Punkt des Raums A_3. Wählt man nach Belieben einen Strahl A_0X_0 des Theils $(A_0\pi_3{}'_\infty)$, so beweisen wir, dass jeder Punkt X_0 desselben in dem Theil $(B_0\pi_3{}'_\infty)$ liegt. In der That wird die Ebene $A_0X_0B_0$ oder β_2 durch die Grade A_0B_0 in zwei Theile zerlegt, von denen der eine in dem Theil $(A_0\pi_3{}'_\infty)$ liegt, weil er im Unendlichgrossen eine in $\pi_3{}'_\infty$ gelegene Halbgrade $b_1{}'_\infty$ hat, deren Enden die beiden Punkte im Unendlichgrossen von A_0B_0 sind (Fig. 120).

Der Punkt im Unendlichgrossen des Strahls B_0X_0 liegt in $b_1{}'_\infty$ (Satz II, § 50) und daher in dem Theil $(B_0\pi_3{}'_\infty)$ des Sterns vom Centrum B_0. Da die Theile $(A_0\pi_3{}'_\infty)$, $(B_0\pi_3{}'_\infty)$ zusammenfallen, so decken sich auch die entgegengesetzten Theile, womit der Satz bewiesen ist.

Def. I. Von diesen Theilen des Raums S_4 sagt man, sie lägen auf *entgegengesetzten Seiten* des Raums S_3.

Zus. I. Die Theile, in welche der Raum S_4 durch einen Raum S_3 zerlegt wird, sind identisch.

Man erhält jeden dieser Theile dadurch, dass man die Punkte einer der Hälften des Raums $\pi_{3\infty}$, welche durch die Ebene im Unendlichgrossen von A_3 bestimmt werden, mit einem beliebigen Punkt des endlichen Gebiets von A_3 verbindet (Zus. Satz III, § 109 und Def. I, § 123).

Satz III. Eine Grade, eine Ebene und ein Raum, welche einem Raum von drei Dimensionen parallel sind, liegen auf derselben Seite dieses Raums.

In der Ebene β_2 sei eine Parallele zur Graden A_0B_0 gegeben (Fig. 120). Sie liegt ganz auf der einen Seite der Graden A_0B_0 (Satz I, § 50) und da die durch die Grade A_0B_0 getrennten Theile der Ebene β_2 den beiden Theilen des Sterns vom Centrum A_0 bezüglich des Raums A_3 angehören, so ist damit der erste Theil des Satzes bewiesen. Auch der zweite Theil leuchtet ein, weil die Graden der einem gegebenen Raum von drei Dimensionen parallelen Ebene oder des parallelen Raumes S_3 dem gegebenen Raum parallel sind und mithin auf derselben Seite dieses Raumes liegen müssen. Denn wenn zwei Punkte der Ebene oder des Raumes sich auf entgegengesetzten Seiten von S_3 befänden, so würde nach den früheren Ausführungen ihre Verbindungsgrade nicht parallel zu S_3 sein.

Satz IV. Die beiden Theile einer Ebene (oder eines Raumes), in welche sie (oder er) durch die Durchschnittsgrade (oder -ebene) mit einem der Ebene (oder dem Raum) nicht parallelen Raum S_3 zerlegt wird, liegen in den durch den Raum S_3 getrennten Theilen des Raumes S_4.

Der Beweis wird wie bei Satz IV, § 86 geführt.

Zus. I. Die Theile einer Graden, welche durch ihren Durchschnittspunkt mit einem der Graden nicht parallelen Raum S_3 auf ihr bestimmt werden, liegen in den durch den Raum S_3 getrennten Theilen von S_4.

Zus. II. Wenn zwei Punkte auf entgegengesetzten Seiten eines Raumes S_3 liegen, so schneidet das Segment, welches sie verbindet, den Raum S_3.

Die Beweise dieser Zusätze werden wie bei Zus. I u. II, Satz IV, § 86 geführt.[1])

5.

Senkrechte Grade, Ebenen und Räume.

§ 128. *Bem.* Der Raum $\pi_{4\infty}$ im Unendlichgrossen von S_4 ist ein vollständiger Raum von drei Dimensionen (Zus. Satz I und Def. I, § 123).

Die früher gegebenen Definitionen zweier Graden, einer Graden und einer Ebene und zweier Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen (Def. V, § 40; Def. I, III, § 87), gelten auch in dem Raum von vier Dimensionen.[2])

Satz I. Die Grade im Unendlichgrossen einer Ebene, die auf einer Graden senkrecht steht, liegt in der Polarebene des Punktes im Unendlichgrossen der Graden und umgekehrt.

Denn da das normale Segment von dem Punkt im Unendlichgrossen der Graden nach der Graden im Unendlichgrossen der Ebene ein rechtes ist, so ist der Punkt der Pol der Graden in der von ihnen bestimmten Ebene (Satz I, § 73) und mithin liegt die Grade in der Polarebene des Punktes (Satz I und Def. I, § 108) und umgekehrt (Satz VI u. I, § 69 und Bem.).

Zus. Eine auf einer Ebene senkrechte Grade steht senkrecht auf allen Graden der Ebene.

Denn der Punkt im Unendlichgrossen jeder Graden der Ebene ist dem unendlich fernen Punkt der Graden conjugirt (Def. I, § 69 u. Def. V, 40).

Def. I u. II. Eine Grade oder Ebene und ein Raum von drei Dimensionen *stehen senkrecht aufeinander*, wenn das normale Segment von dem unendlich fernen Punkt der Graden oder der unendlich fernen Graden der Ebene nach der unendlich fernen Ebene des Raums ein rechtes ist (Def. II u. IV, § 111).

Def. III. Zwei Räume von drei Dimensionen *stehen senkrecht aufeinander*, wenn die normalen Segmente ihrer Ebenen im Unendlichgrossen rechte sind (Def. III, § 111).

Satz II. Der Punkt im Unendlichgrossen einer Graden, welche senkrecht auf einem Raum S_3 steht, ist der Pol der Ebene im Unendlichgrossen des Raums S_3 und umgekehrt.

Da der Abstand des Punktes von der Ebene ein rechtes Segment ist, so ist die Ebene die Polarebene des Punktes in dem Raum $\pi_{3\infty}$ (Satz I, § 111) und umgekehrt (Satz I, § 108; Zus. I, Satz III, § 110 und Bem.).

Def. IV. Der Durchschnittspunkt eines Lothes auf einen Raum S_3 mit diesem Raum heisst der *Fusspunkt* des Lothes.

Zus. I. Alle Parallelen zu einer auf einem Raum S_3 senkrechten Graden stehen senkrecht auf diesem Raum.

Denn sie haben denselben Punkt im Unendlichgrossen.

Zus. II. Alle Lothe auf einen Raum S_3 sind einander parallel.

---

1) Ueberblickt man die bis jetzt entwickelten Eigenschaften, so leuchtet das, was wir in der Anm. zu § 121 gesagt haben, um so mehr ein.

2) Siehe Anm. § 87.

Denn sie haben denselben Punkt im Unendlichgrossen.

Zus. III. Alle Räume von drei Dimensionen, welche einem auf einer Graden senkrechten Raum S_3 parallel sind, stehen auf dieser Graden ebenfalls senkrecht.

Denn ihre Ebene im Unendlichgrossen ist die Polarebene des Punktes im Unendlichgrossen der Graden.

Zus. IV. Alle auf einer Graden senkrechten Räume sind einander parallel.

Denn sie haben dieselbe Ebene im Unendlichgrossen.

Zus. V. Eine auf einen Raum von drei Dimensionen senkrechte Grade steht auf allen Graden und Ebenen des gegebenen Raums senkrecht.

Denn die Punkte der Ebene im Unendlichgrossen des Raums S_3 sind mit dem Pol dieser Ebene conjugirt (Satz I, § 108 und Def. I, § 69), welcher der Punkt im Unendlichgrossen der Graden ist; mithin sind die gegebene Grade und eine beliebige Grade des Raums S_3 rechtwinklig zueinander (Def. V, § 40). Der zweite Theil des Zusatzes folgt unmittelbar aus dem ersten (Satz I, § 87 und Bem.).

Zus. VI. Durch einen Punkt geht nur ein Raum von drei Dimensionen, welcher auf einer gegebenen Graden senkrecht steht.

Man braucht nur den Punkt mit der Polarebene des Punktes im Unendlichgrossen der gegebenen Graden zu verbinden.

Zus. VII. Alle von einem Punkt auf eine Grade gefällten Lothe liegen in einem Raum von drei Dimensionen (Def. V, § 40 und Satz I, § 108).

Zus. VIII. Durch einen Punkt geht nur eine auf einen Raum S_3 senkrechte Grade.

Nämlich die Grade, welche den gegebenen Punkt mit dem Pol der Ebene im Unendlichgrossen des Raums verbindet.

§ 129. *Satz I. Die Graden im Unendlichgrossen zweier nicht in einem Raum S_3 liegenden und aufeinander senkrechten Ebenen sind Polargrade. Wenn die beiden Ebenen sich in einer Graden schneiden oder parallel von der zweiten Art sind, alsdann sind ihre Graden im Unendlichgrossen um den gemeinschaftlichen Punkt conjugirt. Und umgekehrt.*

Denn die beiden Ebenen schneiden sich in einem einzigen Punkt (Satz VI, § 122); ihre Graden im Unendlichgrossen treffen sich daher im Allgemeinen nicht. Sind ferner ihre normalen Segmente rechte (Bem. § 128), so sind sie Polargrade (Satz II, § 114) und umgekehrt.

Schneiden sich dagegen die Ebenen in einer Graden oder sind sie parallel von der zweiten Art, so sind ihre Graden im Unendlichgrossen, da sie sich in einem Punkt treffen, conjugirte Grade in der Ebene, welche sie enthält und umgekehrt (Def. III, § 69 und Zus. II, Satz VII, § 73).

Bem. I. Bezüglich der Lage der Graden im Unendlichgrossen zweier Ebenen gibt es daher zwei verschiedene Arten wie die Graden senkrecht aufeinander stehen können, wie es zwei Arten von Parallelismus gibt.

Def. I. Wenn die Graden im Unendlichgrossen zweier senkrechten Ebenen sich im Unendlichgrossen schneiden, so heissen sie *senkrecht von der zweiten Art*, sonst *senkrecht von der ersten Art* oder auch nur *senkrecht*.

Zus. I. Zwei Ebenen, die senkrecht von der zweiten Art zueinander sind und keine Grade gemeinschaftlich haben, sind auch parallel von der zweiten Art.

Bem. II. Dass es wirklich Ebenen gibt, die senkrecht von der zweiten Art zu einer Ebene sind und sie nicht in einer Graden schneiden, sieht man wie folgt. $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ seien die Graden im Unendlichgrossen zweier Ebenen A_2, B_2, welche senkrecht von der zweiten Art zueinander sind und eine Grade gemeinschaftlich haben. Alle Ebenen, welche parallel von der ersten Art zu A_2 sind und B_2 in einer Graden schneiden, liegen in dem Raum von drei Dimensionen $(B_2 a_{1\infty})$ und stehen senkrecht auf B_2. Durch die Grade $a_{1\infty}$ gehen aber unendlichviele andre Ebenen, weil das System von Ebenen, welche durch eine Grade in S_4 gehen, zwei Dimensionen hat (Satz VII, § 122), während das System von Ebenen, welche durch eine Grade in dem Raum von drei Dimensionen gehen, nur eine Dimension hat (Satz VIII, § 83). Diese andern Ebenen sind nun grade senkrecht und parallel von der zweiten Art zur Ebene B_2.

Zus. II. Die Ebenen, welche parallel von der ersten Art zu zwei Ebenen sind, die aufeinander senkrecht von der ersten oder zweiten Art stehen, stehen aufeinander senkrecht bezüglich von der ersten oder zweiten Art.

Denn die Grade im Unendlichgrossen der einen ist der unendlich fernen Graden der andern Ebenen polar oder conjugirt.

Zus. III. Die Graden einer beliebigen zweier Ebenen, die senkrecht zueinander von der ersten Art sind, stehen senkrecht auf der andern.

Denn die Punkte zweier Pollinien im Unendlichgrossen sind conjugirt (Zus. I, Satz I, § 108 und Def. V, § 40).

Zus. IV. In zwei Ebenen, die senkrecht zueinander von der zweiten Art sind, gibt es nur eine Richtung von Graden der einen, die senkrecht auf der andern Ebene steht.

Denn von den zwei Graden im Unendlichgrossen in der gemeinschaftlichen Ebene enthält jede die Pole der andern, da diese Graden conjugirt sind. Die Graden der beiden Ebenen, welche durch diese Pole gehen, haben die genannte Eigenschaft (Bem. § 128).

Zus. V. Durch einen Punkt kann man nur eine Ebene legen, welche senkrecht von der ersten Art auf einer andern Ebene steht.

Man braucht nur den gegebenen Punkt mit der Pollinie der Graden im Unendlichgrossen der gegebenen Ebene zu verbinden.

Zus. VI. Durch einen Punkt lassen sich unendlich viele Ebenen legen, welche senkrecht von der zweiten Art auf einer gegebenen Ebene stehen.

Denn die Graden, welche die Grade im Unendlichgrossen der gegebenen Ebene und die Pollinie derselben treffen, sind Grade im Unendlichgrossen normaler Ebenen von der zweiten Art (Zus. IV, Satz II, § 108 und Def. III, § 69).

Zus. VII. Zwei Ebenen, welche senkrecht von der ersten Art auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen stehen und nicht in einem Raum S_3 liegen, sind ebenfalls parallel von der zweiten Art.

Denn ihre Graden im Unendlichgrossen schneiden sich in den Polen der Ebene, welche die Graden im Unendlichgrossen der beiden gegebenen von der zweiten Art parallelen Ebenen verbindet (Satz IV, § 108).

Satz II. Eine Ebene β, welche senkrecht von der zweiten Art zu einer Ebene α ist, steht auf jeder Ebene, die senkrecht von der ersten Art zur Ebene α ist, senkrecht von der zweiten Art.

b_∞, a_∞ seien die Graden im Unendlichgrossen von β und α und a'_∞ die Pollinie von a_∞. Die Grade b_∞ muss die Grade a_∞ schneiden (Def. I) und weil b_∞ dieser Graden in der Ebene $a_\infty b_\infty$, welche die Grade a'_∞ in den Polen von a_∞ trifft, conjugirt ist, so muss die Grade b_∞ durch diese Punkte gehen (Def. III, § 69) d. h. sie muss die Grade a'_∞ schneiden und ist mithin dieser Graden in der Ebene $b_\infty a'_\infty$ conjugirt. Jede Ebene aber, welche auf α senkrecht von der ersten Art steht, geht durch a'_∞; damit ist der Satz bewiesen (Def. I).

Def. II. Der Durchschnittspunkt einer Ebene mit einer auf ihr von der ersten Art senkrechten Ebene heisst *der Fusspunkt* der ersten Ebene auf der zweiten.

Satz III. Der Fusspunkt der Ebene, welche von einem Punkt normal von der ersten Art auf eine Ebene gezogen wird, ist der Fusspunkt des von dem Punkt auf die Ebene gefällten Lothes.

Die von dem Punkt auf die Ebene normal von der ersten Art gezogene Ebene enthält das von dem Punkt gefällte Loth und schneidet die gegebene Ebene, weil der Punkt im Unendlichgrossen dieses Lothes der Durchschnittspunkt des von dem Punkt und der gegebenen Ebene bestimmten Raums von drei Dimensionen mit der Pollinie der Graden im Unendlichgrossen der Ebene ist und die von der ersten Art senkrechte Ebene durch diese Pollinie geht.

§ 130. *Satz I. Die Grade im Unendlichgrossen einer auf einen Raum S_3 senkrechten Ebene ist der Ebene im Unendlichgrossen des Raums conjugirt und umgekehrt* (Def. II, § 128; Zus. I, Satz V, § 111).

Zus. I. Wenn eine Ebene und ein Raum senkrecht aufeinander stehen, so sind die denselben parallelen Ebenen und Räume ebenfalls senkrecht zueinander.

Zus. II. Eine auf einem Raum senkrechte Ebene steht senkrecht von der zweiten Art auf allen Ebenen, welche durch ihre Durchschnittsgrade mit dem gegebenen Raum gehen (und daher auch auf allen ihnen in diesem Raum parallelen Ebenen).

Denn die Grade im Unendlichgrossen einer jeden dieser Ebenen in S_3 und diejenige der auf ihr senkrechten Ebene liegen in einer Ebene und sind in dieser Ebene conjugirt.

Zus. III. Durch eine Grade kann man nur eine Ebene senkrecht auf einen Raum von drei Dimensionen legen.

Man verbinde nur die Grade mit dem Pol der Ebene im Unendlichgrossen des Raums S_3.

Zus. IV. Durch eine Grade geht nur ein Raum S_3, welcher senkrecht von der ersten Art auf einer Ebene steht.

Es ist der Raum S_3, welcher die Grade mit der Pollinie der Graden im Unendlichgrossen der Ebene verbindet, weil eine Ebene im Unendlichgrossen, welche durch eine Grade geht, der Pollinie dieser Graden conjugirt ist (Zus. IV, Satz IV, § 108).

Satz II. Die von den Punkten einer Graden auf einen Raum S_3 gefällten Lothe liegen in der durch die Grade senkrecht auf den Raum gelegten Ebene.

Denn der Punkt im Unendlichgrossen eines jeden dieser Lothe ist der Pol der unendlich fernen Ebene von S_3 und durch den Pol dieser Ebene geht auch die Grade im Unendlichgrossen der durch die Grade senkrecht zum Raum gelegten Ebene (Def. V, § 108 und Satz I).

Zus. Die Fusspunkte der von den Punkten einer Graden auf einen Raum gefällten Lothe liegen in einer Graden, welche durch den Punkt geht, in welchem die gegebene Grade den gegebenen Raum trifft (Satz III, § 122 u. Def. V, § 128).

Def. I. Diese Grade heisst *rechtwinklige Projection* oder einfach *Projection* der gegebenen Graden auf den Raum.

Satz III. Die von den Punkten einer Graden auf eine Ebene gefällten Lothe liegen in dem Raum von drei Dimensionen, welcher durch die Grade geht und senkrecht auf der Ebene steht.

Denn jede zur Ebene senkrechte Grade hat ihren Punkt im Unendlichgrossen in der Pollinie $a_{1\infty}$ der unendlich fernen Graden der Ebene (Satz I, § 128 und Satz IV, § 108) und da der durch die Grade normal zur Ebene gelegte Raum die Grade $a_{1\infty}$ enthält, so enthält er auch die von den Punkten der Graden auf die gegebene Ebene gefällten Lothe (Satz I).

Zus. Die Fusspunkte der von den Punkten einer Graden auf eine Ebene gefällten Lothe, welche diese Ebene treffen, liegen in einer Graden (Satz III, § 122).

Def. II. Diese Grade heisst die *rechtwinklige Projection* oder *Projection* der Graden auf die Ebene.

Satz IV. Die durch die Punkte einer Graden senkrecht von der ersten Art auf eine Ebene gelegten Ebenen liegen in dem von der Graden senkrecht auf die Ebene gezogenen Raum S_3.

Denn man erhält diese Ebenen, wenn man die Punkte der Graden mit der Pollinie der Graden im Unendlichgrossen der gegebenen Ebene verbindet und da sie mit dem Raum S_3 einen Punkt und eine Grade gemeinschaftlich haben, so liegen sie in diesem Raum (Satz III, § 82).

Zus. Die Fusspunkte der von den Punkten einer Graden auf eine Ebene normal von der ersten Art gezogenen Ebenen liegen in einer Graden.

Jede der normalen Ebenen trifft die gegebenen Ebenen in einem einzigen Punkt, denn schnitten sich diese Ebenen in einer Graden, so lägen sie in einem Raum von drei Dimensionen und wären mithin nicht normal von der ersten Art. Der Durchschnittspunkt muss in der Durchschnittsgraden des von der Graden senkrecht auf die gegebene Ebene gezogenen Raums S_3 liegen (Satz III, § 122).

§ 131. *Satz I. Die Ebenen im Unendlichgrossen zweier aufeinander senkrechten Räume von drei Dimensionen sind conjugirt und umgekehrt* (Def. III, § 128; Zus. I, Satz IV, § 111).

Zus. I. Die Räume von drei Dimensionen, welche einem auf einem andern Raum senkrechten Raum parallel sind, stehen senkrecht auf dem gegebenen Raum.

Denn ihre Ebene im Unendlichgrossen ist der Ebene des gegebenen Raums conjugirt.

Zus. II. Durch eine Ebene geht nur ein Raum, welcher auf einem gegebenen Raum senkrecht steht.

Nämlich der Raum, welcher die Ebene mit dem Pol der Ebene im Unendlichgrossen des gegebenen Raums verbindet (Def. II, § 108).

Satz II. Die von den Punkten einer Ebene auf einen Raum S_3 gefällten Lothe liegen in dem von der Ebene senkrecht auf den Raum S_3 gezogenen Raum.

Denn sie gehen durch den Pol der Ebene im Unendlichgrossen von S_3, welcher in dem von der Ebene auf S_3 senkrecht gezogenen Raum enthalten ist (Satz I).

Zus. Die Fusspunkte der von den Punkten einer Ebene auf einen Raum gefällten Lothe liegen in einer zweiten Ebene, welche durch die Durchschnittsgrade der Ebene mit dem gegebenen Raum geht (Satz IV, § 122).

Def. I. Die Ebene, in welcher die Fusspunkte der von den Punkten einer Ebene P_2 auf einen Raum S_3 gefällten Lothe liegen, heisst *rechtwinklige Projection* oder einfach *Projection* der Ebene P_2 auf den Raum S_3.

Satz III. Jeder von zwei aufeinander senkrechten Räumen enthält unendlich viele auf dem andern senkrechte Grade.

S_3, S_3' seien die beiden zueinander senkrechten Räume, $X_{0\infty}$, $Y_{0\infty}$ die Pole ihrer Ebenen im Unendlichgrossen. S_3 enthält $Y_{0\infty}$ und S_3' enthält $X_{0\infty}$ (Satz I). Die Graden von S_3, welche durch $Y_{0\infty}$ gehen, stehen offenbar auf dem Raum S_3' (Def. I, § 128) und ebenso diejenigen von S_3', welche durch $X_{0\infty}$ gehen, auf S_3 senkrecht.

§ 132. *Satz I. Es gibt nur eine Richtung von Ebenen, welche senkrecht auf zwei gegebenen Graden sind.*

Wenn eine Ebene senkrecht auf zwei Graden steht, so muss ihre unendlich ferne Grade der Durchschnitt der Polarebenen der unendlich fernen Punkte der beiden Graden sein (Satz I, § 128) und muss mithin die Pollinie der Verbindungslinie der unendlich fernen Punkte der beiden Graden sein.

Zus. Durch jeden Punkt des Raums S_4 geht nur eine Ebene, welche senkrecht auf zwei Graden steht.

Satz II. Es gibt nur eine auf zwei Graden senkrechte Ebene, welche die Graden trifft. Sie geht durch die gemeinschaftliche normale Transversale des von den gegebenen Graden bestimmten Raums von drei Dimensionen und steht senkrecht auf diesem Raum.

A_1 und B_1 seien die beiden gegebenen Graden und $Y_{1\infty}$ die Pollinie der Graden, welche die Punkte im Unendlichgrossen der beiden Graden verbindet. Jede durch $Y_{1\infty}$ gehende Ebene steht senkrecht auf den beiden Graden und ihrem Raum (Satz I, § 128 u. § 130). Die beiden Graden A_1, $Y_{1\infty}$ bestimmen einen Raum, welcher die Grade B_1 in einem Punkt B_0 schneidet (Satz II, § 122); die Ebene $B_0 Y_{1\infty}$ schneidet, weil sie in dem Raum $(A_1 Y_{1\infty})$ liegt, die Grade A_1 in einem Punkt A_0 (Satz I, § 83) und steht senkrecht auf den beiden Graden. Die Grade $A_0 B_0$ ist offenbar normal zu den beiden Graden in dem Raum $(A_1 B_1)$ (Zus. V, Satz I, § 87).

Satz III. Es gibt nur eine Richtung von Graden, welche senkrecht auf drei gegebenen Graden stehen.

Man braucht nur zu beachten, dass die durch die Punkte im Unendlichgrossen der drei Graden bestimmte Ebene einen Pol hat, welcher die Richtung des Lothes auf die drei gegebenen Graden angibt.

Bem. Da nur zwei Grade in dem von ihnen bestimmten Raum eine Normale gemeinschaftlich haben, welche sie schneidet, so ist es klar, dass im Allgemeinen drei Grade keine Normale gemeinschaftlich haben, welche sie schneidet.

Zus. I. Durch einen Punkt geht nur ein Loth auf drei gegebene Grade.

Satz IV. Es gibt nur eine Richtung von Graden, die senkrecht auf einer Graden und einer Ebene stehen, welche sich nicht schneiden und nur ein Loth trifft die Grade und die Ebene.

Die Richtung der Lothe auf die Grade A_1 und die Ebene A_2, welche gegeben sind, hat zum Punkt im Unendlichgrossen den Pol $X_{0\infty}$ der von dem Punkt im Unendlichgrossen von A_1 und von der Graden im Unendlichgrossen von A_2 bestimmten Ebene $E_{2\infty}$. Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, braucht man nur die Grade A_1 mit dem Punkt $X_{0\infty}$ zu verbinden; die Ebene $(X_{0\infty}A_1)$ schneidet die Ebene A_2 in einem Punkt A_0. Das von A_0 auf die Grade A_1 gefällte Loth, welches A_1 trifft, ist die verlangte Grade.

Satz V. Es gibt nur eine Richtung von Ebenen, welche auf zwei gegebenen Räumen senkrecht stehen.

Diese Richtung wird durch die Pollinie der Durchschnittsgraden der Ebenen im Unendlichgrossen der beiden Räume bestimmt (Satz I).

Zus. I. Eine auf zwei Räumen senkrechte Ebene steht senkrecht von der ersten Art auf ihrer Durchschnittsebene (Satz I und Def. I, § 129).

Zus. II. Durch einen Punkt geht nur eine auf zwei gegebenen Räumen senkrechte Ebene.

Satz VI. Es gibt nur eine Richtung von Graden und Räumen, welche auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrecht stehen.

Die Graden $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ im Unendlichgrossen der beiden Ebenen sind verschieden und schneiden sich in einem Punkt $A_{0\infty}$, welcher eine Polarebene $A_{2\infty}$ hat. In $A_{2\infty}$ liegen die Pollinien $\alpha_{1\infty}$, $\beta_{1\infty}$ von $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ (Zus. II, Satz II, § 108), welche wie die Graden $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ verschieden sind. $\alpha_{1\infty}$, $\beta_{1\infty}$ treffen sich in einem dem Punkt $A_{0\infty}$ conjugirten Punkt $A'_{0\infty}$ und die Polarebene von $A'_{0\infty}$ ist die Ebene $(a_{1\infty}b_{1\infty})$. $A'_{0\infty}$ gibt die Richtung der Lothe auf die beiden Ebenen (Satz I, § 128). Die Ebene $(\alpha_{1\infty}\beta_{1\infty})$ gibt dagegen die Richtung der auf die beiden Ebenen senkrechten Räume (Satz I, § 130).

Zus. Durch einen Punkt gehen nur eine Grade und nur ein Raum, welche auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrecht stehen.

Satz VII. Es gibt unendlich viele Graden, welche auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrecht stehen, sie treffen und in einer Ebene liegen. Diese Ebene schneidet die gegebenen Ebenen in zwei parallelen Graden und steht senkrecht von der zweiten Art auf ihnen.

S_2 und S_2' seien die beiden Ebenen, $A_{0\infty}$ ihr Punkt im Unendlichgrossen, $A_0'{}_\infty$ der Punkt im Unendlichgrossen der auf den beiden Ebenen senkrechten Graden (Satz VI) (Fig. 121). Der Raum $(S_2 A_0'{}_\infty)$ schneidet S_2' in einer Graden S_1'. Verbindet man einen Punkt S_0' von S_1' mit dem Punkt $A_0'{}_\infty$, so erhält man eine auf beiden Ebenen senkrechte Grade, welche S_2 in einem Punkt S_0 trifft, da sie mit der Ebene S_2 in dem Raum $(S_2 A_0'{}_\infty)$ liegt. Die Punkte S_0 liegen offenbar auf der Durchschnittsgraden s_1 des Raums $(S_2' A_0'{}_\infty)$ mit der Ebene S_2; diese Grade geht durch $A_{0\infty}$ und ist mithin der Graden S_1' parallel. Die Ebene $(S_1 S_1')$ steht auf den beiden Ebenen S_2 und S_2' senkrecht in den Räumen von drei Dimensionen, welche sie mit jeder derselben bestimmt (Satz III, § 87).

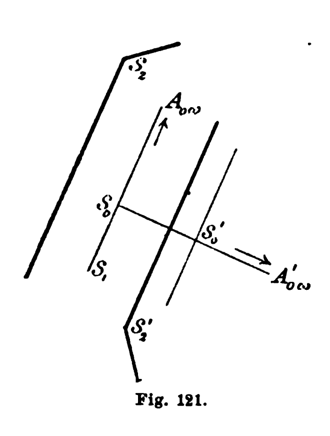


Fig. 121.

Satz VIII. Es gibt zwei Ebenen, welche durch den gemeinschaftlichen Punkt zweier gegebenen Ebenen gehen, auf ihnen senkrecht von der zweiten Art stehen und jede in einer Graden schneiden. Diese beiden Ebenen stehen senkrecht von der ersten Art aufeinander.

Gibt es deren mehr als zwei, so gibt es deren unendlich viele.

A_2, B_2 seien die beiden Ebenen, $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ ihre Graden im Unendlichgrossen, $\alpha_{1\infty}$, $\beta_{1\infty}$ ihre Pollinien, C_0 der gemeinschaftliche Punkt der beiden Ebenen. Die beiden Graden $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ besitzen zwei normale Transversalen $r_{1\infty}$, $s_{1\infty}$ (Satz X, § 117), welche die Pollinien $\alpha_{1\infty}$, $\beta_{1\infty}$ treffen und untereinander polar sind (Satz VIII und Zus. I, § 110). Die Ebenen $(C_0 r_{1\infty})$, $(C_0 s_{1\infty})$ schneiden jede der gegebenen Ebenen in einer Graden, deren unendlich fernen Punkte auf einer der beiden Graden $r_{1\infty}$, $s_{1\infty}$ und auf einer der beiden Graden $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ liegen.

Sie stehen senkrecht auf den gegebenen Ebenen, denn die Graden $r_{1\infty}$ und $a_{1\infty}$ sind conjugirt, da $r_{1\infty}$ die Grade $a_{1\infty}$ in dem Pol von $a_{1\infty}$ in der Ebene $(r_{1\infty} a_{1\infty})$ schneidet (Zus. IV, Satz II, § 108). Sie stehen senkrecht von der ersten Art aufeinander, weil die beiden Graden $r_{1\infty}$, $s_{1\infty}$ polar zueinander sind (Satz I und Def. I, § 129). Wenn ferner zwei Grade in dem vollständigen Raum von drei Dimensionen mehr als zwei normale Grade gemeinschaftlich haben, so haben sie deren unendlich viele (Bem. I, Satz IV, § 114); damit ist auch der letzte Theil des Satzes bewiesen.

Satz IX. Durch einen Punkt des Raums S_4 gehen unendlich viele Gruppen von vier Graden, von denen je zwei senkrecht zueinander sind. Die Ebenen und die Räume, welche je zwei und je drei von ihnen verbinden, stehen zu je zweien senkrecht aufeinander (Satz V und Zus. § 108).

§ 133. *Construction senkrechter Dinge mit Elementen des endlichen Gebiets:*

a) Eines auf einer Graden senkrechten Raums, welcher durch einen gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt auf der Graden, so braucht man nur durch die Grade drei Ebenen zu legen, welche nicht in einem Raum S_3 liegen und in ihnen

die Lothe von dem Punkt aus auf den Graden zu errichten. Diese Lothe bestimmen dann den verlangten Raum (Bem. III, § 60).

Liegt dagegen der Punkt ausserhalb der Graden, so fälle man in der durch die Grade und den Punkt bestimmten Ebene das Loth von dem Punkt auf die Grade. Der in dem Fusspunkt dieses Lothes auf der gegebenen Graden senkrecht stehende Raum ist der gesuchte Raum.

b) Der auf einen Raum senkrechten Graden, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt in dem Raum, so genügt es in diesem Raum drei nicht in einer Ebene liegende Grade zu ziehen. Die drei Räume, welche durch den gegebenen Punkt gehen und auf den drei Graden senkrecht stehen (a), schneiden sich in der verlangten Graden. Aehnlich ist es, wenn der Punkt ausserhalb des Raums liegt.

c) Einer auf einer andern Ebene von der ersten Art senkrechten Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Man lege durch den Punkt die auf zwei Graden der gegebenen Ebene senkrechten Räume (a), welche sich in der gesuchten Ebene schneiden.

d) Einer durch eine Grade gehenden Ebene, welche auf einem Raum senkrecht steht.

Man ziehe durch zwei Punkte der Graden die Lothe auf den gegebenen Raum; diese bestimmen die gesuchte Ebene.

e) Eines durch eine Grade gehenden Raums, welcher auf einer Ebene senkrecht steht.

Man fälle von zwei Punkten der Graden Lothe auf die Ebene, welche sie treffen (Constr. II, § 87); diese bestimmen den verlangten Raum.

f) Eines durch eine Ebene gehenden Raums, welcher senkrecht auf einem andern Raum steht.

Man fälle von einem Punkt der Ebene das Loth auf den Raum; dieses bestimmt mit der Ebene den gesuchten Raum.

g) Einer durch einen Punkt gehenden Ebene, welche senkrecht auf zwei Graden steht und diese Graden trifft.

Durch die den beiden Graden gemeinschaftliche normale Transversale (Constr. V, § 87) lege man die Ebene, welche senkrecht auf dem von den Graden bestimmten Raum steht (d).

h) Der auf drei Graden senkrechten Graden, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Man lege durch den Punkt die auf den drei Graden senkrechten Räume (a), welche sich in der verlangten Graden schneiden.

i) Der auf einer Graden und einer Ebene senkrechten Graden, welche beide schneidet.

Durch die gegebene Ebene lege man den der gegebenen Graden parallelen Raum (c, § 126) und ziehe dann durch die Grade die auf diesen Raum senkrechte Ebene (d). Die Durchschnittsgrade dieser Ebene und dieses Raums

schneidet die gegebene Ebene in dem Punkt, in welchem sie von dem gesuchten Loth getroffen wird.

Um dieses Loth zu erhalten, braucht man nur von dem gefundenen Punkt das Loth auf die Grade zu fällen (Bew. Satz IV, § 132).

k) Einer durch einen Punkt gehenden Ebene, welche senkrecht auf zwei gegebenen Räumen steht.

Man ziehe durch den Punkt die Lothe auf die beiden Räume (b), welche in der verlangten Ebene liegen.

Oder: Man lege durch den Punkt die auf der Durchschnittsebene der beiden Räume von der ersten Art senkrechte Ebene (c).

l) Des durch einen Punkt gehenden und auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrechten Raums.

Man ziehe zwei Ebenen, welche zu den beiden gegebenen Ebenen senkrecht von der ersten Art sind (c) und den zu diesen beiden Ebenen, welche auch parallel von der ersten oder zweiten Art sind (Zus. VII, Satz I, § 129) parallelen Raum, welcher durch den gegebenen Punkt geht.

m) Einer durch einen gegebenen Punkt gehenden Graden, welche auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrecht steht.

Hat man die zwei Ebenen construirt, welche auf den beiden gegebenen Ebenen senkrecht von der ersten Art sind (c), so genügt es, durch den Punkt die ihnen parallele Grade zu ziehen (Bem. III, § 60).

n) Der Ebene, welche auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrecht von der zweiten Art steht.

Man ziehe eine diesen Ebenen gemeinschaftliche Normale und hat dann nur nöthig durch die beiden gegebenen Ebenen die dieser Normalen parallelen Räume zu legen, welche sich in der gesuchten Ebene schneiden (siehe Bew. Satz VII, § 132).

o) Einer Gruppe von vier Graden, welche durch denselben Punkt gehen und zu je zweien senkrecht aufeinander stehen.

In dem Punkt errichte man zwei auf einer beliebigen durch ihn gehenden Ebene senkrechte Grade, dann in demselben Punkt die Normale auf die durch diese bestimmte Ebene und schliesslich die Normale auf dem durch die drei ersten Graden bestimmten Raum (b).

6.

Abstände.

§ 134. *Bem. I.* Die in den §§ 88 und 89 gegebenen Eigenschaften des Abstandes eines Punktes von einer Graden, eines Punktes von einer Ebene, der Punkte einer Graden von einer ihr parallelen Ebene, zweier von der ersten Art parallelen Ebenen, zweier Graden voneinander gelten auch in dem Raum von vier Dimensionen.

Satz I. Das auf eine Grade und eine Ebene normale Segment gibt den kleinsten Abstand der Punkte der Graden von denen der Ebene und umgekehrt.

ist dasjenige das grössere, dessen Ende in dem Raum von dem Fusspunkt der Normalen weiter entfernt liegt.

Wird wie Satz II, § 88 bewiesen (Fig. 122).

Zus. I. Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

Zus. II. Die Punkte einer Kugeloberfläche eines Raums von drei Dimensionen haben gleichen Abstand von einem beliebigen Punkt des in ihrem Mittelpunkt auf ihrem Raum errichteten Loths.

Wird bewiesen wie der analoge Zus. zu Satz II, § 88.

Zus. III. Alle Punkte eines Raums, welche gleichweit von einem Punkt ausserhalb des Raums abstehen, liegen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt der Fusspunkt des von dem Punkt auf den Raum gefällten Lothes ist.

Wird ebenso wie Zus. III, Satz II, § 88 bewiesen; man hat nur das Wort Ebene mit dem Wort Raum zu vertauschen.

Satz III. Alle Punkte, von welchen die Punkte einer Kugel gleichweit abstehen, liegen auf dem in dem Mittelpunkt der Kugel auf ihrem Raum errichteten Loth.

Der Beweis wird ebenso wie bei Satz III, § 88 geführt; man vertausche nur die Worte Kreis und Ebene mit den Worten Kugel und Raum.

Satz IV. Wenn zwei Punkte A_0, A_0' bezüglich denselben Abstand von zwei Räumen A_3, A_3' haben, so sind die Segmente, welche sie mit den Punkten dieser Räume bestimmen, zu je zweien gleich und die Figuren $(A_0 A_3)$, $(A_0' A_3')$ identisch.

Wird wie Satz IV, § 88 bewiesen.

Zus. I. Wenn zwei Punkte denselben Abstand von einem Raum haben, so sind die Segmente, welche sie mit den Punkten des Raums bestimmen, bezüglich zu je zweien gleich und die beiden Figuren, welche sie mit dem gegebenen Raum bilden, identisch.

Zus. II. Wenn zwei Punkte in einem auf einem Raum errichteten Loth liegen und denselben Abstand von dem Raum haben, so sind sie gleichweit von jedem Punkt des Raums entfernt.

Beweis wie bei Zus. I und II, Satz IV, § 88.

Satz V. Ist eine einem Raum von drei Dimensionen parallele Grade oder Ebene gegeben, so sind die Abstände der Punkte der Graden oder der Ebene von dem Raum gleich.

Denn die Normalen der Punkte einer Graden oder Ebene nach einem Raum von drei Dimensionen sind parallel (Zus. II, Satz II, § 128); ist mithin die Grade (die Ebene) dem Raum parallel, so liegen die Fusspunkte der Lothe in einer weiteren Graden (oder Ebene), welche der gegebenen Graden (oder Ebene) parallel ist (Zus. I, Satz II, § 130 oder § 131 und Zus. I, Satz V, oder Zus. I, Satz VI, § 124). Damit ist der Satz bewiesen (Satz VI, § 54 u. Satz VI, § 88).

Def. II. Der Abstand der Punkte einer Graden oder Ebene von den Punkten eines parallelen Raums von drei Dimensionen heisst *der Abstand der Graden oder der Ebene von dem Raum.*

Zus. Der Abstand einer Graden oder Ebene von einem zu ihr parallelen Raum ist der kleinste Abstand der Punkte der Graden oder Ebene von denjenigen des Raums (Satz I).

Satz VI. Die Abstände der Punkte eines Raums von einem zu ihm parallelen Raum sind gleich (Zus. II, Satz II und Satz VI, § 124).

Beweis wie zu Satz VI, § 88.

Def. III. Der Abstand der Punkte eines Raums von drei Dimensionen von einem ihm parallelen Raum heisst *der Abstand der beiden Räume.*

Satz VII. Zwei Paare paralleler Räume, welche denselben Abstand haben, sind zwei identische Figuren.

Der Beweis ist ähnlich, wie bei den beiden Paaren paralleler Ebenen (Satz VII, § 88); man vertausche nur das Wort Ebene mit dem Wort Raum.

7.

Winkel.

§ 136. *Die Winkel eines Strahls und einer Graden mit einer Ebene.*

Bem. I. Die früheren Definitionen von Winkel zweier Strahlen, Winkel zweier Graden, eines Strahls und einer Ebene, zweier Ebenen, welche sich in einer Graden schneiden, gelten auch in dem Raum von vier Dimensionen. Da zwei Grade immer in einem Raum von drei Dimensionen liegen, so bleiben auch in dem Raum von vier Dimensionen die Sätze des § 89 bestehen. Wie bisher immer, so geben wir auch hier die Definitionen der Winkel derart, dass die Winkel als Elemente zur Bestimmung der Figur betrachtet werden können und daher zwei Figuren identisch sind, wenn sie diese Elemente allein oder ausserdem noch andre gleich haben.

Bem. II. Wenn der Strahl oder die Grade und die Ebene sich schneiden, so gilt die frühere Definition (Def. I, § 90), weil sie in einem Raum von drei Dimensionen enthalten sind.

Satz I. Wenn ein Strahl und eine Ebene nicht in einem Raum von drei Dimensionen liegen, so ist der Winkel, welchen der Strahl mit jeder Ebene, welche ihn trifft und der gegebenen parallel ist, constant und dem Winkel gleich, welchen die Ebene mit jedem Strahl macht, welcher sie trifft und dem gegebenen Strahl parallel ist.

Denn diese Winkel werden durch die Abstände des Punktes im Unendlichgrossen des Strahls von der Graden im Unendlichgrossen der Ebene gemessen (Def. I, § 90 und Bem. I).

Def. I. Dieser constante Winkel heisst *der Winkel* des Strahls mit der Ebene.

Satz II. Die Winkel, welche eine Grade mit einer Ebene macht, sind dem Winkel gleich, den sie mit ihrer Projection auf die Ebene bildet.

Diese Projection erhält man, wenn man durch die Grade den Raum S_3 senkrecht zur Ebene legt (Satz III, § 130). Dieser Raum trifft die unendlich ferne Grade der Ebene in den Punkten im Unendlichgrossen der Projection der Graden, welche auch die Fusspunkte des von dem unendlich fernen Punkt der Graden auf die Grade im Unendlichgrossen der Ebene gefällten Loths sind. Denn diese unendlich ferne Grade der Ebene ist der Ebene im Unendlichgrossen des Raums S_3 conjugirt (Satz I, § 130) und steht desshalb senkrecht auf dieser Ebene (Satz III, § 110) und daher auch auf der

Graden, welche den Durchschnittspunkt beider mit dem unendlich fernen Punkt der Graden verbindet (Zus. Satz II, § 110; Def. I und Bem. I).

Satz III. Der Winkel, welchen ein Strahl mit seiner Projection auf eine Ebene macht, ist der kleinste Winkel, den der Strahl mit allen Strahlen der Ebene bildet.

Der Beweis dieses Satzes ist identisch mit dem Beweis des Satzes II, § 90; der einzige Unterschied besteht darin, dass in Satz II, § 90 der Strahl und die Ebene in dem Raum von drei Dimensionen enthalten sind. Der Satz gilt mithin allgemein.

Zus. Der Winkel, welchen der Strahl mit der Verlängerung seiner Projection macht, ist der grösste.

Def. II. Unter den Winkeln einer Graden mit einer Ebene versteht man die Winkel, welche die beiden entgegengesetzten Strahlen der Graden mit der Ebene bilden.

§ 137. *Die Winkel eines Strahls und einer Graden mit einem Raum von drei Dimensionen.*

Bem. I. Es seien nun ein Strahl a_1 und ein Raum von drei Dimensionen S_3 gegeben und A_0 sei der Durchschnittspunkt des Strahls a_1 mit S_3 (Fig. 123). $X_{0\infty}$ und $\alpha_{2\infty}$ seien die Elemente im Unendlichgrossen des Strahls a_1 und des Raums S_3. Der Abstand des Punktes $X_{0\infty}$ von den Punkten der Ebene $\alpha_{2\infty}$ hat ein Minimum und ein Maximum, welche auf dem von $X_{0\infty}$ auf die Ebene $\alpha_{2\infty}$ gefällten Loth gemessen werden (Satz II, § 111). Gibt es im Unendlichen eine andre Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ und einen andern Punkt $X_0'{}_\infty$ und ist der kleinste oder grösste Abstand dieses Punktes von der Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ derselbe, wie der des Punktes $A_{0\infty}$ von $\alpha_{2\infty}$, so sind die Abstände des Punktes $X_0'{}_\infty$ von den Punkten der Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ bezüglich denjenigen des Punktes $X_{0\infty}$ von den Punkten der Ebene $\alpha_{2\infty}$ gleich, d. h. die beiden Figuren $(X_{0\infty}\alpha_{2\infty})$, $(X_0'{}_\infty\alpha_2'{}_\infty)$ sind identisch (Bem. II, § 111). Wenn aber ein schiefes Segment, dessen Enden der Punkt $A_{0\infty}$ und ein Punkt $B_{0\infty}$ der Ebene $\alpha_{2\infty}$ sind, einem Segment gleich ist, dessen Enden in dem Punkt $A_0'{}_\infty$ und in der Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ liegen, so folgt daraus allein noch nicht, dass die beiden Figuren $(X_{0\infty}\alpha_{2\infty})$, $(X_0'{}_\infty\alpha_2'{}_\infty)$ identisch sind, d. h. dass die Abstände der Punkte $X_{0\infty}$, $X_0'{}_\infty$ bezüglich von den beiden Ebenen $\alpha_{2\infty}$, $\alpha_2'{}_\infty$ gleich sind. Unter dem Winkel des Strahls a_1 und des Raums S_3 kann man daher nicht den Winkel verstehen, den a_1 mit einem beliebigen Segment b_1 des Raums S_3 bildet, welches z. B. in A_0 endigt. Denn dieser Winkel wird durch das Segment des Punktes $X_{0\infty}$ und des Punktes $B_{0\infty}$ im Unendlichgrossen von b_1 gemessen, welches bezügl. der Ebene $\alpha_{2\infty}$ ein schiefes Segment ist. Wenn man daher ein anderes aus einem Strahl a_1' und einem Raum von drei Dimensionen S_3' bestehendes Paar hat und b_1' ein Strahl des Raums S_3' ist, welcher mit a_1' denselben Winkel, wie a_1 mit b_1 bildet, so können wir, wie gesagt, nicht schliessen, dass die von dem Strahl a_1 mit allen Graden des Raums S_3 gebildeten Winkel bezüglich denjenigen gleich seien, welche der Strahl a_1' mit den Strahlen des Raums S_3' bildet.

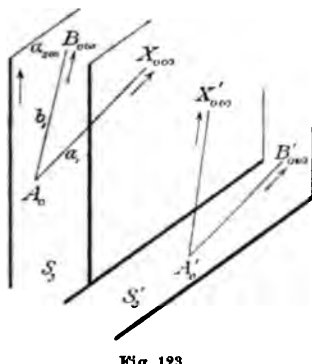


Fig. 123.

Wenn wir dagegen als Winkel des Strahls a_1 mit dem Raum S_3 den kleinsten Abstand des unendlich fernen Punktes des Strahls a_1 von der unendlich fernen Ebene dieses Raums definiren, alsdann sind, wenn ein andrer Strahl a_1' denselben Winkel mit einem andern Raum S_3' bildet, die Figuren (a_1S_3), $(a_1'S_3')$ identisch. Daher geben wir die folgende

Def. I. Unter dem Winkel eines Strahls mit einem Raum verstehen wir den Winkel, welcher durch den kleinsten Abstand des unendlich fernen Punktes des Strahls von der unendlich fernen Ebene des Raums gemessen wird (Bem. I).

Satz I. Der Winkel, welchen ein Strahl mit einem Raum macht, ist dem Winkel gleich, welchen der Strahl mit seiner Projection auf den Raum macht.

Wird bewiesen wie Satz I, § 90.

Satz II. Der Winkel, welchen ein Strahl mit seiner Projection in einem Raum von drei Dimensionen macht, ist der kleinste der Winkel, welche der Strahl mit allen Strahlen des Raums macht.

Wird bewiesen wie Satz II, § 90.

Zus. Der Winkel, welchen der Strahl mit der Verlängerung seiner Projection macht, ist der grösste.

Def. II. Unter den *Winkeln* einer Graden A_1 mit einem Raum S_3 verstehen wir die Winkel, welche die beiden Strahlen der Graden (Def. 1, § 7) mit diesem Raum bilden.

Bem. II. Diese Winkel werden durch die Abstände der Punkte im Unendlichgrossen der Graden von der Ebene im Unendlichgrossen des Raums gemessen und sind daher zu je zweien gleich und zu je zweien Supplementwinkel.

Probl. Mit Elementen des endlichen Gebiets einen Strahl zu construiren, welcher einen gegebenen Winkel mit einem Raum von drei Dimensionen macht.

Die Construction ist wie die für das ähnliche Problem § 90 in dem Raum von drei Dimensionen gegebene, nur mit dem Unterschied, dass wir hier einen Raum von drei Dimensionen statt einer Ebene haben.

§ 138. *Die Winkel einer Halbebene und einer Ebene mit einem Raum von drei Dimensionen.*

Bem. I. Es sei nun eine Halbebene a_2 und Raum von drei Dimensionen S_3 gegeben und die Grade des endlichen Gebiets, welche die Halbebene begrenzt, möge in dem gegebenen Raum liegen. Der Raum S_3 bestimmt im Unendlichgrossen eine Ebene $\alpha_{2\infty}$ und die Halbebene a_2 eine Halbgrade $a_{1\infty}$, welche zwischen den beiden Durchschnittspunkten mit der Ebene $\alpha_{2\infty}$ enthalten ist. Es gibt nur ein auf beide normales Segment, dessen Enden in den beiden liegen und welches den kleinsten Abstand der Graden von der Ebene gibt (Zus. II, Satz V, § 111). Wenn eine andre Halbgrade $a_1'{}_\infty$ und eine andre Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ gegeben ist, so bilden sie eine der ersten identische Figur, wenn der Abstand von $a_1'{}_\infty$ und $\alpha_2'{}_\infty$ derselbe ist, wie der von $a_{1\infty}$ und $\alpha_{2\infty}$ und wenn die Enden von $a_1'{}_\infty$ in $\alpha_2'{}_\infty$ liegen, d. h. also die Abstände der Punkte von $a_{1\infty}$ von den Punkten von $\alpha_{2\infty}$ sind bezüglich denjenigen der Punkte von $a_1'{}_\infty$ von $\alpha_2'{}_\infty$ gleich (Zus. III, Satz V, § 111). Dasselbe lässt sich nicht behaupten, wenn die Gleichheit zweier schiefen Segmente festgestellt ist. Daraus folgt

Def. I. Unter dem Winkel einer Halbebene mit einem Raum, welcher die die Halbebene begrenzende Grade enthält, verstehen wir den Winkel, welcher durch den kleinsten Abstand der Halbgraden im Unendlichgrossen der Halbebene von der unendlich fernen Ebene des Raums gemessen wird.

Satz I. Der Winkel einer Halbebene mit einem Raum ist dem Winkel gleich, welchen die Halbebene mit ihrer Projection auf den Raum macht.

Das auf der Halbgraden $a_{1\infty}$ und der Ebene $\alpha_{2\infty}$ normale Segment liegt in der Graden, welche durch die Pole der Ebene $\alpha_{2\infty}$ geht und die Grade $a_{1\infty}$

und ihre Pollinie schneidet (Satz VII, VIII, § 110). Verbindet man diese Grade mit der Halbebene a_2, so erhält man den durch a_2 senkrecht zu dem gegebenen Raum gehenden Raum, welcher diesen Raum in einer Ebene schneidet, die durch die Durchschnittsgrade der gegebenen Ebene und des gegebenen Raums geht und die Fusspunkte der von den Punkten der Halbebene a_2 auf den Raum S_3 gefällten Lothe enthält (Zus. I, Satz II, § 131).

Das obengenannte normale Segment misst daher den von der Halbebene mit ihrer Projection in dem Raum S_3 gebildeten Keilwinkel (Satz V, § 91).

Satz II. Der Winkel, welchen eine Halbebene mit einem Raum macht, ist der kleinste der Winkel, welche sie mit den andern Halbebenen des gegebenen Raums macht.

Denn jedes andre schiefe Segment $(A_{0\infty} B_{0\infty})$, dessen Enden auf der Halbgraden $a_{1\infty}$ und in der Ebene $\alpha_{2\infty}$ liegen, ist bezüglich seiner beiden Enden nicht das kleinste.

Probl. Mit Elementen des endlichen Gebiets eine Halbebene zu construiren, welche einen gegebenen Winkel mit einem Raum von drei Dimensionen macht.

Zu diesem Zweck wähle man eine Ebene des gegebenen Raums S_3 aus und lege durch diese Ebene den auf S_3 normalen Raum S_3'. Dann nehme man in der Ebene eine Grade und lege eine Halbebene durch dieselbe, welche mit der gegebenen Ebene den gegebenen Winkel in S_3 bildet.

Das Problem lässt, wie man sieht, unendlich viele Auflösungen zu.

Def. II. Unter den Winkeln einer Ebene mit einem Raum von drei Dimensionen verstehen wir die Winkel, welche die beiden Hälften der Ebene, von ihrer Durchschnittsgraden mit dem Raum aus gerechnet, mit diesem Raum bilden.

Bem. II. Da die Winkel der Ebene mit dem Raum durch Segmente derselben Graden gemessen werden, die zu je zweien gleich und Supplementsegmente sind, so gilt dasselbe von den Winkeln, welche eine Ebene mit einem Raum von drei Dimensionen macht.

§ 139. *Keile und Keilwinkel zweier Halbräume und Winkel zweier Ebenen, welche sich nicht in einer Graden schneiden.*

Def. I. Ein Büschel von Räumen schneidet den Raum im Unendlichgrossen $\pi_{3\infty}$ in einem Büschel von Ebenen, welches die unendlich ferne Grade $a_{1\infty}$ der Axe des gegebenen Büschels zur Axe hat.

Den Halbräumen des Büschels entsprechen die Halbebenen des Büschels im Unendlichgrossen, welche durch die Axe $a_{1\infty}$ begrenzt werden. Den Keilen zweier Halbebenen $a_{2\infty}$, $b_{2\infty}$ des Büschels entsprechen zwei Theile des Büschels von zwei Halbräumen α_3, β_3, welche *die Keile* der Halbräume α_3, β_3 heissen und zusammen genommen das ganze Büschel bilden.

Unter *dem Keil* zweier Halbräume verstehen wir immer denjenigen, welcher dem kleineren Keil ihrer Halbebenen im Unendlichgrossen entspricht, es sei denn, die beiden Keile wären gleich. Die zwei Halbräume heissen *Seiten*, die Axe des Büschels *Axe* des Keils.

Def. II. Wird ein solcher Keil einem andern ihm identischen bei jeder

Verbindung mit andern Keilen von Halbräumen substituirt, so heisst er *der Keilwinkel seiner Seiten.*[1])

Sind α_3 und β_3 die Seiten eines Keils, so bezeichnen wir ihn mit dem Symbol $(\alpha_3\beta_3)$.

Def. III. Wie die beiden Halbebenen $a_{2\infty}$, $b_{2\infty}$ zwei Keile von drei Dimensionen in dem Raum $\pi_{3\infty}$ bestimmen, welche zusammen genommen den vollständigen Raum ausmachen, wenn man den Punkt als Element betrachtet, so bestimmen zwei Halbräume eines Büschels zwei Theile des Raums S_4 um die Axe des Büschels, wobei ebenfalls der Punkt als Element angesehen wird und diese Theile heissen auch *Keile.* Auch in diesem Fall verstehen wir unter *dem Keil* zweier Halbräume den Theil des Raums, welcher ihrem Keil in dem Büschel entspricht.

Bem. I. Die der Bem. I, § 91 entsprechende Bemerkung gilt auch hier.

Satz I. Ein Keil zweier Halbräume wird von den Halbräumen gebildet, welche die Axe des Keils mit den Strahlen eines jeden Winkels verbinden, dessen Schenkel bezüglich auf den Seiten des Keils liegen.

Dies folgt aus der analogen Eigenschaft des Keils im Unendlichgrossen (Bem. II, § 112).

Satz II. Ein Keil zweier Halbräume wird von parallelen Ebenen oder Räumen in gleichen Winkeln oder Keilen geschnitten.

Der Beweis für die Ebenen wird geführt wie bei Satz II, § 91. Bei den Räumen beachte man, dass zwei parallele Räume die Halbräume in parallelen Halbebenen schneiden, welche in diesem Fall denselben Winkel bilden.

Zus. Zwei beliebige Halbräume werden von parallelen Ebenen und Räumen in Strahlen und Ebenen geschnitten, welche denselben Winkel bilden.

Denn sie werden in parallelen Strahlen oder Halbebenen geschnitten. Die Strahlen in demselben Halbraum haben dieselbe Richtung und die Halbebenen haben dieselbe Halbgrade im Unendlichgrossen.

Satz III. Gleichen Keilen in der Ebene im Unendlichgrossen entsprechen gleiche Keile der Büschel von Halbräumen, deren Axen durch die Axe der gegebenen Keile gehen.

Wird wie Satz III, § 91 bewiesen.

Zus. I. Zwei ungleiche Keile $(\alpha_{2\infty}\beta_{2\infty}) > (\alpha'_{2\infty}\beta'_{2\infty})$ *bestimmen um zwei durch ihre Axen gehende Ebenen* A_2, A'_2 *ungleiche Keile und zwar* $A_2\,(\alpha_{2\infty}\beta_{2\infty}) > A_2'\,(\alpha'_{2\infty}\beta'_{2\infty})$.

Wird wie Zus. II, § 91 bewiesen.

Zus. II. Zwei Keile von Halbräumen mit bezüglich parallelen Seiten sind gleich oder Supplementkeile.

Satz IV. Zwei gleiche Keile von Halbräumen bestimmen im Unendlichgrossen gleiche Keile.

Wird wie Satz IV, § 91 bewiesen.

---

1) Der Keilwinkel zweier Halbräume ist die intensive Grösse des von ihnen gebildeten Keils (Einl. a und c, § 111).

Satz V. Der Keilwinkel zweier Halbräume wird von dem normalen Abstand der beiden Halbebenen im Unendlichgrossen der Seiten des Keils gemessen.

Wird wie Satz V, § 91 bewiesen.

Satz VI. Ein Räumebüschel ist identisch in der Position seiner Theile.

Denn die Pollinie der Graden im Unendlichgrossen der Axe des Büschels ist identisch in der Position ihrer Theile.

Satz VII. Ein Keil $(\alpha_3 \beta_3)$ *ist demselben Keil in entgegengesetzter Richtung identisch.*

Denn dies ist auch das Segment, welches der Keil auf der genannten Pollinie abschneidet.

Def. IV. Wenn man ein Räumebüschel oder einen Keil von Halbräumen mit einer Ebene senkrecht zur Axe durchschneidet, so heisst das sich ergebende Gradenbüschel oder der Winkel *Normalschnitt* des Büschels oder des Keils.

Satz VIII. Je nachdem zwei Keile $(\alpha_3 \beta_3)$, $(\alpha_3' \beta_3')$ *gleich (ungleich) sind, sind auch ihre Normalschnitte gleich (ungleich) und umgekehrt.*

Verbindet man einen Punkt A_0 der Axe eines Keils $(\alpha_3 \beta_3)$ mit den zwei Endpunkten $A_{0\infty}$, $B_{0\infty}$ des auf den beiden Halbebenen $a_{2\infty}$, $b_{2\infty}$ von α_3 und β_3 senkrechten Segments, so erhält man eine Ebene, welche auf der Axe senkrecht von der ersten Art steht, weil die Grade $A_{0\infty} B_{0\infty}$ die Pollinie der Graden $(a_{2\infty} b_{2\infty})$ ist (Satz I, § 129). Je nachdem also die auf den Paaren von Halbebenen im Unendlichgrossen der Seiten der beiden gegebenen Keile normalen Segmente gleich oder ungleich sind, sind auch die Winkel der entsprechenden Normalschnitte gleich oder ungleich.

Sind dagegen die Normalschnitte gleich oder ungleich, so bedeutet dies, dass die obigen Segmente gleich oder ungleich sind und mithin sind die beiden Keile gleich oder ungleich (Satz V).

Def. V. Unter dem Winkel zweier beliebiger Halbräume versteht man denjenigen, welcher durch das normale Segment der beiden Halbebenen im Unendlichgrossen der beiden Halbräume gemessen wird (Zus. II, Satz IV, § 111).

Satz IX. Der Winkel zweier Halbräume ist der kleinste oder der grösste von den Winkeln, welche ein Strahl des einen mit einem Strahl des andern Halbraums und umgekehrt der letztere mit dem ersten macht, je nachdem er kleiner oder grösser als ein Rechter ist.

Wird wie Satz IX, § 91 bewiesen.

Bem. II. Hier gilt die der Bem. II, § 91 entsprechende Bemerkung.

Zus. Der Supplementwinkel der beiden Halbräume ist im ersten Fall der grösste, im zweiten der kleinste der Winkel, welche die Strahlen der beiden Halbräume miteinander machen.

Satz X. Zwei Scheitelkeile von Halbräumen sind gleich.

Denn sie haben im Unendlichgrossen zwei einander gleiche Scheitelkeile (Satz X, § 91; Bem. III, § 112 und Satz III).

Def. VI. Unter den Keilen und Winkeln zweier Räume $A_3 B_3$ verstehen wir die Keile und Winkel, welche von den vier Paaren von Halbräumen

die Lothe von dem Punkt aus auf den Graden zu errichten. Diese Lothe bestimmen dann den verlangten Raum (Bem. III, § 60).

Liegt dagegen der Punkt ausserhalb der Graden, so fälle man in der durch die Grade und den Punkt bestimmten Ebene das Loth von dem Punkt auf die Grade. Der in dem Fusspunkt dieses Lothes auf der gegebenen Graden senkrecht stehende Raum ist der gesuchte Raum.

b) Der auf einen Raum senkrechten Graden, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Liegt der Punkt in dem Raum, so genügt es in diesem Raum drei nicht in einer Ebene liegende Grade zu ziehen. Die drei Räume, welche durch den gegebenen Punkt gehen und auf den drei Graden senkrecht stehen (a), schneiden sich in der verlangten Graden. Aehnlich ist es, wenn der Punkt ausserhalb des Raums liegt.

c) Einer auf einer andern Ebene von der ersten Art senkrechten Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Man lege durch den Punkt die auf zwei Graden der gegebenen Ebene senkrechten Räume (a), welche sich in der gesuchten Ebene schneiden.

d) Einer durch eine Grade gehenden Ebene, welche auf einem Raum senkrecht steht.

Man ziehe durch zwei Punkte der Graden die Lothe auf den gegebenen Raum; diese bestimmen die gesuchte Ebene.

e) Eines durch eine Grade gehenden Raums, welcher auf einer Ebene senkrecht steht.

Man fälle von zwei Punkten der Graden Lothe auf die Ebene, welche sie treffen (Constr. II, § 87); diese bestimmen den verlangten Raum.

f) Eines durch eine Ebene gehenden Raums, welcher senkrecht auf einem andern Raum steht.

Man fälle von einem Punkt der Ebene das Loth auf den Raum; dieses bestimmt mit der Ebene den gesuchten Raum.

g) Einer durch einen Punkt gehenden Ebene, welche senkrecht auf zwei Graden steht und diese Graden trifft.

Durch die den beiden Graden gemeinschaftliche normale Transversale (Constr. V, § 87) lege man die Ebene, welche senkrecht auf dem von den Graden bestimmten Raum steht (d).

h) Der auf drei Graden senkrechten Graden, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Man lege durch den Punkt die auf den drei Graden senkrechten Räume (a), welche sich in der verlangten Graden schneiden.

i) Der auf einer Graden und einer Ebene senkrechten Graden, welche beide schneidet.

Durch die gegebene Ebene lege man den der gegebenen Graden parallelen Raum (c, § 126) und ziehe dann durch die Grade die auf diesen Raum senkrechte Ebene (d). Die Durchschnittsgrade dieser Ebene und dieses Raums

schneidet die gegebene Ebene in dem Punkt, in welchem sie von dem gesuchten Loth getroffen wird.

Um dieses Loth zu erhalten, braucht man nur von dem gefundenen Punkt das Loth auf die Grade zu fällen (Bew. Satz IV, § 132).

k) Einer durch einen Punkt gehenden Ebene, welche senkrecht auf zwei gegebenen Räumen steht.

Man ziehe durch den Punkt die Lothe auf die beiden Räume (b), welche in der verlangten Ebene liegen.

Oder: Man lege durch den Punkt die auf der Durchschnittsebene der beiden Räume von der ersten Art senkrechte Ebene (c).

l) Des durch einen Punkt gehenden und auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrechten Raums.

Man ziehe zwei Ebenen, welche zu den beiden gegebenen Ebenen senkrecht von der ersten Art sind (c) und den zu diesen beiden Ebenen, welche auch parallel von der ersten oder zweiten Art sind (Zus. VII, Satz I, § 129) parallelen Raum, welcher durch den gegebenen Punkt geht.

m) Einer durch einen gegebenen Punkt gehenden Graden, welche auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrecht steht.

Hat man die zwei Ebenen construirt, welche auf den beiden gegebenen Ebenen senkrecht von der ersten Art sind (c), so genügt es, durch den Punkt die ihnen parallele Grade zu ziehen (Bem. III, § 60).

n) Der Ebene, welche auf zwei von der zweiten Art parallelen Ebenen senkrecht von der zweiten Art steht.

Man ziehe eine diesen Ebenen gemeinschaftliche Normale und hat dann nur nöthig durch die beiden gegebenen Ebenen die dieser Normalen parallelen Räume zu legen, welche sich in der gesuchten Ebene schneiden (siehe Bew. Satz VII, § 132).

o) Einer Gruppe von vier Graden, welche durch denselben Punkt gehen und zu je zweien senkrecht aufeinander stehen.

In dem Punkt errichte man zwei auf einer beliebigen durch ihn gehenden Ebene senkrechte Grade, dann in demselben Punkt die Normale auf die durch diese bestimmte Ebene und schliesslich die Normale auf dem durch die drei ersten Graden bestimmten Raum (b).

6.

Abstände.

§ 134. *Bem. I.* Die in den §§ 88 und 89 gegebenen Eigenschaften des Abstandes eines Punktes von einer Graden, eines Punktes von einer Ebene, der Punkte einer Graden von einer ihr parallelen Ebene, zweier von der ersten Art parallelen Ebenen, zweier Graden voneinander gelten auch in dem Raum von vier Dimensionen.

Satz I. Das auf eine Grade und eine Ebene normale Segment gibt den kleinsten Abstand der Punkte der Graden von denen der Ebene und umgekehrt.

Denn der Abstand eines Punktes einer Graden von der Ebene wird auf dem von diesem Punkt auf die Ebene gefällten Loth, welches sie trifft, gemessen, während der kleinste Abstand eines Punktes der Ebene S_2 von der Graden S_1 durch das von dem Punkt auf die Grade S_1 in der durch den Punkt und diese Grade gehenden Ebene gefällte Loth gegeben ist. Das der Graden und der Ebene gemeinschaftliche normale Segment, dessen Enden auf der Graden und der Ebene liegen (Satz IV, § 132) liefert daher den kleinsten Abstand zwischen den Punkten der Graden und den Punkten der Ebene.

Def. I. Diesen Abstand nennen wir *den Abstand der Graden von der Ebene.*

Satz II. Die normalen Segmente zweier von der zweiten Art parallelen Ebenen, deren Enden in den beiden Ebenen liegen, sind gleich.

Denn die Enden derselben sind zwischen zwei parallelen Graden enthalten (Satz VII, § 132).

Def. II. Der normale Abstand zweier von der zweiten Art parallelen Ebenen heisst *der Abstand der beiden Ebenen.*

Bem. II. Diese Eigenschaft gilt nicht für zwei Ebenen, welche sich in einem Punkt des endlichen Gebiets schneiden, weil es in diesem Fall kein den beiden Ebenen gemeinschaftliches Loth gibt (Satz I, § 128).

Probl. Eine Ebene zu construiren, welche zu einer gegebenen Ebene S_2 parallel von der zweiten Art ist und einen gegebenen Abstand d von derselben hat.

Durch eine Grade S_1 von S_2 lege man eine Ebene R_2 senkrecht auf S_2 und wähle in R_2 eine zu S_1 parallele Grade in dem Abstand d. Die Grade im Unendlichgrossen von R_2 sei $r_{1\infty}$ und $\varrho_{1\infty}$ ihre Pollinie. Die Grade $\sigma_1{}'_\infty$ der gesuchten Ebene S_2' muss der Graden $r_{1\infty}$ conjugirt sein und muss daher die Graden $r_{1\infty}$, $\varrho_{1\infty}$ schneiden; sie muss ferner die Grade $\sigma_{1\infty}$ von S_2 treffen. Die Grade $\sigma_1{}'_\infty$ schneidet daher die drei Graden $\sigma_{1\infty}$, $r_{1\infty}$, $\varrho_{1\infty}$ und weil es unendlich viele Graden gibt, welche diese drei Graden schneiden und durch den $\sigma_{1\infty}$ und $r_{1\infty}$ gemeinschaftlichen Punkt nämlich den Punkt im Unendlichgrossen von S_1 gehen, so gibt es auch unendlich viele Ebenen, welche der Bedingung des Problems genügen, nachdem man die Grade S_1 und die Ebene R_2 ausgewählt hat.

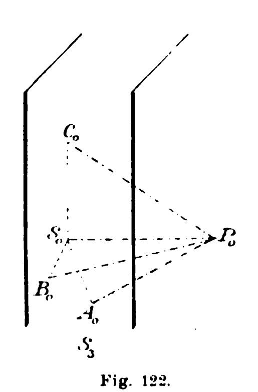


Fig. 122.

§ 135. *Satz I. Das Minimum der Abstände eines Punktes ausserhalb eines Raums von den Punkten dieses Raums ist der Abstand des Punktes von dem Fusspunkt des von ihm auf den Raum gefällten Lothes.*

Wird ähnlich wie Satz I, § 88 bewiesen (Fig. 122).

Def. I. Der kleinste Abstand eines Punktes P_0 von einem Raum S_3 heisst *der Abstand* des Punktes von dem Raum; die nicht normalen Segmente heissen *schiefe.*

Satz II. Die schiefen Segmente mit gleichen Projectionen sind gleich und bilden mit dem senkrechten Segment gleiche Winkel. Von zwei schiefen Segmenten

ist dasjenige das grössere, dessen Ende in dem Raum von dem Fusspunkt der Normalen weiter entfernt liegt.

Wird wie Satz II, § 88 bewiesen (Fig. 122).

Zus. I. Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

Zus. II. Die Punkte einer Kugeloberfläche eines Raums von drei Dimensionen haben gleichen Abstand von einem beliebigen Punkt des in ihrem Mittelpunkt auf ihrem Raum errichteten Loths.

Wird bewiesen wie der analoge Zus. zu Satz II, § 88.

Zus. III. Alle Punkte eines Raums, welche gleichweit von einem Punkt ausserhalb des Raums abstehen, liegen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt der Fusspunkt des von dem Punkt auf den Raum gefällten Lothes ist.

Wird ebenso wie Zus. III, Satz II, § 88 bewiesen; man hat nur das Wort Ebene mit dem Wort Raum zu vertauschen.

Satz III. Alle Punkte, von welchen die Punkte einer Kugel gleichweit abstehen, liegen auf dem in dem Mittelpunkt der Kugel auf ihrem Raum errichteten Loth.

Der Beweis wird ebenso wie bei Satz III, § 88 geführt; man vertausche nur die Worte Kreis und Ebene mit den Worten Kugel und Raum.

Satz IV. Wenn zwei Punkte A_0, A_0' bezüglich denselben Abstand von zwei Räumen A_3, A_3' haben, so sind die Segmente, welche sie mit den Punkten dieser Räume bestimmen, zu je zweien gleich und die Figuren $(A_0 A_3)$, $(A_0' A_3')$ identisch.

Wird wie Satz IV, § 88 bewiesen.

Zus. I. Wenn zwei Punkte denselben Abstand von einem Raum haben, so sind die Segmente, welche sie mit den Punkten des Raums bestimmen, bezüglich zu je zweien gleich und die beiden Figuren, welche sie mit dem gegebenen Raum bilden, identisch.

Zus. II. Wenn zwei Punkte in einem auf einem Raum errichteten Loth liegen und denselben Abstand von dem Raum haben, so sind sie gleichweit von jedem Punkt des Raums entfernt.

Beweis wie bei Zus. I und II, Satz IV, § 88.

Satz V. Ist eine einem Raum von drei Dimensionen parallele Grade oder Ebene gegeben, so sind die Abstände der Punkte der Graden oder der Ebene von dem Raum gleich.

Denn die Normalen der Punkte einer Graden oder Ebene nach einem Raum von drei Dimensionen sind parallel (Zus. II, Satz II, § 128); ist mithin die Grade (die Ebene) dem Raum parallel, so liegen die Fusspunkte der Lothe in einer weiteren Graden (oder Ebene), welche der gegebenen Graden (oder Ebene) parallel ist (Zus. I, Satz II, § 130 oder § 131 und Zus. I, Satz V, oder Zus. I, Satz VI, § 124). Damit ist der Satz bewiesen (Satz VI, § 54 u. Satz VI, § 88).

Def. II. Der Abstand der Punkte einer Graden oder Ebene von den Punkten eines parallelen Raums von drei Dimensionen heisst *der Abstand der Graden oder der Ebene von dem Raum.*

Zus. Der Abstand einer Graden oder Ebene von einem zu ihr parallelen Raum ist der kleinste Abstand der Punkte der Graden oder Ebene von denjenigen des Raums (Satz I).

Satz VI. Die Abstände der Punkte eines Raums von einem zu ihm parallelen Raum sind gleich (Zus. II, Satz II und Satz VI, § 124).

Beweis wie zu Satz VI, § 88.

Def. III. Der Abstand der Punkte eines Raums von drei Dimensionen von einem ihm parallelen Raum heisst *der Abstand der beiden Räume.*

Satz VII. Zwei Paare paralleler Räume, welche denselben Abstand haben, sind zwei identische Figuren.

Der Beweis ist ähnlich, wie bei den beiden Paaren paralleler Ebenen (Satz VII, § 88); man vertausche nur das Wort Ebene mit dem Wort Raum.

7.

Winkel.

§ 136. *Die Winkel eines Strahls und einer Graden mit einer Ebene.*

Bem. I. Die früheren Definitionen von Winkel zweier Strahlen, Winkel zweier Graden, eines Strahls und einer Ebene, zweier Ebenen, welche sich in einer Graden schneiden, gelten auch in dem Raum von vier Dimensionen. Da zwei Grade immer in einem Raum von drei Dimensionen liegen, so bleiben auch in dem Raum von vier Dimensionen die Sätze des § 89 bestehen. Wie bisher immer, so geben wir auch hier die Definitionen der Winkel derart, dass die Winkel als Elemente zur Bestimmung der Figur betrachtet werden können und daher zwei Figuren identisch sind, wenn sie diese Elemente allein oder ausserdem noch andre gleich haben.

Bem. II. Wenn der Strahl oder die Grade und die Ebene sich schneiden, so gilt die frühere Definition (Def. I, § 90), weil sie in einem Raum von drei Dimensionen enthalten sind.

Satz I. Wenn ein Strahl und eine Ebene nicht in einem Raum von drei Dimensionen liegen, so ist der Winkel, welchen der Strahl mit jeder Ebene, welche ihn trifft und der gegebenen parallel ist, constant und dem Winkel gleich, welchen die Ebene mit jedem Strahl macht, welcher sie trifft und dem gegebenen Strahl parallel ist.

Denn diese Winkel werden durch die Abstände des Punktes im Unendlichgrossen des Strahls von der Graden im Unendlichgrossen der Ebene gemessen (Def. I, § 90 und Bem. I).

Def. I. Dieser constante Winkel heisst *der Winkel* des Strahls mit der Ebene.

Satz II. Die Winkel, welche eine Grade mit einer Ebene macht, sind dem Winkel gleich, den sie mit ihrer Projection auf die Ebene bildet.

Diese Projection erhält man, wenn man durch die Grade den Raum S_3 senkrecht zur Ebene legt (Satz III, § 130). Dieser Raum trifft die unendlich ferne Grade der Ebene in den Punkten im Unendlichgrossen der Projection der Graden, welche auch die Fusspunkte des von dem unendlich fernen Punkt der Graden auf die Grade im Unendlichgrossen der Ebene gefällten Loths sind. Denn diese unendlich ferne Grade der Ebene ist der Ebene im Unendlichgrossen des Raums S_3 conjugirt (Satz I, § 130) und steht desshalb senkrecht auf dieser Ebene (Satz III, § 110) und daher auch auf der

Graden, welche den Durchschnittspunkt beider mit dem unendlich fernen Punkt der Graden verbindet (Zus. Satz II, § 110; Def. I und Bem. I).

Satz III. Der Winkel, welchen ein Strahl mit seiner Projection auf eine Ebene macht, ist der kleinste Winkel, den der Strahl mit allen Strahlen der Ebene bildet.

Der Beweis dieses Satzes ist identisch mit dem Beweis des Satzes II, § 90; der einzige Unterschied besteht darin, dass in Satz II, § 90 der Strahl und die Ebene in dem Raum von drei Dimensionen enthalten sind. Der Satz gilt mithin allgemein.

Zus. Der Winkel, welchen der Strahl mit der Verlängerung seiner Projection macht, ist der grösste.

Def. II. Unter den Winkeln einer Graden mit einer Ebene versteht man die Winkel, welche die beiden entgegengesetzten Strahlen der Graden mit der Ebene bilden.

§ 137. *Die Winkel eines Strahls und einer Graden mit einem Raum von drei Dimensionen.*

Bem. I. Es seien nun ein Strahl a_1 und ein Raum von drei Dimensionen S_3 gegeben und A_0 sei der Durchschnittspunkt des Strahls a_1 mit S_3 (Fig. 123). $X_{0\infty}$ und $\alpha_{2\infty}$ seien die Elemente im Unendlichgrossen des Strahls a_1 und des Raums S_3. Der Abstand des Punktes $X_{0\infty}$ von den Punkten der Ebene $\alpha_{2\infty}$ hat ein Minimum und ein Maximum, welche auf dem von $X_{0\infty}$ auf die Ebene $\alpha_{2\infty}$ gefällten Loth gemessen werden (Satz II, § 111). Gibt es im Unendlichen eine andre Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ und einen andern Punkt $X_0'{}_\infty$ und ist der kleinste oder grösste Abstand dieses Punktes von der Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ derselbe, wie der des Punktes $A_{0\infty}$ von $\alpha_{2\infty}$, so sind die Abstände des Punktes $X_0'{}_\infty$ von den Punkten der Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ bezüglich denjenigen des Punktes $X_{0\infty}$ von den Punkten der Ebene $\alpha_{2\infty}$ gleich, d. h. die beiden Figuren $(X_{0\infty}\alpha_{2\infty})$, $(X_0'{}_\infty\alpha_2'{}_\infty)$ sind identisch (Bem. II, § 111). Wenn aber ein schiefes Segment, dessen Enden der Punkt $A_{0\infty}$ und ein Punkt $B_{0\infty}$ der Ebene $\alpha_{2\infty}$ sind, einem Segment gleich ist, dessen Enden in dem Punkt $A_0'{}_\infty$ und in der Ebene $\alpha_2'{}_\infty$ liegen, so folgt daraus allein noch nicht, dass die beiden Figuren $(X_{0\infty}\alpha_{2\infty})$, $(X_0'{}_\infty\alpha_2'{}_\infty)$ identisch sind, d. h. dass die Abstände der Punkte $X_{0\infty}$, $X_0'{}_\infty$ bezüglich von den beiden Ebenen $\alpha_{2\infty}$, $\alpha_2'{}_\infty$ gleich sind. Unter dem Winkel des Strahls a_1 und des Raums S_3 kann man daher nicht den Winkel verstehen, den a_1 mit einem beliebigen Segment b_1 des Raums S_3 bildet, welches z. B. in A_0 endigt. Denn dieser Winkel wird durch das Segment des Punktes $X_{0\infty}$ und des Punktes $B_{0\infty}$ im Unendlichgrossen von b_1 gemessen, welches bezügl. der Ebene $\alpha_{2\infty}$ ein schiefes Segment ist. Wenn man daher ein anderes aus einem Strahl a_1' und einem Raum von drei Dimensionen S_3' bestehendes Paar hat und b_1' ein Strahl des Raums S_3' ist, welcher mit a_1' denselben Winkel, wie a_1 mit b_1 bildet, so können wir, wie gesagt, nicht schliessen, dass die von dem Strahl a_1 mit allen Graden des Raums S_3 gebildeten Winkel bezüglich denjenigen gleich seien, welche der Strahl a_1' mit den Strahlen des Raums S_3' bildet.

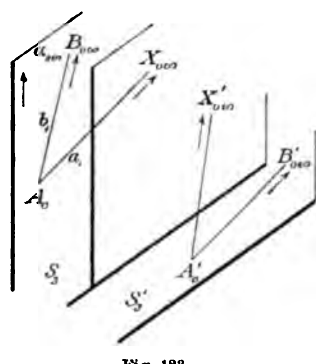


Fig. 123.

Wenn wir dagegen als Winkel des Strahls a_1 mit dem Raum S_3 den kleinsten Abstand des unendlich fernen Punktes des Strahls a_1 von der unendlich fernen Ebene dieses Raums definiren, alsdann sind, wenn ein andrer Strahl a_1' denselben Winkel mit einem andern Raum S_3' bildet, die Figuren $(a_1 S_3)$, $(a_1' S_3')$ identisch. Daher geben wir die folgende

Def. I. Unter dem Winkel eines Strahls mit einem Raum verstehen wir den Winkel, welcher durch den kleinsten Abstand des unendlich fernen Punktes des Strahls von der unendlich fernen Ebene des Raums gemessen wird (Bem. I).

Satz I. Der Winkel, welchen ein Strahl mit einem Raum macht, ist dem Winkel gleich, welchen der Strahl mit seiner Projection auf den Raum macht.

Wird bewiesen wie Satz I, § 90.

Satz II. Der Winkel, welchen ein Strahl mit seiner Projection in einem Raum von drei Dimensionen macht, ist der kleinste der Winkel, welche der Strahl mit allen Strahlen des Raums macht.

Wird bewiesen wie Satz II, § 90.

Zus. Der Winkel, welchen der Strahl mit der Verlängerung seiner Projection macht, ist der grösste.

Def. II. Unter den *Winkeln* einer Graden A_1 mit einem Raum S_3 verstehen wir die Winkel, welche die beiden Strahlen der Graden (Def. I, § 7) mit diesem Raum bilden.

Bem. II. Diese Winkel werden durch die Abstände der Punkte im Unendlichgrossen der Graden von der Ebene im Unendlichgrossen des Raums gemessen und sind daher zu je zweien gleich und zu je zweien Supplementwinkel.

Probl. Mit Elementen des endlichen Gebiets einen Strahl zu construiren, welcher einen gegebenen Winkel mit einem Raum von drei Dimensionen macht.

Die Construction ist wie die für das ähnliche Problem § 90 in dem Raum von drei Dimensionen gegebene, nur mit dem Unterschied, dass wir hier einen Raum von drei Dimensionen statt einer Ebene haben.

§ 138. *Die Winkel einer Halbebene und einer Ebene mit einem Raum von drei Dimensionen.*

Bem. I. Es sei nun eine Halbebene a_2 und Raum von drei Dimensionen S_3 gegeben und die Grade des endlichen Gebiets, welche die Halbebene begrenzt, möge in dem gegebenen Raum liegen. Der Raum S_3 bestimmt im Unendlichgrossen eine Ebene $\alpha_{2\infty}$ und die Halbebene a_2 eine Halbgrade $a_{1\infty}$, welche zwischen den beiden Durchschnittspunkten mit der Ebene $\alpha_{2\infty}$ enthalten ist. Es gibt nur ein auf beide normales Segment, dessen Enden in den beiden liegen und welches den kleinsten Abstand der Graden von der Ebene gibt (Zus. II, Satz V, § 111). Wenn eine andre Halbgrade $a_1{}'_\infty$ und eine andre Ebene $\alpha_2{}'_\infty$ gegeben ist, so bilden sie eine der ersten identische Figur, wenn der Abstand von $a_1{}'_\infty$ und $\alpha_2{}'_\infty$ derselbe ist, wie der von $a_{1\infty}$ und $\alpha_{2\infty}$ und wenn die Enden von $a_1{}'_\infty$ in $\alpha_2{}'_\infty$ liegen, d. h. also die Abstände der Punkte von $a_{1\infty}$ von den Punkten von $\alpha_{2\infty}$ sind bezüglich denjenigen der Punkte von $a_1{}'_\infty$ von $\alpha_2{}'_\infty$ gleich (Zus. III, Satz V, § 111). Dasselbe lässt sich nicht behaupten, wenn die Gleichheit zweier schiefen Segmente festgestellt ist. Daraus folgt

Def. I. Unter dem Winkel einer Halbebene mit einem Raum, welcher die die Halbebene begrenzende Grade enthält, verstehen wir den Winkel, welcher durch den kleinsten Abstand der Halbgraden im Unendlichgrossen der Halbebene von der unendlich fernen Ebene des Raums gemessen wird.

Satz I. Der Winkel einer Halbebene mit einem Raum ist dem Winkel gleich, welchen die Halbebene mit ihrer Projection auf den Raum macht.

Das auf der Halbgraden $a_{1\infty}$ und der Ebene $\alpha_{2\infty}$ normale Segment liegt in der Graden, welche durch die Pole der Ebene $\alpha_{2\infty}$ geht und die Grade $a_{1\infty}$

und ihre Pollinie schneidet (Satz VII, VIII, § 110). Verbindet man diese Grade mit der Halbebene a_2, so erhält man den durch a_2 senkrecht zu dem gegebenen Raum gehenden Raum, welcher diesen Raum in einer Ebene schneidet, die durch die Durchschnittsgrade der gegebenen Ebene und des gegebenen Raums geht und die Fusspunkte der von den Punkten der Halbebene a_2 auf den Raum S_3 gefällten Lothe enthält (Zus. I, Satz II, § 131).

Das obengenannte normale Segment misst daher den von der Halbebene mit ihrer Projection in dem Raum S_3 gebildeten Keilwinkel (Satz V, § 91).

Satz II. Der Winkel, welchen eine Halbebene mit einem Raum macht, ist der kleinste der Winkel, welche sie mit den andern Halbebenen des gegebenen Raums macht.

Denn jedes andre schiefe Segment $(A_{0x} B_{0\infty})$, dessen Enden auf der Halbgraden a_{1x} und in der Ebene $\alpha_{2\infty}$ liegen, ist bezüglich seiner beiden Enden nicht das kleinste.

Probl. Mit Elementen des endlichen Gebiets eine Halbebene zu construiren, welche einen gegebenen Winkel mit einem Raum von drei Dimensionen macht.

Zu diesem Zweck wähle man eine Ebene des gegebenen Raums S_3 aus und lege durch diese Ebene den auf S_3 normalen Raum S_3'. Dann nehme man in der Ebene eine Grade und lege eine Halbebene durch dieselbe, welche mit der gegebenen Ebene den gegebenen Winkel in S_3 bildet.

Das Problem lässt, wie man sieht, unendlich viele Auflösungen zu.

Def. II. Unter den Winkeln einer Ebene mit einem Raum von drei Dimensionen verstehen wir die Winkel, welche die beiden Hälften der Ebene, von ihrer Durchschnittsgraden mit dem Raum aus gerechnet, mit diesem Raum bilden.

Bem. II. Da die Winkel der Ebene mit dem Raum durch Segmente derselben Graden gemessen werden, die zu je zweien gleich und Supplementsegmente sind, so gilt dasselbe von den Winkeln, welche eine Ebene mit einem Raum von drei Dimensionen macht.

§ 139. *Keile und Keilwinkel zweier Halbräume und Winkel zweier Ebenen, welche sich nicht in einer Graden schneiden.*

Def. I. Ein Büschel von Räumen schneidet den Raum im Unendlichgrossen π_{3x} in einem Büschel von Ebenen, welches die unendlich ferne Grade a_{1x} der Axe des gegebenen Büschels zur Axe hat.

Den Halbräumen des Büschels entsprechen die Halbebenen des Büschels im Unendlichgrossen, welche durch die Axe a_{1x} begrenzt werden. Den Keilen zweier Halbebenen a_{2x}, b_{2x} des Büschels entsprechen zwei Theile des Büschels von zwei Halbräumen α_3, β_3, welche *die Keile* der Halbräume α_3, β_3 heissen und zusammen genommen das ganze Büschel bilden.

Unter *dem Keil* zweier Halbräume verstehen wir immer denjenigen, welcher dem kleineren Keil ihrer Halbebenen im Unendlichgrossen entspricht, es sei denn, die beiden Keile wären gleich. Die zwei Halbräume heissen *Seiten*, die Axe des Büschels *Axe* des Keils.

Def. II. Wird ein solcher Keil einem andern ihm identischen bei jeder

Satz V. Der Keilwinkel zweier Halbräume wird von dem normalen Abstand der beiden Halbebenen im Unendlichgrossen der Seiten des Keils gemessen.

Wird wie Satz V, § 91 bewiesen.

Satz VI. Ein Räumebüschel ist identisch in der Position seiner Theile.

Denn die Pollinie der Graden im Unendlichgrossen der Axe des Büschels ist identisch in der Position ihrer Theile.

Satz VII. Ein Keil $(\alpha_3 \beta_3)$ *ist demselben Keil in entgegengesetzter Richtung identisch.*

Denn dies ist auch das Segment, welches der Keil auf der genannten Pollinie abschneidet.

Def. IV. Wenn man ein Räumebüschel oder einen Keil von Halbräumen mit einer Ebene senkrecht zur Axe durchschneidet, so heisst das sich ergebende Gradenbüschel oder der Winkel *Normalschnitt* des Büschels oder des Keils.

Satz VIII. Je nachdem zwei Keile $(\alpha_3 \beta_3)$, $(\alpha_3' \beta_3')$ *gleich (ungleich) sind, sind auch ihre Normalschnitte gleich (ungleich) und umgekehrt.*

Verbindet man einen Punkt A_0 der Axe eines Keils $(\alpha_3 \beta_3)$ mit den zwei Endpunkten $A_{0\infty}$, $B_{0\infty}$ des auf den beiden Halbebenen $a_{2\infty}$, $b_{2\infty}$ von α_3 und β_3 senkrechten Segments, so erhält man eine Ebene, welche auf der Axe senkrecht von der ersten Art steht, weil die Grade $A_{0\infty} B_{0\infty}$ die Pollinie der Graden $(a_{2\infty} b_{2\infty})$ ist (Satz I, § 129). Je nachdem also die auf den Paaren von Halbebenen im Unendlichgrossen der Seiten der beiden gegebenen Keile normalen Segmente gleich oder ungleich sind, sind auch die Winkel der entsprechenden Normalschnitte gleich oder ungleich.

Sind dagegen die Normalschnitte gleich oder ungleich, so bedeutet dies, dass die obigen Segmente gleich oder ungleich sind und mithin sind die beiden Keile gleich oder ungleich (Satz V).

Def. V. Unter dem Winkel zweier beliebiger Halbräume versteht man denjenigen, welcher durch das normale Segment der beiden Halbebenen im Unendlichgrossen der beiden Halbräume gemessen wird (Zus. II, Satz IV, § 111).

Satz IX. Der Winkel zweier Halbräume ist der kleinste oder der grösste von den Winkeln, welche ein Strahl des einen mit einem Strahl des andern Halbraums und umgekehrt der letztere mit dem ersten macht, je nachdem er kleiner oder grösser als ein Rechter ist.

Wird wie Satz IX, § 91 bewiesen.

Bem. II. Hier gilt die der Bem. II, § 91 entsprechende Bemerkung.

Zus. Der Supplementwinkel der beiden Halbräume ist im ersten Fall der grösste, im zweiten der kleinste der Winkel, welche die Strahlen der beiden Halbräume miteinander machen.

Satz X. Zwei Scheitelkeile von Halbräumen sind gleich.

Denn sie haben im Unendlichgrossen zwei einander gleiche Scheitelkeile (Satz X, § 91; Bem. III, § 112 und Satz III).

Def. VI. Unter den Keilen und Winkeln zweier Räume $A_3 B_3$ verstehen wir die Keile und Winkel, welche von den vier Paaren von Halbräumen

$(a_3 b_3)$, $(b_3 a_3')$, $(a_3' b_3')$, $(b_3' a_3)$ gebildet werden, wenn a_3, a_3', b_3, b_3' die Halbräume sind, in welche die gegebenen Räume durch ihre gemeinschaftliche Ebene getheilt werden.

Bem. III. Analog der Bem. III, § 91.

Satz XI. Die Keile zweier Räume haben zwei Halbirungsräume.

Beweis wie bei Satz XI, § 91.

Probl. Mit Elementen des endlichen Gebiets einen Halbraum von drei Dimensionen zu construiren, welcher mit einem andern Halbraum, der dieselbe Grenzebene hat, einen gegebenen Winkel macht.

Durch einen Punkt A_0 der Ebene σ_2, welche den gegebenen Halbraum begrenzt, ziehe man eine auf diesem Halbraum senkrechte Ebene, welche ihn in einem Strahl a_1 schneidet. In dieser normalen Ebene ziehe man von A_0 einen zweiten Strahl b_1, welcher mit a_1 den gegebenen Winkel bildet (Bem. III, § 60). Der durch die Ebene σ_2 und den Strahl b_1 bestimmte Halbraum ist der gesuchte.

Das Problem lässt zwei Auflösungen zu.

§ 140. *Die Winkel zweier Ebenen.*

Bem. I. Für den Fall, dass zwei Ebenen sich in einer Graden schneiden, haben wir die Definition ihrer Winkel bereits gegeben (Def. I und VI, § 91). Schneiden sie sich in einem einzigen Punkt, so genügt diese Definition nicht mehr; sie bilden keinen Keil mehr, so wenig wie zwei Grade, welche sich nicht schneiden, einen Winkelsector bilden.

Satz I. Zwei Paare von beliebigen Ebenen sind identisch, wenn die Paare von Graden im Unendlichgrossen derselben dieselben Abstände haben.

A_2, B_2 seien die beiden gegebenen Ebenen, $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ ihre Graden im Unendlichgrossen und $c_{1\infty}$, $d_{1\infty}$ die beiden gemeinschaftlichen Normalen, $A_{0\infty}$, $A_0'{}_\infty$; $B_{0\infty}$, $B_0'{}_\infty$ die Durchschnittspunkte von $c_{1\infty}$, $d_{1\infty}$ mit $a_{1\infty}$, $b_{1\infty}$ (Satz X, § 117).

Hat man ein andres Paar von Graden $a_1'{}_\infty$, $b_1'{}_\infty$ mit denselben Abständen, so sind die beiden Gradenpaare $(a_{1\infty} b_{1\infty})$, $(a_1'{}_\infty b_1'{}_\infty)$ identisch (Bem. II, § 114) und mithin auch die beiden Ebenenpaare, welche sie mit zwei beliebigen Punkten A_0, B_0 des Raums S_4 verbinden (Satz III, § 15).

Def. I. Unter *den Winkeln* zweier Ebenen verstehen wir daher diejenigen, welche durch die auf den Graden im Unendlichgrossen der beiden Ebenen normalen Segmente gemessen werden.

Def. II. Schneidet man ein Ebenenbüschel oder einen Keil von Ebenen mit einem auf die Axe oder die Kante senkrechten Raum, so heisst das resultirende Gradenbüschel oder der Winkel *Normalschnitt* des Büschels oder des Keils.

Satz II. Der Keil zweier Ebenen wird durch den Winkel der zwei Graden gemessen, in welchen die beiden Ebenen durch einen auf ihren Durchschnitt senkrechten Raum geschnitten werden.

Denn diese beiden Graden liegen in dem Raum der beiden Ebenen und ihre Ebene steht senkrecht auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt (Zus. V, Satz II, § 128 und Satz VIII, § 91).

Satz III. Zwei Ebenen, welche sich in einem einzigen Punkt des endlichen Gebiets schneiden, haben zwei ungleiche Winkel und, wenn diese gleich sind, unendlich viele einander gleiche Winkel (Satz X, § 117 und Satz IV, § 114).

Def. III. Im zweiten Fall heissen die beiden Ebenen *gleichwinklige Ebenen.*

Bem. II. Die Graden im Unendlichgrossen dieser Ebenen sind Grade gleichen Abstandes (Def. II, § 114).

Satz IV. Eine Transversalebene, welche durch den zwei gleichwinkligen Ebenen gemeinschaftlichen Punkt geht und sie in Graden schneidet, bildet mit ihnen gleiche innre Wechselwinkel (Satz V, § 114).

Satz V. Ist eine Ebene gegeben und eine Grade, welche sie in einem Punkt schneidet, so gehen durch die Grade zwei Ebenen, welche mit der gegebenen Ebene gleichwinklig sind (Satz VII, § 114).

Probl. Eine Ebene A_2 und ein Punkt A_0 derselben sind gegeben; mit Elementen des endlichen Gebiets eine Ebene zu construiren, welche durch A_0 geht und mit der Ebene A_2 gegebene Winkel bildet.

Man ziehe von A_0 eine Ebene B_2 senkrecht von der zweiten Art auf A_2 (Zus. VI, Satz I, § 129), welche A_2 in einer Graden a_1 und die durch A_0 gehende und auf A_2 von der ersten Art senkrechte Ebene A_2' in einer Graden a_1' schneidet. Man ziehe in B_2 eine Grade b_1, welche durch A_0 geht und mit a_1 einen der gegebenen Winkel macht. Die Ebene B_2', die durch A_0 senkrecht von der ersten Art auf B_2 gelegt wird, geht durch die Graden $a_1^{(1)}$, $a_1'^{(1)}$, welche von A_0 in A_2 und A_2' senkrecht zu den Graden a_1, a_1' gezogen werden. Construirt man in B_2' eine Grade $b_1^{(1)}$, die mit $a_1^{(1)}$ den zweiten gegebenen Winkel bildet, so ist $(b_1 b_1^{(1)})$ die gesuchte Ebene (Satz VIII, § 110).

Def. IV. Unter dem Winkel zweier von der zweiten Art parallelen Ebenen verstehen wir denjenigen, welcher durch den kleinsten Abstand der auf den beiden Graden im Unendlichgrossen der Ebenen senkrechten Graden gemessen wird.

Zus. Zwei Ebenen, welche sich in einer Graden schneiden und bezüglich zu zwei einander von der zweiten Art parallelen Ebenen parallel von der ersten Art sind, bilden denselben Winkel.

Probl. Eine Ebene A_2 und eine ihr parallele Grade A_1 ist gegeben; mit Elementen des endlichen Gebiets eine von der zweiten Art parallele Ebene zu construiren, welche durch A_1 geht und mit A_2 einen gegebenen Winkel macht.

Man lege durch eine zur gegebenen Graden A_1 parallele Grade und in einem durch A_2 aber nicht durch die Grade A_1 gehenden Raum eine Ebene B_2, welche mit A_2 den gegebenen Winkel macht; die durch die gegebene Grade A_1 gehende zu B_2 von der ersten Art parallele Ebene ist die gesuchte Ebene.

8.

Identität des Raums S_4 um seine Punkte im Unendlichgrossen, seine Graden und seine Ebenen.

§ 141. *Satz I. Der Raum S_4 ist um seine Punkte im Unendlichgrossen identisch.*

Beweis wie zu Satz I, § 92.

Satz II. Alle Büschel von Räumen sind identisch (Satz V, § 139).

Zus. Der Raum S_4 ist um jede seiner Ebenen des endlichen Gebiets identisch.

Satz III. Ein Büschel paralleler Räume ist in der Position seiner Theile identisch und stetig.

Beweis wie zu Satz III, § 92.

Satz IV. Alle Büschel paralleler Räume sind identisch.

Denn die Graden, welche sie messen, sind identisch.

Zus. Der Raum S_4 ist um jede Ebene im Unendlichgrossen identisch.

Satz V. Die Ebenensysteme um eine Grade sind identisch.

Denn die Sterne, welche durch sie in dem unendlich fernen Raum bestimmt werden, sind identisch (Satz I, § 109; Satz III, Satz I und Zus. Satz II, § 15).

Zus. Der Raum S_4 ist um seine Graden des endlichen Gebiets identisch.

9.

Dreikante zweiter Art.

§ 142. *Def. I.* Unter *Dreikant zweiter Art* verstehen wir die von drei Halbebenen, welche durch einen gemeinschaftlichen Strahl begrenzt werden, gebildete Figur. *Dreikant erster Art* oder einfach *Dreikant* heisst immer die durch drei Strahlen, welche von einem Punkt ausgehen und stets in einem Raum von drei Dimensionen liegen, bestimmte Figur (Def. II, § 93 und Zus. I, Satz IV, § 82).

Der gegebene Strahl ist *die Axe*, die Halbebenen sind *die ebenen Seiten* des Dreikants.

Die von den Halbebenen gebildeten Keile heissen *die Seiten von drei Dimensionen;* die Keile derselben *Keile von vier Dimensionen* bezüglich ihrer Punkte oder *die Keile* des Dreikants.

Bez. I. Wenn A_2, B_2, C_2 die drei Halbebenen sind, so wird das Dreikant mit dem Symbol $A_2B_2C_2$, die Seiten von drei Dimensionen mit (A_2B_2), (B_2C_2), (C_2A_2) bezeichnet.

Dagegen bezeichnen wir die Keile von vier Dimensionen des Dreikants auch mit $\overset{\frown}{A_2B_2C_2}$, $\overset{\frown}{B_2C_2A_2}$, $\overset{\frown}{C_2A_2B_2}$.

Bem. I. Der Raum im Unendlichgrossen schneidet ein Dreikant zweiter Art in einem Dreikant, welches durch das Durchschnittsdreieck mit der Polarebene des Scheitels desselben Dreikants gemessen wird (Bem. I und II, § 113).

Def. II. Wie wir bei dem Dreieck die Verlängerungen der Seiten haben, welche mit den Seiten selbst die Graden des Dreiecks geben, so haben wir

bei dem Dreikant zweiter Art *die Verlängerungen der Seiten* von drei Dimensionen, welche mit den Seiten die Räume von drei Dimensionen des Dreikants bilden. Jeder Eckpunkt des Dreiecks liegt der Seite gegenüber, welche die beiden andern Eckpunkte verbindet; ebenso liegt jede ebene Seite des Dreikants zweiter Art den von den beiden andern Ebenen des Dreikants bestimmten Seiten von drei Dimensionen gegenüber. Jeder Keil des Dreikants zweiter Art liegt der seiner Axe gegenüberliegenden Seite von drei Dimensionen gegenüber: z. B. der Keil $A_2B_2C_2$ der Seite (A_2C_2).

Def. III. Dem inneren oder äusseren Theil des Dreiecks im Unendlichgrossen (Bem. I) entspricht *der innere oder äussere* Theil des Dreikants zweiter Art grade wie bei dem Dreikant erster Art (Def. II, § 93).

Def. IV. Der Umfang dieses Dreiecks gibt *die Oberfläche* des Dreikants zweiter Art, welche drei Dimensionen hat.

Bem. II. Die Eigenschaften des Dreikants zweiter Art werden ebenso wie diejenigen des Dreikants erster Art (§ 93) aus dem vollständigen Dreieck im Unendlichgrossen mittelst der Sätze in den §§ 15, 16, 17 abgeleitet.

Wir wollen diese Eigenschaften unter Bezugnahme auf die Sätze über das Dreieck, aus welchen sie hervorgehen, untersuchen, um zu zeigen, wie man zu verfahren hat, um Eigenschaften von *Dingen* zu erkennen, deren vollständige Anschauung man nicht gewinnen kann.

Satz I. Die Keile $\widehat{A_2B_2C_2}$, $\widehat{B_2C_2A_2}$, $\widehat{C_2A_2B_2}$ eines Dreikants zweiter Art, welche von den gegenüberliegenden Seiten von drei Dimensionen begrenzt werden, fallen zusammen (Satz I, § 72 und Bem. II).

Zus. I. Ein Keil zweier Halbebenen, dessen Kante in der Kante des Dreikants zweiter Art und dessen Seiten innerhalb des Dreikants oder auf zwei Seiten von drei Dimensionen desselben liegen, ist im Innern des Dreikants gelegen (Zus. III, Satz I, § 51; Bem. I, § 72 und Bem. II).

Zus. II. Zwei Räume, welche durch zwei ebene Seiten und durch zwei Punkte innerhalb der gegenüberliegenden Seiten des Dreikants zweiter Art gehen, schneiden sich in einer durch die Axe des Dreikants begrenzten Halbebene des inneren Theils (Zus. II, Satz I, § 51; Bem. I, § 72 und Bem. II).

Zus. III. Der innere Theil eines jeden Dreiecks, dessen Eckpunkte innerhalb des Dreikants zweiter Art oder wenigstens auf zwei Seiten von drei Dimensionen desselben liegen, befindet sich innerhalb des Dreikants.

Zus. IV. Der innere Theil eines jeden Dreikants erster Art, dessen Scheitel auf der Axe des Dreikants zweiter Art liegt und dessen Kanten sich im Innern des Dreikants oder wenigstens auf zwei Seiten von drei Dimensionen desselben befinden, liegt innerhalb des Dreikants zweiter Art.

Man braucht nur drei Punkte auf den Kanten des Dreikants erster Art zu wählen; diese sind die Eckpunkte eines Dreiecks, dessen innerer Theil im Innern des Dreikants zweiter Art liegt. Die Strahlen, welche den Scheitel des Dreikants erster Art mit den Punkten des inneren Theils dieses Dreiecks verbinden, befinden sich im Innern des Dreikants erster und zweiter Art (Zus. III, Satz I, § 93).

Def. V. Die Verlängerungen der ebenen Seiten eines Dreikants zweiter Art sind die Seiten eines andern Dreikants, welches *das Scheiteldreikant* des ersten genannt wird.

Satz II. Den inneren Halbebenen eines Dreikants zweiter Art liegen die inneren Halbebenen des Scheiteldreikants gegenüber (Satz II, § 72 u. Bem. II).

Zus. I. Wenn sich eine durch die Axe eines Dreikants zweiter Art begrenzte Halbebene ausserhalb des Dreikants und nicht innerhalb des Scheiteldreikants befindet, so schneidet ein einziger der drei Räume, welche diese Halbebene mit den ebenen Seiten verbinden, eine gegenüberliegende Seite von drei Dimensionen in einer inneren Halbebene (Zus. Satz II, § 72 und Bem. II).

Satz III. Ein durch die Axe des Dreikants zweiter Art gehender Raum schneidet entweder zwei Seiten von drei Dimensionen im Innern und die dritte ausserhalb oder er schneidet diese drei Seiten sämmtlich ausserhalb (Satz III und Bem. II, § 72; Bem. II).

Zus. Eine Grade, welche keine ebene Seite des Dreikants (die gegenüberliegende Seite eingeschlossen) trifft, schneidet entweder zwei der Seiten von drei Dimensionen in inneren Punkten und die dritte in einem äusseren Punkt, oder die drei Seiten von drei Dimensionen in äusseren Punkten.

Man braucht zu diesem Zweck nur den Raum zu betrachten, welcher durch die Axe des Dreikants und durch die gegebene Grade geht.

Bem. III. Bezüglich der Durchschnittspunkte einer Graden mit den Seiten eines einzigen Dreikants gelten dieselben Fälle, wie bei dem Dreikant erster Art (Bem. II, § 93).

Satz IV. In jedem Dreikant zweiter Art ist die Summe zweier Seiten von drei Dimensionen grösser als die dritte (Satz I, § 76 und Bem. II).

Zus. Jede Seite von drei Dimensionen eines Dreikants zweiter Art ist grösser als der Unterschied der beiden andern (Zus. Satz I, § 76).

Satz V. In einem Dreikant zweiter Art liegt der grösseren Seite von drei Dimensionen der grössere Keil gegenüber und umgekehrt (Satz VI, § 55; Bem. I, § 76 und Bem. II).

Zus. Wenn zwei Keile eines Dreikants zweiter Art einander gleich sind, so sind die gegenüberliegenden Seiten gleich und umgekehrt (Satz III, § 42; Satz V, § 55 und Bem. I, § 76).

Def. VI. In diesem Fall heisst das Dreikant zweiter Art *gleichschenklig*. Jedem gleichseitigen Dreieck im Unendlichgrossen entspricht auf die angegebene Weise ein Dreikant zweiter Art, dessen drei Seiten von drei Dimensionen gleich sind und welches *gleichseitig* heisst.

Wenn das Dreieck im Unendlichgrossen des Dreikants zweiter Art ein polares Dreieck ist (Def. IV, § 69) so sind die Keile der Seiten von drei Dimensionen und die Keile der ebenen Seiten rechte und das Dreikant heisst *dreirechtwinklig*.

Satz VI. In einem gleichschenkligen Dreikant zweiter Art steht der Raum, welcher die Halbirungsebene der Basis mit der gegenüberliegenden ebenen Seite verbindet, senkrecht auf der Basis und halbirt den Keil der beiden gleichen Seiten (Satz IV, § 42; Def. II, Satz V, § 69; Satz I, § 131).

Satz VII. In zwei Dreikanten zweiter Art, welche zwei Seiten von drei Dimensionen gleich haben, ist in demjenigen Dreikant die dritte Seite grösser, in welchem ihr der grössere Keil gegenüberliegt und umgekehrt (Satz VII, § 55; Bem. I, § 76 und Bem. II).

Def. VII. Dem reciproken oder Supplementdreieck eines im Unendlichgrossen gegebenen Dreiecks (Def. I, § 76) entspricht ein *reciprokes oder Supplementdreikant* zweiter Art desjenigen Dreikants, welches dem gegebenen Dreieck entspricht. Wenn das Dreikant $A_2 B_2 C_2$ gegeben ist, so braucht man nur, um das reciproke Dreikant zu erhalten, durch die Axe des ersten die Halbebenen senkrecht auf die Räume der Seiten von drei Dimensionen und auf derselben Seite der übrigbleibenden ebenen Seite zu legen.

Satz VIII. Ist ein Dreikant zweiter Art supplementär zu einem andern, so ist das letztere das Supplementdreikant des ersten (Satz II, § 76 und Bem. II).

Satz IX. Die Keile der Seiten und die Keile eines Dreikants zweiter Art sind bezüglich zu den Keilen und den Keilen der Seiten des Supplementdreikants supplementär (Satz III, § 76 und Bem. II).

Satz X. In jedem Dreikant zweiter Art ist jeder Keilwinkel der Seiten von drei Dimensionen um zwei Rechte vermehrt grösser als die Summe der beiden andern (Satz V, § 76 und Bem. II).

Satz XI. In jedem Dreikant zweiter Art ist die Summe der Seiten von drei Dimensionen kleiner als vier rechte Winkel (Satz VI, § 76 und Bem. II).

Satz XII. In jedem Dreikant zweiter Art ist die Summe der Keilwinkel der Seiten von drei Dimensionen grösser als zwei und kleiner als sechs rechte Winkel (Satz VII, § 76).

Satz XIII. Die Summe der Keilwinkel oder der Seiten von drei Dimensionen eines dreirechtwinkligen Dreikants zweiter Art beträgt drei Rechte (Satz VIII, § 76 und Bem. II).

10.

Gleiche Dreikante zweiter Art.

§ 143. *Satz I. Die Dreikante zweiter Art, deren Seiten parallel sind und dieselbe Halbgrade im Unendlichgrossen haben, sind gleich.*

Der Beweis wird analog wie bei Satz I, § 94 geführt.

Satz II. Zwei Dreikante zweiter Art sind gleich, wenn ihre Seiten von drei Dimensionen gleich sind.

Denn die drei Seiten der entsprechenden Dreiecke im Unendlichgrossen sind gleich (Satz III, § 17 und Bem. II, § 142).

Satz III. Zwei Dreikante zweiter Art sind gleich, deren Keile gleich sind (Satz IV, § 76 und Bem. II, § 142).

Satz IV. Zwei Dreikante zweiter Art, welche zwei Seiten von drei Dimensionen und den eingeschlossenen Keil gleich haben, sind gleich (Satz II, § 42 und Bem. II, § 142).

Satz V. In Dreikanten zweiter Art, welche gleich sind, liegen gleichen Seiten gleiche Keile gegenüber und umgekehrt (Satz I, § 42 und Bem. II, § 142).

Satz VI. In einem der Theile, in welche der Raum S_4 durch einen Raum von drei Dimensionen getrennt wird, gibt es keine zwei gleichen Dreikante zweiter Art, welche eine Seite in dem gegebenen Raum gemeinschaftlich haben (Satz IX, § 55; Bem. I, § 74 und Bem. II, § 142).

Satz VII. Zwei Dreikante zweiter Art, welche zwei Keile und ihre gemeinschaftliche Seite von drei Dimensionen gleich haben, sind gleich (Satz X, § 55; Bem. I, § 74 und Bem. II, § 142).

Satz VIII. Zwei Scheiteldreikante zweiter Art sind gleich (Satz III, § 30).

Satz IX. Die dreirechtwinkligen Dreikante zweiter Art sind gleich (Zus. II, Satz III, § 69).

Satz X. Die Räume der Seiten eines dreirechtwinkligen Dreikants zweiter Art theilen den Raum S_4 in acht dreirechtwinklige Dreikante zweiter Art (Satz IV, § 72; Bem. II, § 142).[1])

11.

Die Vielkante und das Vierkant.

§ 144. *Def. I.* Die von m Strahlen $a_1, b_1, \ldots, m_1$, welche von einem Punkt P_0 des Raums S_4 ausgehen, gebildete Figur heisst Vielkant oder körperlicher Winkel von vier Dimensionen. Die m Strahlen heissen seine *Kanten*, P_0 sein *Scheitel*, die Winkelsectoren $(a_1 b_1)$, $(a_1 c_1)$, ... seine *ebenen Seiten*, die Dreikante $(a_1 b_1 c_1)$, $(a_1 c_1 d_1)$, ... seine *Seiten von drei Dimensionen* und die von den Seiten von drei Dimensionen gebildeten Keile seine *Keile von vier Dimensionen* oder auch *Keile.*

Die Dreikante zweiter Art, welche die Kanten des Vielkants zu Axen haben und deren ebene Seiten eine weitere Kante enthalten, sind *die Dreikante zweiter Art* des Vielkants.

Die Gesammtheit der Seiten von drei Dimensionen des Vielkants heisst die *Oberfläche* desselben.

Bez. I. Den durch die zwei Seiten $(a_1 b_1 c_1)$, $(b_1 c_1 d_1)$ gebildeten Keil bezeichnen wir mit dem Symbol $a_1 \overline{b_1 c_1} d_1$ und das durch die Kanten $b_1 c_1 d_1$ und die Axe a_1 bestimmte Dreikant zweiter Art mit $a_1 \cdot b_1 c_1 d_1$.

Def. II. Die von vier von einem Punkt P_0 des Raums S_4 ausgehenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 gebildete Figur heisst *körperlicher Winkel von vier Kanten* oder einfach *Vierkant.*

---

1) Wir hätten diese Sätze unter Bezugnahme auf Bem. II weglassen können; wir haben sie gegeben, weil es sich um Grundeigenschaften des Raumes S_4 wie bei den Dreikanten erster Art in dem Raum S_3 handelt und weil sie dazu dienen andre Grundeigenschaften von S_4 nachzuweisen. Die Zus. III, IV, Satz I und Zus. III, Satz, § 142 lassen sich jedoch nicht durch einfache Projection dem Satz III, § 15 entsprechend aus dem vollständigen Dreieck ableiten.

Bez. II. Wir bezeichnen das Vierkant mit $a_1 b_1 c_1 d_1$ und wenn P_0 der Scheitel und A_0, B_0, C_0, D_0 vier Punkte der Kanten sind, mit $P_0 \cdot A_0 B_0 C_0 D_0$.

Bem. I. Sind a_1, b_1, c_1, d_1 die Kanten des Vierkants, so haben sie im Unendlichgrossen vier Punkte $\alpha_{0\infty}$, $\beta_{0\infty}$, $\gamma_{0\infty}$, $\delta_{0\infty}$, welche ein Tetraeder bestimmen. Die Winkel der ebenen Seiten des Vierkants werden durch die Kanten seines Tetraeders im Unendlichgrossen, die Winkel seiner Seiten von drei Dimensionen und seine Keile durch die Winkel der ebenen Seiten und die Keilwinkel des Tetraeders gemessen. Die Eigenschaften der Kanten, der Winkel, der ebenen Seiten und der Keile des Tetraeders im Unendlichgrossen oder auch eines vollständigen Raums von drei Dimensionen liefern daher ebensoviele Eigenschaften der Winkel der ebenen Seiten von drei Dimensionen und der Keile des Vierkants.

Def. III. Der innere und äussere Theil des Tetraeders $\alpha_{0\infty}\beta_{0\infty}\gamma_{0\infty}\delta_{0\infty}$ liefert den inneren und äusseren Theil des Vierkants.

Def. IV. Wie wir bei dem Tetraeder im Unendlichgrossen die Verlängerungen der Kanten und der Seitenflächen haben, welche mit ihnen die sechs Graden und die vier Ebenen des Tetraeders bilden, so haben wir beim Vierkant *die Verlängerungen* der ebenen Seiten und der Seiten von drei Dimensionen, die mit diesen die sechs Ebenen und die vier Räume von drei Dimensionen des Vierkants bilden.

Wie jeder Eckpunkt des Tetraeders der durch die andern drei Eckpunkte bestimmten Seitenfläche und jede Kante der Kante der beiden andern Eckpunkte gegenüberliegt, so *liegt* jede Kante des Vierkants der Seite von drei Dimensionen der übrigen drei und jede ebene Seite der ebenen Seite, welche die beiden übrigen Kanten enthält, *gegenüber.*

Wie jedes Dreikant des Tetraeders der seinem Scheitelpunkt entgegenstehenden Seitenfläche und jeder Keil dem Keil der entgegenstehenden Kante gegenüberliegt, so liegt jedes Dreikant zweiter Art des Vierkants der seiner Kante entgegenstehenden Seite und jeder Keil von vier Dimensionen dem Keil gegenüber, welcher die ebene ihm gegenüberliegende Seite zur Axe hat.

Bem. II. Die Räume des Vierkants theilen den Raum S_4 um den Scheitel des Vierkants in sechszehn Vierkante (Bem. II, § 115).

Satz I. Die inneren von den gegenüberliegenden Seiten begrenzten Theile der Dreikante zweiter Art des Vierkants fallen zusammen (Satz I, § 95; Bem. I, § 115 und Bem. I).

Zus. I. Die inneren Theile der Keile von vier Dimensionen des Vierkants, welche durch die Seiten von vier Dimensionen begrenzt werden, fallen zusammen (Zus. I, Satz I, § 95).

Zus. II. Jeder Winkel, dessen Schenkel innerhalb des Vierkants oder auf zwei Seiten von drei Dimensionen desselben liegen und dessen Scheitel mit dem Scheitel des Vierkants zusammenfällt, liegt innerhalb des Vierkants (Zus. II, Satz I, § 95).

Zus. III. Der innere Theil eines Dreikants erster Art, dessen Scheitel mit dem Scheitel des Vierkants zusammenfällt und dessen Kanten sich innerhalb oder wenigstens auf zwei Seiten von drei Dimensionen desselben befinden, liegt in dem Innern des Vierkants (Zus. III, Satz 95).

Zus. IV. Der innere Theil eines jeden Tetraeders, dessen Eckpunkte sich inner-

halb des Vierkants oder wenigstens auf zwei Seiten von drei Dimensionen desselben befinden, liegt innerhalb des Vierkants.

Die Seitenflächen des Tetraeders liegen innerhalb des Vierkants (Zus. III) und jedes Segment innerhalb des Tetraeders, dessen Enden z. B. A_0, B_0 in dem Innern zweier Seitenflächen des Tetraeders liegen, gibt einen Winkel $P_0 \cdot A_0 B_0$ innerhalb des Vierkants und da $(A_0 B_0)$ im Innern des Winkels $P_0 \cdot A_0 B_0$ gelegen ist, so liegt es auch innerhalb des Vierkants (Zus. II). Jedes innere Segment $(X_0 Y_0)$ (wenn nöthig verlängert) schneidet aber wenigstens zwei Seitenflächen des Tetraeders in inneren Punkten (Satz V, § 95), deren Segment $(X_0 Y_0)$ enthält und innerhalb des Vierkants liegt. Damit ist der Zusatz bewiesen.

Satz II. Den inneren Strahlen eines Vierkants sind die inneren Strahlen des Scheitelvierkants entgegengesetzt (Satz I, § 115 und Bem. I).

Satz III. Ein Raum, welcher durch den Scheitel des Vierkants aber nicht durch irgend eine Kante desselben geht und eine ebene Seite in einem inneren Strahl trifft, schneidet entweder

1) zwei andre ebene Seiten, welche mit der ersten durch dieselbe Kante gehen, in einem inneren Strahl oder er schneidet

2) drei andre ebene Seiten, von denen eine der ersten und die andern beiden einander gegenüberliegen, in inneren Punkten (Satz II, § 95 und Bem. II, § 115).

Satz IV. Wenn eine durch den Scheitel des Vierkants gehende Ebene keine seiner ebenen Seiten in einer Graden dagegen eine Seite von drei Dimensionen in einem inneren Strahl trifft, so schneidet sie eine andre dieser Seiten in einem inneren Strahl und die übrigen in äusseren Strahlen (Satz III, § 95 und Bem. II, § 115).

Zus. Eine durch den Scheitel des Vierkants gehende Ebene, welche drei Seiten von drei Dimensionen in äusseren Strahlen schneidet, trifft die vierte Seite ausserhalb.

Satz V. Eine durch den Scheitel des Vierkants gehende Ebene, von welcher ein Strahl im Innern desselben liegt, schneidet die Oberfläche des Vierkants in zwei Strahlen (Satz IV, § 95 und Bem. II, § 115).

Satz VI. Zwei Vierkante, deren Kanten parallel sind und in derselben Richtung liegen, sind gleich.

Denn sie haben dasselbe Tetraeder im Unendlichgrossen.

Satz VII. Zwei Scheitelvierkante sind gleich.

Denn ihre Tetraeder im Unendlichgrossen sind entgegengesetzt und daher gleich (Satz II, § 115).

Satz VIII. Es gibt keine zwei gleichen Vierkante, welche drei Kanten gemeinschaftlich haben und deren vierte Kanten auf derselben Seite ihrer gemeinschaftlichen Seite von drei Dimensionen liegen (Satz V, § 95 und Bem. I, § 115).

Def. V. Wenn das Tetraeder im Unendlichgrossen des Vierkants ein conjugirtes Polartetraeder ist (Def. VI, § 108), so heisst das Vierkant *vierrechtwinklig.*

Satz IX. In einem vierrechtwinkligen Vierkant sind die ebenen Winkel, die Keile der ebenen Seiten und die Keile der Seiten von drei Dimensionen rechte (Satz XI, § 110; Def. I, § 39; Bem. I, § 136 und Satz V, § 139).

Satz X. Die vier Räume von drei Dimensionen eines vierrechtwinkligen Vierkants theilen den Raum S_4 in sechszehn vierrechtwinklige Vierkante, von welchen je zwei immer Scheitelvierkante sind (Satz II, § 115).

Satz XI. Die vierrechtwinkligen Vierkante sind auf 24 verschiedene Arten identisch (Satz XII, § 110).

12.

Das Pentaeder.

§ 145. *Def. I.* Die Figur, welche von fünf nicht in einem Raum S_3 liegenden Punkten des Raums S_4 und von den Graden, den Ebenen und den Räumen von drei Dimensionen, welche von diesen fünf Punkten bestimmt werden, gebildet wird, heisst *Pentaeder*. Die Punkte heissen *die Scheitel*, ihre Segmente *die Kanten*, ihre Dreiecke *die ebenen Seiten*, ihre Tetraeder *die Seiten von drei Dimensionen* des Pentaeders. Ebenso heissen die von den Kanten gebildeten Vierkante, die Dreikante erster und zweiter Art und die Keile der Seiten von drei Dimensionen, welche die Scheitel und die Kanten zu Scheiteln und Axen haben, *die Vierkante, Dreikante erster und zweiter Art* und *die Keile des Pentaeders.*

Ein Scheitel heisst derjenigen Seite von drei Dimensionen *gegenüberliegend*, welche die vier andern Scheitel enthält und die durch zwei Scheitel gehende Kante *liegt* der ebenen Seite *gegenüber*, in welcher die übrigen drei Scheitel liegen.

Bez. I. Das durch die Punkte A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 gegebene Pentaeder bezeichnen wir mit dem Symbol $A_0B_0C_0D_0E_0$.

Satz I. Die Theile des inneren Raums der fünf Vierkante des Pentaeders, welche durch die ihren Scheiteln gegenüberliegenden Seiten begrenzt werden, fallen zusammen.

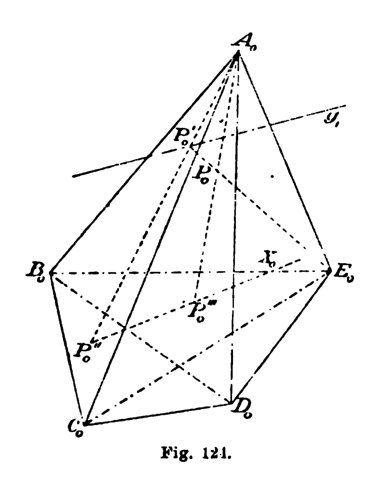


Fig. 124.

Der innere Theil des Tetraeders $A_0B_0C_0D_0$ liegt im Innern des Vierkants $E_0 \cdot A_0B_0C_0D_0$ (Zus. IV, Satz I, § 144). P_0' sei ein Punkt innerhalb dieses Tetraeders; das Segment E_0P_0' liegt dann im Innern des Vierkants.

Wenn P_0 ein Punkt dieses Segments ist, so genügt es zu beweisen, dass derselbe sich innerhalb eines beliebigen der übrigen Vierkante des Pentaeders befindet.

Der Strahl A_0P_0' liegt im Innern des Dreikants $A_0 \cdot B_0C_0D_0$ und mithin liegt $E_0A_0P_0$ innerhalb des Vierkants $A_0 \cdot B_0C_0D_0E_0$ (Zus. II, Satz I, § 144) und daher auch das Segment A_0P_0 innerhalb desselben Vierkants. Der Punkt P_0 liegt also im Innern des Vierkants $A_0 \cdot B_0C_0D_0E_0$ und aus demselben Grund auch im Innern der übrigen drei Vierkante (Fig. 124).

Def. II. Die inneren Theile der Vierkante eines Pentaeders bilden das,

was man *den inneren Theil* des Pentaeders nennt. Der übrige Theil des Raums S_4 mit Einschluss der Oberfläche heisst *der äussere Theil.*

Def. III. Unter einem *inneren* oder *äusseren* Punkt des Pentaeders versteht man einen Punkt des inneren oder äusseren Theils, welcher nicht auf der Oberfläche liegt.

Sind sämmtliche Punkte einer Figur innere oder äussere Punkte des Pentaeders, so sagt man von ihr, auch wenn einige auf der Oberfläche liegen, sie befinde sich *innerhalb* oder *ausserhalb* des Pentaeders.

Zus. I. Die inneren durch die Seiten von drei Dimensionen begrenzten Theile der Dreikante zweiter Art und der Keile von vier Dimensionen des Pentaeders fallen zusammen.

Zus. II. Das Segment zweier innerer Punkte des Pentaeders oder zweier Seiten von drei Dimensionen desselben liegt im Innern des Pentaeders.

X_0, Y_0 seien die beiden inneren Punkte. Der Winkel $A_0X_0Y_0$ liegt im Innern des Vierkants $A_0 \cdot B_0C_0D_0E_0$ (Zus. II, Satz I, § 144 und Satz I).

X_0', Y_0' seien die Durchschnittspunkte der Strahlen A_0X_0, A_0Y_0 mit der gegenüberliegenden Seite $B_0C_0D_0E_0$. Das Dreieck $A_0X_0'Y_0'$ liegt innerhalb des genannten Vierkants, weil auch das Dreikant $A_0 \cdot B_0X_0'Y_0'$ in demselben liegt (Zus. II, Satz I, § 144). Da nun (X_0Y_0) im Innern dieses Dreiecks gelegen ist (Zus. III, Satz II, § 51), so liegt (X_0Y_0) auch im Innern des Pentaeders.

Zus. III. Der innere Theil eines Dreiecks, dessen Eckpunkte innerhalb oder auf der Oberfläche aber nicht auf derselben Seite von drei Dimensionen des Pentaeders gelegen sind, liegt im Innern des Pentaeders.

Der Beweis wird analog wie bei Zus. III, Satz I, § 95 geführt.

Satz II. Ein Raum von drei Dimensionen, welcher nicht durch irgend einen der Scheitel des Pentaeders geht und eine seiner Kanten in einem inneren Punkt trifft, schneidet im Innern entweder

1) vier Kanten, welche durch denselben Scheitel gehen, oder

2) zwei Tripel von Kanten, welche durch zwei Scheitel gehen mit Ausnahme der den beiden Scheiteln gemeinsamen Kante und der Kanten der gegenüberliegenden Seite.

Denn $A_0B_0C_0D_0E_0$ seien die Scheitel des Pentaeders und ein Raum S_3, welcher durch keinen der Scheitel geht, möge die Kante (A_0B_0) in einem inneren Punkt treffen. Der Raum des Tetraeders $A_0B_0C_0D_0$ wird von dem Raum S_3 in einer Ebene S_2 geschnitten. Diese Ebene trifft im Innern entweder zwei andre Kanten, welche durch A_0 oder B_0 gehen z. B. (A_0C_0), (A_0D_0) oder die (A_0B_0) gegenüberliegende Kante (C_0D_0) und zwei andre sich gegenüberliegende Kanten z. B. (A_0C_0), (B_0D_0). Es gibt daher nur zwei mögliche Fälle (Satz II, § 95): nämlich der Raum S_3 trifft entweder die Kanten

$$(1) \qquad (A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (A_0D_0)$$

oder die Kanten

$$(2) \qquad (A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (C_0D_0),\ (B_0D_0).$$

In dem einen wie in dem andern Fall müssen wir eine in dem Raum $A_0B_0C_0D_0$ gelegene Ebene von S_3 als gegeben ansehen. Wir betrachten nun

das Tetraeder $A_0B_0C_0E_0$. Die Durchschnittsebene S_2' von S_3 mit dem Raum dieses Tetraeders trifft im Innern im ersten und zweiten Fall die Kanten (A_0B_0), (A_0C_0) und schneidet daher innerhalb (Satz II, § 95) die Kanten

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (A_0E_0) \tag{1'}$$

oder die Kanten

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (C_0E_0),\ (B_0E_0). \tag{2'}$$

Bezüglich der beiden Tetraeder $A_0B_0C_0D_0$, $A_0B_0C_0E_0$ schneidet daher der Raum S_3 im Innern die Kanten von der Form

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (A_0D_0),\ (A_0E_0) \tag{3}$$

oder

$$(A_0B_0),\ (A_0C_0),\ (C_0D_0),\ (B_0D_0),\ (C_0E_0),\ (B_0E_0). \tag{4}$$

Die beiden andern Fälle sind in der Form (4) enthalten.

Da der Raum S_3 sich bezüglich des Tetraeders $A_0B_0C_0E_0$ auf zwei verschiedene Arten verhalten kann und in beiden Fällen, wenn man in dem zweiten Fall einen inneren Punkt der Kante (C_0E_0) oder (B_0E_0) annimmt, vollständig bestimmt ist, so müssen wir den Raum S_3 bezüglich der übrigen Tetraeder und mithin auch die Art der Durchschnitte mit den übrigen Kanten als vollständig bestimmt ansehen.

Wir betrachten also das Tetraeder $A_0B_0D_0E_0$.

In dem Fall (3) schneidet der Raum S_3 im Innern die Kanten (A_0B_0), (A_0D_0), (A_0E_0) und trifft daher die übrigen Kanten des Tetraeders nicht in inneren Punkten (Satz II, § 95).

In dem Fall (4) trifft er dagegen die Kanten (A_0B_0), (B_0D_0), (B_0E_0).

Das Tetraeder $A_0C_0D_0E_0$ wird in Fall (3) in den Kanten (A_0C_0), (A_0D_0), (A_0E_0), in Fall (4) in den Kanten (A_0C_0), (C_0D_0), (C_0E_0) innerhalb getroffen

Das übrig bleibende Tetraeder $B_0C_0D_0E_0$ wird in dem ersten Fall von aussen, in dem zweiten dagegen innerhalb in den Kanten (C_0D_0), (B_0D_0), (C_0E_0), (B_0E_0) getroffen, welche sich zu je zweien gegenüberliegen.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Zus. I. Theilt man die Scheitel des Pentaeders in zwei Gruppen, so kann ein Raum die Kanten, welche die Scheitel der einen mit denen der andern Gruppe verbinden, im Innern schneiden und wenn der Raum eine Kante innerhalb trifft, so theilen sich die inneren Durchschnittspunkte des Raums mit den Kanten immer in zwei solche Gruppen.

Dies geht offenbar aus dem vorigen Beweis hervor. Die möglichen Gruppen sind daher von der Form $A_0(B_0C_0D_0E_0)$, $A_0B_0(C_0D_0E_0)$.

Zus. II. Wenn ein Raum, welcher durch keinen der Scheitel eines Pentaeders geht, vier durch einen Scheitel gehende Kanten in äusseren Punkten trifft, so schneidet er alle übrigen Kanten in äusseren Punkten.

Satz III. Wenn eine Grade keine der ebenen Seiten des Pentaeders trifft und eine Seite von drei Dimensionen in einem inneren Punkt schneidet, so trifft sie eine zweite dieser Seiten in einem inneren und die übrigen in äusseren Punkten.

g_1 sei die Grade, $A_0B_0C_0D_0E_0$ das Pentaeder und P_0' der g_1 und der Seite $A_0B_0C_0D_0$ gemeinsame Punkt. Die Ebene A_0g_1 schneidet die Seite $A_0B_0C_0D_0$

in der Graden A_0P_0', welche die ebene Fläche $B_0C_0D_0$ in einem inneren Punkt P_0'' trifft, weil P_0' nach der Voraussetzung innerhalb des Tetraeders $A_0B_0C_0D_0$ liegt. Die Ebene A_0g_1 trifft ferner die Seite von drei Dimensionen $B_0C_0D_0E_0$ in einer Graden, welche durch den Punkt P_0'' geht und daher eine andre Seite des Tetraeders z. B. $B_0D_0E_0$ in einem inneren Punkt P_0''' schneiden muss. Das Segment A_0P_0''' ist der Durchschnitt der Ebene A_0g_1 mit der Seite $A_0B_0D_0E_0$.

Die Grade g_1 nun, welche die Seite A_0P_0'' des Dreiecks $A_0P_0''P_0'''$ in einem inneren Punkt P_0' trifft, muss eine andre Seite in einem inneren Punkt schneiden (Satz III, § 51) und weil das Dreieck $A_0P_0''P_0'''$ im Innern des Pentaeders liegt, so muss die Grade g_1 wenigstens eine andre Seite des Pentaeders z. B. die Seite $A_0B_0D_0E_0$ in einem inneren Punkt treffen. Eine zweite Seite kann sie jedoch nicht in einem inneren Punkt schneiden. Aus dem Vorstehenden geht bereits hervor, dass sie die Seite $(P_0''P_0''')$ nicht in einem inneren Punkt treffen kann und mithin auch nicht die Seite $B_0C_0D_0E_0$. X_0, der Durchschnittspunkt der Graden $P_0''P_0'''$ mit der Ebene $B_0C_0E_0$ muss ausserhalb der Seite $B_0C_0E_0$ liegen (Satz III, § 95) und daher liegt die Grade A_0X_0 ausserhalb des Dreikants $A_0 \cdot B_0C_0E_0$. Der der Graden g_1 und der Seite $A_0B_0C_0E_0$ gemeinschaftliche Punkt liegt auf der Graden A_0X_0 und also ausserhalb des Pentaeders. Analog verhält es sich mit der übrigbleibenden Seite $A_0C_0D_0E_0$. Damit ist der Satz bewiesen (Fig. 124).

Satz IV. Eine Grade, von welcher ein Punkt im Innern des Pentaeders liegt, schneidet die Oberfläche desselben in zwei Punkten.

Wird analog dem Satz IV, § 95 bewiesen.

Satz V. Es gibt keine zwei identischen Pentaeder, welche eine Seite von drei Dimensionen gemeinschaftlich haben und deren gegenüberliegende Scheitel auf derselben Seite dieser Seite liegen.

Wird analog dem Satz V, § 95 mit Zuhülfenahme des Satzes VIII, § 144 bewiesen.

13.

Die Richtungen oder der Sinn des Sterns zweiter Art, der Dreikante zweiter Art und der Vierkante. — Die Richtungen oder der Sinn des Raums und der Pentaeder.

§ 146. *Def. I.* In dem Stern (P_0S_3) bestimmen die Richtungen des erzeugenden Raums (Def. IV, § 96) *die Richtungen des Sterns.* Als erzeugender Raum eines jeden Sterns kann man den Raum $\pi_{3\infty}$ im Unendlichgrossen ansehen (Satz I, Def. I, § 123).

Satz I. Die Richtungen des Sterns zweiter Art werden durch die Richtungen eines Keils eines seiner Dreikante zweiter Art bestimmt.

Denn so verhält es sich auch mit den Richtungen des Raums im Unendlichgrossen bezüglich der Richtungen eines Keils eines seiner Dreikante (Satz XVII, § 96 und Bem. I, § 116).

Zus. Eine Richtung eines Sterns bestimmt gleiche Richtungen der Keile seiner Dreikante zweiter Art (Zus. Satz XVII, § 96 und Bem. I, § 116).

Satz II. Eine Richtung eines Keils eines Dreikants zweiter Art bestimmt die beiden Richtungen eines Sterns, welchem das Dreikant angehört, je nachdem man ihn von dem einen oder dem andern Punkt im Unendlichgrossen der Kante des Dreikants betrachtet.

Denn eine Richtung des Raums im Unendlichgrossen ist nur dann durch die Richtung eines Tripels von Strahlen $(a_{1x} b_{1x} c_{1'})$ eines Dreikants bestimmt, wenn der Scheitel des Dreikants gegeben ist (Bem. I, § 116).

Satz III. Die Dreikante zweiter Art $a_1 \cdot b_1 c_1 d_1$, $b_1 \cdot a_1 d_1 c_1$, $c_1 \cdot d_1 a_1 b_1$, $d_1 \cdot c_1 b_1 a_1$ *eines Vierkants* $a_1 b_1 c_1 d_1$ *haben dieselbe Richtung.*

Denn dies ist auch mit den Dreikanten im Unendlichgrossen des Vierkants der Fall (Satz XIV, § 96 und Bem. I, § 116).

Def. II. Die Richtungen der Keile zweiter Art des Vierkants heissen *die Richtungen* des Vierkants. Mit denselben Symbolen bezeichnen wir auch die Richtungen der Oberfläche von drei Dimensionen des Vierkants.

Bem. I. Bei dieser Bezeichnung folgen wir derselben Regel wie bei dem Tetraeder (Bez. I, § 96).

Satz IV. Die graden Permutationen in dem Symbol $a_1 b_1 c_1 d_1$ *eines Vierkants geben eine seiner Richtungen, die ungraden die entgegengesetzte* (Satz XV, § 96 und Bem. I, § 116).

Satz V. Wenn zwei Dreikante zweiter Art, welche zwei Vierkanten eines Sterns zweiter Art angehören, gleiche Richtung haben, so sind auch die beiden Vierkante gleich gerichtet (Satz XVI, § 96 und Bem. I, § 116).

Satz VI. Wenn zwei Dreikante zweiter Art zweier Vierkante gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, so sind es auch die beiden Vierkante.

Wie bei Satz VII, § 96.

Satz VII. Zwei Vierkante $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1 b_1 c_1 e_1$, *die den Scheitel* P_0 *und eine Seite von drei Dimensionen gemeinschaftlich haben, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem die übrigbleibenden Kanten* d_1 *und* e_1 *auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Seite liegen.*

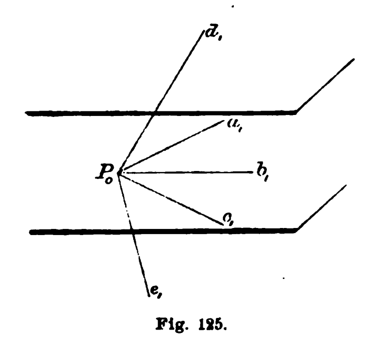


Fig. 125.

Denn im ersten Fall sind sie gleichgerichtet, weil es ihre Tetraeder im Unendlichgrossen sind, im zweiten Fall haben sie dagegen entgegengesetzte Richtung (Zus. I, Satz VIII, Satz XVI, § 96 und Bem. I, § 116) (Fig. 125).

Zus. I. Zwei Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, $A_0' \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, *deren Kanten sich in einem Raum in denselben vier Punkten* $B_0 C_0 D_0 E_0$ *schneiden, haben gleiche oder entgegengesetzte Richtung, je nachdem ihre Scheitel* A_0 *und* A_0' *auf derselben oder entgegengesetzten Seiten des gegebenen Raums liegen.*

Denn in dem ersten Fall haben die Vierkante $C_0 \cdot A_0 B_0 D_0 E_0$, $C_0 \cdot A_0' B_0 D_0 E_0$ dieselbe Richtung und mithin auch die Dreikante zweiter Art $C_0 A_0 \cdot B_0 D_0 E_0$, $C_0 A_0' \cdot B_0 D_0 E_0$ in dem Stern vom Centrum C_0. Dieselben Dreikante dagegen in der entgegengesetzten Richtung ihrer Kante betrachtet d. h. in den Sternen mit den Centren A_0 und A_0' haben die entgegengesetzte Richtung wie die ersten beiden (Satz II) oder dieselbe wie die Scheiteldreikante mit dem gemeinsamen Scheitel C_0, welche gleichgerichtet sind (Zus. Satz I, § 116; Satz IX, § 96; Bem. I, § 116 und Bem. I).

Die beiden Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, $A_0' \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$ sind also gleichgerichtet, weil es zwei ihrer Dreikante zweiter Art sind (Satz VI).

Zus. II. Eine Richtung eines Raums bestimmt gleiche Richtungen in den Sternen, deren Centren auf derselben Seite des Raums liegen, und entgegengesetzte, wenn ihre Centren auf entgegengesetzten Seiten des gegebenen Raums liegen.

Satz VIII. Sterne zweiter Art, welche dieselbe oder entgegengesetzte Richtung wie ein dritter Stern haben, sind gleichgerichtet.

Wie bei Satz IX, § 96.

Zus. Zwei Sterne zweiter Art, von denen der eine dieselbe der andre die entgegengesetzte Richtung wie ein dritter Stern haben, sind entgegengesetzt gerichtet.

Satz IX. Zwei Vierkante $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1 b_1' c_1' d_1'$, welche eine Kante gemeinschaftlich haben und deren Seiten $(b_1 c_1 d_1)$, $(b_1' c_1' d_1')$ in Räumen von derselben oder entgegengesetzter Richtung liegen, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet.

Wird analog wie Satz X, § 96 bewiesen.

Satz X. Zwei Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, $A_0 \cdot B_0' C_0' D_0' E_0'$ mit demselben Scheitel A_0, deren Kanten einen Raum in zwei gleich oder entgegengesetzt gerichteten Tetraedern $B_0 C_0 D_0 E_0$, $B_0' C_0' D_0' E_0'$ schneiden, haben gleiche oder entgegengesetzte Richtung.

Beweis analog wie bei Satz XI, § 96.

Satz XI. Zwei Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, $A_0' \cdot B_0' C_0' D_0' E_0'$ sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem es ihre Schnitte $B_0 C_0 D_0 E_0$, $B_0' C_0' D_0' E_0'$ mit einem Raum S_3 sind und ihre Scheitel auf derselben Seite dieses Raums liegen oder nicht.

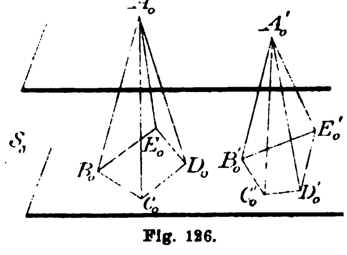


Fig. 126.

Sind dagegen die beiden Schnitte entgegengesetzt gerichtet, so haben die beiden Vierkante in dem ersten Fall entgegengesetzte, in dem zweiten dieselbe Richtung.

Denn in dem ersten Fall haben die Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, $A_0' \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$ dieselbe Richtung (Zus. I, Satz VII).

Aber auch $A_0' \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$ und $A_0' \cdot B_0' C_0' D_0' E_0'$ sind gleichgerichtet (Satz X); daher sind es auch die gegebenen Vierkante (Satz VIII) (Fig. 126).

Zus. I. Zwei Vierkante $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1' b_1' c_1' d_1'$, von welchen drei Kanten $b_1 c_1 d_1$, $b_1' c_1' d_1'$ in demselben Raum von drei Dimensionen liegen und deren Dreikante $b_1 c_1 d_1$, $b_1' c_1' d_1'$ dieselbe Richtung haben, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet,



je nachdem die übrigbleibenden Kanten a_1 und a_1' auf derselben Seite des Raums liegen oder nicht.

Haben dagegen die beiden Dreikante $b_1 c_1 d_1$, $b_1' c_1' d_1'$ entgegengesetzte Richtung, so sind die beiden Vierkante im ersten Fall entgegengesetzt, im zweiten gleichgerichtet.

Denn wenn E_0, E_0' die Scheitel der beiden Vierkante sind und man wählt auf $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1' b_1' c_1' d_1'$ die Punkte $A_0 B_0 C_0 D_0$, $A_0' B_0' C_0' D_0'$, so haben in dem ersten Fall die Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, $A_0' \cdot B_0' C_0' D_0' E_0'$ dieselbe Richtung (Satz XI).

Sind desshalb die beiden Dreikante zweiter Art $A_0 E_0 \cdot B_0 C_0 D_0$, $A_0' E_0' \cdot B_0 C_0 D_0$ in den Sternen von den Centren A_0 und A_0' und mithin auch dieselben Dreikante in den Sternen mit den Centren E_0 und E_0' gleich gerichtet, so sind es auch die Vierkante $E_0 \cdot A_0 B_0 C_0 D_0$, $E_0' \cdot A_0' B_0' C_0' D_0'$ oder die gegebenen Vierkante (Fig. 126).

Zus. II. Zwei Vierkante $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1' b_1' c_1' d_1'$, von welchen zwei Kanten b_1 und b_1' auf derselben Graden liegen und entgegengesetzt gerichtet sind und deren Kanten c_1, c_1' sich in einem Punkt C_0, d und d_1' in einem Punkt D_0 schneiden und deren übrige Kanten a_1 und a_1' auf derselben Seite des Raums $c_1 c_1' d_1 d_1'$ liegen, haben entgegengesetzte Richtung.

Liegen dagegen a_1 und a_1' auf entgegengesetzten Seiten dieses Raums, so haben die beiden Vierkante dieselbe Richtung.

Haben b_1 und b_1' gleiche Richtung, so sind im ersten Fall die beiden Vierkante gleich, im zweiten entgegengesetzt gerichtet.

Denn wenn b_1 und b_1' auf derselben Graden und entgegengesetzt gerichtet sind und E_0, E_0' die Scheitel der beiden Vierkante sind, so haben die Dreikante $(b_1 c_1 d_1)$, $(b_1' c_1' d_1')$ in dem Tetraeder $E_0 E_0' C_0 D_0$ in dem ersten Fall entgegengesetzte Richtung. Um sich davon zu überzeugen, braucht man auf diese beiden Dreikante nur die Bezeichnung $E_0 \cdot E_0' C_0 D_0$, $E_0' \cdot E_0 C_0 D_0$ anzuwenden (Satz XV, § 96).

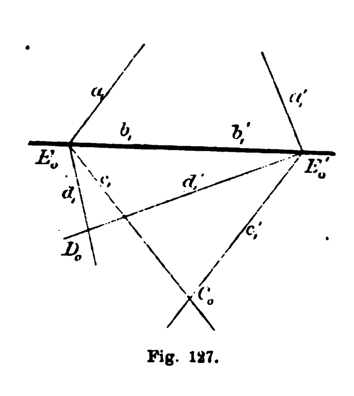


Fig. 127.

Die Vierkante $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_1' b_1' c_1' d_1'$ sind, wenn a_1 und a_1' auf derselben Seite des Raums $E_0 E_0' C_0 D_0$ liegen, entgegengesetzt, sonst gleich gerichtet (Zus. I) (Fig. 127). Aehnlich sind, wenn b_1 und b_1' dieselbe Richtung haben, die Dreikante $b_1 c_1 d_1$, $b_1' c_1' d_1'$ gleich gerichtet.

Satz XII. Wenn ein Vierkant $a_1 b_1 c_1 d_1$ gegeben ist und man vertauscht eine ungrade Anzahl von Kanten mit ihren Verlängerungen, so erhält man ein Vierkant von entgegengesetzter Richtung zum gegebenen; macht man dagegen eine grade Anzahl solcher Vertauschungen, so hat das sich ergebende Vierkant dieselbe Richtung.

Denn dasselbe gilt bezüglich der Scheitel eines Tetraeders in dem Raum im Unendlichgrossen (Satz I, § 116).

Zus. I. Zwei Scheitelvierkante (oder -vielkante) haben dieselbe Richtung (Satz I und II, § 116).

Zus. II. Wenn die Kanten eines Vielkants denjenigen eines andern parallel sind und ferner zwei oder sämmtliche vier Kanten des einen dieselbe Richtung wie diejenigen des andern haben, so sind die beiden Vierkante gleich, sonst entgegengesetzt gerichtet.

Denn so verhalten sich ihre Tetraeder im Unendlichgrossen (Satz I, § 116).

Satz XIII. Die Richtungen der Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$, $B_0 \cdot C_0 D_0 E_0 A_0$, $C_0 \cdot D_0 E_0 A_0 B_0$, $D_0 \cdot E_0 A_0 B_0 C_0$, $E_0 \cdot A_0 B_0 C_0 D_0$, *welche dem Pentaeder* $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ *angehören, sind gleich.*

Wenn in dem vorigen Satz die beiden Kanten a_1 und a_1' sich in einem Punkt E_0 treffen, so liegen sie auf derselben Seite des Raums $A_0 B_0 C_0 D_0$ und man erhält alsdann ein Pentaeder $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ (Fig. 124 S. 547).

Nach dem vorigen Satz sind die beiden Vierkante $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$ und $B_0 \cdot A_0 C_0 D_0 E_0$ entgegengesetzt gerichtet, während das erstere und das Vierkant $B_0 \cdot C_0 D_0 E_0 A_0$ dieselbe Richtung haben (Satz XV, § 96 und Satz X). Dasselbe gilt von den übrigen Vierkanten.

Satz XIV. Eine grade Anzahl Permutationen der Scheitel eines Pentaeders gibt eine Richtung des Raums S_4, *eine ungrade die entgegengesetzte Richtung.*

Da man in jedem Vierkant des Pentaeders z. B. $A_0 \cdot B_0 C_0 D_0 E_0$ dieselbe Richtung erhält, wenn man der Permutation $B_0 C_0 D_0 E_0$ eine beliebige grade Permutation der vier Scheitel substituirt und da man andrerseits, wenn man die Scheitel A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 der fünf Vierkante des Pentaeders festhält und mit ihren Symbolen die eben angegebene Operation vornimmt, sämmtliche grade Permutationen der fünf Scheitel A_0 B_0 C_0 D_0 E_0 erhält, so ist damit der Satz bewiesen.

Def. III. Die Richtungen eines Vierkants eines Pentaeders heissen *die Richtungen* des Pentaeders.

Bem. II. Für die Richtungen des Raums S_4 gilt eine analoge Definition wie bei dem Raum S_3 (Def. IV, § 96).

Satz XV. Die Richtungen des Raums S_4 *werden durch diejenigen eines Keils eines Dreikants zweiter Art bestimmt.*

Denn so ist es auch mit denjenigen eines seiner Sterne zweiter Art (Satz I).

Zus. Eine Richtung des Raums bestimmt gleiche Richtungen seiner Dreikante zweiter Art, deren Axe durch einen Punkt begrenzt ist (Def. I, § 142).

Wird wie Zus. Satz IX, § 61 bewiesen.

Satz XVI. Eine Richtung eines Dreikants zweiter Art bestimmt die beiden Richtungen des Raums, je nachdem man es von dem einen oder dem andern Punkt im Unendlichgrossen der Kante betrachtet (Satz II).

14.

Die Richtungen der identischen Figuren. — Congruente und symmetrische Figuren.

§ 147. *Def. I.* Zwei Punkte, welche denselben Abstand von einem Raum S_3 haben und auf derselben Normalen zu diesem Raum liegen, heissen *symmetrisch bezüglich des Raums* S_3, welcher *der Symmetrieraum* ist.

Und zwei Figuren sind bezüglich eines Raums von drei Dimensionen *symmetrisch*, wenn die Punkte der einen symmetrisch zu den Punkten der andern sind.

Zus. Die beiden Theile des Raums S_4, in welche er durch einen Raum S_3 zerlegt wird, sind bezüglich dieses Raums symmetrisch.

Wird wie Zus. I, Def. § 97 bewiesen.

Satz I. Ein Segment hat zur symmetrischen Figur bezüglich eines Raums S_3 ein andres ihm gleiches Segment und die Graden der beiden Segmente treffen sich in einem Punkt dieses Raums.

Sind zwei Paare symmetrischer Punkte A_0, A_0'; B_0, B_0' gegeben, so sind die beiden Graden A_0A_0', B_0B_0' parallel, weil sie senkrecht auf demselben Raum S_3 von drei Dimensionen stehen (Zus. II, Satz II, § 128) und liegen in einer auf S_3 senkrechten Ebene (Satz II, § 130), welche ihn in einer Graden S_0S_0' schneidet, wenn S_0 und S_0' die Durchschnittspunkte der Graden A_0A_0', B_0B_0' mit dem Raum S_3 sind (Fig. 128). Die beiden Segmente (A_0B_0), $(A_0'B_0')$ sind bezüglich der Graden S_0S_0' symmetrisch und mithin auch bezüglich des Raums S_3, weil ein Loth auf die Grade S_0S_0' in der genannten Ebene auch senkrecht auf dem Raum S_3 steht. Die Graden der beiden Segmente schneiden sich mithin in einem Punkt der Graden S_0S_0'.

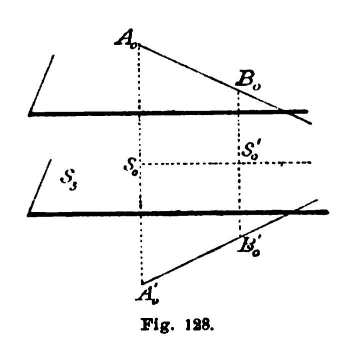


Fig. 128.

Satz II. Eine Ebene (oder ein Raum) ist einer andern Ebene (oder einem Raum) symmetrisch, welche (welcher) die erstere (den ersteren) in einer Graden (Ebene) des Symmetrieraums schneidet.

Wie bei Satz II, § 97. Für den zweiten Theil braucht man nur den Satz XIV, § 122 zu Hülfe zu nehmen.

Satz III. Zwei bezüglich eines Raums von drei Dimensionen symmetrische Vierkante sind identisch und entgegengesetzt gerichtet.

Beweis analog wie bei Satz IV, § 97.

§ 148. *Satz I. Der Zusammenhang zwischen zwei identischen Figuren des Raums S_4 ist vollständig durch zwei sich entsprechende gleiche Vierkante bestimmt.*

$a_1b_1c_1d_1$, $a_1'b_1'c_1'd_1'$ seien die beiden Vierkante mit den Scheiteln A_0, A_0' (Fig. 129). Nimmt man auf den Kanten des ersten die vier Punkte B_0, C_0, D_0, E_0 und auf den entsprechenden des zweiten die Punkte B_0', C_0', D_0', E_0' in demselben Abstand von A_0', wie die Punkte B_0, C_0, D_0, E_0 von A_0, so sind die Dreiecke

$A_0B_0C_0$, $A_0'B_0'C_0'$ gleich, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; mithin ist $(B_0C_0) \equiv (B_0'C_0')$. Die Kanten der zwei Tetraeder $B_0C_0D_0E_0$, $B_0'C_0'D_0'E_0'$ sind daher gleich und die beiden Pentaeder $A_0B_0C_0D_0E_0$, $A_0'B_0'C_0'D_0'E_0'$ sich entsprechende Figuren.

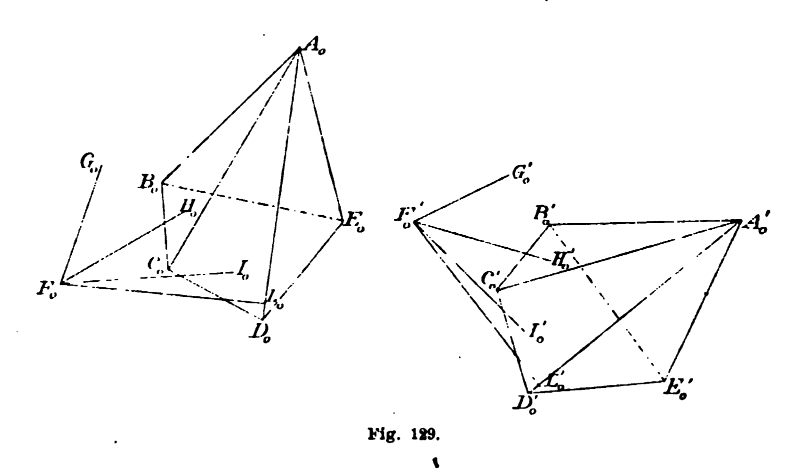


Fig. 129.

F_0 sei nun ein Punkt der ersten Figur; wir verbinden ihn mit A_0. Die Grade A_0F_0 trifft den Raum der gegenüberliegenden Seite $B_0C_0D_0E_0$ in einem Punkt X_0. Da die Figur des Raums $B_0C_0D_0E_0$ mit derjenigen des Raums $B_0'C_0'D_0'E_0'$ identisch sein muss, so folgt daraus (Satz I, § 98), dass es in der letzteren einen dem Punkt F_0 entsprechenden Punkt F_0' geben muss. Nimmt man auf der Graden $A_0'X_0'$ einen Punkt F_0' derart an, dass $(A_0'F_0') \equiv (A_0F_0)$ und überdies $(X_0'F_0') \equiv (X_0F_0)$ ist, so wird F_0' der dem Punkt F_0 entsprechende Punkt sein.

Zus. I. Der Identitätszusammenhang zwischen zwei identischen Figuren wird durch zwei sich entsprechende Pentaeder bestimmt.

Beweis analog wie bei Zus. Satz I, § 98.

Zus. II. Zwei identische Figuren können keine fünf sich entsprechende nicht in einem Raum von drei Dimensionen liegende Punkte gemeinschaftlich haben.

Satz II. In dem Zusammenhang zweier identischer Figuren entspricht der Raum im Unendlichgrossen sich selbst.

Beweis analog wie bei Satz II, § 98.

Satz III. Die sich entsprechenden Vierkante zweier identischer Figuren des Raums S_4 haben dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung, je nachdem zwei beliebige von ihnen gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Beweis analog wie zu Satz III, § 98 (Fig. 129).

Def. I. Zwei identische Figuren, deren entsprechende gleiche Vierkante dieselbe Richtung haben, heissen *gleichgerichtet oder congruent*, im andern Fall *entgegengesetzt gerichtet oder symmetrisch.*

Zus. I. Zwei Figuren sind congruent, wenn sie einer dritten congruent oder symmetrisch sind.

Zus. II. Zwei Figuren sind symmetrisch, wenn die eine einer dritten congruent, die andre symmetrisch ist.

Diese Zusätze gehen unmittelbar aus dem vorigen Satz in Verbindung mit Satz VIII, § 146 hervor.

Satz IV. Zwei congruente Figuren, welche vier sich entsprechende nicht in einer Ebene liegende Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und wenn sie drei sich entsprechende Punkte gemeinschaftlich haben, so gehören alle Punkte der Ebene der drei Punkte den beiden Figuren an.

Beweis analog wie zu Satz IV, § 98.

Satz V. Haben zwei symmetrische Figuren vier sich entsprechende Punkte gemeinschaftlich, so haben sie die Punkte des von diesen vier Punkten bestimmten Raums gemeinschaftlich und sind bezüglich dieses Raums symmetrisch.

Beweis analog wie zu Satz V, § 98.

Satz VI. Die gradlinigen durch zwei Gruppen von m Punkten bestimmten Figuren sind identisch, wenn die Segmente, welche m — 5 derselben mit den übrigen und die Segmente, welche diese fünf verbinden, der Ordnung nach gleich sind.

Beweis analog wie bei Satz VI, § 98.

15.

Kegel und Cylinder, die zur Spitze eine Grade haben. — Kegel und Cylinder erster und zweiter Art, die zur Spitze einen Punkt haben.

§ 149. *Bem. I.* Die Ebenen, welche eine Grade P_1 mit den Punkten eines in der Polarebene des Punktes im Unendlichgrossen der Graden gelegenen Kreises C_∞ verbinden, bestimmen einen Kreiskegel, der zur Spitze die Grade P_1 und die P_1 mit dem Centrum von C_x verbindende Ebene zur Axenebene hat. Die Eigenschaften dieses Kegels werden ähnlich abgeleitet wie beim Kreiskegel in S_3 (§ 99). Wir bemerken nur, dass jede Ebene S_2, welche senkrecht von der ersten Art auf der Axenebene steht (Def. I, § 129), diesen Kegel in einem Kreis schneidet, dessen Centrum S_0 in dem Durchschnittspunkt der beiden Ebenen liegt (Fig. 130).

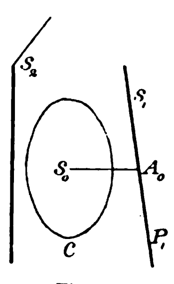


Fig. 130.

Der Kreiscylinder, welcher zur Spitze eine Grade hat, wird durch einen Kreis und die Grade im Unendlichgrossen einer Ebene erzeugt, welche normal von der ersten Art auf der Ebene des gegebenen Kreises steht.

Ebenso erhält man den Kreiskegel, welcher zur Spitze einen Punkt hat und im Unendlichgrossen eine Kugel und die ihr entgegengesetzte Kugel. Die Eigenschaften dieses Kegels werden ebenfalls analog wie beim Kreiskegel in S_3 bewiesen, obwohl offenbar ein vom vorigen verschiedener Fall vorliegt. Wir entwickeln hier nur die Eigenschaften des Kegels zweiter Art, welcher zur Auflösung des Problems der Construction der Winkel zweier Ebenen dient, weil wir in S_n nicht von Kreiskegeln handeln, in welche der letztere Kegel als specieller Fall eingeschlossen wäre.

Def. I. Die Ebenen, welche einen Punkt P_0 mit den Graden einer Cylinderoberfläche C_x im Unendlichgrossen der Axen a_{1x}, $a_1{}'_x$ (§ 117) verbinden, bilden eine Figur, welche *die Oberfläche eines Kreiskegels zweiter Art* heisst. Der von ihr eingeschlossene Theil des Raums S_4 heisst *Kreiskegel* oder *Kegel zweiter Art,* von welchem die genannten Ebenen die *Erzeugungsebenen* sind, der Punkt

P_0 *die Spitze*, die Ebenen $P_0 a_{1x}$, $P_0 a_1'{}_x$ *die Axenebenen oder Axen*, der Cylinder C_x *der Leitcylinder* der Kegeloberfläche und des Kegels zweiter Art. Ein durch eine der Axenebenen gehender Raum heisst *Diametralraum*.

Zus. Die Kegeloberfläche zweiter Art ist eine Figur einer Dimension bezüglich ihrer Erzeugungsebenen und dreier Dimensionen bezüglich ihrer Punkte.

Denn der Cylinder C_x ist bezüglich seiner Graden eine Figur einer Dimension.

Bem. II. Auch hier können wir, wenn dadurch keine Zweideutigkeiten hervorgerufen werden, das Wort Kegeloberfläche mit Kegel vertauschen.

Satz I. Die Axenebenen des Kegels zweiter Art stehen senkrecht von der ersten Art aufeinander.

Denn die Axen des Cylinders C_x sind zwei Pollinien (Satz I, § 117 und Satz I, § 129).

Satz II. Eine Axenebene und jede Erzeugungsebene sind gleichwinklige Ebenen (Satz I, § 117 und Def. III, § 140).

Zus. Die Ebenen, welche gleiche Winkel mit einer gegebenen Ebene machen und sie in demselben Punkt P_0 schneiden, bilden einen Kegel zweiter Art.

Denn die Graden im Unendlichgrossen der Erzeugungsebenen haben gleichen Abstand von der Graden im Unendlichgrossen der gegebenen Ebene.

Satz III. Eine Ebene S_2, welche durch die Spitze des Kegels geht, eine Erzeugungsebene und eine Axenebene in einer Graden schneidet und senkrecht auf einer derselben steht, ist auch auf der andern senkrecht.

Denn die Graden im Unendlichgrossen der Erzeugungsebene und der Axenebene sind Grade gleichen Abstandes und die Grade im Unendlichgrossen der Ebene S_2 schneidet diese beiden Graden und steht auf einer derselben rechtwinklig. Sie ist mithin auch senkrecht auf der andern (Def. II und Satz IV, § 114).

Satz IV. Jeder Raum, welcher durch die Spitze geht und senkrecht auf einer der Axenebenen steht, schneidet den Kegel zweiter Art in einem Kreiskegel, welcher zur Axe die Durchschnittsgrade des Raums mit der Axenebene hat.

Denn jede auf einer Axe des Cylinders C_x senkrechte Ebene enthält zwei entgegengesetzte Kreise dieses Cylinders (Def. I, § 117 und Def. I, § 99).

Satz V. Jeder Raum, welcher durch eine der Axenebenen geht, schneidet die Erzeugungsebenen in zwei bezüglich dieser Axenebene symmetrischen Strahlensystemen (Satz II, § 117).

Satz VI. Jeder Raum, welcher eine Erzeugungsebene enthält, schneidet den Kegel zweiter Art in einer andern Erzeugungsebene (Satz V, § 117).

Satz VII. Durch jede Erzeugende des Kegels zweiter Art gehen nur zwei Erzeugungsebenen (Satz III, § 117).

Satz VIII. Eine Ebene, welche durch die Spitze des Kegels zweiter Art geht, kann ihn in nicht mehr als zwei Graden treffen und wenn sie ihn in einer Graden trifft, so trifft sie ihn auch in einer zweiten, welche mit der ersten zusammenfallen kann (Satz IV, § 117).

Zus. Jede Grade kann mit dem Kegel nicht mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich haben, welche zusammenfallen können.

Def. II. Eine Ebene welche den Kegel in zwei zusammenfallenden Graden trifft, heisst *Berührungsebene* längs der gegebenen Graden, welche *Berührungserzeugende* genannt wird.

Jede Grade, welche zwei zusammenfallende Punkte mit dem Kegel gemeinschaftlich hat, heisst *Tangente* in dem gegebenen Punkt.

Satz IX. Alle Berührungsebenen längs einer Graden des Kegels zweiter Art liegen in einem Raum, welcher die beiden durch die gegebene Grade gehenden Erzeugungsebenen enthält und auf der durch die Grade normal zu der einen und der andern Ebenenaxe gezogenen Ebene senkrecht steht (Satz IX, § 117).

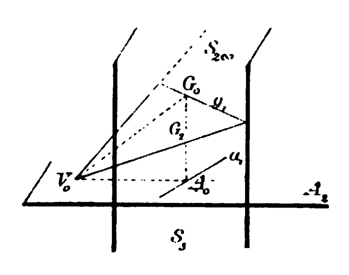
Def. III. Ein solcher Raum heisst *Berührungsraum* längs der gegebenen Graden, welche die *Berührungserzeugende* ist.

Satz X. In dem Kegel zweiter Art gibt es zwei Systeme von Erzeugungsebenen. Die Erzeugungsebenen verschiedener Systeme schneiden sich in einer Graden, diejenigen desselben Systems nur in der Spitze (Satz VI, § 117).

Def. IV. Ein Kreissystem von Graden in einem Raum von drei Dimensionen, welches eine gegebene Grade zur Axe hat (§ 103) und dessen Graden die Axe nicht treffen, heisst *Kreishyperboloid.* Seine Linie im Unendlichgrossen ist ein Kreis (Satz X, § 103; Def. I, § 40 und Satz I, § 84).

Satz XI. Eine auf einer Axenebene von der ersten Art senkrechte Ebene trifft den Kegel zweiter Art in einem Kreis, dessen Centrum der Durchschnittspunkt der beiden Ebenen ist.

V_0 sei die Spitze des Kegels. Eine Ebene, welche auf der Axenebene A_2 senkrecht von der ersten Art steht, schneidet A_2 in einem Punkt A_0 und eine Erzeugungsebene G_2 in einem Punkt G_0. Die Grade $G_0 A_0$ steht senkrecht auf der Ebene A_2 (Zus. III, Satz I, § 129) und daher auch auf der Graden $V_0 A_0$. Die Ebene $G_0 V_0 A_0$ ist normal von der zweiten Art zur Ebene A_2 und daher auch zur Ebene G_2 (Satz III); $\widehat{G_0 V_0 A_0}$ ist desshalb der Winkel der beiden Ebenen und $(G_0 A_0)$ also constant für alle Erzeugungsebenen (Satz X, § 55). Damit u. s. w. (Fig. 131).



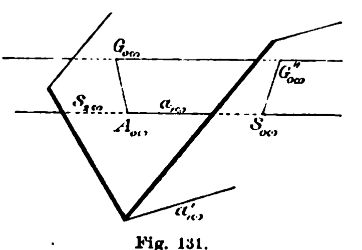


Fig. 131.

Satz XII. Ein Raum S_3, welcher senkrecht auf einer Axenebene steht, schneidet den Kegel zweiter Art in einem Kreishyperboloid.

Denn die Ebene $S_{2\infty}$ von S_3 steht senkrecht auf der unendlich fernen Graden $a_{1\infty}$ der Axenebene A_2. Die Ebene $S_{2\infty}$ schneidet den Cylinder im Unendlichgrossen in zwei entgegengesetzten Kreisen. Die Graden g_1, in welchen der Raum die Erzeugungsebenen schneidet, machen daher denselben Winkel mit der Durchschnittsgraden a_1 von S_3 mit der Axenebene A_2 (Satz I, § 130; Satz III, § 110 und Def. I, § 40) (Fig. 131).

Der Pol $S_{0\infty}$ von $S_{2\infty}$ liegt in $a_{1\infty}$ und ist dem Punkt $A_{0\infty}$ im Unendlichgrossen der Graden a_1 conjugirt. Die Grade $V_0 A_0$ sei in A_0 normal zur Graden a_1 in der Ebene A_2; sie geht daher durch $S_{0\infty}$. Von A_0 ziehe man in S_3 die Ebene S_2 senkrecht von der ersten Art auf A_2, welche mithin in S_3 normal zu a_1 ist (Zus. III, Satz I, § 129). Der Raum $V_0 S_0$ geht durch den Punkt $S_{0\infty}$ und steht daher senkrecht auf dem Raum S_3 (Satz I, § 131 und Def. II, § 108).

$a_1{}'_\infty$ sei die Pollinie von $a_{1\infty}$ und $G_0{}''_\infty$ der Durchschnittspunkt der Graden $g_{1\infty}$ von G_2 mit der Ebene $(a_1{}'_\infty S_{0\infty})$ also der Punkt im Unendlichgrossen der Graden $V_0 G_0$, welche der Durchschnitt der Ebene G_2 mit dem Raum $(V_0 S_2)$ ist. Die Graden $g_{1\infty}$ und $a_{1\infty}$ sind aber Graden gleichen Abstandes (Def. I) und da die Graden $A_{0\infty} G_{0\infty}$ und $S_{0\infty} G_0{}''_\infty$ senkrecht auf $a_{1\infty}$ stehen, weil sie auch die in den Ebenen $S_{2\infty}$ und $(a_1{}'_\infty S_{0\infty})$ liegende Pollinie $a_1{}'_\infty$ treffen (Satz IX, § 110), so stehen sie auch senkrecht auf der Graden $g_{1\infty}$ (Def. II und Satz IV, § 114). Weil ferner $(A_{0\infty} S_{0\infty}) \equiv \frac{\pi}{2}$ ist (Satz I, § 108), so ist auch $(G_{0\infty} G_0{}''_\infty) \equiv \frac{\pi}{2}$ (Satz IV und Satz III, § 114). Die Grade $S_{0\infty} G_0{}''_\infty$ ist mithin die Pollinie des Punktes $G_{0\infty}$ in der Ebene $G_{0\infty} G_0{}''_\infty S_{0\infty}$ (Satz I, § 69) d. h. also die Grade g_1 steht senkrecht auf der Ebene $V_0 G_0 A_0$ und mithin auch auf der Graden $G_0 A_0$ (Zus. V, Satz I, § 87). Dies gilt für jede Erzeugende g_1; ferner sind die Segmente $(A_0 G_0)$ gleich (Satz XI) und die den Erzeugenden g_1 und der Graden a_1 gemeinschaftlichen normalen Segmente liegen in der Ebene S_2; folglich bilden die Graden g_1 in S_3 ein Kreishyperboloid (Satz X; XI und VIII, § 103 und Def. IV).

Zus. Jeder einer beliebigen Axenebene des Kegels zweiter Art parallele Raum S_3 schneidet den Kegel in einem Kreishyperboloid.

Denn da der Raum S_3 die Grade im Unendlichgrossen der Axenebene A_2 enthält, so steht seine Ebene im Unendlichgrossen senkrecht auf der Graden im Unendlichgrossen der andern Axenebene A_2' (Satz III, § 110) d. h. S_3 steht senkrecht auf A_2'.

Bem. III. Da $(G_{0\infty} G_0{}''_\infty) \equiv \frac{\pi}{2}$, so folgt, dass die Erzeugenden g_1 des Hyperboloids rechtwinklig zu den Erzeugenden $V_0 G_0$ des Kreiskegels sind, welcher zur Spitze V_0 und zur Directrix den in der Ebene S_2 gelegenen Kreis hat.

Es lässt sich nicht behaupten, dass, wenn der Raum S_3 und in ihm das Kreishyperboloid mit der Axe a_1 gegeben ist, nun jeder Punkt V_0 der Ebene A_2 oder jeder Punkt V_0 des in A_0 in der Ebene A_2 auf a_1 errichteten Lothes mit dem Kreishyperboloid einen Kreiskegel zweiter Art bestimmen müsse. In der That muss der Winkel $G_0 V_0 A_0$, weil alsdann $G_0 A_0$ gegeben ist, dem Winkel der beiden Graden a_1, g_1 gleich sein, was nicht der Fall ist, wenn V_0 ein beliebiger Punkt ist.

§ 150. *Construction der Winkel zweier Ebenen mit Elementen des endlichen Gebiets.*

Mit Hülfe der Construction der auf zwei Graden im Unendlichgrossen normalen Segmente lässt sich ein Kegel zweiter Art construiren, dessen Spitze in dem Durchschnittspunkt P_0 der beiden Ebenen A_2, B_2 liegt. Zu diesem Zweck wähle man in der Ebene B_2 eine Grade B_1, die durch P_0 geht, und A_1 möge ihre Projection auf A_2 sein, welche im Allgemeinen die Grade B_1 nicht zur

Projection auf B_2 hat. Denken wir uns den Kegel zweiter Art mit der Axe A_2 und einem dem Winkel $(A_1 B_1)$ gleichen Winkel der Erzeugungsebenen construirt.

Die Ebene B_2 schneidet den Kegel in einer zweiten Graden B_1'. Die Projection von B_1' auf A_2 sei A_1'. Die Ebenen, welche die Halbirungslinien der Winkel (BB_1'), $(A'A_1')$ mit dem Punkt P_0 verbinden, messen die Winkel der beiden Ebenen.

§ 151. *Bem.* Wir verweilen hier auch nicht bei den Eigenschaften der Kugel, der Durchschnitte mehrerer Kugeln und der continuirlichen Systeme unveränderlicher Figuren, denen wir bei dem Raum S_n begegnen werden.

II. Kapitel.

Der vollständige Raum von vier Dimensionen.

1.

Die Haupteigenschaften des vollständigen Raums.

§ 152. *Bem. I.* Die Eigenschaften des vollständigen Raums von vier Dimensionen erhält man leicht aus den Eigenschaften des *Euclid*'schen Raums, wenn man als Masseinheit der Abstände die unendlich grosse Einheit ansieht, welche der Winkeleinheit entspricht und dabei stets derselben allgemeinen Methode folgt, welche wir sowohl bei dem Studium der vollständigen Ebene (Theil I, Buch II, Kap. II), wie bei der Untersuchung des vollständigen Raums von drei Dimensionen eingehalten haben (Theil I, Buch III, Kap. II).

Jede Grade, jede Ebene und jeder Raum des vollständigen Raums S_4 sind ebenfalls vollständig und die Sätze der §§ 121 und 122 gelten in S_4 mit analogen Beweisen. Nur hat man zu beachten, dass zwei Grunddinge (Grade, Ebene und Raum), welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, auch den Gegenpunkt gemeinschaftlich haben.

§ 153. *Polarfiguren.*

Satz I. Die zu einem Punkt conjugirten Punkte liegen in einem Raum von drei Dimensionen.

Beweis analog wie zu Satz I, § 108 mit Hülfe des Satzes I, § 119.

Def. I. Dieser Raum heisst *der Polarraum* des Punktes und seines Gegenpunktes und diese Punkte heissen *die Pole* des Raums.

Bem. I. Der Polarraum eines Punktes ist ein absoluter Grenzraum bezüglich der *Euclid*'schen Einheit um den Punkt im allgemeinen Raum und ist der Raum im Unendlichgrossen eines jeden Punkts des *Euclid*'schen Gebiets des Raums von vier Dimensionen um den gegebenen Punkt (Satz I, § 123; Uebereink. § 28 und Bem. § 31).

Zus. I. Der Polarraum eines Punkts des Polarraums eines andern Punkts geht durch diesen Punkt.

Zus. II. Jeder durch einen Punkt gehende Raum ist der Polarraum zweier Gegenpunkte des Polarraums des gegebenen Punktes.

Beweis analog wie bei Zus. III, Satz I, § 108.

Zus. III. Die Polargrade oder Polarebene eines Punktes A_0 in einer Ebene oder einem Raum, welcher A_0 enthält, liegt in dem Durchschnitt mit dem Polarraum von A_0.

Wie Zus. IV, Satz I, § 108.

Def. II. Zwei Räume, von welchen der eine die Pole des andern enthält, heissen *conjugirt.*

Satz II. Die Polarräume der Punkte einer Graden gehen durch eine Ebene und die Polarräume der Punkte dieser Ebene gehen durch die Grade.

Beweis analog wie bei Satz II, § 108.

Def. III. Eine Grade und eine Ebene, welche den Bedingungen des vorigen Satzes genügen, heissen *conjugirte Polargrade und -ebene* oder nur *Polargrade und -ebene.*

Zus. Die Segmente, deren Enden in einer Polargraden und -ebene liegen, sind rechte.

Denn die Punkte der Graden sind den Punkten der Ebene conjugirt.

Satz III. Jeder Raum hat zwei Gegenpunkte zu Polen.

Denn die Polarräume von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten des gegebenen Raums schneiden sich in zwei Gegenpunkten A_0 und A_0'. Schnitten sie sich in einer Graden oder einer Ebene, so lägen die vier gegebenen Punkte in einer Ebene oder einer Graden (Satz II). A_0 und A_0' haben daher den gegebenen Raum zum Polarraum.

Satz IV. Die Pole der durch eine Grade oder Ebene gehenden Räume liegen auf der Polarebene oder -graden der gegebenen Graden oder Ebene.

Beweis analog wie zu Satz IV, § 108.

Def. IV. Zwei Grundelemente A und B, welche nicht Polarelemente von S_4 sind (Punkt, Grade, Ebene oder Raum) und welche nicht in einem Raum S_3 liegen, sind, sobald ihre Bestimmungspunkte nicht immer in einem solchen Raum enthalten sind, in S_4 *conjugirt,* wenn das Element B in dem Polarelement von A liegt oder durch dieses Element geht.

Bem. II. So sind z. B. zwei Räume conjugirt, wenn der eine derselben durch die Pole des andern geht, zwei Ebenen, von denen die eine durch die Pollinie der andern geht und zwei Grade, von denen die eine in der Polarebene der andern enthalten ist.

Liegen A und B in einem Raum S_3, so gelten die für diesen Raum gegebenen Definitionen. So sind eine Grade und eine Ebene, welche sich in einem Punkt treffen, conjugirt, wenn in dem von ihnen bestimmten Raum von drei Dimensionen die Ebene durch die Pollinie der gegebenen Graden geht.

Satz V. Ist ein Element C in einem andern Element A enthalten oder geht es durch dieses Element, so geht das Polarelement C' von C durch das Polarelement A' von A oder ist in diesem Element enthalten und die Elemente C und A', C' und A sind conjugirt.

Der erste Fall möge gegeben sein. Die Polarräume der Punkte von A treffen sich in dem einzigen Element A'. Unter diesen Polarräumen befinden sich auch diejenigen der Punkte von C; diese gehen aber durch C' und mithin geht C' durch A'.

Ferner geht durch C das Polarelement von A' und durch A' das Polar-

element von C; mithin sind A' und C, C' und A conjugirt. Der zweite Fall ist danach einleuchtend.

Zus. Sind A und B conjugirte Elemente, so genügen sie beide der Def. IV.

Wenn B in dem Polarelement A' von A liegt (Def. IV) so geht das Polarelement von B d. h. B' durch A und wenn B durch A' geht, so liegt B' in A; mithin ist A im ersten Fall in dem Polarelement von B enthalten und geht im zweiten durch dieses Element; damit u. s. w. (Def. IV).

Satz VI. Sind zwei Polarelemente gegeben, so sind zwei andre bezüglich in ihnen enthaltene oder durch sie gehende Elemente conjugirt.

A und A' seien die gegebenen, C und D die in ihnen enthaltenen Elemente, C' und D' die Polarelemente von C und D. Da C in A enthalten ist, so geht C' durch A' und mithin auch durch D; folglich sind C und D conjugirt (Def. IV und Zus. Satz V).

Satz VII. Wenn A durch B geht, so schneidet A das Polarelement B' von B in dem Polarelement B'' von B in A.

Denn die allen Punkten von B in A conjugirten Punkte liegen in dem Durchschnitt von A mit B' und alle Punkte von B'' sind in A denjenigen von B conjugirt.

Satz VIII. Zwei conjugirte Elemente A und B, welche ein Element C gemeinschaftlich haben, schneiden das Polarelement von C in Elementen, welche in demselben polar oder conjugirt sind und umgekehrt.

Wir schliessen den Fall aus, in welchem die Elemente A und B in einem Raum von drei Dimensionen liegen, denn alsdann folgt das Theorem schon aus den Sätzen in § 108 (Bem. II).

Sie können desshalb keine Grade und Ebene sein, sondern sind entweder eine Grade und ein Raum oder zwei Ebenen oder eine Ebene und ein Raum oder zwei Räume.

α' und β' seien die Durchschnittselemente von A und B mit dem Polarelement C' von C und A', B' die Polarelemente von A und B. Jedes der Elemente A und B kann nicht in dem Polarelement des andern enthalten sein, welches in C' enthalten ist, das mithin durch C gehen würde, während doch zwei Polarelemente keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Das Element $B \equiv (C\beta')$ geht durch das Polarelement A' von $A \equiv (C\alpha')$; A' ist aber auch in C' enthalten (Satz V), mithin auch A' in β', wenn es nicht β' selbst ist. Analog ist das Element B' in C' enthalten und in A und daher auch in α'. Die Punkte von A' sind aber denjenigen von A und desshalb auch von dem in A enthaltenen B' conjugirt und die Punkte von B' sind denjenigen von A' conjugirt, mithin sind sie es auch in C'.

Die beiden Elemente A' und B' sind in C' polar und α' und β' sind, wenn sie nicht in A' und B' sind, conjugirt (Satz VI).

Wenn umgekehrt die zwei Polarelemente A' und B' in C' gegeben sind, so hat das Element (CB') ein in C' und in A' enthaltenes Element zum Polarelement. Ebenso ist das Polarelement von (CA') in B' enthalten; mithin sind (CA'), (CB') conjugirt (Satz VI).

Zus. I. Wenn das Element C kein Punkt ist und man wählt in C einen beliebigen Punkt C_0, so schneidet der Polarraum C_3 von C_0 die beiden conjugirten Elemente A und B in Elementen, die in C_3 polar oder conjugirt sind.

Denn der Polarraum C_3 von C_0 geht durch C' und trifft A und B in Elementen α'' und β'', welche bezüglich α' und β' und mithin auch B' und A' als Theile enthalten. Das Element β'' hat (C_0B') zum Polarelement und mithin ist B' das Polarelement von β'' in C_3 (Satz VII) und α'', β'' sind daher in C_3 conjugirt.

Bem. III. Wir unterlassen es, die unmittelbaren Ergebnisse aus den vorstehenden Theoremen in Sätze zu fassen (vergl. § 108).

§ 154. *Bem.* Wie für den vollständigen Raum von drei Dimensionen, so wird auch die Identität des vollständigen Raums S_4 um seine Punkte, seine Graden und seine Ebenen und diejenige seiner Theile bezüglich eines jeden seiner Räume S_3 bewiesen.

§ 155. *Senkrechte Grundelemente.*[1]

Bem. I. Da eine Grade und eine Ebene, welche durch einen der Pole eines Raums S_3 gehen, auch den, welcher der Gegenpunkt des gegebenen Pols ist, enthalten, so können wir, wenn Zweideutigkeiten ausgeschlossen sind, auch von dem Pol eines Raums S_3 sprechen.

Satz I. Die Segmente eines Raums dienen als Mass für die Winkel um die Pole des Raums.

Wie bei Satz I, § 110.

Bem. II. Die Definitionen von aufeinander senkrechten Grundelementen, welche in dem *Euclid*'schen Gebiet des Raums S_4 um einen Punkt gegeben wurden, gelten auch für den vollständigen Raum S_4.

Zus. I. Wenn zwei Grundelemente (Grade, Ebenen und Räume), welche nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, den Polarraum des Punktes in conjugirten Elementen schneiden, so stehen sie senkrecht aufeinander.

Satz II. Zwei conjugirte Grundelemente, welche ein Durchschnittselement gemeinschaftlich haben, stehen senkrecht aufeinander und umgekehrt.

A und B seien diese beiden Elemente und C (Punkt, Grade oder Ebene) das gemeinschaftliche Element. Ist C ein Punkt, so ist das Theorem der Zusatz zu Satz I; in den übrigen Fällen folgt es aus Zus. I, Satz VIII, § 153.

Zus. I. Eine auf einem Raum senkrechte Grade steht senkrecht auf allen Graden dieses Raums, welche durch den Durchschnittspunkt des Raums mit der gegebenen Graden gehen.

Beweis analog wie zu Zus., Satz II, § 110.

Zus. II. Eine auf einer andern senkrechte Ebene steht senkrecht auf allen Graden dieser Ebene, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Ebenen gehen.

B_2, C_2 seien die beiden Ebenen, A_0 ihr gemeinschaftlicher Punkt und A_3 der Polarraum von A_0, welcher B_2, C_2 in zwei Graden B_1, C_1 schneidet, die in A_3 polar sind (Satz II). Die Grade A_0C_0, welche A_0 mit einem Punkt C_0

1) Hier sind die Grundelemente nicht wie in Def. I, § 57 der Einl. identisch, sondern sind Punkte, Grade, Ebenen und Räume von drei Dimensionen.

von C_1 verbindet, steht auf der Ebene B_2 senkrecht, weil in dem Raum $(B_2 C_0)$ der Punkt C_0 der Pol der Ebene B_2 ist.

Zus. III. Die durch ein Element A gehenden Elemente stehen auf dem Polarelement A' senkrecht.

Denn ihre Polarelemente liegen in dem Element A' (Satz V, § 153), sind mithin mit A' conjugirt und haben mit A' wenigstens einen Punkt gemeinschaftlich.

Beisp. Die durch einen Punkt gehenden Graden, Ebenen und Räume stehen auf dem Polarraum dieses Punktes senkrecht.

Zus. IV. Die auf einem Element A senkrechten Elemente, welche nicht mit A in demselben Raum S_3 enthalten sind, gehen durch das Polarelement A'.

Denn sie sind dem Element A conjugirt und in dem Element A nicht enthalten.

Beisp. Die auf einem Raum senkrechten Graden, Ebenen und Räume gehen durch die Pole dieses Raums.

Satz III. Jede Grade, welche eine Grade und ihre Polarebene schneidet, steht auf beiden senkrecht und umgekehrt trifft jede Grade, welche die Grade (oder Ebene) schneidet und senkrecht auf der Graden (oder Ebene) steht, die Ebene (oder Grade) in einem Punkt.

Denn R_1, R_2 seien die Grade und die Polarebene, S_1 die Transversale. Die Ebene $S_1 R_1$ schneidet die Ebene R_2 in einem Punkt, welcher in der Ebene $S_1 R_1$ der Pol der Graden R_1 ist; mithin steht die Grade S_1 senkrecht auf R_1. Analog schneidet der Raum $S_1 R_2$ die Grade R_1 in dem Pol der Ebene R_2 in diesem Raum (Satz VII, § 153); daher steht S_1 senkrecht auf der Ebene R_2.

Die Umkehrung des Satzes ist einleuchtend.

Satz IV. Zwei Räume haben eine einzige senkrechte Grade gemeinschaftlich.

Nämlich die Grade, welche die beiden Pole verbindet.

Satz V. Ein Raum und eine Ebene haben eine senkrechte Ebene und nur eine normale Grade gemeinschaftlich, welche beide schneidet.

Nämlich die Ebene, welche den Pol des Raums mit der Polargraden der Ebene verbindet.

Die Grade, welche die Pole des Raums mit dem Punkt verbindet, in welchem die senkrechte Ebene die gegebene Ebene schneidet, ist das verlangte Loth (Zus. III, II, Satz II).

Satz VI. Ein Raum und eine Grade haben einen senkrechten Raum und nur eine senkrechte Grade gemeinschaftlich, welche beide schneidet.

Nämlich den Raum, welcher die Pole des gegebenen Raums mit der Polarebene der Graden verbindet. Die Grade, welche die Pole des Raums mit dem Punkt verbindet, in welchem die gegebene Grade den gemeinschaftlichen normalen Raum schneidet, ist das einzige gesuchte Loth.

Satz VII. Drei oder vier Räume haben eine normale Ebene oder einen normalen Raum gemeinschaftlich.

Nämlich die Ebene oder den Raum, welche durch die Pole der drei oder vier Räume bestimmt werden.

Satz VIII. Zwei nicht in einem Raum von drei Dimensionen liegende Ebenen haben zwei senkrechte Grade gemeinschaftlich.

Denn R_2, S_2 seien die beiden Ebenen, R_1 und S_1 ihre Polargraden; jede Grade, welche die Graden R_1 und S_1 und die Ebenen R_2 und S_2 schneidet, ist ein gemeinschaftliches Loth auf die beiden Ebenen. Der durch die beiden Graden R_1, S_1 bestimmte Raum trifft die beiden Ebenen in zwei Graden R_1', S_1', welche in diesem Raum die Pollinien von R_1, S_1 sind. Nun weiss man, dass die vier Graden R_1, S_1, R_1', S_1' nur zwei Transversalen gemeinschaftlich haben, welche gemeinschaftliche Lothe auf den beiden ersten (Satz X, § 117 und Satz VIII, § 110) und mithin auf den beiden Ebenen sind.

Satz IX. Eine Grade und eine Ebene oder zwei Grade, welche sich nicht schneiden, haben zwei Lothe gemeinschaftlich.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

§ 156. *Bem. I.* Die Sätze des § 134 über den Abstand eines Punktes von einem Raum von drei Dimensionen gelten auch in dem vollständigen Raum S_4. Der kleinste und der grösste Abstand eines Punktes von einem Raum von drei Dimensionen sind supplementär. Dagegen gelten in dem vollständigen Raum die Eigenschaften der Abstände paralleler Graden, Ebenen und Räume nicht. Dafür kommen in dem vollständigen Raum andre Eigenschaften hinzu, nämlich der Segmente, welche auf zwei Graden, einer Graden und einer Ebene, zwei Ebenen oder schliesslich auf zwei Räumen von drei Dimensionen senkrecht stehen, von welchen die Enden in den betreffenden Elementen liegen und welche die kleinsten und grössten Abstände der Punkte des einen Elements von den Punkten des andern angeben. So beweist man mittelst des Identitätszusammenhangs (Satz III, § 15), dass zwei solche Elementepaare, wenn sie dieselben Abstände haben, identisch sind.

Für die Winkel, die Dreikante zweiter Art, die Vierkante und Pentaeder, für die Richtungen der Figuren, die congruenten und symmetrischen Figuren beweist man die analogen Sätze wie in dem *Euclid*'schen Raum, indem man dasselbe Verfahren einschlägt wie bei der vollständigen Ebene und dem vollständigen Raum von drei Dimensionen. Es ist zu beachten, dass in dem vollständigen Raum S_4 zwei entgegengesetzte Figuren symmetrisch sind, wie in der vollständigen Ebene. Ebenso werden die Kegeloberflächen, die Kugeloberfläche und die Kugel des vollständigen Raums S_4 definirt und ihre Eigenschaften auf analoge Art nachgewiesen.

Aehnlich verfährt man bei den stetigen Systemen unveränderlicher Figuren, unter welchen das Parallelsystem fehlt.

Buch II.

Der Euclid'sche Raum von n Dimensionen.

I. Kapitel.

Der Euclid'sche Raum von n Dimensionen.

1.

Definition und Construction des Sterns $(n-2)^{ter}$ Art und des Raums von n Dimensionen.

§ 157. *Bem. I.* Aus der Construction des Sterns zweiter Art also auch des Raums von vier Dimensionen und aus der Untersuchung ihrer Grundeigenschaften leiten wir jetzt leicht die Construction der Sterne höherer Art und der Räume einer beliebigen gegebenen Anzahl n von Dimensionen ab.

Der Raum von fünf Dimensionen wird durch einen Raum von vier Dimensionen und einen Punkt ausserhalb desselben erzeugt, der Raum von sechs Dimensionen durch einen Raum von fünf Dimensionen und einen Punkt ausserhalb desselben u. s. w., der Raum von m Dimensionen durch einen Raum von $m-1$ Dimensionen und einen Punkt ausserhalb desselben (Def. II und Bem. II, § 2).

Def. I. Wir bezeichnen im Allgemeinen einen Raum von m Dimensionen mit dem Symbol S_m. Unter einem *Raum von Null Dimensionen* verstehen wir den Punkt, *von einer Dimension* die Grade, *von zwei Dimensionen* die Ebene.

Bem. II. Die Def. I ist angemessen hinsichtlich der allgemeinen Sätze, die wir beweisen werden. Die Grundräume des Raums von n Dimensionen sind der Punkt, die Grade, die Ebene, der Raum von drei u. s. w. bis $n-1$ Dimensionen.

Bem. III. Die Hauptsätze, welche wir in den folgenden Paragraphen für den Raum von n Dimensionen aufstellen werden, umfassen grossentheils als specielle Fälle die früher gegebenen Eigenschaften der Graden, der Ebene und des Raums von drei und vier Dimensionen.

Satz I. Jede Grade, welche zwei Punkte mit einem Raum S_m von m Dimensionen gemeinschaftlich hat, liegt vollständig in diesem Raum.

Der Beweis ist ähnlich wie bei dem Raum von drei und vier Dimensionen (Satz II, § 82 u. § 121), vorausgesetzt dass der Satz, der schon für $n=2$ gilt, für den Raum S_{n-1} gültig ist (Satz IV, § 46).

Bem. IV. Wir nehmen an, jeder Raum S_m $(m<n)$ sei die gradlinige von $m+1$ seiner Punkte, welche nicht in einem Raum niedrigerer Dimension liegen, bestimmte Figur, wie es bei der Graden, der Ebene, den Räumen von drei und vier Dimensionen der Fall ist (siehe Bem. VI).

Def. II. Unter *unabhängigen* Räumen in dem allgemeinen Raum verstehen wir die Räume, deren Bestimmungspunkte unabhängig sind (Def. I, § 15).[1] r Punkte sind aber *in* S_m ($r > m + 1$) oder einem Raum höherer Art *unabhängig*, wenn sie nicht in einem Raum S_{m-1} oder in Räumen niedrigerer Dimension liegen. Dasselbe sagt man von zwei oder mehr Räumen in S_m.

Satz II. Ein Raum S_m, welcher $m + 1$ unabhängige Punkte mit dem Raum S_n gemeinschaftlich hat, liegt vollständig in S_n.

Denn nach unsrer obigen Hypothese liegen die Graden, welche ihn zusammensetzen, in S_n (Satz I und Def. I, § 9).

Bem. V. Der Stern $n - 2^{ter}$ Art ist eine Figur von $n - 1$ Dimensionen bezüglich seiner Graden oder seiner Strahlen, da S_{n-1} bezüglich seiner Punkte eine solche Figur ist (Einl. § 110).

Satz III. Ein Raum S_n wird durch einen seiner Räume S_{n-1} und durch einen beliebigen seiner Punkte ausserhalb S_{n-1} erzeugt.

Wird bewiesen wie bei dem Raum von drei und vier Dimensionen (Satz IV, § 82 und § 121) unter Zuhülfenahme des Satzes II und der Bem. IV.

Zus. $n + 1$ unabhängige Punkte bestimmen einen Raum von n Dimensionen und dieser wird durch $n + 1$ seiner unabhängigen Punkte bestimmt.

Denn der Raum S_n wird durch einen seiner Räume von $n - 1$ Dimensionen d. h. durch n Punkte, welche diesen Raum bestimmen, und einen andern Punkt ausserhalb desselben bestimmt. Diese Annahme gilt nun für $n = 2$, 3, 4; mithin ist sie allgemein gültig.

Bem. VI. Besteht mithin die Hypothese in Bem. IV zu Recht, so gelten auch die Sätze II und III.

Satz IV. Zwei, drei, vier u. s. w. n unabhängige Grade eines Sterns $(n-2)^{ter}$ Art bestimmen ein Büschel, wobei ein Stern 1ter, 2ter, u. s. w. $n - 3^{ter}$ Art dem gegebenen Stern angehört.

Beweis analog wie zu Satz I, §§ 82 und 121.

2.

Durchschnitte von Räumen in dem Raum von n Dimensionen.

§ 158. *Bem. I.* Um sich zu überzeugen, ob und in welchem Raum sich zwei gegebene Räume S_m und $S_{m'}$ des Raums S_n schneiden, könnte man einen ähnlichen Weg einschlagen wie bei dem Raum von drei und vier Dimensionen und zuerst zeigen, dass eine Grade, eine Ebene u. s. w. einen Raum von S_{n-1} von S_n in einem Punkt, einer Graden u. s. w. schneiden. Dies würde jedoch zu umständlich sein. Wir geben daher hier eine allgemeinere Methode zur Bestimmung der Dimensionen des Durchschnittsraumes zweier oder mehrerer gegebener Räume sowohl für den Fall, dass sie unabhängig sind (Def. II), als wenn sie eine specielle Lage haben.

Satz I. Wenn zwei Räume, S_m und $S_{m^{(1)}}$, $a + 1$ unabhängige Punkte gemeinschaftlich haben (und mithin auch den von den gemeinschaftlichen Punkten bestimmten Raum S_a), so liegen sie in einem Raum $S_{m+m^{(1)}-a}$.

---

1) Die Unabhängigkeit bezieht sich hier auf die Bestimmung der Räume mittelst einer Gruppe von Punkten, dagegen können die Punkte andre specielle Beziehungen haben.

Zwei unabhängige Räume S_m und $S_{m^{(1)}}$ werden in dem allgemeinen Raum bezüglich durch $m+1$ und $m^{(1)}+1$ Punkte bestimmt (Zus. Satz IV, § 157). Sie gehören dem durch die $m+m^{(1)}+2$ gegebenen Punkte bestimmten Raum $S_{m+m^{(1)}+1}$ an. Die Räume S_m und $S_{m^{(1)}}$ schneiden sich in keinem Punkt, wenn sie unabhängig sind (Def. II, § 157). Denn hätten sie einen Punkt A_0 gemeinschaftlich, so könnten wir ausser A_0, um S_m und $S_{m^{(1)}}$ zu bestimmen, noch m und $m^{(1)}$ unabhängige Punkte nehmen; die beiden Räume S_m und $S_{m^{(1)}}$ würden daher in einem Raum $S_{m+m^{(1)}}$ liegen.

Hätten sie zwei Punkte und daher auch die Grade, welche sie verbindet (Satz I, § 157), gemeinschaftlich, so würden zu ihrer Bestimmung weitere $m-1$ Punkte des ersten und $m^{(1)}-1$ Punkte des zweiten Raums ausreichen und sie lägen mithin in einem Raum von $m+m^{(1)}-1$ Dimensionen. Aehnlich verhält es sich, wenn die gegebenen Räume $a+1$ unabhängige Punkte gemeinschaftlich haben.

Satz II. Zwei unabhängige Räume S_m und $S_{m^{(1)}}$ von m und $m^{(1)}$ Dimensionen in dem Raum S_n schneiden sich in einem Raum S_a, wenn $a=m+$ $+m^{(1)}-n$ ist.

Es sei $m>m^{(1)}$. Man lege durch S_m einen Raum S_{n-1}; S_n kann durch den Raum S_{n-1} und einen Punkt S_0 von $S_{m^{(1)}}$ ausserhalb S_{n-1} erzeugt werden. $S_{m^{(1)}}$ schneidet daher S_{n-1} in einem Raum $S_{m^{(1)}-1}$ (Satz III, § 157). Durch S_m lege man einen in S_{n-1} enthaltenen Raum S_{n-2} und erzeuge S_{n-1} durch S_{n-2} und einen Punkt $S_0^{(1)}$ von $S_{m^{(1)}-1}$ ausserhalb S_{n-2}. $S_{m^{(1)}-1}$ trifft dann S_{n-2} in einem Raum $S_{m^{(1)}-2}$. Fährt man so fort, so kommt man zu einem S_m und $S_{m^{(1)}-n+m+1}$ enthaltenden Raum $S_{n-(n-m-1)}=S_{m+1}$; $S_{m^{(1)}-n+m-1}$ muss aber, wenn er in S_m nicht enthalten ist, S_m in einem Raum $S_{m+m^{(1)}-n}$ schneiden. S_m, $S_{m^{(1)}}$ in S_n haben mithin wenigstens einen Raum S_a gemeinschaftlich, wenn $a=m+m^{(1)}-n$. Träfen sie sich in einem Raum von mehr Dimensionen als S_a hat, so sind sie in S_n nicht mehr unabhängig, weil sie in einem Raum von einer geringeren Anzahl von Dimensionen enthalten wären.

Zus. Ist $a=0$, so haben sie nur einen Punkt, ist a negativ, keinen Punkt gemeinschaftlich.

Bem. II. Wenn $m>m^{(1)}$ ist, so kann offenbar a höchstens $m^{(1)}$ gleich sein, in welchem Fall $S_{m^{(1)}}$ vollständig in S_m enthalten ist. Wenn wir von Räumen sprechen, welche sich schneiden, so meinen wir immer, dass keiner von ihnen vollständig in dem andern liege und dass mithin a höchstens gleich $m^{(1)}-1$ sei.

Satz III. $s+1$ unabhängige Räume S_m, $S_{m^{(1)}}$, $\cdots$, $S_{m^{(s)}}$ des Raums S_n schneiden sich in einem Raum S_p, wobei

$$p=\sum m^{(i)}-sn;\ (i=0,1,\cdots,s). \tag{1}$$

Der Raum S_a wird durch einen dritten Raum $S_{m^{(2)}}$ in einem Raum S_{a_1} geschnitten, worin nach der vorigen Relation

$$a_1=a+m^{(2)}-n=m+m^{(1)}+m^{(2)}-2n. \tag{2}$$

Der Raum S_{a_1} wird durch einen vierten Raum $S_{m^{(3)}}$ in einem Raum $S_{a^{(2)}}$ geschnitten, worin

(3) $$a_2 = a_1 + m^{(3)} - n = m + m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} - 3n.$$

So kommt man zu einem Raum $S_{a_{s-2}}$, welcher von einem $(s+1)^{\text{ten}}$ Raum $S_{m^{(s)}}$ in einem Raum $S_{a_{s-1}}$ geschnitten wird, wobei

$$a_{s-1} = a_{s-2} + m^{(s)} - n = \sum m^{(i)} - sn; \ (i = 0, 1, \cdots, s).$$

Satz IV. $s+1$ beliebige Räume S_m, $S_{m^{(1)}}, \cdots, S_{m^{(s)}}$ in S_n schneiden sich in einem Raum S_q, worin

$$q = \sum m^{(i)} + \sum d_k - sn; \ (i = 0, 1, \cdots, s; \ k = 0, 1, 2, \cdots, s-1)$$

ist und dabei können einige oder alle Zahlen d Null sein. Der Raum S_q ist unabhängig von der Ordnung, in welcher man die gegebenen Räume betrachtet.

Schneiden sich die Räume S_m und $S_{m^{(1)}}$ in einem Raum S_{a+d} statt in S_a [und, wie man weiss, kann $a+d$, wenn $m > m^{(1)}$ ist, höchstens gleich $m^{(1)} - 1$ sein (Bem. II)], alsdann muss man in der Relation (2) $a+d$ statt a setzen, so dass sich die Räume S_m, $S_{m^{(1)}}$, $S_{m^{(2)}}$ in einem Raum S_{a_1+d} schneiden. Nehmen wir dagegen an, sie schnitten sich in einem Raum $S_{a_1+d+d_1}$, dann treffen sich die Räume S_m, $S_{m^{(1)}}$, $S_{m^{(2)}}$, $S_{m^{(3)}}$ in einem Raum $S_{a_2+d+d_1}$ u. s. w.

Der letzte Theil des Satzes geht aus der Symmetrie der Grössen $m^{(i)}$ und d_k in den Zahlen p und q hervor.

Zus. Zwei, drei, ..., n unabhängige Räume von $n-1$ Dimensionen in S_n schneiden sich bezüglich in einem Raum von $n-2$, $n-3$, ... Null Dimensionen.

Bem. III. Nimmt man an $m > m^{(1)} > \cdots > m^{(s)}$ und dass $a+d$ seinen Maximalwerth $m^{(1)} - 1$ habe, so erhält man den grössten Werth von d:

$$d = n - m - 1.$$

Ist dieser grösste Werth von d gegeben und setzt man voraus, $a_1 + d + d_1$ habe seinen Maximalwerth nämlich $m^{(2)} - 1$, so erhält man den grössten Werth von d_1:

$$d_1 = n - m^{(1)}.$$

Bei der Annahme, dass $d, d_1, \ldots, d_{s-2}$ sowohl als $a_{s-1} + d + d_1 + \ldots + d_{s-1}$ ihre Maximalwerthe haben, das letztere also $= m^{(s)} - 1$ sei, findet man:

$$d_{s-1} = n - m^{(s-1)}$$

und alsdann erhält man in der That durch Substitution in den für q gefundenen Werth

$$q = m^{(s)} - 1.$$

Satz V. Wenn eine in einem Raum von n Dimensionen enthaltene Figur von jeder nicht in ihr enthaltenen Graden des Raums S_n in nur einem Punkt geschnitten wird, so ist sie ein Raum von $n-1$ Dimensionen.

Beweis analog wie zu Satz VII, § 85 oder Satz XIII, § 122.

Satz VI. Wenn eine in dem Raum von n Dimensionen enthaltene Figur

von jedem unabhängigen Raum von m Dimensionen in einem Punkt geschnitten wird, so ist die Figur ein Raum von $n - m$ Dimensionen.

Denn zwei Punkte der Figur bestimmen eine ganz in der Figur liegende Grade. Die Figur kann aber nicht eine einzige Grade sein (Satz II), daher muss es ausserhalb der Graden noch andre Punkte geben. Einer dieser Punkte und die Grade bestimmen eine Ebene, welche nach der Voraussetzung der ganzen Figur angehört. Diese Ebene kann nun auch nicht die ganze Figur sein, da diese Figur von jedem Raum S_m in einem Punkt geschnitten wird, wenn m kleiner als $n - 2$ ist. Fährt man so fort, so findet man, dass in der Figur ein Raum von $n - m$ Dimensionen enthalten ist. Es können keine zwei solche Räume sein, weil alsdann die Figur von jedem Raum S_m in mehr als einem Punkt geschnitten würde (Satz II).

3.

Duale Räume in S_n. — Grundpyramide in S_n.

§ 159. *Bem.* Dieser Abschnitt ist bei der Graden, der Ebene und den Räumen von drei und vier Dimensionen nicht behandelt worden; es ist jedoch klar, dass er auch für diese Räume gilt, wenn man n die Werthe 1, 2, 3, 4 beilegt.

Def. I. Während n unabhängige Punkte des Raums S_n einen Raum S_{n-1} bestimmen, wird ein Punkt S_0 durch n unabhängige Räume von $n - 1$ Dimensionen bestimmt (Zus. Satz IV, § 158).

Wir sagen mithin, der Punkt S_0 und der Raum S_{n-1} seien *duale oder auch correlative Elemente oder Räume.*

Ebenso heissen *dual oder correlativ* die Räume, von denen der eine durch eine gewisse Anzahl unabhängiger Punkte und der andre durch eine gleiche Anzahl unabhängiger Räume bestimmt wird.

S_1	hat den Raum	S_{n-2}	zum dualen Raum
S_2	„	S_{n-3}	„
S_3	„	S_{n-4}	„
⋮		⋮	
S_m	„	S_{n-m-1}	„

Daraus folgt:

Zus. I. Die Summe der Indexe zweier dualen Räume ist gleich $n - 1$.

Zus. II. Ist $n = 2m - 1$, so ist der Raum S_m dem Raum S_m also sich selber dual. Ist $n = 2m$, so hat S_m den Raum S_{m-1} zum dualen Raum.

Satz I. Zwei unabhängige duale Räume haben im Allgemeinen keinen Punkt gemeinschaftlich.

Dies folgt aus der Summe der Indexe der beiden Räume (Satz III, § 158).

Satz II. Verbindet man einen Raum S_m mit den Punkten, den Graden, Ebenen und Räumen eines dualen Raums S_{n-m-1}, welcher mit S_m keinen Punkt gemeinschaftlich hat, so erhält man alle durch S_m gehenden Räume von $m + 1$, $m + 2$ u. s. w., $n - 1$ Dimensionen des Raums S_n.

Denn verbindet man einen der beiden Räume z. B. S_m mit den Punkten

des Raums S_{n-m-1}, so erhält man alle durch S_m gehenden Räume von $m+1$ Dimensionen, weil jeder durch S_m gehende Raum S_{m+1} den Raum S_{n-m-1} in einem Punkt schneidet. Zwei Punkte des Raums S_{n-m-1} können nicht in einem durch S_m gehenden Raum S_{m+1} liegen, denn sonst würden sich die Räume S_{n-m-1} und S_{m+1} in der Graden der beiden Punkte schneiden (während sie sich doch im Allgemeinen in nur einem Punkt treffen) und würden in einem Raum von $n-1$ Dimensionen liegen. Der Raum S_m würde mithin den Raum S_{n-m-1} in einem Punkt schneiden, was der Voraussetzung widerspricht.

Zus. I. Der Raum von n Dimensionen kann durch zwei beliebige duale Räume S_m, S_{n-m-1}, welche keinen Punkt gemeinschaftlich haben, erzeugt werden, wenn man einen beliebigen von ihnen z. B. S_m mit den Punkten, Graden, Ebenen und den Räumen des andern verbindet.

Def. II. Die durch $n+1$ unabhängige Punkte von S_n gebildete Figur heisst *Grundpyramide.* Die gegebenen Graden, die Ebenen u. s. w. die Räume von $n-1$ Dimensionen, welche je zwei, je drei u. s. w. je n Punkte verbinden, heissen bezüglich *Kanten, ebene Seiten, Seiten von drei u. s. w. von $n-1$ Dimensionen.*

4.

Anzahl der Dimensionen der Räumesysteme von gegebenen Dimensionen in dem Raum S_n.

§ 160. *Bez. I.* Wir sagen, ein System einer Dimension von unendlich vielen Elementen enthalte Ω' Elemente und allgemein, ein System von m Dimensionen, das Ω' Systeme von Ω^{m-1} Elementen zu Elementen hat, enthalte Ω^m Elemente.

Satz I. Das System von Räumen S_m in S_n hat $(n-m)(m+1)$ Dimensionen.

Eine Grade S_1 hat eine Dimension (Ax. II, a und Hyp. I) und enthält also Ω' Punkte. Die Ebene enthält deren Ω^2 und weil ein Gradenbüschel eine Dimension hat und in jeder Graden Ω' Punkte enthalten sind, so sieht man, dass die Ebene Ω^2 Grade enthält.

Wie man sich leicht überzeugt, sind

in S_3 enthalten: $\Omega^3 S_0$, $\Omega^4 S_1$, $\Omega^3 S_2$

in S_4 „ $\Omega^4 S_0$, $\Omega^6 S_1$, $\Omega^6 S_2$, $\Omega^4 S_3$

in S_5 „ $\Omega^5 S_0$, $\Omega^8 S_1$, $\Omega^9 S_2$, $\Omega^8 S_3$, $\Omega^5 S_4$.

Wie wir sehen, treten die Räume S_3 erst in S_4 auf, ebenso erscheint ein Raum S_m zuerst in S_{m+1}. Die Anzahl der Räume S_3 in S_4 ist Ω^4, $\Omega^{2\cdot4}$ in S_5, $\Omega^{3\cdot4}$ in S_6 u. s. f.

Das Gesetz ist klar und nimmt man an, der Satz gelte für den Raum S_{m-1} in S_{n-1} und S_n werde durch S_{n-1} und einen Pnnkt S_0 ausserhalb S_{n-1} erzeugt und berücksichtigt ferner, dass ein Raum, S_m, Ω^m Punkte enthält, so ist damit der Satz bewiesen.

Satz II. Das System von Räumen von $m+s$ Dimensionen, welche durch einen Raum S_m von S_n gehen, hat $(n-m-s)s$ Dimensionen.

Die Räume S_{m+1}, S_{m+2}, u. s. w., welche durch einen Raum S_m in S_n gehen, erhält man durch Verbindung des Raums S_m mit den Punkten, Graden, u. s. w. des dualen Raums S_{n-m-1} (Satz II, § 159). Die Anzahl der durch S_m in S_n gehenden Räume S_{m+s} ist daher durch die Anzahl der Räume von $s-1$ Dimensionen eines dualen Raums gegeben. Nun beträgt nach dem vorigen Satz in dem Raum S_{n-m-1} die Anzahl dieser Räume $(n-m-s)s$. Damit ist der Satz bewiesen.

Def. I. Das System von Räumen S_{n-1}, welche durch einen Raum S_{n-2} gehen, heisst *Büschel von Räumen* S_{n-1} und der Raum S_{n-2} seine *Axe*.

5.

Einige Eigenschaften des vollständigen Raums von $n-1$ Dimensionen.

§ 161. *Bem. I.* Die Eigenschaften des vollständigen Raums von $n-1$ Dimensionen gehen aus den Eigenschaften des analogen *Euclid*'schen Raums hervor, wenn man die Winkeleinheit als Einheit der Abstände ansieht und dieselbe Methode wie bei der Ebene und den vollständigen Räumen von drei und vier Dimensionen befolgt.

Jeder Raum des vollständigen Raums S_{n-1} ist vollständig.

Für ihn gelten die Sätze der früheren Paragraphen; man hat nur zu beachten, dass zwei Räume, welche sich in einem Punkt schneiden, auch den Gegenpunkt gemeinschaftlich haben.

Satz I. Wenn ein Raum, S_{n-1}, n unabhängige Punkte in dem absoluten Grenzgebiet eines Punktes A_0 hat, so liegt dieser Raum vollständig in dem Gebiet.

Nehmen wir an, der Satz gelte für die Räume von $n-2$ Dimensionen. $X_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, ..., $X_0^{(n)}$ seien die n Punkte, welche S_{n-1} mit dem absoluten Grenzgebiet des Punktes A_0 gemeinschaftlich hat (Def. IV, § 32). Die durch die n Punkte (X_0) bestimmten Räume von $n-2$ Dimensionen liegen nach der Voraussetzung in diesem Gebiet. Der Raum S_n wird durch den Raum $X_0^{(1)}$ ... ... $X_0^{(n-1)}$ und den Punkt $X_0^{(n)}$ erzeugt und die durch $X_0^{(n)}$ gehenden Graden des Raums S_n schneiden den Raum $X_0^{(1)} \ldots X_0^{(n-1)}$ (Bem. I), liegen daher in dem absoluten Grenzgebiet von A_0 (Satz III, § 32). Gilt der Satz für $n-2$, so gilt er also auch für $n-1$, er ist aber für $n = 1, 2, 3$ gültig; mithin hat er allgemeine Geltung (Einl. 1, § 39).

Zus. I. Die einem gegebenen Punkt in dem vollständigen Raum S_{n-1} conjugirten Punkte liegen in einem Raum von $n-2$ Dimensionen (Zus. II, Satz I, § 32 und Def. I, § 69).

Def. I. Dieser Raum heisst der *Polarraum* des Punktes und seines Gegenpunktes und diese Punkte sind *die Pole* des Raums.

Zus. II. Der Polarraum eines Punktes des Polarraums eines andern Punktes geht durch den letzteren Punkt.

Satz II. Die Polarräume der Punkte eines Raums S_m gehen durch einen dualen Raum S_{n-m-2} in S_{n-1} und umgekehrt: die Polarräume der Punkte von S_{n-m-2} gehen durch den Raum S_m.

Ist $m = 1$, so wird der Satz analog wie Satz II, § 108 bewiesen. Wir

behaupten: wenn der Satz für den Raum S_{m-1} gilt, so ist er auch für den Raum S_m gültig.

Denn $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(m+1)}$ seien $m+1$ unabhängige Punkte von S_m. Die $m+1$ Polarräume derselben schneiden sich in S_n in einem Raum S_{n-m-2}. Schnitten sie sich in einem Raum S_{n-m-3}, so würden die gegebenen Punkte nach der Voraussetzung einem Raum S_{m-2} angehören und wären nicht unabhängig.

Die Polarräume der Punkte von S_{n-m-2} gehen durch die $m+1$ gegebenen Punkte oder durch den Raum S_m und mithin gehen die Polarräume der andern Punkte von S_m durch die Punkte von S_{n-m-2} oder durch den Raum S_{n-m-2} selbst. Der Satz gilt aber für $m=1$, mithin ist er allgemein gültig (Einl. 1, § 39).

Def. II. Zwei Räume S_m, S_{n-m-2}, welche die Bedingung des vorigen Satzes erfüllen, heissen *polar*.

Zus. I. Die Segmente, deren Enden in zwei polaren Räumen liegen, sind rechte.

Denn ihre Enden sind conjugirt (Def. I, § 69 und Def. IV, § 29).

Zus. II. Zwei Polarräume sind dual und haben keinen Punkt gemeinschaftlich.

Sie sind dual, weil die Summe ihrer Indexe $n-2$ beträgt (Zus. Def. I, § 159) und können keinen Punkt A_0 gemeinschaftlich haben, weil A_0 nicht in seinem Polarraum liegen kann (Zus. I, Satz I).

Satz III. Jeder Raum S_{n-2} hat zwei entgegengesetzte Pole.

Beweis analog wie bei Satz III, § 108.

Satz IV. Die Pole der durch einen Raum S_m gehenden Räume S_{n-2} liegen in dem Polarraum S_{n-m-2} von S_m.

Beweis analog wie bei Satz IV, § 108.

Def. III. Zwei unabhängige Räume S_m, S_r in S_{n-1} heissen *conjugirt*, wenn der Raum S_r in dem Polarraum von S_m liegt oder durch diesen Raum geht.

So sind z. B. zwei Räume S_{n-2}, S'_{n-2} conjugirt, wenn der eine von ihnen durch die Pole des andern geht.

Liegen die Räume S_m, S_r in einem Raum $S_{n'}$ von geringerer Dimension als S_{n-1}, so gelten in S_{n-1} die Definitionen für den Raum $S_{n'}$.

Satz V. Wenn ein Raum S_r in einem andern Raum S_m enthalten ist oder durch diesen Raum geht, so geht der Polarraum S_{n-r-2} von S_r durch den Polarraum S_{n-m-2} von S_m oder ist in diesem Raum enthalten und die Räume S_r und S_{n-m-2}, S_m, S_{n-r-2} sind conjugirt.

Beweis analog wie zu Satz V, § 153.

Zus. Jeder von zwei conjugirten Räumen genügt der Def. III.

Wie bei Zus. Satz V, § 153.

Satz VI. Sind zwei Polarräume gegeben, so sind zwei andre Räume, welche bezüglich in ihnen enthalten sind oder durch sie gehen, conjugirt.

Wie bei Satz VI, § 153.

Satz VII. Ist ein Raum S_m und sein Polarraum S_{n-m-2} in dem Raum S_{n-1} gegeben, so ist der Durchschnittsraum S_{r-m-1} eines durch S_m gehenden Raums S_r mit dem Raum S_{n-m-2} polar zu S_m in dem Raum S_r.

Wie bei Satz VII, § 153.

Zus. I. Der Polarraum eines Punktes A_0 in einem durch A_0 gehenden Raum S_m ist der Durchschnittsraum von S_m mit dem Polarraum von A_0 in S_{n-1}.

Satz VIII. Zwei conjugirte Räume mit einem gemeinschaftlichen Raum S_r schneiden den Polarraum S_{n-r-2} von S_r in Polar- oder conjugirten Räumen und umgekehrt.

Beweis analog wie zu Satz VIII, § 153.

Zus. Betrachtet man in dem Raum S_r einen Punkt A_0 (wenn S_r selbst nicht ein Punkt ist), so schneidet der Polarraum von A_0 die zwei conjugirten Räume in Polar- oder conjugirten Räumen.

Beweis analog wie bei Zus. Satz VIII, § 153.

§ 162. *Satz I. Die Systeme von Räumen um die Räume S_m des vollständigen Raums S_{n-1} sind identisch.*

Denn sind zwei Räume S_m, S'_m und ihre Polarräume S_{n-m-2}, S'_{n-m-2} gegeben so sind die Räumepaare (S_m, S_{n-m-1}), (S'_m, S'_{n-m-1}) identisch; denn lässt man S_m dem S'_m, S_{n-m-1} dem S'_{n-m-1} identisch entsprechen, so sind die bezüglichen Segmente, deren Enden in den Polarräumen liegen, rechte und es lässt sich mithin zwischen den beiden Paaren ein Identitätszusammenhang aufstellen (Satz III, § 15).

Zus. I. Der vollständige Raum S_{n-1} ist um jeden seiner Räume S_m identisch.

Zus. II. Die Sterne $n-3^{ter}$ Art des vollständigen Raums S_{n-1} sind identisch.

Zus. III. Der vollständige Raum S_{n-1} ist um jeden seiner Punkte identisch.

Satz II. Der Polarraum des Centrums eines Sterns $n-3^{ter}$ Art des vollständigen Raums S_n zerlegt ihn in zwei identische entgegengesetzte Theile.

Beweis analog wie zu Satz III, § 109.

Zus. Ein Raum S_{n-2} zerlegt den vollständigen Raum S_{n-1} in zwei identische und entgegengesetzte Theile.

Satz III. Die beiden entgegengesetzten Theile, in welche S_m durch den Durchschnittsraum S_{m-1} mit einem Raum S_{n-2} in dem vollständigen Raum S_{n-1} zerlegt wird, liegen auf entgegengesetzten Seiten bezüglich des Raums S_{n-2}.

Beweis analog wie bei den Sätzen IV und V, § 109.

§ 163. *Def. I.* Zwei Räume S_m, S_r, welche sich in einem Raum S_a ($a \geq 0$) schneiden, heissen *aufeinander senkrecht*, wenn die Durchschnittsräume mit dem zu S_a polaren Raum S_{n-a-2} polar oder conjugirt sind.

Bem. Wir verlassen hier die Definition aufeinander senkrechter Elemente wie sie in dem gewöhnlichen und dem Raum von vier Dimensionen sowohl in dem *Euclid*'schen wie dem vollständigen Gebiet gegeben wurde. Wollte man diese Definition allgemein durchführen, so müsste man über die kleinsten und grössten Abstände der Räume in dem vollständigen Raum von $n-1$ Dimensionen Betrachtungen vorausschicken, welche in den meisten Fällen nicht elementar sind.

Ueberdies beruht das Problem der Abstände in dem Raum von $n-1$ Dimensionen, wenn man unsrer Methode folgt, auf der vorherigen Untersuchung der gemeinschaftlichen

Lothe, welche zwei gegebene Räume in dem Raum S_{n-2} treffen. Daraus geht also hervor, dass auch nach der zuerst angewandten Methode die Lehre von der Orthogonalität von Graden und Räumen der Lehre von den Abständen vorausgehen muss.

Satz I. Zwei conjugirte Räume S_m, S_r mit einem gemeinschaftlichen Raum S_a stehen senkrecht aufeinander und umgekehrt (Satz VIII, § 161).

Zus. I. Eine auf einem Raum S_{n-2} senkrechte Grade steht auf allen Graden von S_{n-1}, welche durch den Durchschnittspunkt von S_{n-2} mit der gegebenen Graden gehen, senkrecht.

Zus. II. Die Räume, welche durch einen gegebenen Raum S_m gehen, stehen auf dem Polarraum von S_m senkrecht.

Die Beweise sind analog wie zu dem Zus. Satz II, § 110 und Zus. III, Satz II, § 155.

Beisp. Die Graden, Ebenen und Räume, welche durch einen Punkt gehen, stehen auf dem Polarraum des Punktes senkrecht.

Zus. III. Die auf einem Raum S_m senkrechten Räume, welche mit S_m nicht in einem Raum von geringeren Dimensionen als $n-1$ enthalten sind, gehen durch den Pollarraum S_{n-m-2} von S_m.

Denn sie sind mit S_m in S_{n-1} conjugirt.

Beisp. Die Graden, Ebenen und Räume, welche auf einem Raum von $n-1$ Dimensionen senkrecht stehen, gehen durch die Pole dieses Raums.

Satz II. Der Polarraum S_{n-2} eines Punktes des Raums S_a schneidet zwei Räume S_m und S_r, welche aufeinander senkrecht stehen und S_a gemein haben, in zwei polaren oder conjugirten Räumen (Zus. Satz VIII, § 161 und Satz I).

Satz III. Sind zwei aufeinander senkrechte Räume S_m, S_r mit dem gemeinsamen Raum S_a gegeben, so stehen alle Graden von S_r, welche einen beliebigen Punkt A_0 von S_a mit den Punkten des Polarraums S_{n-m-2} des Raums S_m verbinden, auf S_m senkrecht.

In dem Raum S_{n-1} haben die Räume S_m, S_r, S_a die Räume S_{n-m-2}, S_{n-r-2}, S_{n-a-2} zu Polarräumen (Def. II, Satz II, § 161). Da nun S_m, S_r durch S_a gehen, so sind S_{n-m-2}, S_{n-r-2} in S_{n-a-2} (Satz V, § 161) und bezüglich in S_r und S_m enthalten, weil S_m und S_r einander conjugirt sind.

Nimmt man einen Punkt A_0 von S_a, so geht der Polarraum A_{n-2} von A_0 durch S_{n-a-2} und mithin auch durch S_{n-m-2} und S_{n-r-2}.

Wählt man einen Punkt C_0 von S_{n-m-2}, welcher in S_r enthalten ist, so schneidet der Raum $(S_m C_0)$ den Raum S_{n-m-2} nur in dem Punkt C_0 (Zus. II, Satz II, § 161 und Satz II, § 158) und der Punkt C_0 ist in dem Raum $(S_m C_0)$ der Pol von S_m (Satz VII, § 161). Daher steht die Grade $A_0 C_0$ senkrecht auf S_m (Zus. II, Satz I).

Satz IV. Eine Grade, welche zwei Polarräume schneidet, steht senkrecht auf diesen Räumen.

S_m, S_{n-m-2} seien die beiden Polarräume und A_0, B_0 die Durchschnittspunkte der Graden mit den beiden gegebenen Räumen. In dem Raum $(A_0 S_{n-m-2})$ von $n-m-1$ Dimensionen hat S_{n-m-2} den Punkt A_0 zum Pol (Satz VII,

§ 161); daher steht die Grade A_0B_0 senkrecht auf S_{n-m-2}. Aus demselben Grund steht sie auf dem Raum S_m senkrecht.

Zus. Zwei Räume S_m, S_r haben soviele Lothe gemein, als die beiden Räume S_m, S_r und ihre Polarräume Transversalen gemein haben.[1]

Satz V. Jede Grade A_0B_0, welche einen Raum S_m schneidet und senkrecht auf ihm steht, trifft den Polarraum von S_m und steht senkrecht auf ihm.

Der Raum $(S_mA_0B_0)$ schneidet den Polarraum S_{n-m-2} von S_m in einem Punkt, welcher der Pol von S_m in dem Raum $(S_mA_0B_0)$ ist, und da die Grade A_0B_0 senkrecht auf S_m steht, so muss sie durch diesen Pol gehen (Zus. III, Satz I); d. h. A_0B_0 muss S_{n-m-2} treffen und steht senkrecht auf ihm (Satz IV).

Satz VI. Ein Raum S_m und ein Raum S_{n-2}, welche in dem vollständigen Raum S_{n-1} unabhängig sind, haben ein Loth gemein.

A_0 sei der Pol von S_{n-2} und S_{n-m-2} der Polarraum von S_m. Der Raum (S_mA_0) schneidet den Raum S_{n-m-2} in einem Punkt B_0 und die Grade A_0B_0 ist offenbar das einzige Loth auf S_m und S_{n-2}.

§ 164. *Def. I.* Unter *Polarpyramide* oder einfach *der Polaren* in dem vollständigen Raum S_{n-1} verstehen wir die Pyramide, deren Scheitel die Pole der gegenüberliegenden Seiten von $n-2$ Dimensionen sind.

Satz I. Es gibt unendlich viele Grundpolarpyramiden in dem Raum S_{n-1}.

Angenommen, eine solche Pyramide existire in dem Raum S_{n-2}, so beweisen wir, dass sie auch in dem Raum S_{n-1} existirt.

$A_0^{(1)}$ sei ein Punkt und A_{n-2} sein Polarraum in S_{n-1}. In dem Raum A_{n-2} können wir nach der Voraussetzung eine Polarpyramide $A_0^{(2)}A_0^{(3)}\ldots A_0^{(n-1)}$ wählen. Der Raum $A_0^{(1)}\ldots A_0^{(n-2)}$ ist offenbar der Polarraum von $A_0^{(n-1)}$.

Der Satz ist mithin bewiesen, weil er für $n=2, 3, 4$ gilt (Einl. 1, § 39).

Zus. I. Die sich gegenüberliegenden Seiten einer Polarpyramide sind polar.

Zus. II. Die Kanten einer Polarpyramide sind rechte und zwei Polarpyramiden sind auf 1. 2. 3 ... *n verschiedene Arten identisch.*

Def. II. Die Seiten einer Grundpyramide, welche durch eine Seite F_m oder eine Kante oder einen Scheitel gehen und sich zu je zweien derart ent-

1) Wenn die Räume S_m, S_r in S_n dual sind und keinen Punkt gemein haben und wenn ihre Polarräume S'_{n-m-1}, S'_m gegeben sind, so lässt sich mittelst der projectiven Geometrie leicht beweisen, dass die vier Räume, wenn $m \leqq n-m-1$ ist, im Allgemeinen $m+1$ Transversalen gemein haben, dagegen $n-m$, wenn $m \geqq n-m-1$ ist.

Haben aber S_m, S_r keinen Punkt gemein und liegen sie in einem Raum niedrigerer Dimension, so sind sie in dem Raum S_{r+m-1}, welcher sie enthält, dual und S_{r+m-1} schneidet ihre Polarräume in S_n in ihren Polarräumen in S_{r+m-1} und man kommt damit wieder auf den vorigen Fall.

Haben schliesslich S_m und S_r in S_n einen Raum R_a gemein ($a \gtreqq 0$) und sind sie nicht in einem Raum niedrigerer Dimension enthalten, so ist $r = n+a-m$. Die beiden Polarräume sind S'_{n-m-1}, S'_{m-a-1} und sind in dem Polarraum R_{n-a-1} von R_a enthalten. Der Raum R_{n-a-1} schneidet die Räume S_m und S_{n+a-m} in zwei Räumen S_{m-a-1}, S_{n-m-1}, welche dual und in R_{n-a-1} Polarräume der Räume S_{n-m-1}, S_{m-a-1} sind. Man kommt daher auch hier wieder auf den ersten Fall. Die vier Räume S_m, S_r und ihre polaren in S_n haben mithin im Allgemeinen $m-a$ Transversalen gemein, wenn $m-a \leqq n-m$ ist und $n-m$, wenn $m-a \geqq n-m$ ist.

sprechen, dass zwei sich entsprechende Seiten zusammengenommen alle Scheitel der Pyramide enthalten, heissen *sich entsprechende Seiten.*

Satz II. Die sich entsprechenden Seiten einer Polarpyramide stehen senkrecht aufeinander.

Denn, wenn F_m die den beiden sich entsprechenden Seiten gemeinschaftliche Seite und F_{n-m-2} die gegenüberliegende polare Seite ist, so bilden die in F_m nicht enthaltenen Scheitel in F_{n-m-2} ebenfalls eine Polarpyramide und die beiden durch F_m gehenden Seiten schneiden F_{n-m-2} grade in zwei sich gegenüberstehenden Seiten dieser Pyramide. Diese sind aber in F_{n-m-2} polar; mithin sind die beiden sich entsprechenden Seiten um F_m conjugirt (Satz VIII, § 161) und also senkrecht aufeinander (Def. I).

Satz III. Die n Scheitel einer Polarpyramide in dem vollständigen Raum S_{n-1} und ihre entgegengesetzten Punkte bestimmen 2^n Polarpyramiden, welche den vollständigen Raum S_{n-1} bilden.

Denn es seien $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n)}$ die Scheitel der gegebenen Polarpyramide und $A_0'^{(1)}, A_0'^{(2)}, \ldots, A_0'^{(n)}$ die entgegengesetzten Scheitel, so bilden die letzteren eine der ersten identische Pyramide (Satz III, § 30), welche ebenfalls eine Polarpyramide ist. Man erhält durch Vertauschung der Scheitel der ersten Pyramide mit ihren entgegengesetzten Scheiteln auf jede mögliche Art ebensoviele Polarpyramiden, als man Vertauschungen vornimmt. Man erhält auf diese Art 2^n Pyramiden. Denn angenommen es wären für den Raum S_{n-2} deren 2^{n-1}, so erhält man die Pyramiden des Raums S_{n-1}, wenn man neben einen Scheitel und seinen entgegengesetzten Scheitel sämmtliche aus den übrigen $n-1$ Scheiteln und ihren Gegenscheiteln gebildeten 2^{n-1} Pyramiden schreibt; man erhält so 2^n. Der Satz gilt für $n = 2, 3$ mithin allgemein (Einl. 1, § 39).

6.

Der unendlich ferne Raum des Euclid'schen Raums S_n. — Parallele Räume.

§ 165. *Bem. I.* In S_n gilt der dem Satz I und Zus. in §§ 84 u. 123 analoge Satz nebst Zusatz sowie die dazu gehörige Definition.

Def. I. Zwei Räume S_m, $S_{m^{(1)}}$ ($m^{(1)} \geq m$) heissen *parallel 1ter Art* oder nur *parallel*, wenn der unendlich ferne Raum $S_{m-1\infty}$ von S_m in dem unendlich fernen Raum $S_{m^{(1)}-1\infty}$ von $S_{m^{(1)}}$ liegt oder dieser Raum selbst ist.

Satz I. Wenn für zwei unabhängige Räume, S_m, $S_{m^{(1)}}$, $m + m^{(1)} < n$ ist, so lässt sich von einem beliebigen Punkt von S_n aus ein zu beiden paralleler Raum $S_{m+m^{(1)}}$ ziehen. Durch einen der beiden Räume geht nur einer dieser Räume.

Denn die unendlich fernen Räume $S_{m-1\infty}$, $S_{m^{(1)}-1\infty}$ in S_m und $S_{m^{(1)}}$ bestimmen einen Raum $S_{m+m^{(1)}-1}$, worin $m + m^{(1)} - 1 < n - 1$ ist. Der Raum $S_{m+m^{(1)}-1}$ ist daher der unendlich ferne Raum unendlich vieler Räume $S_{m+m^{(1)}}$ von S_n, welche den beiden gegebenen Räumen parallel sind.

Durch einen beliebigen Punkt A_0 von S_n geht nur einer dieser Räume

und wenn dieser Punkt in S_m liegt, so enthält der Raum $S_{m+m^{(1)}}$ das ganze S_m, weil er ausser dem Punkt A_0 den Raum S_{m-1_∞} von S_m enthält.

Bem. II. Ist dagegen $m + m^{(1)} \geqq n$, so setze man $m + m^{(1)} - n = a$; die beiden Räume S_m, $S_{m^{(1)}}$ schneiden sich dann in einem Raum S_a und da sie im Allgemeinen nicht in einem Raum niedrigerer Dimension als S_n enthalten sind, wie im vorigen Fall, so lässt sich durch den Raum S_m kein $S_{m^{(1)}}$ paralleler Raum ziehen. Durch einen Punkt A_0 jedoch kann man einen ihnen parallelen Raum von a Dimensionen legen, dessen unendlich ferner Raum eben der unendlich ferne Raum von S_a ist.

Man überzeugt sich leicht, dass man, wenn die beiden Räume S_{m-1_∞}, $S_{m^{(1)}-1_\infty}$ von S_m und $S_{m^{(1)}}$ in einem Raum S_{n-a-1_∞} im Unendlichgrossen liegen, durch einen Punkt A_0 von S_n einen den beiden Räumen S_m, $S_{m^{(1)}}$ parallelen Raum S_{n-a} legen kann. Durch S_m oder durch $S_{m^{(1)}}$ geht nur einer dieser Räume.

Satz II. Zwei parallele Räume S_m, S_r $(m \geqq r)$ liegen immer in einem Raum S_{m+1} von geringerer Dimension als S_n, es sei denn $m + 1 = n$.

Denn der Raum S_{r-1_∞} von S_r liegt in solchem Fall in dem Raum S_{m-1_∞}, welcher durch m unabhängige Punkte bestimmt wird, unter welchen sich, wie wir voraussetzen können, die r Punkte befinden, welche S_{r-1_∞} bestimmen. Die zwei Räume S_m und S_r sind, da sie ausser durch diese m Punkte durch zwei weitere Punkte bestimmt werden, in demselben Raum S_{m+1} enthalten.

Zus. I. Zwei parallele Räume haben in endlichem Abstand keinen Punkt gemein.

Denn die beiden Räume S_m und S_r in S_{m+1} schneiden sich nur in einem Raum S_{r-1}, welcher vollständig im Unendlichgrossen liegt (Satz II, § 158).

Satz II. Zwei parallele Räume A_m, A'_m werden von zwei andern Räumen B_r, B_r', die zwar einander aber den beiden ersten nicht parallel sind, in parallelen Räumen geschnitten.

Denn wenn B_r und A_m sich in einem Raum S_a schneiden und ebenso A'_m, B_r' in einem Raum $S_{a'}$ (a' sei $> a$), so muss offenbar, da B_r und A_m dieselben unendlich fernen Elemente haben, wie B_r' und A'_m, der unendlich ferne Raum von $S_{a'}$ den unendlich fernen Raum von S_a enthalten. Ist $a' = a$, so haben die beiden Räume S_a, $S_{a'}$ denselben unendlich fernen Raum.

Bem. I. Da die beiden Räume A_m und A'_m parallel sind, so haben sie denselben unendlich fernen Raum A_{m-1_∞} und da dieser Raum durch m Punkte bestimmt wird, so sind die beiden Räume A_m, A'_m in einem Raum S_{m+1} enthalten, welcher einen unendlich fernen Raum S_{m_∞} hat, der A_{m-1_∞} enthält. Analoges gilt für die beiden Räume B_r, B_r'. Sie liegen in einem Raum S_{r+1}, welcher einen unendlich fernen Raum S_{r_∞} hat, der den Raum B_{r-1_∞} enthält.

Zus. Ist $r = n - m$, so schneiden die beiden Räume B_{n-m}, B'_{n-m} die Räume A_m, A'_m in zwei Paar Punkten, welche ein Parallelogramm bilden.

Denn A_0, B_0 seien die Durchschnittspunkte von B_{n-m} mit A_m und A'_m und A_0', B_0' die beiden analogen Punkte von B'_{n-m}. Die Grade A_0B_0 gehört sowohl dem oben besprochenen Raum S_{m+1} wie auch dem Raum B_{n-m} an und ihr unendlich ferner Punkt fällt daher mit dem Durchschnittspunkt des Raums B_{n-m-1_∞} mit dem Raum S_{m_∞} zusammen (Satz II, § 158). Die Grade

$A_0'B_0'$ hat denselben unendlich fernen Punkt, weil der Raum $B'_{n-m-1\infty}$ den beiden Räumen B_{n-m}, B'_{n-m} gemeinschaftlich ist. Analoges ergibt sich, wenn man die Punktepaare A_0A_0', $B_0B_1^0$ betrachtet, in welchen die beiden Räume A_m, A'_m die Räume B_{n-m}, B'_{n-m} schneiden.

§ 166. *Andre Fälle von Parallelismus.*

Bem. I. Ausser dem vorigen Fall gibt es noch andre Fälle von Parallelismus, welche nicht unter die gegebene Definition fallen, aber doch verdienen erwähnt zu werden. Man hat schon bei dem Raum von vier Dimensionen gesehen, dass zwei unabhängige Ebenen S_2, S_2' einen Punkt gemeinschaftlich haben. Fällt dieser Punkt ins Unendlichgrosse, so erhalten wir, wie schon erwähnt, einen zweiten Fall von Parallelismus, welcher von demjenigen verschieden ist, in welchem die beiden Ebenen dieselbe unendlich ferne Grade haben. In dem letzten Fall sind die Ebenen in einem Raum von drei Dimensionen enthalten.

Weitere Fälle von Parallelismus ausser dem eben besprochenen, welchen wir Parallelismus erster Art genannt haben, erhält man, wenn S_m, S_r keinen Raum S_{r-1} ($r \leq m$), sondern einen Raum von geringeren Dimensionen, der vollständig im Unendlichgrossen liegt, gemeinschaftlich haben. Die Anzahl der Dimensionen dieses Durchschnittsraums kann nicht kleiner als $m + r - n$ sein, weil zwei Räume S_m und S_r sich immer wenigstens in einem Ranm S_{m+r-n}, wenn nicht in einem Raum von höheren Dimensionen treffen. Wir sagen daher allgemein:

Def. I. Zwei Räume S_m, S_r ($m \geq r$) sind *parallel*, wenn ihr Durchschnittsraum, ihre Lage im Raum S_n mag sein, welche sie will, ganz im Unendlichgrossen liegt.

Satz I. Der Fälle von Parallelismus zweier Räume S_m, S_r sind es $n - m$, wenn $r \leq m$ ist.

Denn sie schneiden sich im Allgemeinen in einem Raum von $m + r - n$ Dimensionen, können sich aber auch in einem Raum von $m + r - n + 1$, $m + r - n + 2$, u. s. w., $m + r - n + (n - m - 1) = r - 1$ Dimensionen schneiden. Dieser letzte ist der gewöhnliche Fall des Parallelismus.

Zus. Zwischen zwei Räumen S_m ($m \geq 1$) und S_{n-1} in S_n gibt es nur einen Fall von Parallelismus, nämlich den 1ter Art.

Bem. II. Der Fall von Parallelismus zweier Räume S_m, S_r, die nicht in Räumen geringerer Dimension als S_n enthalten sind, ist gerade derjenige, in welchem sie sich in einem Raum von $m + r - n$ Dimensionen schneiden.

7.

Identität des Raums S_n um seine Punkte des endlichen Gebiets. — Die Theile, in welche er durch einen Raum von $n - 1$ Dimensionen zerlegt wird.

§ 167. *Bem.* Auf ähnliche Art wie in § 8 bei der *Euclid*'schen Ebene und § 4 bei den Räumen S_3 und S_4 beweist man, dass die Sterne $(n-2)^{ter}$ Art, deren Scheitel in dem endlichen Gebiet des Raums S_n liegen, identisch sind, dass S_n durch jeden Raum S_{n-1} in zwei entgegengesetzte gleiche Theile zerlegt wird, dass entweder in dem einen oder in dem andern derselben die zu S_{n-1} parallelen Räume liegen und dass die beiden Theile, in welche ein zu S_{n-1} nicht paralleler Raum S_m durch den Durchschnittsraum S_{m-1} mit S_{n-1} zerlegt wird, bezüglich in den genannten Theilen liegen.

8.

Aufeinander senkrechte Räume.

§ 168. *Bem. I.* Wenn man zwei conjugirte Punkte des Raums im Unendlichgrossen mit einem Punkt A_0 des endlichen Gebiets verbindet, so erhält man zwei aufeinander senkrechte Grade (Def. V, § 40). Ebenso erhält man in S_n durch Verbindung des Punktes A_0 mit einem Punkt und einer Graden, welche im Unendlichgrossen conjugirt sind, eine Grade und eine auf ihr senkrechte Ebene.

Wir sagen daher allgemein:

Def. I. Zwei Räume S_m, S_r heissen *senkrecht zueinander*, wenn ihre unendlich fernen Räume polar oder conjugirt sind (Bem. § 163).

Satz I. Zwei Räume, welche zu zwei aufeinander senkrechten Räumen parallel von der ersten Art sind und dieselbe Anzahl von Dimensionen wie die gegebenen Räume haben, stehen senkrecht aufeinander.

Denn ihre unendlich fernen Räume sind polar.

Satz II. Die Graden, welche auf einem Raum S_{n-1} senkrecht stehen, sind parallel.

Denn sie haben denselben unendlich fernen Punkt.

Satz III. Wenn die unendlich fernen Räume zweier Räume S_m, S_r polar sind, so stehen die Räume (mit Ausnahme der Punkte), welche in dem einen von ihnen enthalten sind oder durch einen derselben gehen, senkrecht auf dem andern.

Denn ihre unendlich fernen Räume sind conjugirt (Satz V, § 161).

Satz IV. Wenn die unendlich fernen Räume zweier Räume S_m, S_r polar sind, so stehen die Räume (mit Ausnahme der Punkte), welche in einem derselben enthalten sind oder durch einen von ihnen gehen, auf den Räumen (mit Ausnahme der Punkte) senkrecht, die in dem andern enthalten sind oder durch den andern gehen.

Denn ihre unendlich fernen Räume sind conjugirt (Satz VI, § 161).

Bem. II. Die Auflösung der Probleme, durch gegebene Elemente Räume senkrecht zu gegebenen Räumen zu legen, reducirt sich mithin darauf, durch die gegebenen Elemente Räume zu legen, deren unendlich fernen Räume polar oder conjugirt mit den unendlich fernen Räumen der gegebenen Räume sind.

Satz V. Eine auf einem Raum S_{n-2} senkrechte Grade steht auf allen in S_{n-1} enthaltenen Räumen senkrecht.

Beweis analog wie bei Zus. V, Satz II, § 128.

Satz VI. Durch einen Punkt in oder ausserhalb einer Graden kann man nur einen Raum S_{n-1} senkrecht zu ihr legen.

Es genügt den Punkt mit dem Polarraum des unendlich fernen Punktes der Graden zu verbinden.

Constr. Um diesen Raum mit den Elementen des endlichen Gebiets zu construiren, braucht man nur durch die Grade $n-1$ Ebenen zu legen, welche nicht in einem Raum S_{n-1} liegen und in diesen die Lothe von dem gegebenen Punkt auf die Grade zu ziehen; diese bestimmen den gesuchten Raum.

Liegt der Punkt ausserhalb der Graden, so ziehe man in der durch den Punkt und die Grade bestimmten Ebene das Loth auf die Grade, welches sie

in einem Punkt A_0 trifft. Der in A_0 auf die Grade senkrechte Raum geht auch durch den gegebenen Punkt und ist der verlangte Raum.

Zus. I. Alle durch einen Punkt auf eine Grade gezogenen Lothe liegen in dem auf dieser Graden senkrechten Raum S_{n-1}.

Satz VII. Von einem Punkt eines Raums von $n-1$ Dimensionen oder einem Punkt ausserhalb desselben kann man nur ein Loth auf ihn ziehen.

Man braucht nur den gegebenen Punkt mit den Polen des unendlich fernen Raums des gegebenen Raums S_{n-1} zu verbinden.

Constr. Um dieses Loth mit den Elementen des endlichen Gebiets zu construiren, wähle man in S_{n-1} $n-1$ beliebige Grade, welche durch den gegebenen Punkt gehen und nicht in einem Raum niedrigerer Dimension liegen und ziehe durch den Punkt die $n-1$ senkrechten Räume von $n-1$ Dimensionen. Diese schneiden sich in dem gesuchten Loth, weil ihre unendlich fernen Räume durch den Pol des Raums im Unendlichgrossen des gegebenen Raums gehen.

Satz VIII. Durch einen Punkt des Raums S_n gehen n Grade, welche nicht in einem Raum S_{n-1} liegen und zu je zweien senkrecht aufeinander stehen.

Angenommen der Satz gelte für den Raum von $n-1$ Dimensionen, so geht aus Satz VII hervor, dass er auch für den Raum S_n Geltung hat; da er aber für $n = 2, 3, 4$ gültig ist, so ist er es allgemein (Einl. 1, § 39).

Satz IX. Sind $n-1$ nicht in einem Raum S_{n-2} liegende Grade gegeben, so gibt es nur eine Richtung von Graden, die auf den gegebenen Graden senkrecht stehen.

Denn der unendlich ferne Punkt dieser Richtung ist der Pol des durch die $n-1$ unendlich fernen Punkte der gegebenen Graden bestimmten Raums $S_{n-2\infty}$.

Satz X. Durch einen Punkt lässt sich nur ein Raum S_{n-m} senkrecht auf einen Raum S_m ziehen, welcher den Raum S_{n-m} in nur einem Punkt schneidet.

Denn der unendlich ferne Raum $S_{m-1\infty}$ von S_m hat einen Raum $S_{m-n-1\infty}$ zum Polarraum; mithin bestimmt der gegebene Punkt mit dem letzteren Raum nur einen Raum S_{n-m}, welcher senkrecht auf S_m steht.

Satz XI. Durch einen Raum S_r lässt sich ein Raum S_a senkrecht auf einen andern Raum S_m legen, wenn der Raum $S_{r-1\infty}$ von S_r und der Polarraum $S_{n-m-2\infty}$ von $S_{m-1\infty}$ in einem Raum $S_{a-1\infty}$ liegen.

Denn der Raum $S_{a-1\infty}$ ist dem Raum $S_{m-1\infty}$ von S_m conjugirt (Def. III, § 161 und Def. I).

Zus. I. Durch eine Grade, eine Ebene, einen Raum von drei u. s. w. von $n-2$ Dimensionen kann man eine Ebene, einen Raum von drei, vier u. s. w. von $n-1$ Dimensionen legen, welcher auf einem gegebenen Raum von $n-1$ Dimensionen senkrecht steht.

Def. II. Der Durchschnittsraum S_{a+m-n} von S_a mit S_m heisst *die Normalprojection oder Projection* des Raums S_r auf den Raum S_m, wenn S_a wie eben gezeigt zu S_r bestimmt wird.

Satz XII. Zwei Räume von $n - 1$ Dimensionen haben eine Richtung von Ebenen, die senkrecht auf ihnen stehen, gemein.

Die Richtung dieser Ebenen ist durch die Pollinie des Raums von $n - 3$ Dimensionen im Unendlichgrossen des gemeinschaftlichen Raums S_{n-2} gegeben.

Satz XIII. Mehrere gegebene Räume $S_m^{(1)}, S_m^{(2)}, S_m^{(3)} \ldots$ haben unendlich viele auf ihnen senkrechte Räume von $n - a - 1$ Dimensionen gemein, wenn ihre unendlich fernen Räume in einem Raum $S_{a\infty}$ enthalten sind und $a < n - 1$ ist.

Denn alsdann hat der Raum $S_{a\infty}$ einen Raum $S_{n-a-2\infty}$ zum Polarraum, welcher der Richtungsraum unendlich vieler auf den gegebenen Räumen senkrechter Räume ist.

Ist $a = n - 2$, so heisst dies, dass die gegebenen Räume eine Richtung von Lothen gemein haben.

Satz XIV. Zwei Räume S_m, $S_{m^{(1)}}$ haben nur ein Loth, welches sie trifft, gemein, wenn $m + m^{(1)} + 1 = n$ ist und ihre unendlich fernen Räume einen Raum S_{n-2} bestimmen.

Wenn die beiden Räume $S_{m-1\infty}$, $S_{m^{(1)}-1\infty}$ der zwei Räume S_m, $S_{m^{(1)}}$ in einem Raum $S_{n-2\infty}$ liegen, so lassen sie eine Richtung senkrechter Graden zu. Wir nehmen an, $m \leq m^{(1)}$ und verbinden S_m mit dem Pol des Raums $S_{n-2\infty}$; wir erhalten dann einen Raum S_{m+1}. Da $m + m^{(1)} + 1 - n = 0$ ist, so schneidet dieser Raum $S_{m^{(1)}}$ in einem Punkt A_0. Zieht man mithin durch A_0 die Normale auf die beiden gegebenen Räume, so schneidet diese auch den Raum S_m, da sie mit S_m in dem Raum S_{m+1} liegt (Satz II, § 158).

Bem. III. Wenn die unendlich fernen Räume der beiden Räume S_m, S_r conjugirt sind, so verliert Satz III seine Gültigkeit. Dagegen gibt es Räume des einen, welche auf dem andern Raum senkrecht stehen.

Betrachten wir den unendlich fernen Raum $S_{m-1\infty}$ von S_m; er hat einen Raum $S_{n-m-1\infty}$ in $S_{n-1\infty}$ zum polaren. Geht der Raum S_r durch $S_{n-m-1\infty}$ und ist $r > n - m$, so stehen alle in S_r enthaltenen Räume S_{n-m}, welche durch $S_{n-m-1\infty}$ gehen, und mithin alle in ihnen enthaltenen Räume senkrecht auf dem Raum S_m (Def. I). Dagegen stehen die übrigen ausserhalb derselben und in S_r liegenden Räume nicht senkrecht auf S_m.

Wie zwei Ebenen in S_4 auf zwei verschiedene Arten senkrecht aufeinander stehen können (Def. I, § 129), so gibt es auch verschiedene Fälle der Orthogonalität zweier Räume S_m, S_r (r, $m > 1$), wenn ihre unendlich fernen Räume in einem Raum S_a conjugirt sind ($a < n - 1$) und wenn sie im Allgemeinen nicht in einem solchen Raum liegen.

Man überzeugt sich leicht, dass es $n - m$ solcher Fälle gibt, wenn $m \geq r$ ist.

Wir erhalten so im Allgemeinen eine Methode zur Auflösung der Probleme über aufeinander senkrechte Räume und über die Construction senkrechter Dinge nur mit Elementen des endlichen Gebiets. Auch ohne dass wir näher darauf eingehen, sieht wohl ein Jeder, wie man in speciellen Fällen zu verfahren hat.

9.

Abstände. — Winkel. — Identität des Raums um seine Räume S_m.

§ 169. *Bem. I.* Wie bei der Ebene, so beweist man auch bei dem Raum von drei und vier Dimensionen die Sätze, welche sich auf den Abstand zwischen einem Punkt und einem Raum S_{n-1}, zwischen zwei Räumen, welche gemeinschaftliche Lothe zulassen und zwischen parallelen Räumen beziehen, ohne dass wir nöthig hätten länger dabei zu verweilen.

Bem. II. Indem wir eine ähnliche Methode befolgen wie bei der Definition der Winkel von Strahlen, Halbebenen und Halbräumen von drei Dimensionen (Theil I, Buch III, Kap. I, 7 und Theil II, Buch I, Kap. I, 7), verstehen wir unter den Winkeln zweier Räume S_m, S_r diejenigen, welche durch die kleinsten normalen Abstände ihrer unendlich fernen Räume gemessen werden.[1])

Analog wie bei dem Raum von drei und vier Dimensionen wird der Keil zweier Halbräume von $n-1$ Dimensionen definirt und seine Eigenschaften, welche denjenigen der Keile des Raums von drei und vier Dimensionen entsprechen, werden auf dieselbe Art bewiesen. So schneidet z. B. eine Ebene, welche auf zwei Halbräumen von $n-1$ Dimensionen senkrecht steht, diese Halbräume in zwei Strahlen, deren Winkel dem Winkel der beiden Halbräume gleich ist; so sind die Normalschnitte zweier gleicher oder ungleicher Keile ebenfalls gleich oder ungleich; sind zwei Scheitelkeile gleich und ist ein Keil $(a_{n-1} b_{n-1})$ demselben Keil in entgegengesetzter Richtung durchlaufen gleich. Beachtet man ferner, dass man das Räumesystem von S_n um einen Raum S_m erhält, wenn man S_m mit dem Polarraum $S_{n-m-1\infty}$ seines unendlich fernen Raums verbindet, so lässt sich die Identität des Raums S_n um zwei beliebige Räume S_m, S'_m mittelst der Polarräume ihrer unendlich fernen Räume feststellen.

10.

Das Vielkant. — Die Grundpyramide in S_n.

§ 170. *Def. I.* Die durch m Strahlen $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots a_1^{(m)}$ $(m \overline{\lessgtr} n)$, welche von einem Punkt P_0 des Raums S_n ausgehen und unabhängig sind, gebildete Figur heisst *Vielkant oder körperlicher Winkel von m Dimensionen.* Die Strahlen sind *die Kanten, P_0 der Scheitel,* die Winkelsectoren $(a_1^{(1)} a_1^{(2)})$, $(a_1^{(1)} a_1^{(3)})$, u. s. w. *die ebenen Seiten,* die Dreikante $(a_1^{(1)} a_1^{(2)} a_1^{(3)})$, $(a_1^{(1)} a_1^{(2)} a_1^{(4)})$, u. s. w. *die Seiten von drei Dimensionen,* die Vielkante $(a_1^{(1)} a_1^{(2)} \ldots a_1^{(n-1)})$, $(a_1^{(1)} a_1^{(2)} \ldots a_1^{(n-2)} a_1^{(n)})$, u. s. w. *die Seiten von $n-1$ Dimensionen* und schliesslich die Keile von n Dimensionen, die durch die Seiten von $n-1$ Dimensionen gebildet werden, seine *Keile von n Dimensionen* oder nur seine *Keile.*

Def. III. Zwei Vielkante, deren Kanten entgegengesetzte Strahlen sind und deren Anfangspunkt im gemeinschaftlichen Scheitel der Vielkante liegt, heissen *Scheitelvielkante.*

Bem. I. Die unendlich fernen Punkte $a_{0\infty}^{(1)}, a_{0\infty}^{(2)}, \ldots a_{0\infty}^{(n)}$ der Kanten $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(n)}$ des körperlichen Winkels bestimmen eine *Grundpyramide* oder ein *Ennaeder* des unendlich fernen Raums $S_{n-1\infty}$. Die Winkel der ebenen Seiten des Vielkants werden durch die Kanten, ebenso die Winkel seiner Seiten von drei, vier u. s. w. n Dimensionen durch die ebenen Winkel, Keile von drei u. s. w. $n-1$ Dimensionen seines unendlich fernen Ennaeders gemessen. Mithin liefern die Eigenschaften der Kanten, ebenen Winkel und Keile von drei u. s. w. $n-1$ Dimensionen des unendlich fernen Ennaeders ebensoviele Eigenschaften der ebenen Winkel, Keile von drei u. s. w. n Dimensionen des Vielkants selbst.

Wir haben gesehen, was man unter innerem und äusserem Theil einer Graden bezüglich eines gegebenen Segments, einer Ebene bezüglich eines ebenen Winkels, des Raums von drei Dimensionen bezüglich eines Dreikants und eines Tetraeders und des Raums von vier Dimensionen bezüglich eines Vierkants und eines Pentaeders versteht nicht nur im *Euclid'*schen sondern auch in dem vollständigen Gebiet des Raums.

---

1) Siehe die Anm. zu § 163. Die Winkel zweier Räume wurden zuerst auf rechnerischem Weg durch *Jordan* (Bull. de la Société math. de France, 1875), dann auf geometrischem Weg von *Cassani* (Rendiconti dell' Acc. dei Lincei, 1885) und *Castelnuovo* (Atti del R. Istituto Veneto, 1885) untersucht. *Castelnuovo* beweist mittelst eines eleganten Verfahrens, dass die n Winkel der beiden Räume S_n, S'_n in S_{2n} reell sind.

Wir verfahren auf dieselbe Art und nehmen an, der folgende Satz, der bereits für $n = 2, 3, 4$ bewiesen wurde, gelte für den Raum S_{n-1} und Räume niedrigerer Dimension:

Die Segmente, welche einen beliebigen Scheitel einer Grundpyramide in S_{n-1} mit den Punkten des inneren Theils der gegenüberliegenden Seite verbinden, bilden denselben Theil des Raums.[1])

Dieser Theil des Raums heisst der innere Theil des Raums S_{n-1} bezüglich der Pyramide oder einfacher *der innere Theil der Pyramide.*

Daraus folgt, dass ein Segment, dessen Enden sich im Innern der Pyramide befinden und ebenso der innere Theil einer Grundpyramide von m im Innern der gegebenen Pyramide gelegenen Scheiteln ($m < n - 1$), im Innern eben dieser Pyramide liegen (siehe Zus. II, III, Satz I, § 145).

Man findet auch, wenn man die Voraussetzung beachtet und dem Beweis der Sätze III u. IV, § 95 oder § 145 folgt, dass eine Grade, welche eine Seite von $n - 2$ Dimensionen der Pyramide in einem inneren Punkt trifft oder von welcher ein Punkt im Innern der Pyramide liegt, eine andre Seite oder zwei analoge Seiten in einem inneren Punkt treffen muss.

Def. IV. Der innere und äussere Theil des unendlich fernen Raums $S_{n-1\infty}$ von S_n bezüglich der Pyramide $\alpha^{(1)}_{0\infty} \ldots \alpha^{(n)}_{0\infty}$ geben *den inneren und äusseren Theil des Vielkants* $(a_1^{(1)} \ldots a_1^{(n)})$ in dem Raum S_n.

Wendet man das vorige Theorem auf die unendlich ferne Pyramide des Vielkants $A_0^{(n+1)} \cdot A_0^{(1)} \ldots A_0^{(n)}$ an, so erhält man die Eigenschaften:

Zus. I. Die ebenen Winkel, von welchen ein Schenkel mit einer Kante des Vielkants zusammenfällt und deren andrer Schenkel eine durch den Scheitel des Vielkants gehende in dem inneren Theil der gegenüberliegenden Seite gelegene Halbgrade ist, liegen in dem inneren Theil des Vielkants.

Zus. II. Jeder Winkel, dessen Scheitel mit dem Scheitel des Vielkants zusammenfällt und dessen Schenkel im Innern oder auf zwei Seiten von $n - 1$ Dimensionen des Vielkants gelegen sind, liegt im Innern des Vielkants.

Zus. III. Der innere Theil eines körperlichen Winkels von $n - 1$ (oder einer geringeren Anzahl) im Innern oder wenigstens auf zwei Seiten von $n - 1$ Dimensionen des Vielkants gelegenen Kanten, liegt innerhalb des Vielkants.

Satz I. Der innere Theil jeder Grundpyramide von n innerhalb oder auf zwei Seiten von wenigstens $n - 1$ Dimensionen des Vielkants gelegenen Scheiteln liegt im Innern des Vielkants.

Lässt man den Satz für einen körperlichen Winkel von $n - 1$ Kanten gelten, da er für $n = 3, 4$, u. s. w. gilt, so befinden sich die Seiten der obigen Pyramide auf der Oberfläche des Vielkants. Wählt man zwei Punkte A_0, B_0 dieser Seiten, so liegt der Winkel $P_0 \cdot A_0 B_0$, wenn P_0 der Scheitel des Vielkants ist, im Innern des Vielkants. Alle Segmente, welche zwei Punkte zweier Seiten der obigen Pyramide verbinden, befinden sich daher innerhalb des Vielkants. Jedes Segment aber, von welchem ein Punkt im Innern dieser Pyramide liegt, trifft zwei ihrer Seiten in zwei inneren Punkten (Bem. I); mithin ist jeder innerhalb der Pyramide gelegene Punkt im Innern des Vielkants.

Der Satz ist damit bewiesen, da er für $n = 2, 3, 4$ gilt.

Satz II. Die Theile des Raums S_n innerhalb der $n + 1$ Vielkante einer Grundpyramide fallen zusammen.

---

1) Siehe Satz II und Bem. II.

Der Beweis ist analog wie zu Satz I, § 145. Die Eigenschaft gilt daher, wenn sie, wie in Bem. I vorausgesetzt, für den Raum S_{n-1} gilt.

Sie ist aber für $n = 2, 3, 4$ gültig, mithin ist sie allgemein gültig.

Bem. II. Daraus folgt, dass die Eigenschaft Bem. I und also auch diejenigen, welche wir aus ihr abgeleitet haben, zu Recht bestehen.

Def. V. Die inneren Theile der Vielkante einer Grundpyramide in S_n bilden einen Theil des Raums, welcher *der innere Theil* der Pyramide heisst. Der übrige Theil von S_n heisst *der äussere Theil.*

Zus. I. Das Segment zweier innerer Punkte einer Grundpyramide liegt in ihrem Innern.

Beweis analog wie bei Zus. II, Satz I, § 145.

Satz III. Den inneren Strahlen eines Vielkants sind die Strahlen des Scheitelvielkants entgegengesetzt.

Denn dies gilt für ihre unendlich fernen Punkte bezüglich der entgegengesetzten Pyramiden der beiden Vielkante (siehe Satz I, § 115).

Def. VI. Ist die unendlichferne Pyramide des n-Kants polar, so heisst das n-Kant *n-rechtwinklig.*

Satz IV. In einem n-rechtwinkligen n-Kant sind die ebenen Winkel, die Keile der ebenen Seiten, der Seiten von drei, vier u. s. w. $n - 1$ Dimensionen rechte (Bem. II, § 169 und Zus. II, Satz I, II, § 164).

Satz V. Die n Räume von $n - 1$ Dimensionen eines n-rechtwinkligen n-Kants theilen den Raum S_n in 2^n n-rechtwinklige n-Kante, von denen je zwei Scheitel n-Kante sind (Satz III, § 164).

Satz VI. Die n-rechtwinkligen n-Kante sind identisch.

Denn dies sind auch ihre unendlich fernen Pyramiden (Zus. II, Satz I, § 164).

Satz VII. Wenn die unendlich fernen Pyramiden oder Ennaeder zweier n-Kante in S_n gleich sind, so sind es auch die beiden n-Kante.

Man kann einen Identitätszusammenhang zwischen den beiden Vielkanten feststellen, indem man ihre Scheitel und ihre Vielkante im Unendlichgrossen sich entsprechen lässt (Satz III, § 15).

Zus. I. Zwei Scheitelvielkante sind gleich.

Denn ihre unendlich fernen Ennaeder sind entgegengesetzt und mithin gleich (Satz III, § 30).

Zus. II. Sind die Kanten zweier Vielkante parallel und gleich oder entgegengesetzt gerichtet, so sind die Vielkante gleich.

Denn ihre unendlich fernen Vielkante sind gleich.

Satz VIII. Es gibt keine zwei gleichen n-Kante, die eine Seite von $n - 1$ Dimensionen gemein haben und deren beiden andere Kanten auf derselben Seite des durch diese Seite bestimmten Raums liegen.

Der Satz ist richtig, wenn es richtig ist, dass in dem Raum S_{n-1} (gleichgültig ob vollständig oder nicht) keine zwei gleichen Grundpyramiden mit einer gemeinschaftlichen Seite von $n - 2$ Dimensionen und den übrigen Kanten in demselben durch diese Seite bestimmten Theil des Raums existiren. Der letzte

Satz gilt aber, wenn es richtig ist, dass in S_{n-1} keine zwei gleiche körperliche Vielecke von $n-1$ Kanten existiren können, welche eine Seite von $n-2$ Dimensionen gemein haben und deren übrige Kanten auf der nämlichen Seite derselben liegen. Mithin ist der aufgestellte Satz gültig, wenn er für den Raum von $n-1$ Dimensionen gilt. Er gilt aber für $n=3, 4$; mithin auch allgemein (Einl. 1, § 39).

Satz IX. Es gibt keine zwei gleichen Grundpyramiden in S_n, welche eine Seite von $n-1$ Dimensionen gemein haben und deren gegenüberliegende Scheitel in demselben durch diese Seite bestimmten Theil von S_n liegen.

Denn wäre dies der Fall, so gäbe es auch zwei gleiche Vielkante mit einer gemeinschaftlichen Seite von $n-1$ Dimensionen und den übrigen Kanten in demselben Theil des Raums bezüglich dieser Seite, deren Scheitel in einem beliebigen Scheitel der den beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Seite liegen würden, was dem Satz VIII widerspricht.

Satz X. Ein Raum von $n-1$ Dimensionen, welcher eine Kante einer Grundpyramide in S_n im Innern trifft, schneidet auch die Kanten im Innern, welche einen oder mehrere Scheitel mit den übrigen verbinden, ohne die übrigen Kanten zu treffen.

Oder auch:

Theilt man die Scheitel der Pyramide in zwei Gruppen, so kann der Raum die Kanten, welche die Scheitel der einen mit denen der andern verbinden, im Innern schneiden, ohne die Kanten derselben Gruppe innerhalb zu treffen. Es gibt immer zwei solcher Gruppen, wenn der Raum eine Kante der Pyramide im Innern trifft.

Wir wollen annehmen, der Satz gelte für eine Grundpyramide von n Scheiteln und es sei $A_0^{(1)} A_0^{(2)} \cdots A_0^{(n)} A_0^{(n+1)}$ die Grundpyramide in S_n. Es sei $(A_0^{(1)} A_0^{(m+1)})$ die Kante, welche von dem Raum S_{n-1} in einem innern Punkt geschnitten wird.

Ist die Pyramide $A_0^{(1)} A_0^{(2)} \cdots A_0^{(n)}$ gegeben und hat man die beiden Gruppen ihrer Scheitel

$$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \cdots A_0^{(m)};\ A_0^{(m+1)} \cdots A_0^{(n)} \tag{1}$$

ausgewählt, so schneidet der Raum S_{n-1} den Raum dieser Pyramide in einem Raum S_{n-2}, welcher nach der Voraussetzung so gewählt werden kann, dass er die Kanten schneidet, welche die Scheitel einer beliebigen der beiden Gruppen mit denjenigen der andern verbindet. Es existiren immer zwei Gruppen (1), weil S_{n-1} (und mithin auch S_{n-2}) die Kante $(A_0^{(1)} A_0^{(m+1)})$ schneidet und diesen Gruppen bezüglich die beiden Scheitel $A_0^{(1)}$, $A_0^{(m+1)}$ angehören müssen. Durch die Punkte, in welchen der Raum S_{n-2} die Kanten der Pyramide von n Scheiteln $A_0^{(1)} \cdots A_0^{(n)}$ schneidet, und nur durch diese inneren Punkte der Kanten der Pyramide $A_0^{(1)} \cdots A_0^{(n)}$, immer der obigen Annahme entsprechend, geht auch der Raum S_{n-1}. Wählt man eine andre Grundpyramide von n Scheiteln mit der Kante $(A_0^{(1)} A_0^{(m+1)})$, z. B.

$$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \cdots A_0^{(m)} \cdots A_0^{(n-1)} A_0^{(n+1)}, \tag{2}$$

so schneidet der Raum S_{n-1} ihre Kanten, welche die Scheitel der beiden Gruppen

(3) $$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)}, \quad A_0^{(m+1)} \dots A_0^{(n-1)}$$

verbinden.

Nach der Voraussetzung muss der übrig bleibende Scheitel $A_0^{(n+1)}$ in einer der beiden Gruppen liegen; es gibt daher zwei mögliche Gruppenpaare:

(4) $$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A^{(m)}, \quad A_0^{(m+1)} \dots A_0^{(n-1)} A_0^{(n+1)}$$

(4') $$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)} A_0^{(n+1)}, \quad A_0^{(m+1)} \dots A_0^{(n-1)},$$

welche sich auf ein einziges reduciren können, wenn nämlich die Gruppen (4) und (4') aus derselben Anzahl von Scheiteln bestehen. Man hat also für die Pyramide in S_n die beiden Formen:

$$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)}; \quad A_0^{(m+1)} \dots A_0^{(n)} A_0^{(n+1)}$$

$$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)} A_0^{(n+1)}; \quad A_0^{(m+1)} \dots A_0^{(n-1)} A_0^{(n)}.$$

Denn wenn der Raum S_{n-1} eine andre Kante schneiden könnte, so müsste diese eine der Kanten sein, welche zwei Scheitel derselben Gruppe z. B. $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$ verbindet und wählt man dann die Pyramide

$$A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(m)} \dots A_0^{(n)},$$

so gäbe es einen Raum S_{n-2}, welcher die Kanten treffen würde, welche die Scheitel der zwei Gruppen (1) verbinden und ausserdem noch die Kante $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$, was gegen die Voraussetzung ist.

Gilt also der Satz für den Raum S_{n-1}, so gilt er auch in dem Raum S_n; er ist aber für $n = 2, 3, 4$ gültig; mithin ist er es allgemein (Zus. I, Satz II, § 95 und Zus. I, Satz II, § 145; Einl. 1, § 39).

Zus. I. Wenn ein Raum, welcher durch keinen der Scheitel einer Grundpyramide geht, die n durch einen Scheitel gehenden Kanten in äusseren Punkten trifft, so schneidet er auch die übrigen Kanten in äusseren Punkten.

Bem. III. Auch für die Grundpyramide in S_n gelten die Eigenschaften bezüglich der Durchschnittspunkte einer Graden, welche einen Punkt im Innern einer Seite von $n-1$ Dimensionen der Pyramide oder einen Punkt innerhalb der Pyramide hat (Bem. I und II).

11.

Dreikante, Vierkante u. s. w. Vielkante verschiedener Art.

§ 171. *Bem.* Bei der Lehre von dem Raum von vier Dimensionen haben wir die Dreikante zweiter Art gefunden, welche eine Grade zum Scheitel haben (§ 142) und von den Dreikanten erster Art verschieden sind, die dem Raum von drei Dimensionen angehören. Ebenso findet man in dem Raum S_5 die Dreikante dritter Art, welche eine Ebene zum Scheitel und drei Räume von drei Dimensionen zu Seiten haben und in demselben Raum die Vierkante zweiter Art, welche eine Grade zum Scheitel und vier durch sie gehende Ebenen zu Seiten haben.

So gibt es in dem Raum von m Dimensionen das Vielkant erster Art mit m Kanten, in dem Raum von $m+1$ Dimensionen das Vielkant zweiter Art mit m Kanten, welches eine Grade zum Scheitel hat und in dem Raum von n Dimensionen das Vielkant $(n-m+1)^{\text{ter}}$ Art, von m Kanten, welches einen Raum von $n-m$ Dimensionen zum Scheitel hat und dessen Seiten m durch diesen Scheitel gehende Räume von $n-m+1$ Dimensionen sind. Die Eigenschaften dieser Vielkante verschiedener Art werden aus den Eigenschaften der Vielkante erster Art abgeleitet. Wir haben nicht nöthig, länger bei diesen geometrischen Dingen zu verweilen.

12.

Sinn der Vielkante und der Grundpyramiden in dem Raum S_n.

§ 172. *Bem. I.* Nehmen wir an, die Richtungen des Sterns $n-3^{ter}$ Art in S_{n-1} und des Raums S_{n-1} würden durch die Richtungen eines Zweikants von $n-1$ Dimensionen eines körperlichen Vielecks von $n-1$ unabhängigen Kanten festgelegt, so bestimmen wie bei der Ebene, dem Raum von drei und vier Dimensionen die Richtungen des Raums $S_{n-1\infty}$ von S_n oder eines beliebigen leitenden Raums *die Richtungen* des Sterns $n-2^{ter}$ Art.

Bezüglich der Sterne $n-2^{ter}$ Art lassen sich die Eigenschaften, welche den Sätzen über die Richtungen der Sterne erster Art des Raums von drei Dimensionen (§ 96) oder der Sterne zweiter Art des Raums S_4 (§ 146) entsprechen, ähnlich beweisen.

Wenn man die Richtungen des Raums S_n definirt und die Schlussweise von $n-1$ auf n anwendet, erhält man analog, dass die Richtungen des Raums S_n durch diejenigen eines Zweikants eines seiner Vielkante bestimmt werden. Damit ist die oben nur vorausgesetzte Eigenschaft bewiesen. Wir bringen und beweisen hier die Eigenschaften, welche sich auf den Sinn der Vielkante und der Grundpyramiden beziehen; um die Anwendung des genannten Beweisverfahrens besser kennen zu lehren.

Bem. II. Wir nehmen an, die Eigenschaft gelte: „dass zwei Grundpyramiden in dem Raum S_{n-1}, welche eine Seite von $n-2$ Dimensionen gemein haben, gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, je nachdem ihre übrigen Scheitel in demselben oder entgegengesetzten Theile von S_{n-1} bezüglich der gemeinschaftlichen Seite liegen." Diese Eigenschaft gilt bereits für die Ebene, den Raum von drei und vier Dimensionen (siehe Satz V und Bem. VIII).

Satz I. Zwei Vielkante $a_1^{(1)}a_1^{(2)}\cdots a_1^{(n)}$, $a_1^{(1)}a_1^{(2)}\cdots a_1'^{(n)}$, welche denselben Scheitel P_0 und eine Seite von $n-1$ Dimensionen gemein haben, sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem die übrigen Kanten $a_1^{(n)}$ und $a_1'^{(n)}$ in demselben Theil oder entgegengesetzten Theilen des Raums bezüglich der gemeinschaftlichen Seite liegen.

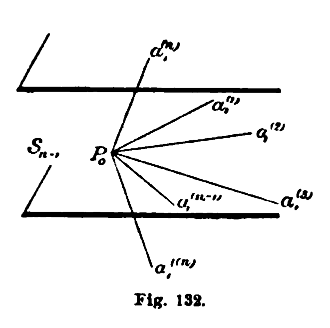


Fig. 132.

Denn sie sind im ersten Fall gleichgerichtet, weil es ihre Pyramiden im Unendlichgrossen der Voraussetzung nach sind, während sie im zweiten Fall entgegengesetzten Sinn haben (Fig. 132).

Bem. III. Zus. I und II, Satz VII, § 146 werden ebenso bewiesen.

Es gilt auch und wird ähnlich wie Satz XI, § 96 oder X, § 146 bewiesen der Satz, welcher sich auf den Sinn zweier Vielkante mit demselben Scheitel bezieht, deren Kanten einen Raum S_{n-1} in zwei gleich oder nicht gleich gerichteten Pyramiden schneiden.

Satz II. Zwei Vielkante $a_1^{(1)}a_1^{(2)}\cdots a_1^{(n)}$, $a_1^{(1)}a_1'^{(2)}a_1'^{(3)}\cdots a_1'^{(n)}$, welche eine Kante und den Scheitel gemein haben und deren beide Seiten $(a_1^{(2)}\cdots a_1^{(n)})$, $(a_1'^{(2)}\cdots a_1'^{(n)})$ in dem nämlichen Raum von derselben oder der entgegengesetzten Richtung liegen, haben gleichen oder entgegengesetzten Sinn.

Denn wenn die Vielkante $(a_1^{(2)}\cdots a_1^{(n)})$, $(a_1'^{(2)}\cdots a_1'^{(n)})$ um den gemeinschaftlichen Scheitel denselben Sinn haben, so sind ihre Pyramiden im Unendlichgrossen $A_{0\infty}^{(2)}A_{0\infty}^{(3)}\ldots A_{0\infty}^{(n)}$, $A'^{(2)}_{0\infty}A'^{(3)}_{0\infty}\ldots A^{(1)(n)}_{0\infty}$ gleichgerichtet (Bem. I)

und mithin auch die beiden körperlichen Vielecke $A^{(1)}_{0\infty} \cdot A^{(2)}_{0\infty} \dots A^{(n)}_{0\infty}$, $A^{(1)}_{0\infty} \cdot A'^{(2)}_{0\infty} \dots A'^{(0)}_{0\infty}$ (Bem. III) und folglich auch die beiden Vielkante.

Satz III. Zwei Vielkante $A_0^{(1)} \cdot A_0^{(2)} \dots A_0^{(n+1)}$, $A_0'^{(1)} \cdot A_0'^{(2)} \dots A_0'^{(n+1)}$ haben denselben oder den entgegengesetzten Sinn, wenn ihre Schnitte $A_0^{(2)} \dots A_0^{(n+1)}$, $A_0'^{(2)} \dots A_0'^{(n+1)}$ mit einem Raum S_{n-1} gleichen Sinn haben, je nachdem ihre Scheitel auf derselben Seite von S_{n-1} liegen oder nicht. Sind dagegen die beiden Schnitte entgegengesetzt gerichtet, so haben die beiden Vielkante im ersten Fall entgegengesetzten im zweiten gleichen Sinn.

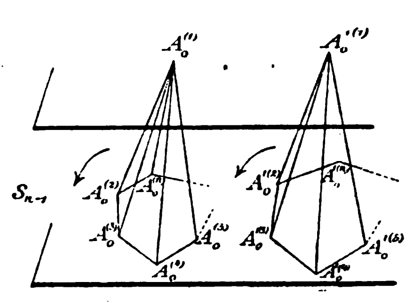


Fig. 133.

Der Beweis ist ähnlich wie zu Satz XII, § 96 oder XI, § 146 (Fig. 133).

Bem. IV. Daraus wird mit analogem Beweis der dem Zus. I, Satz XII, § 146 entsprechende Zusatz abgeleitet.

Zus. I. Zwei Vielkante $a_1^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_1^{(n)}$, $a_1'^{(1)} a_1'^{(2)} \dots a_1'^{(n)}$, von welchen zwei Kanten $a_1^{(2)}$, $a_1'^{(2)}$ auf derselben Graden liegen und entgegengesetzt gerichtet sind und deren Kanten $a_1^{(3)}$, $a_1'^{(3)}$ sich in einem Punkt $A_0^{(3)}$, $a_1^{(4)}$, $a_1'^{(4)}$ in $A_0^{(4)}$ u. s. w., $a_1^{(n)}$, $a_1'^{(n)}$ in $A_0^{(n)}$ schneiden und deren übrige Kanten $a_1^{(1)}$, $a_1'^{(1)}$ auf derselben Seite des Raums $a_1^{(2)} a_1'^{(2)} a_1^{(3)} a_1'^{(3)} \dots a_1^{(n)} a_1'^{(n)}$ liegen, haben entgegengesetzten Sinn.

Liegen dagegen $a_1^{(1)}$, $a_1'^{(1)}$ auf entgegengesetzten Seiten des genannten Raums, so haben die beiden Vielkante denselben Sinn.

Sind $a_1^{(2)}$, $a_1'^{(2)}$ gleichgerichtet, so haben die beiden Vielkante im ersten Fall gleichen, im zweiten entgegengesetzten Sinn.

Bem. V. Diese Eigenschaft geht auf analoge Art aus Zus. II, Satz XI, § 146 hervor; nur muss man annehmen, es sei bewiesen, dass eine grade Anzahl von Permutationen der Scheitel der Pyramide in S_{n-1} eine Richtung und eine ungrade die entgegengesetzte Richtung geben, wie es bei der Ebene, dem Raum von drei und vier Dimensionen der Fall ist (siehe Satz IV).

Satz IV. Eine grade Anzahl von Permutationen der Scheitel einer Grundpyramide des Raums S_n, gibt eine Richtung des Raums S_n, eine ungrade Anzahl die entgegengesetzte Richtung.

Wir haben angenommen, der Satz gelte für den Raum S_{n-1} (Bem. IV). Wählt man das Vielkant $A_0^{(1)} \cdot A_0^{(2)} \dots A_0^{(n+1)}$ der Grundpyramide in S_n, so gibt eine grade Anzahl von Permutationen der Scheitel der Pyramide $A_0^{(2)} \dots A_0^{(n+1)}$ in ihrem Raum S_{n-1} dieselbe Richtung von S_{n-1} und mithin auch dieselbe Richtung des Vielkants vom Scheitel $A_0^{(1)}$ (Satz III). Eine ungrade Anzahl von Permutationen der Scheitel $A_0^{(2)} \dots A_0^{(n+1)}$ gibt die entgegengesetzte Richtung. Hält man aber die $n+1$ Scheitel $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, ..., $A_0^{(n+1)}$ der $n+1$ Vielkante der Grundpyramide in S_n der Reihe nach fest und vertauscht die übrigen Scheitel, so erhält man alle Permutationen der $n+1$ Scheitel. Nimmt man nun in Zus. I, Satz III an, $a_1^{(1)}$, $a_1'^{(1)}$ träfen sich in einem Punkt $A_0^{(n+1)}$ und die Scheitel der beiden Vielkante seien $A_0^{(1)}$ und

$A_0^{(2)}$, so liegen die beiden Kanten $a_1^{(1)}$, $a_1'^{(1)}$ auf derselben Seite des Raums $A_0^{(1)} A_0^{(2)} \ldots A_0^{(n)}$ und die beiden Vielkante $A_0^{(1)} \cdot A_0^{(2)} A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$, $A_0^{(2)} \cdot . A_0^{(1)} A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$ haben entgegengesetzten Sinn (Zus. I, Satz III). Das Vielkant $A_0^{(2)} \cdot A_0^{(3)} A_0^{(1)} A_0^{(4)} \ldots A_0^{(n+1)}$ hat aber die entgegengesetzte Richtung, wie das Vielkant $A_0^{(2)} \cdot A_0^{(1)} A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$; mithin haben die beiden Vielkante $A_0^{(1)} \cdot A_0^{(2)} A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$, $A_0^{(2)} \cdot A_0^{(3)} A_0^{(1)} \ldots A_0^{(n+1)}$ gleichen Sinn.

$A_0^{(1)} A_0^{(2)} A_0^{(3)} \ldots A_0^{(n+1)}$, $A_0^{(2)} A_0^{(3)} A_0^{(1)} \ldots A_0^{(n+1)}$ erhält man aber durch eine grade Anzahl von Permutationen der $n + 1$ Scheitel der gegebenen Grundpyramide. Der Satz ist somit bewiesen, wenn er für den Raum S_{n-1} gültig ist. Er gilt aber für $n = 2, 3, 4$, mithin allgemein.

Nachdem Satz IV für jeden Fall bewiesen ist, gilt auch Zus. I, Satz III allgemein.

Def. I. Wir sagen auch, eine grade Anzahl von Permutationen gäbe einen Sinn, eine ungrade den entgegengesetzten Sinn der Pyramide.

Bem. VI. Es erübrigt noch zu zeigen, dass die in Bem. II gemachte Hypothese, auf welcher die vorigen Beweise beruhen, richtig ist.

Satz V. Zwei Grundpyramiden in S_n, welche eine Seite von $n-1$ Dimensionen gemein haben, sind von gleichem Sinn oder nicht, je nachdem die übrigen Scheitel in demselben Theil des Raums bezüglich der gemeinschaftlichen Seite liegen oder nicht.

Dieser Satz ist, wenn man Def. I benutzt, eine andre Form des Zus. I, Satz I (Bem. III). Er gilt mithin, wenn er für den Raum S_{n-1} gültig ist; er ist es aber für $n = 2, 3, 4$; also ist er allgemein gültig (Einl. 1, § 39).

Bem. VII. Die aus der Hypothese in Bem. I abgeleiteten Sätze sind somit für alle Fälle bewiesen.

Satz VI. Wenn ein Vielkant $a_1^{(1)} a_1^{(2)} \ldots a_1^{(n)}$ gegeben ist und man vertauscht eine ungrade Anzahl von Kanten mit ihren Verlängerungen, so erhält man ein Vielkant von entgegengesetztem Sinn, wie das gegebene; vertauscht man dagegen eine grade Anzahl von Kanten mit ihren Verlängerungen, so erhält man ein Vielkant von gleichem Sinn.

Der Beweis wird analog wie bei Satz XIII, § 96 oder XIII, § 146 geführt (Satz V).

Zus. I. Zwei Scheitel-n-Kante in S_n haben gleichen oder entgegengesetzten Sinn, je nachdem n grade oder ungrade ist.

Denn wenn n eine grade Zahl ist, so ist die Anzahl der Vertauschungen der n Kanten mit ihren Verlängerungen eine grade, eine ungrade dagegen, wenn n ungrade ist.

Bem. VIII. Bezüglich des Sinns der Vielkante mit parallelen Kanten gilt ein dem Zus. III, Satz XIII, § 96 oder dem Zus. II, Satz XIII, § 146 analoger Zusatz mit ähnlichem Beweis.

Zus. II. Zwei entgegengesetzte Ennaeder in dem vollständigen Raum S_{n-1} haben gleichen oder entgegengesetzten Sinn, je nachdem n grade oder ungrade ist.

Dies folgt aus Zus. I, wenn man den Raum $S_{n-1\infty}$ als Polarraum des Scheitels der Vielkante betrachtet.

13.

Sinn oder Richtung identischer Figuren. — Congruente und symmetrische Figuren.

§ 173. *Bem. I.* Ist die Definition von Punkten und Figuren gegeben, welche bezüglich eines Raumes S_{n-1} symmetrisch sind, so beweist man wie bei der Ebene und dem Raum von drei und vier Dimensionen (§§ 47, 97 und 147) die analogen Eigenschaften so z. B., dass zwei bezüglich eines Raums S_{n-1} symmetrische Vielkante entgegengesetzten Sinn haben und dass die symmetrischen Räume sich in dem Symmetrieraum schneiden. Ebenso zeigt man auch, dass der Identitätszusammenhang zwischen zwei identischen Figuren durch zwei Vielkante und daher auch durch zwei Grundpyramiden der beiden Figuren bestimmt wird und dass mithin zwei identische Figuren nicht mehr als $n+1$ Paar sich entsprechender Punkte gemein haben können. Ebenso auch, dass die gradlinigen Figuren, welche durch zwei Gruppen von m Punkten bestimmt werden, identisch sind, wenn die Segmente gleich sind, die $m-(n+1)$ von diesen Punkten mit den übrigen und die übrigen untereinander verbinden, und dass, wenn zwei Vielkante zweier identischer Figuren gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben, alle sich entsprechenden Vielkante von demselben oder entgegengesetzten Sinn sind.

Nachdem man die Definition congruenter und symmetrischer Figuren gegeben, findet man wie in der Ebene, dem Raum von drei und vier Dimensionen (§§ 58, 98 und 148), dass zwei Figuren, welche einer dritten congruent oder symmetrisch sind, selbst congruent sind; dass zwei Figuren, von welchen die eine einer dritten congruent, die andre symmetrisch ist, symmetrisch sind und schliesslich, dass zwei congruente Figuren, welche n Paar unabhängige sich entsprechende Punkte gemein haben, zusammenfallen, während die Figuren, wenn sie symmetrisch sind, alle Punkte des durch die n Paare zusammenfallender Punkte bestimmten Raums S_{n-2} gemein haben.

14.

Kugeloberfläche von $n-1$ Dimensionen.

§ 174. *Def. I.* Alle Punkte, welche in dem Raum S_n von einem Punkt P_0 um ein gegebenes Segment abstehen, bilden eine Figur, welche *Kugeloberfläche* heisst; das gegebene Segment ist *der Radius,* der Punkt P_0 *das Centrum oder der Mittelpunkt.* Zwei in zwei entgegengesetzten Radien gelegene Punkte der Oberfläche heissen *entgegengesetzt* oder *Gegenpunkte* und ihr Segment *der Durchmesser.*

Bem. I. Die Kugeloberfläche ist eine Figur von $n-1$ Dimensionen, weil der Stern $n-2^{\text{ter}}$ Art bezüglich seiner Strahlen eine solche Figur ist. Ebenso gilt ein dem Zus. zur Def. I, § 101 entsprechender Zusatz.

Def. II. Alle Durchmesser oder alle Radien der Kugeloberfläche bilden einen Theil des Raumes S_n, welcher *Kugel* heisst.

Bem. II. Eine der Def. III, § 101 bezüglich des inneren und äusseren Theils der Kugel analoge Definition hat Gültigkeit; ebenso auch Bem. II, § 101.

Def. III. Die Ebenen und Räume von drei u. s. w. $n-1$ Dimensionen, welche durch das Centrum der Kugel gehen, heissen *Diametralebenen und -Räume.*

Zus. Jede Diametralebene und jeder Diametralraum S_m schneiden die Kugel von $n-1$ Dimensionen bezüglich in einer Kreislinie und einer Kugel von $m-1$ Dimensionen.

Es geht dies unmittelbar aus der Definition hervor.

Satz I. Eine Grade kann die Kugeloberfläche von drei Dimensionen in nicht mehr als zwei Punkten treffen.

Beweis wie bei Satz I, § 101.

Bez. I. Wir bezeichnen desshalb die Kugeloberfläche von $m-1$ Dimensionen mit dem Symbol S^2_{m-1}, indem wir mit $m-1$ die Anzahl der Dimensionen und mit 2 die grösste Anzahl der Durchschnittspunkte mit einer Graden angeben.

Satz II. Eine beliebige Ebene schneidet die Kugel S^2_{n-1} in einer Kreislinie, in einem oder keinem Punkt, je nachdem ihr Abstand vom Centrum kleiner, ebensogross oder grösser als der Radius ist.

Denn der Diametralraum, welcher die Ebene mit dem Centrum verbindet, schneidet die Kugel S^2_{n-1} in einer Kugel von zwei Dimensionen S_2^2, welche von der Ebene in einer Kreislinie, einem oder keinem Punkt getroffen wird (Satz II, § 101).

Satz III. Ein Raum von m Dimensionen ($m > 2$, $m \leq n-1$) schneidet die Kugel S^2_{m-1} in einer Kugel S^2_{m-1}, in einem oder keinem Punkt, je nachdem sein Abstand vom Centrum kleiner, ebensogross oder grösser als der Radius der Kugel S^2_{n-1} ist.

Beweis analog wie zu Satz II, § 101.

Satz IV. Ein Diametralraum S_m schneidet die Kugel S^2_{n-1} in einer Kugel S_{m-1} von grösstem Radius.

Beweis analog wie zu Satz III, § 101.

Zus. Eine Diametralebene schneidet die Kugel S^2_{n-1} in einem Maximalkreis.

Def. IV. Eine Kugel S^2_m, welche in einem Diametralraum S_m liegt, heisst daher *grösste Kugel.*

Def. V. Eine berührende Grade in einem Punkt einer grössten Kreislinie heisst *die Tangente* an die Oberfläche S^2_{n-1} in diesem Punkt und der Punkt *Berührungspunkt.*

Satz V. Die Tangenten in einem Punkt der Kugeloberfläche S^2_{n-1} liegen in einem Raum von $n-1$ Dimensionen, welcher auf dem durch den gegebenen Punkt gehenden Radius senkrecht steht.

Beweis analog wie bei Satz IV, § 101.

Def. VI. Der Raum S_{n-1}, welcher die Tangenten an die Kugel S^2_{n-1} in einem Punkt enthält, heisst *Berührungsraum* der Kugel in dem gegebenen Punkt und der Punkt *Berührungspunkt.*

Satz VI. Die Kugel S^2_{n-1} liegt vollständig auf der einen Seite eines ihrer Berührungsräume von $n-1$ Dimensionen.

Beweis analog wie zu Satz V, § 101.

Def. VII. Jeder Raum S_m, welcher mit der Kugel S^2_{n-1} nur einen Punkt gemein hat, enthält unendlich viele Tangenten an die Kugel und heisst daher *Berührungsraum* der Kugel in dem gegebenen Punkt, welcher der Berührungspunkt ist.

Satz VII. Der in dem Mittelpunkt einer Sehne auf dieser Sehne senkrecht stehende Raum geht durch das Centrum der Kugel.

Beweis analog wie zu Satz VI, § 101.

Zus. Jeder Diametralraum S_{n-1} zerlegt die Kugel S^2_{n-1} in zwei bezüglich dieses Raums symmetrische Theile.

Beweis analog wie bei Zus. Satz VI, § 101.

Satz VIII. $n+1$ unabhängige Punkte bestimmen eine Kugel S^2_{n-1} und diese wird durch $n+1$ beliebige ihrer Punkte bestimmt.

Beweis analog wie zu Satz VII, § 101.

Zus. Eine Kugel S^2_{n-1} ist immer in einem Raum S_n enthalten.

Denn sie liegt in dem Raum S_n, welcher durch die $n+1$ unabhängige Punkte, welche S^2_{n-1} bestimmen, festgelegt wird.

15.

Linien und Flächen oder stetige Systeme in dem allgemeinen Raum und von gegebener Ordnung in dem Raum S_n.

§ 175. *Def. I.* Ist in dem allgemeinen Raum ein System einer Dimension von Linien (Def. I, § 36) derart gegeben, dass jedem Punkt einer Linie ein Punkt der folgenden Linie u. s. f. entspricht und sind die Systeme sich entsprechender Punkte stetig oder Linien, so heisst das gegebene Liniensystem *stetig* von zwei Dimensionen bezüglich des Punktes als Element oder auch *Fläche von zwei Dimensionen.* Bezüglich der Linien, aus welchen es zusammengesetzt ist, wird dieses System auch *stetig von einer Dimension* genannt.

Ist ein System einer Dimension von Flächen von zwei Dimensionen gegeben und findet zwischen ihren Punkten dieselbe Beziehung statt, wie zwischen dèn Punkten des obigen Liniensystems, so erhält man ein *stetiges System von drei Dimensionen* bezüglich des Punktes als Element oder auch ein stetiges System *einer Dimension* bezüglich der Flächen, aus welchen es gebildet ist. Dasselbe heisst *Fläche von drei Dimensionen.* So kommt man zu den Flächen von vier, fünf u. s. w., $m-1$ Dimensionen und schliesslich zu der *Fläche von m Dimensionen.*

Die Linien der sich entsprechenden Punkte heissen *Leitlinien,* die Linien oder Flächen des Systems *Erzeugungslinien oder -Flächen.*

Def. II. Ein System einer Dimension von Linien, welches der Def. I entspricht, heisst auch *stetiges System* einer Dimension bezüglich der Linien oder zweier Dimensionen bezüglich des Punktes.

Ist ein System von Systemen von $m-r$ Dimensionen derart gegeben, dass jedem Punkt eines Systems ein Punkt des consecutiven entspricht u. s. w. und gehören die sich entsprechenden Punkte einem stetigen System von r Dimensionen an, so heisst das System *stetig von r Dimensionen* bezüglich der gegebenen Systeme *von m Dimensionen* bezüglich des Punktes als Element.

Auch die Linie ist ein stetiges System einer Dimension von Punkten (Def. I, § 36).

Bem. I. Die sich entsprechenden Punkte zweier consecutiven Linien, Flächen oder Systeme in den Constructionen nach Def. I und II können einen beliebig kleinen Abstand haben (Def. I, § 36).

Unter der Annahme die Eigenschaft gelte bei Systemen für $m-1$ beweist man ihre Gültigkeit für m; sie gilt aber für $m=2$; folglich allgemein.

Bem. II. Sprechen wir von einer Fläche oder einem stetigen System von m Dimensionen, so meinen wir, dass es bezüglich des Punktes als Element m Dimensionen habe.

Bem. III. Wir werden bald sehen, dass die Kegel- und Kugeloberfläche, welchen wir in S_3 und S_4 begegneten, ebenfalls der Def. I genügen.

Satz I. Durch zwei consecutive Punkte X_0, Y_0 eines Erzeugungssystems G_{m-r} nach der Def. II gehen zwei consecutive leitende Systeme.

$L_r^{(x)}$, $L_r^{(y)}$ seien die beiden leitenden Systeme. Als ihre sich entsprechenden Punkte kann man diejenigen betrachten, welche sie nach Def. II mit jedem Erzeugungssystem G_{m-r} gemein haben. G'_{m-r} sei das auf G_{m-r} unmittelbar folgende Erzeugungssystem, X_0' und Y_0' die den Punkten X_0 und Y_0 in ihm entsprechenden Punkte, welche daher einander in $L_r^{(x)}$, $L_r^{(y)}$ entsprechen. Wird $(X_0 X_0')$ kleiner als jedes gegebene Segment, so wird es nach Def. II auch $(Y_0 Y_0')$ und wenn mithin $(X_0 Y_0)$ unbegrenzt abnimmt, so gilt dies auch für $(Y_0 X_0')$ und $(X_0' Y_0')$ (Zus. Ax. IV); die sich entsprechenden Punkte von $L_r^{(x)}$, $L_r^{(y)}$ sind also consecutiv d. h. die beiden leitenden Systeme sind consecutiv.

Satz II. Ein stetiges System von r Dimensionen, welches aus Systemen von $m-r$ Dimensionen besteht, ist ein stetiges System von $m-r$ Dimensionen, welches aus Systemen von r Dimensionen zusammengesetzt ist.

Denn ist (G_{m-r}) die Gruppe der Erzeugungssysteme und (L_r) die Gruppe der Leitungssysteme, so ist jeder Punkt eines Systems L_r auch ein Punkt eines Systems G_{m-r} und umgekehrt (Def. II). Durch consecutive Punkte von G_{m-r} gehen consecutive leitende Systeme (Satz I) und betrachtet man die Punkte von G_{m-r} als entsprechende Punkte, so ist G_{m-r} ein leitendes System in dem neuen System und L_r ein Erzeugungssystem.

Satz III. Jedes stetige System von m ($m>1$) Dimensionen in dem allgemeinen Raum ist eine Fläche von m Dimensionen.

Das System von zwei Dimensionen, also durch ein System einer Dimension von Linien erzeugt, ist eine Fläche von zwei Dimensionen, weil sich in diesem Fall Def. II mit Def. I deckt. Es sei nun $r=2$ und $m-r=1$, d. h. es sei ein stetiges System Σ von zwei Dimensionen von Linien gegeben. Eine beliebige der leitenden Flächen L_2 des Systems wird durch ein stetiges System von Linien einer Dimension erzeugt. Betrachten wir eine leitende Linie L_1 einer Fläche L_2. Durch einen Punkt A_0 von L_1 geht eine Linie G_1 der Fläche L_2 und durch A_0 geht auch eine Erzeugungslinie g_1 des gegebenen Systems.

Durch jeden Punkt X_0 von g_1 geht eine leitende Fläche und in derjenigen des Punktes X_0, welcher unmittelbar auf A_0 folgt, betrachte man eine Erzeugungslinie, welche unmittelbar auf die Linie G_1 folgt. Alle Linien G_1 bilden eine Fläche von zwei Dimensionen G_2, von welcher g_1 eine leitende Linie ist.

Alle diese Flächen von zwei Dimensionen, welche man aus den durch die Punkte von L_1 gehenden Linien g_1 erhält, bilden ein stetiges System Σ' einer Dimension mit der leitenden Linie L_1 (Def. I).

Die Leitlinien von G_2 sind die Erzeugenden des Systems Σ, weil zwei consecutive Erzeugende zweier Flächen L_2, L_2' ihre Punkte in Erzeugenden des Systems Σ haben (Def. II und Satz I); mithin ist jeder Punkt der Fläche $(G_2 L_1)$ oder von Σ', da er in wenigstens einer G_2 liegt, auch in wenigstens einer Erzeugenden g_1 des Systems Σ gelegen. Wenn umgekehrt Y_0 ein Punkt von Σ ist, so geht durch ihn eine Erzeugende g_1' von welcher ein Punkt Y_0' auf der Fläche L_2 liegen muss (Def. II), welche ihrerseits in einer Erzeugenden G_1' von L_2 gelegen ist. Die Linie G_1' hat einen Punkt Y_0'' in L_1, durch welchen eine Erzeugende g_1'' von Σ geht. Die durch g_1'' und G_1' bestimmte Fläche G_2'' enthält g_1', weil die consecutive Fläche L_2' von L_2 durch die consecutiven sich entsprechenden Punkte und die Erzeugende $G_1^{(1)}$ von L_2', welche unmittelbar auf G_1' folgt, durch die consecutiven Punkte der Punkte von G_1' auf den G_1' in L_2 schneidenden Erzeugenden g_1 gegeben ist (Satz I). G_2'' enthält daher auch den Punkt Y_0 und mithin fallen die beiden Systeme Σ und Σ' zusammen.

Der Satz ist mithin in diesem Fall bewiesen (Def. I).

Der Satz gelte für $m - 1$; man setze $m - 1 = r + m - r - 1$. Man erhält alle Gruppen von zwei Zahlen, deren Summe m ist, wenn man zu r oder $m - r - 1$ eine Einheit in den dem $m - 1$ entsprechenden Gruppen hinzufügt.

Es sei nun ein System von r Dimensionen von Systemen von $m - r$ Dimensionen gegeben, welche nach der Voraussetzung Flächen von $m - r$ Dimensionen sind. Ist mithin eine leitende Fläche L_r des Systems, ein Punkt A_0 auf ihr und die erzeugende Fläche G_{m-r}, welche durch A_0 geht, gegeben, so wähle man in G_{m-r} eine leitende Linie L_1 und eine Erzeugungsfläche G_{m-r-1}, welche beide durch den Punkt A_0 gehen. Legt man in den G_{m-r} die consecutiven Flächen G_{m-r-1} durch die consecutiven Punkte von L_r, so bilden sie mit L_r ein System von $m - 1$ Dimensionen, welches nach der Voraussetzung eine Fläche von der gleichen Anzahl von Dimensionen ist. Betrachtet man daher die durch die Punkte von L_1 gehenden Flächen L_r, so erhält man gerade eine Fläche F_m, welche aus analogen Gründen, wie bei dem früheren Fall, dem gegebenen System angehört und es enthält. Der Satz gilt aber für $m = 2, 3$, mithin ist er allgemein gültig (Einl. 1, § 39).

Satz IV. Eine Fläche F von m $(m > r)$ Dimensionen kann in dem allgemeinen Raum durch ein stetiges System von r Dimensionen von Flächen von $m - r$ Dimensionen erzeugt werden.

Wir beweisen es vor Allem für $r = 2$. Betrachten wir eine Linie L_1 von sich entsprechenden Punkten der Fläche F_m und in einer Erzeugungsfläche G_{m-1} von $m - 1$ Dimensionen eine leitende Linie G_1 und eine Erzeugende G_{m-2}, welche durch den Punkt P_0 gehen, den die Fläche G_{m-1} in der Linie L_1 hat. Man betrachte ferner in der zu G_{m-1} consecutiven

Fläche F die Leitlinie, welche unmittelbar auf die Linie G_1 folgt derart, dass ihre consecutiven Punkte in Leitlinien von F_m liegen (Satz I). Man erhält so ein stetiges System einer Dimension von Linien, welches die Linie L_1 zur leitenden hat, d. h. also eine Fläche von zwei Dimensionen, deren Leitende Leitende von F_m sind. Durch jede G_{m-2} schneidende Linie L_1 geht ein solches System; man kann daher ein System von zwei Dimensionen von Flächen G_{m-2} construiren, welches in der gegebenen Fläche liegt, sie vollständig bedeckt und derart ist, dass die sich entsprechenden Punkte in einer Fläche von zwei Dimensionen liegen. Die erzeugenden Flächen G_{m-2} des Systems sind die Erzeugenden der Flächen G_{m-1}.

Nehmen wir nun an, der Satz gelte für die Fläche F_{m-1} und für $r-1$ und eine auf die in Def. I festgesetzte Art bestimmte Fläche F_m von m Dimensionen sei gegeben. Man wähle eine Linie L_1 sich entsprechender Punkte der Erzeugungsflächen F_{m-1}, welche nach der Voraussetzung durch ein stetiges System von $r-1$ Dimensionen von Flächen von $m-r$ Dimensionen erzeugt werden können und betrachte dann eine leitende Fläche G_{r-1} von F_{m-1}, welche durch den Durchschnittspunkt von F_{m-1} mit L_1 geht und ebenso die consecutiven Flächen F_{m-1}. Alle leitenden Flächen G_{r-1}, welche sich in den Flächen F_{m-1} von $r-1$ Dimensionen längs der Linie L_1 unmittelbar folgen, bestimmen eine Fläche von r Dimensionen. Wir erhalten so ein stetiges System von r Dimensionen von Systemen F_{m-r}, welches die ganze Fläche F_m bedeckt und dessen sich entsprechende Punkte in einer Fläche von r Dimensionen liegen. Der Satz ist für $r=2$ gültig, mithin ist er es allgemein.

§ 176. *Def. I.* Wenn $m+1$ unabhängige Punkte (X_0) eines Raums X_{m-1} andre m unabhängige Punkte (A_0) zu Grenzpunkten haben (Def. II, § 10), so heisst der durch die Punkte (A_0) bestimmte Raum A_{m-1} *der Grenzraum* des Raums X_{m-1}.

Satz I. Wenn der Abstand eines Punktes von den Punkten einer Reihe (X_n) *in einem Raum* S_m *unbegrenzt abnimmt, so gehört der Punkt dem Raum an.*

Ist ein beliebiger Raum S_m gegeben und liegt ein Punkt nicht in dem Raum S_m, so hat er einen von Null verschiedenen normalen Abstand von S_m, welcher kleiner als jeder andre schiefe Abstand ist (Bem. I, § 169); sein Abstand von den Punkten einer Reihe (X_n) von S_m kann daher nicht unbegrenzt klein werden, kann mit andern Worten nicht die Grenze von (X_m) sein, ohne dass der Punkt in den Raum S_m fällt.

Bem. I. Der Beweis dieses Satzes wurde für die Grade auf andre Art geführt (Satz IV, § 10); unter Bezugnahme auf die Sätze I u. IV, § 79 hätte er auch so bewiesen werden können.

Satz II. Wenn ein Raum A_{m-1} *die Grenze eines Raums* X_{m-1} *ist, so kann jeder Punkt von* X_{m-1} *zum Grenzpunkt einen und nur einen Punkt von* A_{m-1} *haben.*

Der Satz wurde für $m=2$ bewiesen (Satz IV, § 12). Nehmen wir an, er gelte für einen Raum X_{m-2} und $A_0^{(1)} \ldots A_0^{(m)}$ seien die m unabhängigen Punkte (A_0), welche den Raum A_{m-1} bestimmen und die Grenzen der m un-

abhängigen Punkte (X_0) sind. Jeder Punkt der Seiten von $m-2$ Dimensionen der Pyramide (X_0) kann nach der Voraussetzung einen Grenzpunkt auf der entsprechenden Seite der Pyramide (A_0) haben. Der Raum X_{m-1} wird nun durch die Graden bestimmt, welche z. B. $X_0^{(m)}$ mit den Punkten der gegenüberliegenden Seite der Pyramide (X_0) verbinden. Jeder der Punkte dieser Graden kann einen einzigen Grenzpunkt auf den entsprechenden Graden der Pyramide (A_0) haben; da nun der Satz für $m=2$ gilt, so gilt er allgemein (Einl. 1, § 39).

Satz III. Wenn m unabhängige Punkte (A_0) die Grenzen ebensovieler Punkte (X_0) sind, so bestimmen die Punkte (X_0) in hinreichend kleinen Umgebungen der Punkte (A_0) einen Raum X_{m-1}.

Der Satz gilt für $m=2$ (Satz I, § 12). Nehmen wir an, er gelte für $m-1$ und es seien $A_0^{(1)} \dots A_0^{(m)}$ die unabhängigen Grenzpunkte der Punkte $X_0^{(1)} \dots X_0^{(m)}$. In hinreichend kleinen Umgebungen der Punkte (A_0) bestimmen die Punkte (X_0) zu je $m-1$ Punkten m Räume von $m-2$ Dimensionen X_{m-2}. Wären die m Punkte (X_0) nicht unabhängig, so würden sie in einem Raum X_{m-2} liegen und alle genannten Räume X_{m-2} würden zusammenfallen. Der Raum $X_0^{(1)} \dots X_0^{(m)}$ hätte nach der Voraussetzung zu Grenzräumen die durch die m Punkte (A_0) bestimmten Räume von $m-2$ Dimensionen (Def. I), welche nach der Annahme verschieden sind und $X_0^{(m)}$ könnte mithin einen Grenzpunkt $A_0^{(m)}$ haben, welcher z. B. in dem Raum $A_0^{(1)} \dots A_0^{(m-1)}$ liegt und von $A_0^{(m)}$ verschieden ist. Dies ist widersinnig (Satz VI, § 11 und Satz III, § 10).

Der Satz ist gültig für $m=2$, mithin auch allgemein (Einl. 1, § 39).

Satz IV. Ein System von Räumen S_m, welche durch m gegebene Punkte $A_0^{(1)} \dots A_0^{(m)}$ und durch jeden in einem stetigen System von n Dimensionen F_n des allgemeinen Raums liegenden Punkt X_0 bestimmt werden, ist ein stetiges System von $m+n$ Dimensionen.

Nehmen wir an, das System F_n sei eine Linie F_1. Jeder Punkt X_0 in F_1, welcher Grenzpunkt eines Punktes Y_0 ist, bestimmt einen Raum $S_m^{(x)}$, welcher die Grenze des durch Y_0 bestimmten Raums $S_m^{(y)}$ ist (Def. I) und jeder Punkt von $S_m^{(y)}$ kann zur Grenze einen und nur einen Punkt von $S_m^{(x)}$ haben (Satz II). Wenn wir nun die Reihe der Räume S_m betrachten, welche man aus den Punkten X_0 von F_1 erhält, so können wir einen Zusammenhang zwischen den Punkten der Räume S_m derart feststellen, dass jedem Punkt eines Raums ein Punkt seines consecutiven Raums entspricht, sofern der letztere als der Grenzraum des ersten betrachtet wird. Wir erhalten auf diese Art ein System einer Dimension F_1' von Punkten so, dass jeder seiner Punkte allgemeiner Grenzpunkt in dem System und dem Raum einer Punktgruppe ist. Einem Segment $(X_0 Y_0)$ von F_1 entspricht ferner ein Segment $(X_0' Y_0')$ von F_1'. Das Segment $(X_0 Y_0)$ ist aus beliebig kleinen consecutiven Segmenten zusammengesetzt (Def. I, § 36) und ihnen entsprechen in $(X_0' Y_0')$ beliebig kleine consecutive Theile. Denn wird der Abstand der sich entsprechenden Punkte Z_0, W_0 in F_1 unbegrenzt klein, so wird es nach der Construction auch der Abstand $(Z_0' W_0')$, d. h. Z_0' hat W_0' zur Grenze. Das System F_1' genügt der

Def. I, § 36 und ist daher eine Linie. Für diesen Fall ist damit der Satz bewiesen.

Unter der Voraussetzung, der Satz gelte für $n-1$, nehmen wir an, F_n werde, da es eine Fläche ist (Satz III, § 175), durch ein System von Erzeugungsflächen G_{n-1} und eine leitende Linie L_1 erzeugt. Das System $S_m G_{n-1}$ ist nach der Voraussetzung stetig; wendet man den vorigen Beweis an, so gilt der Satz auch für n; er ist aber für $n=1$ gültig, mithin ist er es allgemein.

Zus. Die Ebene, der Raum von drei u. s. w. n Dimensionen sind stetige Systeme.

Satz V. Wenn man in jeder Fläche G_m eines stetigen Systems $(G_m L_n)$ einen ihr eindeutig zugeordneten Punkt derart betrachtet, dass die Punkte in consecutiven Flächen consecutiv sind, so bestimmen alle diese Punkte eine Fläche von n Dimensionen.

Offenbar bestimmen sie ein System von n Dimensionen, denn das System von Flächen G_m in dem gegebenen System ist ein solches System. Ist $n=1$, so ist das Beweisverfahren, um zu zeigen, dass die sich entsprechenden Punkte eine Linie F_1' bilden, dasselbe wie vorher. Lässt man den Satz für $n-1$ gelten und erzeugt die Fläche L_n mittelst Flächen G_{n-1} und einer Linie L_1, so bestimmen die Punkte ein stetiges System einer Dimension von Flächen von $n-1$ Dimensionen, d. h. eine Fläche von der Ordnung n.

Zus. Die Kreiskegel und Kugelflächen, welche wir bisher betrachtet haben, sind stetige Systeme.

Bem. I. Da die Ebene, der Raum von drei u. s. w. n Dimensionen in dem allgemeinen Raum specielle Flächen sind, so heissen sie auch *lineare Flächen* oder *stetige lineare Systeme.*

Jede Fläche oder jedes stetige System kann nicht *Raum* genannt werden, wenn die Grundeigenschaften der Räume durch die geometrischen Axiome bestimmt sein müssen, die nicht lediglich formeller Natur, sondern durch die Erfahrung in dem in der Vorrede erklärten Sinne gegeben sind. Will man nur ein Wort für alle geometrischen Dinge gebrauchen, so kann man dazu das Wort Figur oder System verwenden. Will man aber das Wort Raum dazu benutzen, wie es jetzt üblich ist und bei speciellen Untersuchungen von Vortheil sein kann, wie wir den Punkt, die Grade, die Ebene Raum genannt haben, so muss man darauf aufmerksam machen, dass alsdann der ursprüngliche Begriff des Raums verloren geht, wie er durch die Axiome und die Def. II, § 2 sowie durch die abstracten Hypothesen gegeben ist, die weder diesen Axiomen noch sich selbst widersprechen. Doch kann man auch alle diese Benennungen gebrauchen, da je nach der speciellen Frage, um die es sich handelt, der eine Name sich passender als der andre erweisen kann. *Unter allgemeinem Raum verstehen wir jedoch immer das Punktesystem, welches der Def. II, § 2 genügt.*

§ 177. *Bem. I.* Um den Satz I dieses Paragraphen zu beweisen, stützen wir uns auf ein Theorem von *Weierstrass,* dass nämlich eine unendlich grosse gegebene Punktmenge in dem endlichen Gebiet von S_n stets einen Grenzpunkt L hat und es mithin nach Satz VI, § 11 in der Gruppe wenigstens eine unbegrenzte Reihe erster Art (X_n) gibt, welche den Grenzpunkt L hat. Dieser Satz kann in dem Raum S_n ebenso bewiesen werden, wie ihn *De Paolis* für den Raum S_3 nachgewiesen hat.[1]

Für die Linie nach Def. I, § 36 gelten die Sätze IV und V, § 13; mittelst des angeführten Theorems werden Satz III und ebenso die Sätze VI u. VII, § 13 in dem Raum S_n bewiesen.

1) Teoria dei gruppi geometrici, a. a. O. S. 23. Dieser Beweis stützt sich auf das Postulat über die Parallelen im *Euclid*'schen Sinn.

Wir lassen hier die Frage unerörtert — wir haben es nicht nöthig, eine solche Untersuchung zu führen —, ob das Theorem von *Weierstrass* mit unsern Axiomen I, V in Verbindung mit dem Axiom der Anm. XVI oder auch mittelst der Hypothesen V, VI und VII für eine unendlich grosse Punktmenge in dem endlichen Gebiet des allgemeinen Raums um einen Punkt bewiesen werden kann. Denn die Punktreihe (X_n) kann in diesem Fall in irgend einem Raum S_m nicht enthalten sein, weil m eine gegebene beliebige ganze Zahl der natürlichen Reihe ist.

Satz I. Jede Linie in S_n, von welcher die beiden Endpunkte eines Segments bezüglich eines Raums S_{n-1} entgegengesetzt sind, schneidet den Raum S_{n-1} in wenigstens einem Punkt.

L_1 sei die Linie, S_{n-1} der gegebene Raum und A_0, B_0 die auf entgegengesetzten Seiten von S_{n-1} liegenden Punkte.

Verbindet man einen Raum S_{n-2} von S_{n-1} mit den Punkten des Segments (A_0B_0), so erhält man ein stetiges Räumesystem in S_{n-1} (Satz III, § 176). Wir müssen annehmen, S_{n-2} habe keinen Punkt mit dem Segment (A_0B_0) gemein, weil der Satz sonst einen Beweis nicht nöthig hätte. Jeder Punkt X_0 von (A_0B_0), welcher bezüglich S_{n-1} z. B. auf derselben Seite wie A_0 liegt, bestimmt mit S_{n-2} einen Halbraum $(S_{n-2}X_0)$. Zwischen dem Halbraum $(S_{n-2}X_0)$ und dem Raum S_{n-1} existiren, X_0 mag ein Punkt sein, welcher er will, andre Halbräume $(S_{n-2}X_0')$; denn wählt man beliebig nahe an X_0 einen Punkt X_0', so kann der Halbraum $(S_{n-2}X_0')$ nicht auf der entgegengesetzten Seite von S_{n-1} liegen. Denn es müsste dann auch X_0' auf dieser Seite liegen und da das Segment (X_0X_0') den Raum S_{n-1} in einem inneren und gegebenen Punkt S_0 schneidet (Bem. § 167), so könnte sich X_0' nicht unbegrenzt dem X_0 nähern (Def. I, § 36).

Die Reihe der Punkte X_0 der Linie L_1, welche durch die Halbräume $(S_{n-2}X_0)$ gegeben ist, die das Segment (A_0B_0) in wenigstens einem Punkt schneiden und bezüglich S_{n-1} auf derselben Seite wie A_0 liegen, hat daher einen Grenzpunkt Y_0 in (A_0B_0) (Satz III, § 13 und Bem. I). Die Reihe $(S_{n-2}X_0)$ hat also einen Grenzraum, welcher eben S_{n-1} ist, und Y_0 liegt mithin in S_{n-1} (Satz I, § 176).

Satz II. Wenn eine Linie L_1 einen Punkt A_0 auf der einen Seite eines Raums S_{n-1} hat, so gibt es Segmente von L_1 auf der einen und der andern Seite von A_0 (und nur auf einer Seite, wenn A_0 das Ende von L_1 ist) derart, dass ihre Punkte bezüglich S_{n-1} auf derselben Seite wie der Punkt A_0 liegen.

Denn nehmen wir an, A_0' sei ein Punkt eines Segments (A_0A_0') von L_1 und liege bezüglich S_{n-1} auf der entgegengesetzten Seite wie A_0 (Def. I, § 36). Dieses Segment schneidet S_{n-1} in einem inneren Punkt Y_0 (Satz I). Gäbe es in (A_0Y_0) einen andern Punkt $A_0^{(2)}$ auf der entgegengesetzten Seite von S_{n-1}, so hätten wir in $(A_0A_0^{(2)})$ und mithin auch in (A_0Y_0) einen dem Raum S_{n-1} angehörenden Punkt Y_0'; wäre dies daher bei jedem beliebig kleinen Segment von (A_0A_0') in L_1 der Fall, so würde der Punkt A_0 die Grenze der Reihe (Y_0) sein, A_0 also dem Raum S_{n-1} angehören, was gegen die Voraussetzung ist (Satz I, § 176).

Satz III. Jede Fläche von p Dimensionen in S_n, von welcher zwei Punkte, welche die Enden eines Segments einer Linie der Fläche sind, bezüglich eines

Raums S_{n-1} entgegengesetzt sind, schneidet den Raum S_{n-1} im Allgemeinen in einer Linie oder einer Fläche von $p-1$ Dimensionen.

Vorerst sei $p=2$. Durch die Punkte A_0 und B_0 gehen zwei Leitlinien $L_1^{(a)}$ und $L_1^{(b)}$ der Fläche F_2 (Def. I, § 175). Einem Punkt X_0, welcher A_0 in $L_1^{(a)}$ zur Grenze hat, entspricht ein Punkt X_0', welcher B_0 in $L_1^{(b)}$ zur Grenze hat und ebenso in den andern durch die Punkte des Segments (A_0B_0) gehenden Leitlinien (Def. I, Satz I, § 175). Es gibt mithin sich entsprechende Segmente (A_0A_0'), (B_0B_0'), welche keine Punkte enthalten, die auf entgegengesetzten Seiten von S_{n-1} wie die Punkte A_0 und B_0 liegen (Satz II). Die Erzeugenden, welche die Punkte der Segmente (A_0A_0'), (B_0B_0') verbinden, schneiden daher S_{n-1} in einer Reihe von Punkten. Zwei solchen consecutiven Erzeugenden g_1 und g_1' entsprechen consecutive Durchschnittspunkte mit S_{n-1}. G_0 und G_0' seien zwei Durchschnittspunkte von g_1 und g_1' mit S_{n-1}. Hat G_0' zum entsprechenden Punkt G_0''' in g_1, der auf G_0 unmittelbar folgt, so wird (G_0G_0') unbegrenzt klein (Zus. Ax. IV und Bem. I, § 175). Folgt G_0''' nicht unmittelbar auf G_0 in g_1, so gehört G_0''', weil es die Grenze von G_0' ist und G_0' immer in S_{n-1} liegt, dem Raum S_{n-1} an (Satz I). Es gibt mithin in der Punktreihe (G_0) in S_{n-1} einen solchen Punkt G_0''', dass $(G_0'G_0''')$ kleiner als jedes gegebene Segment wird. Wir können daher als den Punkten von (A_0A_0') entsprechende Punkte G_0 diejenigen betrachten, welche consecutiven Punkten von (A_0A_0') entsprechen, und mithin entsprechen auch consecutiven Erzeugenden g_1 consecutive Punkte G_0. Wenn eine Reihe $G_0^{(n)}$ einen Grenzpunkt L hat, so gehört dieser Punkt dem Raum S_{n-1} an (Satz I). Nimmt aber $(G_0^{(n)}G_0^{(n+r)})$ unbegrenzt ab, so nimmt auch $(G_0^{(n)}G_0'^{(n+r)})$ unbegrenzt ab, wenn $G_0'^{(n+r)}$ der dem $G_0^{(n)}$ entsprechende Punkt auf der Erzeugenden g_1 ist, welche durch $G_0^{(n+r)}$ geht. Die entsprechenden Punkte in (A_0A_0') bilden daher auch eine Reihe, die einen Grenzpunkt L' hat (Bem. I), welcher in (A_0A_0') liegt (Def. I, § 36). Durch L' geht also eine Erzeugende der Fläche, welche S_{n-1} in dem Punkt L trifft. Die Punktgruppe (G_0) genügt mithin dem ersten Theil der Def. I, § 36. Dem zweiten Theil dieser Definition wird ebenfalls genügt, wenn man z. B. die durch die Segmente (A_0A_0'), und (B_0B_0') in $L_1^{(a)}$ $L_1^{(b)}$ gegebenen Erzeugenden betrachtet; mithin ist die Punktreihe G_0 in S_{n-2} eine Linie.

Man lässt den Satz für $p-1$ gelten und beweist ihn für p, er ist aber für $p=2$ gültig, mithin allgemein.[1])

Bem. Wir haben stillschweigend von diesem Beweis diejenigen etwaigen Punkte einer Linie ausgeschlossen, welche nicht Grenzpunkte von Punktgruppen der Linie sind.

Satz IV. Jeder Grenzpunkt einer Punktgruppe einer Fläche F_m von S_n liegt in der Fläche.

---

1) Diese Beweise zeigen, dass die Sätze, welche eine Linie, von welcher zwei Punkte bezüglich einer Graden in der Ebene entgegengesetzt sind, und eine Linie oder Fläche betreffen, von welcher zwei Punkte auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene in S_3 liegen, nicht so leicht nachzuweisen sind, wie man in gewissen Elementarbüchern zu glauben scheint (siehe Anm. 2, § 51 und Anm. LXXII).

Zuerst sei $m = 2$ und L_0 der Grenzpunkt einer Punktgruppe von F_m. In der Gruppe gibt es eine Reihe $(X_0^{(n)})$, welche L_0 zum Grenzpunkt hat (Satz VI, § 11). Wenn die Reihe $(X_0^{(n)})$ von einem gegebenen n an in einer Erzeugenden oder Leitlinie der Fläche liegt, alsdann ist der Satz eine Folge der Def. I, § 36. Wenn dies nicht der Fall ist, so gibt es Erzeugende $(X_1^{(n)})$, welche durch die Punkte $(X_0^{(n)})$ gehen. Da nun die Punkte $X_0^{(n)}$ in diesen Erzeugenden einander nicht entsprechen, weil sie in keiner Leitlinie liegen (Def. I, § 175), so seien $Y_1^{(n)}$ die durch sie gehenden Leitlinien und $(Y_0^{(n)})_s$ die Durchschnittspunkte der Leitlinien $Y_1^{(s)}$ mit den genannten Erzeugenden. Wenn $(X_0^{(n)} X_0^{(n+r)})$ unbegrenzt abnimmt, so geschieht dies auch mit $(Y_0^{(n)} Y_0^{(n+r)})_s$, weil die durch $X_0^{(n)}$, $X_0^{(n+r)}$ gehenden Erzeugenden sich ebenfalls unbegrenzt nähern (Def. I und Bem. I, § 175). Die Gruppen $(Y_0^{(n)})_s$ lassen also in jeder Leitlinie einen Grenzpunkt $Z_0^{(s)}$ zu. Die Punkte Z_0 liegen in einer Erzeugenden Z_1, weil die durch den Punkt $Z_0^{(1)}$ gehende Erzeugende die Leitlinien $Y_1^{(s)}$ in den Grenzpunkten der Gruppen $(Y_0^{(n)})_s$ trifft (Def. I u. Bem. I, § 175). Lässt man nun $(X_0^{(n)} X_0^{(n+r)})$ unbegrenzt abnehmen, so wird $(Z_0^{(n)} Z_0^{(n+r)})$ unbegrenzt klein, weil $(X_0^{(n)} Z_0^{(n)})$, $(X_0^{(n+r)} Z_0^{(n+r)})$ (Zus. Ax. IV) unbegrenzt abnehmen und mithin auch $(Z_0^{(n)} L)$ mit $(X_0^{(n)} L)$. Das heisst $Z_0^{(n)}$ hat zum Grenzpunkt L, welcher mithin der Erzeugenden Z_1 und also auch der Fläche angehört. Gilt der Satz für $m = s$, so beweist man ihn auf dieselbe Art für $m = s + 1$, mithin ist er allgemein gültig.[1])

§ 178. *Def. I.* Eine Linie in S_n, welche von jedem Raum S_{n-1} von S_n höchstens in m Punkten geschnitten wird, heisst eine Linie *von der Ordnung m*.

Eine Fläche von p Dimensionen, welche von einem Raum S_{n-p}, welcher nicht durch stetige eventuell in der Fläche enthaltene Systeme geht, höchstens in m Punkten getroffen wird, heisst *von der Ordnung m*.

Wir bezeichnen eine solche Fläche mit F_p^m.

Von dem Raum S_{n-p} sagen wir in dem vorigen Fall, er habe bezüglich der Fläche eine *allgemeine* Lage.

Satz I. Ein stetiges System F_p^m in S_n wird von jedem Raum S_r $(r > n - p)$ höchstens in einem stetigen System von $p + r - n$ Dimensionen und der Ordnung m geschnitten.

Nehmen wir an, $r = n - p + 1$ und ein Raum S_r schneide das gegebene System in einem System von zwei Dimensionen F_2. Nimmt man zwei Punkte A_0 und B_0 eines Liniensegments auf F_2 (Def. I, § 36 und Def. I, § 175) und lässt durch einen inneren Punkt dieses Segments einen Raum S_{r-1} gehen, so schneidet er F_2 höchstens in einer Linie (Satz III), was der Def. I widerspricht.

Für $r = n - p + 1$ ist der Satz damit bewiesen.

Unter der Annahme, der Satz gelte für $r = n - p + m - 1 < n - 1$,

1) Satz IV gilt auch für eine F_m in dem allgemeinen Raum, wenn man den Satz in Bem. I in diesem Raum gelten lässt.

wird er auf dieselbe Art für $r = n - p + m$ bewiesen und gilt mithin allgemein (Einl. 1, § 39).

Ist $r > n - p$, so trifft ein Raum S_{n-p} von S_r den Ort, welchen die Fläche F_p^m in S_r hat, in höchstens m Punkten (Def. I) und ist daher von der Ordnung m.

Satz II. Eine Linie von der Ordnung m kann nicht in einem Raum S_{m+1} enthalten sein, ohne in einem Raum von niedrigerer Dimension zu liegen.

Und eine Fläche F_p^m kann nicht in einem Raum von $p + m$ Dimensionen enthalten sein, ohne in einem Raum von niedrigerer Dimension zu liegen.

Nehmen wir an, eine Linie L_1^m sei in einem Raum von $m + 1$ Dimensionen enthalten. Sie wird von jedem Raum S_m in m Punkten geschnitten. Wenn aber ein Punkt von L_1^m ausserhalb S_m existirt, so geht durch die ersten m Punkte und den neuen Punkt von L_1^m ein Raum S'_m, welcher die ganze Linie L_1^m enthält (Def. II).

Ist eine Fläche F_p^m in dem Raum S_{p+m} enthalten, so muss ein Raum S_m diese Fläche in m Punkten und nur in diesen Punkten treffen (Def. I). Wählt man einen andern Punkt von F_p^m, so geht durch ihn und die ersten m Punkte ein andrer Raum S'_m, welcher die Fläche in $m + 1$ Punkten trifft, was widersinnig ist (Def. I); es sei denn S_m enthalte ein stetiges in F_p^m enthaltendes Punktesystem. Und weil nach Satz II, § 160 das System von Räumen S_m, welche durch einen Raum S_{m-1} in S_{m+p} gehen, p Dimensionen hat und man dieses System wenigstens zum Theil durch Verbindung der Punkte von F_p^m mit den m gegebenen Punkten erhält, so würde, wenn jeder der so erhaltenen Räume ein stetiges Punktesystem enthielte, F_p^m eine die Zahl p übersteigende Anzahl von Dimensionen haben, was ebenfalls widersinnig ist. Mithin ist die Fläche in einem Raum S_{p+m-1} enthalten (Def. I).

Zus. Es gibt nur einen Raum, der eine Fläche zweiter Ordnung F_p^2 enthält, wenn sie nicht in Räumen niedrigerer Dimension enthalten ist.[1])

16.

Kegelflächen in einem Raum von *n* Dimensionen, welche einen Punkt zur Spitze haben.

§ 179. *Def. I.* Es sei ein Raum S_{n-1}, ein Punkt V_0 ausserhalb S_{n-1} und in dem Raum S_{n-1} ein stetiges System (Linie oder Fläche) F_p^m von p Dimensionen und der Ordnung m gegeben.

---

1) Hat man die Definition der Linie von der Ordnung m gegeben (Def. I), so kann man, um die Fläche von p Dimensionen und der Ordnung m zu definiren, so verfahren, wie auf S. 6 unsrer Abhandlung „Behandlung u. s. w. Math. Ann. Bd. XIX" angegeben ist und festsetzen, dass die Fläche in S_n von zwei Dimensionen und der Ordnung m ist, wenn sie von jedem Raum S_{n-1} höchstens in einer Linie von der Ordnung m geschnitten wird; und allgemein, dass die Fläche von p Dimensionen und der Ordnung m ist, wenn sie von einem beliebigen Raum S_{n-1} höchstens in einer Fläche von $p - 1$ Dimensionen und der Ordnung m geschnitten wird. Man beweist alsdann den Satz I und die Eigenschaft in Def. I bezüglich eines Raums S_{n-p}.

Die Figur, welche von allen Graden gebildet wird, die den Punkt V_0 mit den Punkten des Systems F_p^m verbinden, heisst *Kegelfläche oder Kegel erster Art* und wird mit dem Symbol $V_0 - F_p^m$ bezeichnet. V_0 ist *die Spitze* und F_p^m *das leitende System* des Kegels. Die Graden, welche die Spitze mit den Punkten des leitenden Systems verbinden, heissen *die Erzeugenden* des Kegels.

Satz I. Die Kegelfläche $V_0 - F_p^m$ von $p+1$ Dimensionen und der Ordnung m wird durch einen Raum S_s, der durch die Spitze V_0 geht, im Allgemeinen höchstens in einem Kegel $V_0 - F^m_{s+p-n}$ von $s+p-n+1$ Dimensionen und der Ordnung m, welcher sich auch auf ein System von m Graden reduciren kann, geschnitten.

Jeder durch die Spitze gehende Raum S_{n-p} schneidet den Raum S_{n-1} in einem Raum S_{n-p-1} (Def. I und Satz II, § 158), welcher mit F_p^m höchstens m Punkte gemein hat (Def. I, § 178). Diese Punkte mit der Spitze verbunden geben m Erzeugende des Kegels, die in dem Raum S_{n-p} liegen. Jeder Raum S_{s-1} von S_{n-1} schneidet F_p^m im Allgemeinen höchstens in einer Fläche F_{s+p-n} von $s+p-n$ Dimensionen (Satz I, § 178). Verbindet man die Spitze V_0 des Kegels $V_0 - F_p^m$ mit dem Raum S_{s-1}, so erhält man einen Raum S_s, welcher diesen Kegel in einem Kegel $V_0 - F^m_{s+p-n}$ von $s+p-n+1$ Dimensionen und der Ordnung m schneidet.

Ist $s = n-1$, so hat der Durchschnittskegel p Dimensionen; ist $p = n-2$, so trifft eine durch die Spitze gehende Ebene den Kegel $V_0 - F^m_{p-1}$ höchstens in m Graden.

Satz II. Ein beliebiger nicht durch die Spitze gehender Raum S_{n-1} schneidet den Kegel $V_0 - F_p^m$ in einem System $F_p'^m$ von der Ordnung m.

Denn der Raum S_{n-1} trifft alle Erzeugende des Kegels in einem Punkt und schneidet den Kegel daher in einem System von p Dimensionen und jeder Raum S_{n-p}, welcher durch die Spitze geht und den Kegel in m Erzeugenden trifft, schneidet den Raum S_{n-1} in einem Raum S_{n-p-1}, welcher mit der Fläche höchstens m Punkte gemein hat.

Satz III. Ein Raum S_s schneidet im Allgemeinen den Kegel $V_0 - F_p^m$ höchstens in einer Fläche von $s+p-n+1$ Dimensionen und der Ordnung m.

Verbindet man den Raum S_s mit der Spitze V_0, so erhält man einen Raum S_{s+1}, welcher den Kegel $V_0 - F_p^m$ im Allgemeinen höchstens in einem Kegel $V_0 - F^m_{s+p-n+1}$ schneidet (Satz I). Dieser letzte Kegel wird von dem Raum S_s in einer Fläche $F_{s+p-n+1}$ von der Ordnung m getroffen (Satz II).

Satz IV. Der Kegel $V_0 - F_p^m$ kann in einem Raum von $p+1$, $p+2$, u. s. w. $p+m$ Dimensionen enthalten sein ohne in einem Raum von weniger Dimensionen enthalten zu sein (Satz II, § 178).

§ 180. *Bem. I.* Ist die Fläche F_p^m des Raums S_{n-1} eine Fläche zweiter Ordnung oder eine Kugel S^2_{n-2}, so ist der Kegel zweiter Ordnung.

Man findet in diesem Fall, dass jede durch die Spitze gehende Ebene ihn in nicht mehr als zwei Erzeugenden treffen kann und dass jeder durch die Spitze gehende Raum von drei, vier u. s. w. $n-1$ Dimensionen ihn im Allgemeinen höchstens in Kegeln zweiter Ordnung bezüglich von zwei, drei, u. s. w. $n-2$ Dimensionen schneidet. Jede Grade trifft

ihn höchstens in zwei Punkten, eine Ebene höchstens in Kurven zweiter Ordnung, u. s. w. ein Raum von $n - 2$ Dimensionen höchstens in einer Fläche zweiter Ordnung bezüglich von zwei, drei, u. s. w. $n - 2$ Dimensionen.

Def. I. Verbindet man eine Tangente, eine Ebene, u. s. w., einen Raum von $n - 2$ Dimensionen, welcher die Fläche S^2_{n-2} in einem Punkt berührt, mit dem Punkt V_0, so erhält man eine Ebene, einen Raum von drei, u. s. w., $n - 1$ Dimensionen, welcher den Kegel $V_0 - S^2_{n-2}$ längs einer seiner Erzeugenden *berührt.*

Wie es in einem Punkt von S^2_{n-2} unendlich viele Tangenten gibt, welche sämmtlich in dem Berührungsraum von $n - 2$ Dimensionen in diesem Punkt liegen, so liegen alle längs einer Erzeugenden des Kegels $V_0 - S^2_{n-2}$ berührenden Ebenen in dem Raum von $n - 1$ Dimensionen, welcher den Kegel längs dieser Erzeugenden berührt.

Def. II. Wenn die Kugel S^2_{n-2} im Unendlichgrossen liegt, so heisst der Kegel *Kreiskegel.* Die Grade, welche die Spitze mit dem Centrum der Kugel verbindet, ist die *Axe* des Kegels.

Satz I. Die Erzeugenden des Kreiskegels bilden denselben Winkel mit der Axe.

Denn zwei gleiche Abstände im Unendlichgrossen geben gleiche Winkel in dem endlichen Gebiet.

Satz II. n von einem Punkt V_0 ausgehende Strahlen bestimmen einen Kreiskegel von $n - 1$ Dimensionen.

Denn die Kugel $S^2_{n-2\infty}$ wird durch n Punkte bestimmt.

Satz III. Jeder durch die Spitze gehende Raum von $n - 1$ Dimensionen schneidet den Kegel $V_0 - S^2_{n-2\infty}$ in höchstens einem Kreiskegel von $n - 2$ Dimensionen mit derselben Axe.

Satz IV. Jeder auf die Axe senkrechte Raum von $n - 1$ Dimensionen schneidet den Kreiskegel in einer Kugel von $n - 2$ Dimensionen, deren Centrum auf der Axe liegt.

Beweis analog wie zu Satz VIII, § 99.

Zus. Eine Ebene oder ein Raum, welche senkrecht auf der Axe stehen, schneiden den Kreiskegel in einer Kreislinie oder einer Kugel.

Satz V. Wenn die leitende Fläche einer Kegelfläche $V_0 - S^2_{n-2}$ eine Kugelfläche ist, so schneidet jeder Raum, welcher dem Raum der Leitfläche parallel ist, den Kegel in einer Kugelfläche.

Denn S'_{n-1} sei der Raum, welcher dem Raum der Leitfläche parallel ist. Wir wollen die Grade, welche V_0 mit dem Centrum C_0 der Leitkugel S^2_{n-2} verbindet, bis zu ihrem Durchschnitt C'_0 mit S'_{n-1} ziehen. Dasselbe thun wir mit zwei Punkten A_0, B_0 von S_{n-2} und erhalten so zwei sich entsprechende Punkte A'_0, B'_0 in S'_{n-1}. Man findet leicht, dass $(C'_0A'_0) = (C'_0B'_0)$.

Def. III. Wenn die Spitze V_0 des Kegels $V_0 - F^m_p$ ins Unendlichgrosse fällt, so heisst die Kegelfläche *Cylinderfläche.* Falls dann F^m_p eine Kugel in einem auf die Richtung der Spitze senkrechten Raum S_{n-1} ist, heisst der Cylinder *Kreiscylinder.*

17.

Kegel und Cylinder, die einen Raum S_m zur Spitze haben.

§ 181. *Def. I.* Wir wollen einen zu einem Raum S_m dualen Raum S_{n-m-1} betrachten, welcher S_m nicht schneidet.

In S_{n-m-1} sei eine Fläche F_p^r gegeben und es sei $p < n - m - 1$.

Die Räume von $m + 1$ Dimensionen, welche den Raum S_m mit den Punkten der Fläche F_p^r verbinden, bilden *eine Kegelfläche oder einen Kegel* von der r^{ten} Ordnung, welcher $p + m + 1$ Dimensionen hat; S_m ist *der Spitzenraum*, F_p^r *die Leitfläche* des Kegels. Die Räume, welche den Raum S_m des Kegels mit den Punkten der Leitfläche verbinden, heissen *die erzeugenden Räume* des Kegels.

Satz I. Ein durch den Spitzenraum S_m gehender Raum S_{m+s} schneidet den Kegel $S_m - F_p^r$ im Allgemeinen höchstens in einem Kegel von $s + p - n + 2m + + 1$ Dimensionen mit der Spitze S_m und von der Ordnung m.

Denn ein Raum S_{n-m-2} von S_{n-m-1} schneidet F_p^m höchstens in einer Fläche F_{p-1}^r; verbindet man daher den Raum S_{n-m-2} mit S_m, so erhält man einen Raum S_{n-1}, welcher den Kegel $S_m - F_p^m$ höchstens in einem Kegel $S_m - F_{p-1}^r$ trifft. Betrachtet man einen Raum S_{s-1} von S_{n-m-1}, so schneidet dieser F_p^m im Allgemeinen höchstens in einer Fläche von der Ordnung r und von $s + p - n + m$ Dimensionen. Mithin trifft ein durch den Raum S_m gehender Raum S_{s+m} den Kegel $S_m - F_p^r$ höchstens in einem Kegel $S_m - - F_{s+p-n+m}^r$ von $s + p - n + 2m + 1$ Dimensionen.

Zus. Die durch den Spitzenraum gehenden Räume $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_{n-m}$ schneiden im Allgemeinen den Kegel $S_m - F_p^m$ in einer Fläche von bezüglich $p + m, p + m - 1, \ldots, p + 1$ Dimensionen von der Ordnung m.

§ 182. *Def. I.* Ist die Fläche F_p^r in dem Raum S_{m-n-1} eine Kugel S_{n-m-2}^2, so ist der Kegel $S_m - S_{n-m-2}^2$ von der zweiten Ordnung und hat $n - 1$ Dimensionen.

Jede Tangente, jede Ebene und jeder Raum, welche S_{n-m-2}^2 in einem Punkt berühren, geben mit dem Raum S_m verbunden Räume von $m + 2$, $m + 3$ u. s. w. Dimensionen, welche wir *Tangenten* an den Kegel längs eines Erzeugungsraums nennen.

Satz I. Ein Kegel $S_m - S_{n-m-2}^2$ wird von jedem Raum S'_{n-m-1}, welcher dem Raum der Leitfläche parallel von der 1ten Art ist, in einer Kugel geschnitten.

Der Raum S'_{n-m-1} und der Raum S_{n-m-1} der Leitfläche sind parallel von der ersten Art und liegen desshalb in einem Raum S_{n-m}, welcher S_m in einem Punkt V_0 und die Fläche $S_m - S_{n-m-2}^2$ in einem Kegel $V_0 - S_{n-m-2}^2$ schneidet; damit u. s. w.

Def. II. Wenn der Raum S_{n-m-1} im Unendlichgrossen liegt und zu dem Raum $S_{m-1\infty}$ von S_m polar ist, so heisst der Kegel *Kreiskegel*. **Der Raum**

S_{m+1}, welcher den Raum S_m mit dem Centrum der Kugel verbindet, ist *der Axenraum* des Kegels.

Satz II. Die Erzeugungsräume des Kegels $S_m - S^2_{n-m-2\infty}$ machen denselben Winkel mit dem Axenraum.

Denn der Abstand zweier Punkte von $S_{n-m-1\infty}$ misst den Winkel der durch S_m gehenden beiden Räume S_{m+1}, weil man durch Verbindung der beiden Punkte mit einem Punkt von S_m eine auf S_m senkrechte Ebene erhält (Bem. II, § 169).

Satz III. Ein auf dem Spitzenraum S_m senkrechter Raum S_{n-m} schneidet den Kegel $V_0 - S^2_{n-m-2\infty}$ in einem Kreiskegel von $n - m - 1$ Dimensionen, dessen Spitze in dem Durchschnittspunkt der beiden Räume S_{n-m}, S_m liegt.

Denn der Raum S_{n-m} schneidet S_m in einem Punkt V_0 und die Erzeugungsräume in Graden, welche durch V_0 gehen. Die Graden von S_{n-m} stehen auf dem Raum S_m senkrecht, weil ihre unendlich fernen Räume polar sind und mithin messen zwei solche Grade den durch die beiden Erzeugungsräume, deren Durchschnitte sie sind, gebildeten Winkel (Bem. II, § 169).

Die genannten Graden haben ihre unendlich fernen Punkte auf der Durchschnittskugel des unendlich fernen Raums von S_{n-m} mit der Kugel $S^2_{n-m-2\infty}$.

Satz IV. Ein auf dem Axenraum senkrechter Raum S_{n-m-1}, welcher den Axenraum in nur einem Punkt A_0 trifft, schneidet den Kegel $S_m - S^2_{n-m-2\infty}$ in einer Kugel.

Denn wir wollen durch den Raum S_{n-m-1} einen auf dem Raum S_m senkrechten Raum S_{n-m} legen. Der Polarraum $S_{n-m-1\infty}$ des Raums $S_{m-1\infty}$ von S_m geht durch den unendlich fernen Raum $S_{n-m-2\infty}$ von S_{n-m-1}, während $S_{n-m-2\infty}$ polar zu $S_{m\infty}$ des Axenraums ist. Der durch S_{n-m-1} gelegte Raum S_{n-m} hat den Polarraum $S_{n-m-1\infty}$ von $S_{m-1\infty}$ zum unendlich fernen Raum. Der Raum S_{n-m} schneidet den Kegel in einem Kreiskegel von $n - m - 1$ Dimensionen mit der Spitze V_0 und der Axe V_0A_0 (Satz III), welcher von dem auf der Axe V_0A_0 senkrechten Raum S_{n-m-1} in dem Raum S_{n-m} in einer Kugel von $n - m - 2$ Dimensionen geschnitten wird (Satz IV, § 180).

Def. III. Dieser Schnitt heisst *Normalschnitt* des Kegels $S_m - S^2_{n-m-2\infty}$.

Satz V. Die Räume, welche einen Raum S_m mit den Punkten einer Kugel von $n - m - 2$ Dimensionen eines Raums S_{n-m-1} verbinden, welcher S_m nicht trifft und welcher auf dem S_m mit dem Centrum der Kugel verbindenden Raume senkrecht steht, bilden einen Kreiskegel mit der Spitze S_m.

Der Raum $S_{m\infty}$ des Axenraums ist polar zu dem Raum $S_{n-m-2\infty}$ von S_{n-m-1}. Der Raum $S_{m-1\infty}$ von S_m ist in $S_{m\infty}$ enthalten und hat daher seinen Polarraum $S_{n-m-1\infty}$, welcher durch $S_{n-m-2\infty}$ geht; wir können daher durch S_{n-m-1} einen Raum S_{n-m} senkrecht auf S_m legen, welcher S_m in einem Punkt A_0 schneidet, durch welchen das von dem Centrum C_0 der Kugel S^2_{n-m-2} auf dem Raum S_m gefällte Loth geht. Wenn X_0 ein beliebiger Punkt dieser Kugel ist, so messen die Strahlen (X_0A_0), (C_0A_0) den Winkel der beiden Räume (S_mX_0), (S_mC_0), welcher für jedes beliebige X_0 constant ist, weil die

Dreiecke $A_0 C_0 X_0$ bei C_0 rechtwinklig sind, die Katheten gleich haben und mithin gleich sind. Die so erzeugte Fläche hat daher in dem Polarraum $S_{n-m-1\infty}$ von $S_{m-1\infty}$ eine Kugel S^2_{n-m-2x}, deren Centrum in dem Durchschnittspunkt mit der Axenebene liegt. Damit ist der Satz bewiesen.

Def. IV. Fällt in dem letzten Fall der Raum S_m ins Unendlichgrosse, so heisst die Kegelfläche oder der Kegel *Cylinderfläche* oder *Cylinder*.

18.

Andre Eigenschaften der Kugel S^2_{n-1}.

§ 183. *Satz I. Durch einen Punkt des äusseren Theils der Kugel S^2_{n-1} lassen sich unendlich viele Tangenten ziehen, welche einen Kreiskegel von $n-1$ Dimensionen bilden, dessen Spitze in dem gegebenen Punkt liegt und dessen Axe der durch den gegebenen Punkt gehende Durchmesser ist.*

Beweis analog wie zu Satz VIII, § 101.

Zus. I. Die Berührungspunkte der von einem Punkt an die Kugelfläche S^2_{n-1} gezogenen Tangenten liegen in einer Kugelfläche S^2_{n-2}, deren Raum auf dem durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmesser senkrecht steht.

Beweis analog wie bei Zus. I, Satz VIII, § 101.

Def. I. Diese Fläche S^2_{n-2} heisst die *Berührungskugel* des die Fläche S^2_{n-1} berührenden Kegels, dessen Spitze in dem gegebenen Punkt liegt. Eine Tangente, Ebene oder Raum, welche die Fläche S^2_{n-1} berühren, geben eine Ebene oder einen Raum, welche den Kegel berühren.

Zus. II. Die Tangentialebenen und -Räume an den eine Kugelfläche S^2_{n-1} in einem Punkt berührenden Kegel berühren S^2_{n-1} in den Berührungspunkten der Kugelfläche S^2_{n-2}.

Bem. I. Wir nehmen an, man könne von einem äusseren Raum S_{n-3} von S_{n-1} an eine Kugel S^2_{n-2} zwei Berührungsräume von $n-2$ Dimensionen ziehen, welche gleiche Winkel mit dem durch S_{n-3} gehenden Diametralraum bilden, da diese Eigenschaft für $n=3$ gilt (Zus. III, Satz VIII, § 101).

Zus. III. Die Berührungsräume S_{n-2}, welche sich von einem äusseren Raum S_{n-3} an eine Kugelfläche S^2_{n-1} ziehen lassen, bilden einen Kreiskegel von $n-1$ Dimensionen, dessen Axe der durch den Raum S_{n-3} gehende Diametralraum von $n-2$ Dimensionen ist.

Denn wir können durch den Diametralraum, welcher den Raum S_{n-3} mit dem Centrum der Fläche S^2_{n-1} verbindet, einen Raum von $n-1$ Dimensionen ziehen, welcher S^2_{n-1} in einer Kugel von $n-2$ Dimensionen schneidet. An diese Kugel lassen sich von S_{n-3} zwei Berührungsräume ziehen, welche denselben Winkel mit dem genannten Diametralraum bilden (Bem. I).

Zus. IV. Die Berührungspunkte der von einem Raum S_{n-3} an die Fläche S^2_{n-1} gezogenen Tangentialräume S_{n-1} liegen in einer Kreislinie, deren Ebene auf dem durch S_{n-3} gehenden Diametralraum senkrecht steht.

Beweis analog wie bei Zus. I, Satz VIII, § 101.

Def. III. Diese Kreislinie heisst *die Berührungslinie* des Kegels.

Zus. V. Die Tangentialräume eines Berührungskegels, die einen Raum S_{n-3} zur Spitze haben, berühren auch die Kugelfläche S^2_{n-1} in den Punkten der Berührungskreislinie von S^2_{n-1}.

Denn eine Tangente der Berührungskreislinie eines Tangentialkegels erster Art gibt einen Raum, welcher den Kegel berührt.

Satz II. Von einem Raum S_{n-2} von S_n lassen sich zwei Berührungsräume von $n-1$ Dimensionen an eine Kugel S^2_{n-1} ziehen.

An den Berührungskreiskegel, welcher einen Raum S_{n-3} zur Spitze hat, lassen sich von einem durch S_{n-3} gehenden Raum S_{n-2} zwei Berührungsräume legen, weil man von einem Punkt zwei Tangenten an die Berührungkreislinie des genannten Kegels ziehen kann (Satz IV, § 60) und die Berührungsräume von $n-1$ Dimensionen sind auch Tangenten an die Kugel. Der Satz gilt aber für $n=3$, mithin auch allgemein.

Bem. II. Da die Annahme in Bem. I sich als richtig erwiesen hat, so gilt auch Zus. III, Satz I, welchen wir aus ihr abgeleitet haben.

Satz III. Die Berührungsräume S_{m+1}, welche sich von einem äusseren Raum S_m an die Kugel S^2_{n-1} ziehen lassen, bilden einen Kreiskegel, welcher den Raum S_m zur Spitze und den durch S_m gehenden Diametralraum zur Axe hat.

Wir legen durch den Diametralraum S_{m+1}, welcher durch S_m geht, einen Raum S_{m+2}, der die Kugel S^2_{n-1} in einer Kugel S^2_{m+1} schneidet. An S^2_{m+1} lassen sich aber von S_m zwei Berührungsräume S_{m+1} ziehen, welche denselben Winkel mit dem Axenraum bilden.

Zus. Die Berührungspunkte der von einem Raum S_m an die Kugel S^2_{n-1} gezogenen Tangentialräume von $m+1$ Dimensionen liegen in einer Kugel S^2_{n-m-2}, deren Raum S_{n-m-1} auf dem durch S_m gehenden Diametralraum S_{m+1} senkrecht steht.

19.

Schnitte von zwei, drei, u. s. w., n Kugeln von $n-1$ Dimensionen in S_n.

§ 184. *Def. I.* Wenn zwei Kugelflächen von $n-1$ Dimensionen denselben Berührungsraum S_{n-1} in einem gemeinschaftlichen Punkt A_0 haben, so sagt man, *sie berührten sich* im Punkt A_0. Liegen sie auf derselben Seite des Tangentialraums, so berühren sie sich *von innen*, andernfalls *von aussen*.

In dem ersten Fall ist die Kugel, welche den kleineren Radius hat, in der andern enthalten.

Satz I. Haben zwei Kugeln S^2_{n-1}, S'^2_{n-1} in S_n einen nicht auf der Graden, welche durch ihre Mittelpunkte geht, (der Centralaxe) gelegenen Punkt gemein, so haben die beiden Kugeln eine Kugel von $n-2$ Dimensionen gemein, deren Centrum auf der Centralaxe liegt und deren Raum auf dieser Axe senkrecht steht.

Beweis analog wie zu Satz I, § 102.

Bem. I. Es gilt Satz II, § 102 mit ähnlichem Beweis.

Satz II. m Kugelflächen von $n-1$ Dimensionen von S_n, welche nicht die nämliche Kugelfläche von $n-2$, $n-3$, ..., $n-m+1$ Dimensionen enthalten

oder nicht in dem nämlichen Punkt einen gemeinschaftlichen Tangentialraum von $n-1$, $n-2$, ..., $n-m+2$ Dimensionen haben, schneiden sich in einer Kugel von $n-m$ Dimensionen, in einem Punkt oder in keinem Punkt.

In dem ersten Fall steht der Raum S_{n-m+1} der Durchschnittskugel senkrecht auf dem Raum S_{m-1}, welcher die Centren der m Kugeln verbindet; in dem zweiten Fall haben sie einen Tangentialraum von $n-m+1$ Dimensionen gemein.

$K^{(1)}_{n-1}$, $K^{(2)}_{n-1}$, ..., $K^{(m)}_{n-1}$ seien die m gegebenen Kugeln. Wenn sich die Flächen $K^{(1)}_{n-1}$, $K^{(2)}_{n-1}$ in einer Fläche $K^{(12)}_{n-2}$ und ebenso $K^{(2)}_{n-1}$, $K^{(3)}_{n-1}$ u. s. w. $K^{(m-1)}_{n-1}$, $K^{(m)}_{n-1}$ in einer Fläche $K^{(23)}_{n-2}$ u. s. w. $K^{(m-1m)}_{n-2}$ schneiden, so stehen die Räume von $n-1$ Dimensionen $S^{(12)}_{n-1}$, $S^{(23)}_{n-1}$ u. s. w. dieser Kugeln auf den Graden senkrecht, welche die Centren 1, 2; 2, 3; u. s. w.; $m-1$, m verbinden. Sie treffen sich daher in einem Raum S_{n-m+1}, welcher auf dem durch die m Mittelpunkte bestimmten Raum S_{m-1} senkrecht steht. Schneidet S_{n-m+1} die Kugel $K^{(12)}_{n-2}$ in einer Kugel K^{2}_{n-m}, so liegt diese in den beiden Kugeln $K^{(1)}_{n-1}$, $K^{(2)}_{n-1}$. Die Kugel $K^{(23)}_{n-2}$ gehört aber $K^{(2)}_{n-1}$ an und da der Raum S_{n-m+1} und die Kugel $K^{(23)}_{n-2}$ in dem Raum $S^{(23)}_{n-1}$ liegen, so wird mithin $K^{(23)}_{n-2}$ durch den Raum S_{n-m+1} in einer Kugel K'^{2}_{n-m} geschnitten, welche auf $K^{(2)}_{n-1}$ liegt. Daher fällt die Kugel K'^{2}_{n-m} mit K^{2}_{n-m} zusammen. Wie $K^{(23)}_{n-2}$ zu $K^{(3)}_{n-1}$ gehört, so gehört auch K^{2}_{n-m} zu $K^{(3)}_{n-1}$. Ebenso wird bewiesen, dass K^{2}_{n-m} zu allen übrigen Kugeln gehört.

Hätten die m gegebenen Kugelflächen einen andern Punkt ausserhalb der genannten Kugel gemein, so würde der durch den Punkt und den Raum der Kugel bestimmte Raum die m Flächen in einer gemeinschaftlichen Kugelfläche von $n-m+1$ Dimensionen schneiden. Trifft S_{n-m+1} keine der Flächen, so haben die m Flächen offenbar keinen Punkt gemein.

Falls der den Räumen der Kugeln $K^{(12)}_{n-2}$, $K^{(23)}_{n-2}$, u. s. w. gemeinschaftliche Raum eine dieser Kugeln berührt, haben die m Flächen $K^{(1)}_{n-1}$, $K^{(2)}_{n-1}$, ..., $K^{(m)}_{n-1}$ diesen Raum als Tangentialraum gemein.

Zus. n Kugelflächen von $n-1$ Dimensionen des Raums S_n, welche weder eine Kugelfläche noch eine Kreislinie oder welche nicht in dem nämlichen Punkt einen Tangentialraum gemein haben, schneiden sich entweder in zwei bezüglich des Raums der Centren (des Centralraums) symmetrischen Punkten oder in zwei zusammenfallenden Punkten oder in keinem Punkt.

In dem zweiten Fall haben sie eine auf den Raum der Centren senkrechte Tangente gemein.

Beweis analog wie zu Satz III, § 102.

20.

Stetige Systeme unveränderlicher Figuren in S_n.

§ 185. *Kreissystem um eine Ebene.*

Def. I. Aus den stetigen Systemen unveränderlicher Figuren in dem Raum im Unendlichgrossen erhält man stetige Systeme unveränderlicher Figuren um einen Punkt P_0 des Raums S_n, welche wir *Kugelsysteme* und P_0 ihr *Centrum* nennen.

Def. II. Ist eine Grade gegeben, so liefern die Kugelsysteme um ihren unendlich fernen Punkt stetige Systeme von Figuren um die Grade, welche *Kegelsysteme* um die Grade als *Axe* heissen.

Fährt man so fort, so kann man sagen: Ist ein Raum S_m gegeben, so liefern die Kreiskegelsysteme, die den unendlich fernen Raum von S_m zur Axe haben, stetige Systeme unveränderlicher Figuren um den Raum S_m, welche *Kreiskegelsysteme* um den Raum S_m als *Axe* heissen.

Def. III. Aus einem System unveränderlicher Segmente auf einer Graden $r_{1\infty}$ erhält man um einen Raum S_{n-2}, dessen unendlich ferner Raum zu $r_{1\infty}$ polar ist, ein System unveränderlicher Keile von $n-1$ Dimensionen, welches wir *Kreissystem* von Keilen von $n-1$ Dimensionen nennen. Der Raum S_{n-1} ist seine *Axe* und die Keile sind *die Keile an der Axe.*

Satz I. Der Axenraum eines Kreissystems von Keilen entspricht sich selbst.

Da der Satz für $n = 2, 3$ gilt, so nimmt man an er gelte für $n-1$ und beweist ihn für n.

Bem. I. Es gelten mit analogen Beweisen die Sätze III, IV, V, VI, VII, die Def. III und Satz VIII, § 103.

Satz II. Die Figuren eines Kreissystems sind congruent.

Betrachtet man die Axe des Systems als einer Figur zugehörig, so entspricht sie in allen Figuren sich selbst.

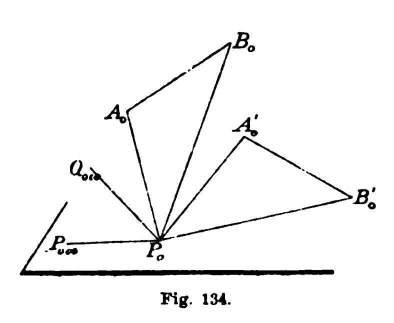


Fig. 134.

Wenn $(A_0 B_0)$, $(A_0' B_0')$ zwei sich entsprechende Segmente sind und $n-2$ Punkte $P_{0\infty}$, $\ldots$, $Q_{0\infty}$ des Axenraums gegeben sind, so haben die Vielkante $P_0 \cdot P_{0\infty} \ldots Q_{0\infty}\, A_0 B_0$, $P_0 \cdot P_{0\infty} \ldots Q_{0\infty}\, A_0' B_0'$ denselben Sinn, weil die beiden Keile $P_{0\infty} \ldots Q_{0\infty}\, \widehat{A_0 P_0 B_0}$, $P_{0\infty} \ldots$ $\ldots Q_{0\infty}\, \widehat{A_0' P_0 B_0'}$ gleichgerichtet sind (Satz IV, § 103 und Bem. I). Da mithin zwei sich entsprechende Vielkante congruent sind, so sind es auch die beiden Figuren (Bem. I, § 173) und also auch ohne die Axe des Systems (Fig. 134).

Satz III. Die Graden, Ebenen und Räume eines Kreissystems, welche sich entsprechen, bilden denselben Winkel mit der Axe.

Beweis analog wie zu Satz X, § 103.

Bem. II. Es gelten Zus. I, Satz X und die Sätze XI, XII, § 103 mit denselben Beweisen.

Satz IV. Zwei bezüglich eines Raums S_{n-2} in einem Raum von $n-1$ Dimensionen symmetrische Figuren gehören in S_n einem Kreissystem um den Raum S_{n-2} als Axe an.

Beweis analog wie zu Satz XIII, § 103.

§ 186. *Parallelsystem.*

Def. I. Liegt die Axe A_{n-2} eines Kreissystems von Keilen im Unendlichgrossen, so sind alle durch sie gehenden Räume S_{n-1} parallel und wählt man eine auf die Richtung dieser Räume senkrechte Grade, so dienen ihre Segmente den durch die Räume bestimmten Theilen des Büschels zum Mass (Bem. I, § 169).

Betrachtet man auf der Senkrechten ein stetiges System unveränderlicher Segmente, so erhält man ein stetiges System von Theilen des Büschels, welches *Parallelsystem* heisst. Die Richtung der Räume des Systems ist die *Richtung* des Systems.

Einen Theil eines Büschels paralleler Räume nennen wir *Zone* des Büschels.

Bem. I. Es gelten die Sätze I, II, III, § 104 der dem Satz IV entsprechende Satz und Def. II desselben Paragraphen.

Satz I. Die Figuren eines Parallelsystems sind congruent.

Beweis analog wie zu Satz V, § 104.

§ 187. *Allgemeines System einer Dimension.*

Satz I. Ist eine Figur und eine Linie l in dem Raum S_n gegeben, so gehört die Figur einem stetigen System einer Dimension von unveränderlichen Figuren an, von welchem die gegebene Linie eine Linie sich entsprechender Punkte ist.

Beweis analog wie zu Satz II, § 65.

Satz II. Zwei Figuren eines stetigen Systems einer Dimension von unveränderlichen Figuren sind congruent.

Beweis analog wie zu Satz II, § 105.

Zus. Zwei symmetrische Figuren von S_n können keinem stetigen System unveränderlicher Figuren in S_n angehören.

Bem. Hier gilt die Bem., § 65 über stetige Systeme unveränderlicher Figuren von mehreren Dimensionen.

21.

Anwendung der Sprache der Bewegung auf die Systeme unveränderlicher Figuren.

§ 188. *Bem. I.* Körper, welche sich thatsächlich bewegen, sehen wir nur in unsrer wahrnehmbaren äusseren Umgebung (Emp. Bem. § 1 und § 37); mithin ist die Bewegung in dem Raum S_n rein abstract, wie dies auch der Raum ist; d. h. es gibt für unsre Sinne keinen äusseren entsprechenden Gegenstand, der die seine Existenz uns vor Augen führte.

Nach dem Princip in § 18 der Einl. können wir uns aber denken, immer abstract, der allgemeine Raum und mithin auch S_n sei gegeben und können daher die Sprache der Bewegung, wie sie in § 67 der Einl. festgesetzt wurde, auf ihn anwenden.

Mittelst dieser Sprache können wir den Sätzen über die stetigen Systeme eine andre Fassung geben, auch wenn die Linien sich entsprechender Punkte nicht alle Eigenschaften der Anschauungslinien besitzen (Emp. Bm., Def. I und II, § 36), vorausgesetzt jedoch, dass der Sprache der Bewegung nicht die ganze Ausdehnung, wie in § 67 der Einl. gegeben wird, sondern dass sie nur auf die stetigen Systeme angewendet wird.

Wenn man sagt: eine Figur könne sich frei in S_n bewegen und dabei unverändert bleiben, so heisst dies: Wir denken uns alle Systeme unveränderlicher Figuren in S_n, von welchen die gegebene Figur ein Theil ist und betrachten die übrigen Figuren dieser Systeme als verschiedene Lagen der gegebenen Figur (Einl. § 67). Die Eigenschaften des Satzes II, § 187 und seines Zusatzes werden so ausgedrückt: Zwei Lagen derselben Figur sind congruent; zwei symmetrische Figuren von S_n können in S_n nicht zur Deckung gebracht werden, man kann sie aber in S_{n+1} sich so bewegen lassen, dass sie sich decken.

Der Satz: Zwei congruente Figuren von S_n können keine n Paare sich entsprechender und unabhängiger Punkte gemein haben, ohne zusammenzufallen (Bem. I, § 173) heisst in der Sprache der Bewegung: eine Figur kann sich nicht ohne Deformation bewegen (Def. II, § 37), wenn man n ihrer unabhängigen Punkte festhält. Analog wie Satz X, § 106 wird bewiesen, dass man zwei congruente Figuren mittelst einer Translation und $n-2$ Rotationen oder mittelst $n-1$ Rotationen zur Deckung bringen kann.

II. Kapitel.

Die Operationen des Projicirens und des Schneidens in S_n. — Ihre Anwendung auf das Studium der Configurationen einer endlichen Anzahl Räume in jedem Raum S_r $(r \lesseqgtr {n \atop 0})$.[1]

1.

Die Operationen des Projicirens und Schneidens. — Vollständige homologe Figuren.

§ 189. *Def. I.* Die Punkte, Graden, Ebenen und Räume von S_n von einem Raum S_m aus $(m < n - 1)$ *projiciren* heisst die Punkte, Graden, Ebenen und Räume S_r von S_n $(r < n - m - 2)$ mit S_m verbinden.

Def. II. Einen Raum S_r durch einen Raum S_m *schneiden* heisst den Durchschnittsraum S_a von S_r mit S_m bestimmen, zu welchem Zweck $r + m - n > 0$ sein muss (Satz II, IV, § 158). Der Raum S_m heisst *der schneidende Raum.*

Def. III. Die Operationen des Projicirens und Schneidens heissen *dual*, weil man dem Raum, welcher S_r von S_m aus projicirt, den zu S_r dualen Durchschnittsraum von S_{n-r-1} mit dem zu S_m dualen Raum S_{n-m-1} entsprechen lassen kann (Def. § 159).

Def. IV. Von einem Raum S_m aus einen Raum S_r auf oder in einen Raum S'_m projiciren heisst den Durchschnittsraum S_a des Raums S_{m+r+1} mit dem Raum S'_m bestimmen.

Der Raum S_a heisst *die Projection* von S_r auf S'_m; S'_m *der Projectionsraum*, S_{m+r+1} *der projicirende Raum* und S_m *das Centrum.*

---

1) In diesem Kapitel benutzen wir nur die Sätze über die Schnitte der Räume in S_n.

Bem. I. Die Operation des Projicirens von S_m aus auf S_r setzt sich aus einer Projection und einem Schnitt zusammen und mithin ist ihr in S_n nicht ein blosser Schnitt, sondern ein Schnitt und eine Projection dual.

Def. V. Wenn der Projectionsraum ein dem Centrumsraum S_m dualer Raum S_{n-m-1} ist und ihn in keinem Punkt trifft, so hat jeder Punkt A_0 von S_n einen Punkt und nur einen Punkt A_0' in S_{n-m-1} zur Projection und die Projection heisst *eindeutig*.

Bem. II. In diesem Fall liefert ein von S_{n-m-1} aus auf S_m projicirter Raum S_r in S_m einen Raum S_r. Mit der dualen Operation in S_n schneidet man den Raum S_{n-r-1} mit S_m und projicirt dann von S_{n-m-1} aus. Der Durchschnittsraum von S_m mit S_{n-r-1} ist aber S_{m-r-1} (Satz II, § 158) und ist dual zu S_r in S_m. *Bezüglich des Raums S_m sind daher die beiden Operationen des Projicirens auf S_m und des Schneidens mit S_m dual.*

Bem. III. Wie leicht zu sehen, lässt sich jede Projection nach Def. IV aus einer eindeutigen Projection ableiten; es genügt also, wenn wir uns auf die Projection in Def. V beschränken. Die eindeutige Projection ist jedoch nicht reciprok (Einl. Def. II, § 42), weil der Punkt A_0' die Projection aller Punkte des Raums $(S_m A_0)$ ist.

Bem. IV. Um auf eine Grade zu projiciren, muss das Projectionscentrum ein zur Graden dualer Raum S_{n-2} sein. Ebenso muss, um auf eine Ebene oder einen Raum von drei Dimensionen zu projiciren, das Projectionscentrum ein Raum S_{n-3} oder S_{n-4} sein (Zus. Def. I, § 159). Durch diese Operation erhalten wir Figuren auf der Graden, der Ebene und in dem Raum S_3, wenn wir die durch die Räume S_{n-2}, S_{n-3}, S_{n-4} gehenden Räume schneiden; diese Operation ist also in der allgemeineren enthalten, beliebige Figuren des Raums S_n mit der Graden, der Ebene und dem Raum S_3 zu schneiden.

Den Grund des Unterschieds zwischen der ersten und der zweiten Operation sieht man ein, wenn eine Figur von S_n gegeben ist und man projicirt z. B. ihre Punkte, Graden und Linien auf, sagen wir, S_2 und schneidet dann ihre Räume und Flächen mit der Ebene S_2 oder einer andern Ebene. Man erhält so im Allgemeinen verschiedene Figuren in S_2.

§ 190. *Bem. I.* Wir setzen hier die Formel als bekannt voraus, welche die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen von n Gegenständen zu je r gibt und die mit dem Symbol $\binom{n}{r}$ bezeichnet wird.

Def. I. Unter *vollständiger Pyramide* in S_n verstehen wir die Figur, welche von N Punkten $(N > n+1)$ und von den Räumen gebildet wird, die durch die N Punkte bestimmt werden und die *Kanten* heissen, wenn sie Grade sind oder *ebene Seiten, Seiten von drei, u. s. w., n Dimensionen,* wenn sie Ebenen, Räume von drei, u. s. w., n Dimensionen sind.

Satz I. Wenn in einem Raum S_r die Scheitel von $q-1$ Pyramiden bezüglich je $q-1$ zusammengenommen in p durch einen Punkt P_0 gehenden Graden liegen und man setzt

$$q = n - r + 2,\ p = N - (n - r + 1),$$

so bestimmen diese Pyramiden mittelst der Durchschnitte ihrer Kanten, ebenen Seiten, Seiten von drei, ..., $r-1$ Dimensionen eine Figur von

$$\binom{N}{n-r+1} = \binom{p+q-1}{q-1} S_0,\ \binom{N}{n-r+2} = \binom{p+q-1}{q} S_1, \ldots,$$

$$\binom{N}{n} = \binom{p+q-1}{q+r-2} S_{r-1}.$$

Durch jedes S_0 *gehen* $N-(n-r+1)=p\ S_1, \binom{N-(n-r+1)}{2}=\binom{p}{2}\ S_2, \ldots$

$$\ldots, \binom{N-(n-r+1)}{r-1} = \binom{p}{r-1} S_{r-1}$$

„ „ S_1 „ $N-(n-r+2)=p-1\ S_2, \ldots, \binom{N-(n-r+2)}{r-2} = \binom{p-1}{r-2} S_{r-1}$

⋮

„ „ S_{r-2} „ $N-(n-1)=p-r+2\ S_{r-1}$.

Jedes S_1 *enthält* $n-r+2=q\ S_0$

„ S_2 „ $\binom{n-r+3}{2}=\binom{q+1}{2} S_0,\ q+1\ S_1$

⋮

„ S_{r-2} „ $\binom{n-1}{r-2}=\binom{q+r-3}{r-2} S_0, \binom{n-1}{r-3}=\binom{q+r-3}{r-3} S_1, \ldots$

„ S_{r-1} „ $\binom{q+r-2}{r-1} S_0, \binom{q+r-2}{r-2} S_1, \ldots, q+r-2\ S_{r-2}$.

Diese Figur hat dieselben Eigenschaften bezüglich eines jeden ihrer Räume von denselben Dimensionen. Geht man z. B. von einem beliebigen Punkt der Figur aus, so erhält man $q-1$ *neue Pyramiden mit* p *Scheiteln, welche bezüglich zu je* $q-1$ *in* p *durch diesen Punkt gehenden Graden liegen und dieselbe Figur bestimmen.*

Diese Figur kann als der Schnitt des Raumes S_r, *in welchem sie liegt, mit der vollständigen Figur von* N *Punkten in dem Raum* R_n *angesehen werden und umgekehrt erhält man aus einer solchen Configuration von* N *Punkten von* S_n *durch einen Schnitt mit einem Raum* S_r *von* S_n *eine der ersten analoge Figur.*

Diese Figur ist auch die Projection der vollständigen Figur von $N=p+q-1$ *Räumen* S_{p-1} *in dem Raum* S_p *von einem Raum* S_{p-r-1} *aus auf den Raum* S_r.

Es seien N unabhängige Punkte in S_n gegeben, welche wir mit den Ziffern 1, 2, 3, ..., N bezeichnen und es sei $N > n+1$. Sie bestimmen zu je zweien, je dreien, u. s. w., je n zusammengenommen

$$\binom{N}{2} S_1, \binom{N}{3} S_2, \ldots, \binom{N}{m+1} S_m, \ldots, \binom{N}{n-r+1} S_{n-r},$$
$$\binom{N}{n-r+2} S_{n-r+1}, \ldots, \binom{N}{n} S_{n-1}.$$

Durch jedes S_1 dieser Figur gehen $(N-2)\ S_2, \ldots, \binom{N-2}{m-1} S_m, \ldots$

„ „ S_2 „ „ „ $(N-3)\ S_3, \ldots, \binom{N-3}{m-2} S_m, \ldots$

⋮

„ „ S_r „ „ „ $(N-r-1)\ S_{r+1}, \ldots, \binom{N-r-1}{m-r} S_m, \ldots$

⋮ ⋮

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

Durch jedes S_{n-r} dieser Figur gehen $[N-(n-r+1)]\, S_{n-r+1}, \ldots, \begin{bmatrix} N-(n-r+1) \\ r-1 \end{bmatrix} S_{n-1}$

„ „ S_{n-r+1} „ „ „ $[N-(n-r+2)]\, S_{n-r+2}, \ldots, \begin{bmatrix} N-(n-r+2) \\ r-2 \end{bmatrix} S_{n-1}$

„ „ S_{n-r-2} „ „ „ $[N-(n-r+3)]\, S_{n-r+3}, \ldots, \begin{bmatrix} N-(n-r+3) \\ r-3 \end{bmatrix} S_{n-1}$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

„ „ S_{n-2} „ „ „ $(N-n+1)\, S_{n-1}$.

Jedes S_1 enthält $2\, S_0$

„ S_2 „ $3\, S_0,\ 3\, S_1$

$\vdots$

„ S_r „ $(r+1)\, S_0, \binom{r+1}{2} S_1, \binom{r+1}{3} S_2, \ldots, (r+1)\, S_{r-1}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

„ S_{n-r} „ $(n-r+1)\, S_0, \ldots, (n-r+1)\, S_{n-r-1}$

„ S_{n-r+1} „ $(n-r+2)\, S_0, \ldots, (n-r+2)\, S_{n-r}$

„ S_{n-r+2} „ $(n-r+3)\, S_0, \ldots, \binom{n-r+3}{2} S_{n-r}, (n-r+3)\, S_{n-r+1}$

$\vdots \qquad \vdots$

„ S_{n-2} „ $(n-1)\, S_0, \ldots, \binom{n-1}{r-2} S_{n-r}, \binom{n-1}{r-3} S_{n-r+1}, \ldots, (n-1)\, S_{n-3}$

„ S_{n-1} „ $n\, S_0, \ldots, \binom{n}{r-1} S_{n-r}, \binom{n}{r-2} S_{n-r+1}, \binom{n}{r-3} S_{n-r+2}, \ldots, n\, S_{n-2}$.

Wir wollen diese Figur nun mit einem Raum S_r schneiden. Ein Raum S_r trifft die Räume S_{n-r} der Figur in Punkten, die Räume S_{n-r+1} in Graden u. s. w., die Räume S_{n-1} in Räumen S_{r-1}. Auf diese Art besteht die Durchschnittsfigur aus sovielen Punkten, Graden, u. s. w., Räumen S_{r-1}, als es Räume S_{n-r}, S_{n-r+1}, u. s. w., S_{n-1} der vollständigen Figur der N Punkte in S_n gibt. Da man jeden Raum S_{n-r} dieser Figur durch eine Combination der N Punkte je $(n-r+1)$ zusammengenommen erhält und jeden Raum S_{n-r+1} durch eine Combination der N Punkte zu je $(n-r+2)$ u. s. w., so können wir diese Combinationen zur Bezeichnung der Punkte, Graden, Ebenen u. s. w. der Durchschnittsfigur benutzen. Bezeichnen wir z. B. die N Punkte mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., N, so gibt uns der durch die $n-r+1$ Punkte 1, 2, 3, ..., $(n-r)$, $(n-r+1)$ bestimmte Raum S_{n-r} einen Punkt der Figur in S_r, welchen wir mit dem Symbol $123\ldots(n-r)(n-r+1)$

bezeichnen. Durch diesen Raum S_{n-r} gehen aber alle die Räume S_{n-r+1}, welche man dadurch erhält, dass man successive zu den $n-r+1$ Punkten von S_{n-r} einen nach dem andern die $N-(n-r+1)$ übrigen Punkte hinzufügt. Ein Raum S_{n-r+1} wird durch den Raum S_3 in einer Graden geschnitten; mithin gehen durch den Punkt $123\ldots(n-r)(n-r+1)$ alle Graden der Figur von S_r, deren Symbole das Symbol des Punktes enthalten, nämlich:

$$123\ldots(n-r+1)(n-r+2),\ 123\ldots(n-r+1)(n-r+3),\ldots,$$
$$123\ldots(n-r+1)[N-(n-r+1)].$$

Auf jeder dieser Graden liegen ausser dem Punkt $123\ldots(n-r+1)$ andre $n-r+1$ Punkte der Figur, weil in jedem S_{n-r+1} $n-r+2$ S_{n-r} enthalten sind; sie entsprechen den Combinationen der $n-r+2$ Zahlen je $n-r+1$ zusammengenommen des Symbols der Graden.

So liegen z. B. in der ersten Graden die Punkte

$$123\ldots(n-r)(n-r+2),\ 23\ldots(n-r-1)(n-r+1)(n-r+2),\ldots;$$

in der zweiten die Punkte:

$$123\ldots(n-r)(n-r+3),\ 23\ldots(n-r-1)(n-r+1)(n-r+3),\ldots$$

u. s. w.

Verbinden wir zwei Punkte der nämlichen Reihe, so erhalten wir eine andre Grade derselben Figur. Wenn wir z. B. die beiden ersten Punkte der ersten Columne verbinden, so ergibt sich die Grade

$$123\ldots(n-r)(n-r+2)(n-r+3)$$

und für diejenigen der zweiten Columne die Grade:

$$23\ldots(n-r-1)(n-r+1)(n-r+2)(n-r+3) \text{ u. s. w.}$$

Diese beiden Graden schneiden sich in einem Punkt der Figur nämlich in: $23\ldots(n-r-1)(n-r+2)(n-r+3)$. Durch jeden Punkt der Figur gehen daher $N-(n-r+1)$ von ihren Graden und in jeder dieser Graden liegen ausser dem gegebenen Punkt $n-r+1$ Punkte derselben Figur. Wir können daher $n-r+1$ *Pyramiden* mit $N-(n-r+1)$ *Scheiteln*, welche bezüglich in diesen $N-(n-r+1)$ Graden liegen, aus ihnen bilden.

Eine solche Pyramide wird aus denjenigen Punkten gebildet, deren Symbole $n-r$ Zahlen gemein haben, wie z. B.

$$123\ldots(n-r)(n-r+2),\ 123\ldots(n-r)(n-r+3)\ldots;$$
$$123\ldots(n-r)[N-(n-r+1)].$$

Einen Raum S_s erhält man in S_r aus einem Raum S_{n+s-r} der Figur der N Punkte. Er wird mit einem Symbol bezeichnet, welches $n+s-r+1$ der N Ziffern enthält und in ihm liegen alle diejenigen Punkte, Graden, u. s. w., Räume der Figur in S_r, deren Symbole in dem Symbol von S_s enthalten sind. Und durch S_s gehen alle Räume, deren Symbole diejenigen von S_s enthalten.

Ist ein Raum S_{n-r} z. B. $123\ldots n-r+1$ in S_n ausser den durch ihn gehenden $N-(n-r+1)$ Räumen S_{n-r+1} der Figur der N Punkte gegeben

und sind ferner die anderen in ihnen enthaltenen S_{n-r} gegeben, so erhält man die übrigen $N-(n-r+1)$ Punkte nämlich: $n-r+2$, $n-r+3$, u. s. w., wenn man diejenigen Räume S_{n-r} der Räume S_{n-r+1}, welche unter den durch den Raum $123\ldots n-r+1$ gehenden Räumen verschieden sind, miteinander verbindet und die Durchschnittsräume der neuen Räume S_{n-r+1} bestimmt. Es ist leicht zu beweisen, dass man so alle Räume S_{n-r} der Figur in S_n erhält. Man erhält daher durch die Schnitte der Kanten der $n-r+1$ Pyramiden in S_r und durch Verbindung ihrer Durchschnittspunkte mittelst grader Linien u. s. w. alle Durchschnittspunkte des Raums S_r mit den Räumen S_{n-r} der Figur in S_n.

Man kann die Frage aufwerfen, ob die Figur dieser $n-r+1$ Pyramiden eine allgemeine Figur ist, oder ob eine allgemeine Figur von $n-r+1$ Pyramiden in S_r, deren Scheitel bezüglich in $N-(n-r+1)$ durch einen Punkt gehenden Graden liegen, sich auch als Schnitt einer Pyramide von N Punkten von S_n betrachten lässt.

Die Antwort fällt bejahend aus. Denn denken wir uns, die $N-(n-r+1)$ durch einen Punkt gehenden Graden seien gegeben, welche wir mit $123\ldots$ $\ldots(n-r+1)$ bezeichnen und auf ihnen die mit denselben Symbolen wie oben bezeichneten Scheitel der Pyramiden in S_r. Von dem Punkt $123\ldots$ $\ldots(n-r)(n-r+1)$ aus ziehen wir einen Raum S_{n-r}, welcher S_r nur in dem gegebenen Punkt allein schneidet und nehmen in diesem Raum $n-r+1$ durchaus unabhängige Punkte an, die wir mit $1, 2, 3, \ldots, n-r+1$ bezeichnen.

Verbinden wir nun die Scheitel, welche in der Graden $123\ldots(n-r+2)$ liegen, z. B. den Scheitel $123\ldots(n-r)(n-r+2)$ mit den Punkten $1, 2, 3, \ldots, (n-r)$ von S_{n-r}, so erhalten wir einen neuen Raum S_{n-r} und für alle Scheitel dieser Graden erhalten wir $n-r+1$ Räume S_{n-r}, welche innerhalb des Raums S_{n-r+1} liegen, welcher durch die Grade und den ersten durch den Punkt $123\ldots(n-r+1)$ gehenden Raum S_{n-r} bestimmt wird.

Diese $n-r+1$ Räume S_{n-r} schneiden sich mithin in einem Punkt (Satz III, § 158), welchen wir mit der Zahl $n-r+2$ bezeichnen. Wiederholen wir diese Operation für die anderen durch den Punkt $123\ldots(n-r+1)$ gehenden Graden, so bekommen wir im Ganzen $N-(n-r+1)$ neue Punkte, welche mit den obigen $1, 2, 3, \ldots n-r+1$ Punkten zusammen N Punkte geben. Aus der vollständigen Figur dieser Punkte erhält man mittelst eines Schnittes die Figur der $n-r+1$ in S_r gegebenen Pyramiden.

Setzt man $q=n-r+2$, $p=N-(n-r+1)$, so ist damit der erste Theil des Satzes bewiesen.

Um die letztere Eigenschaft nachzuweisen, bemerken wir vor Allem, dass es $\binom{p+q-1}{q+r-2}=\binom{N}{n}$ Räume S_{r-1} der Figur gibt, d. h. in der gleichen oder einer grössern Anzahl, als die Zahl ihrer Punkte beträgt, $N \gtrless n+1$ vorausgesetzt. Wählen wir einen dieser Räume S_{r-1} z. B. A_{r-1}; in ihm sind $n=q+r-2$ Räume S_{r-2} enthalten und durch jeden von ihnen gehen

$N - n + 1 = p - r + 2$ Räume S_{r-1}. Die durch die Räume S_{r-2} von A_{r-1} gehenden Räume S_{r-1} bilden $N - n$ Pyramiden von n Räumen von $r - 1$ Dimensionen und ein Raum S_{r-1} einer solchen Pyramide schneidet die übrigen $n - 1$ Räume in ebensovielen S_{r-2}, welche mit dem ersten, durch welchen er geht, eben alle Räume S_{r-2} in S_{r-1} ausmachen. Ebenso erhält man Pyramiden in S_r, welche durch den vorigen analoge Räume gebildet werden. Setzt man $N - n = q' - 1$, $n = p'$, so findet man aus dem ersten Theil des Satzes, dass die vollständige Figur dieser Pyramiden $\binom{N}{n}$ Räume S_{r-1} enthält, welche grade die Räume S_{r-1} sind, die man durch den Schnitt der Figur der N Punkte in S_n mit S_r bekommt. Man sieht daher, dass man die obige Figur durch die Projection einer andern Configuration erhalten kann.

Nehmen wir an, in dem Raum S_n hätte man statt N Punkten N Räume S_{n-1}, so bestimmen sie die der ersteren entsprechende Figur. Sie ist offenbar aus

$$\binom{N}{2} S_{n-2}, \binom{N}{3} S_{n-3}, \ldots, \binom{N}{n-r+1} S_{r-1}, \binom{N}{n-r+2} S_{r-2}, \ldots,$$
$$\binom{N}{n-1} S_1, \binom{N}{n} S_0$$

zusammengesetzt und in jedem S_{r-1} liegen

$$N - (n - r + 1)\; S_{r-2}, \ldots, \left[\frac{N - (n - r + 1)}{r - 1}\right] S_0.$$

Projicirt man diese Figur von einem beliebigen Raum S_{n-r-1} aus auf einen Raum S_r, welcher dem ersten entspricht und, wie wir voraussetzen wollen, keinen Punkt mit ihm gemein hat, so erhält man in S_r die der früheren entsprechende Figur, wenn man sich erinnert, dass die Räume S_{r-1}, $S_{r-2}, \ldots, S_0$ auf Räume von derselben Anzahl von Dimensionen projicirt werden. In einem beliebigen Raum S_{r-1} dieser Figur liegen p Räume S_{r-2} und durch jeden der letzteren gehen q Räume S_{r-1}, wie in jedem Raum S_{n-r+1} der obigen Figur q Räume S_{n-r} gelegen sind, worin

$$q = n - r + 1,\; p = N - (n - r + 1).$$

Um nun solche Werthe von n' und N' zu erhalten, dass diese Figur mit der im Satz angeführten zusammenfällt, genügt es offenbar

$$q + r - 2 = N' - (n' - r + 1),\; p - r + 2 = n' - r + 2$$

zu setzen, woraus man

$$n' = p,\; N' = p + q - 1 = N$$

erhält.

Wir bemerken noch, dass $\binom{N}{p} = \binom{N}{q-1}$, da $q - 1 = N - p$ ist.

Bem. I. Die Räume einer solchen Figur können mit zwei verschiedenen Symbolen bezeichnet werden, je nachdem man sie als Schnitt oder als Projection einer gegebenen Figur auf einen Raum von höheren Dimensionen betrachtet.

Bem. II. Diese Eigenschaft erlaubt uns die Sätze über die analogen vollständigen Figuren auf sehr einfache Art, nämlich mit Hülfe des Princips des Projicirens und Schneidens abzuleiten.

Def. II. Wenn wir von dem Punkt $123\ldots n-r+1$ der Figur in Satz I mit den successiven Schnitten der Kanten und Seiten der $q-1$ Pyramiden ausgehen, so kommen wir zu dem Raum $(n-r+2)\ldots[N-(n-r+1)]$, vorausgesetzt, dass dieses Symbol einem Raum der Figur entspricht (siehe die Beispiele, § 3). Da die Symbole des Punktes und des Raumes S zusammengenommen alle Indexe der N Punkte geben, so heissen diese Symbole *complementär* und im Allgemeinen sind zwei Räume der Figur, deren Symbole die Zahl N zur Summe haben, *complementär*.

Bem. III. Die einfachste Pyramide in S_r, d. h. die Grundpyramide, hat $r+1$ Scheitel.

Def. III. Wir wollen zwei solche Pyramiden in S_r betrachten, deren Scheitel zu je zweien mit einem Punkt O in gleicher Linie liegen. Zwei solche Pyramiden heissen *homolog* und O *das Centrum der Homologie.*

Von zweien ihrer Scheitel, die mit O in derselben Linie liegen, sagt man, *sie entsprächen sich* und ebenso von zwei Seiten, welche durch dieselbe Anzahl von Scheiteln gehen.

In diesem Fall ist $q=3=n-r+2$, $p=r+1=N-(n-r+1)$, woraus $n=r+1$, $N=r+3$ folgt.

Zus. I. Die Kanten, Ebenen u. s. w. und die Seiten S_{r-1} zweier homologer sich entsprechender Grundpyramiden schneiden sich in Punkten, Graden, Ebenen u. s. w. eines Raumes S_{r-1}, welcher dem Centrum der Homologie entspricht. Die vollständige Figur besteht aus

$$\frac{(r+2)(r+3)}{2}S_0,\ \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{2\cdot 3}S_1,\ldots,\ \frac{(r+2)(r+3)}{2}S_{r-1}.$$

Durch jedes S_0 gehen $r+1\ S_1,\ \frac{r(r+1)}{2}S_2,\ldots,\ \frac{r(r+1)}{2}S_{r-1}$.

„ „ S_1 „ $r\,S_2,\ldots,\ \frac{r(r-1)}{2}S_{r-1}$.

Jedes S_1 *enthält* $3\ S_0$.

„ S_2 „ $6\ S_0$, $3\ S_1$ u. s. w.

Diese Figur erhält man durch den Schnitt des Raums S_r mit einer Configuration von $r+3$ Punkten des Raums S_{r+1}.

Setzen wir in dem vorigen Satz für N und n die eben gefundenen Werthe, so sehen wir, dass die Anzahl der Räume S_{r-1} der vollständigen Figur dieser beiden Pyramiden $\frac{(r+2)(r+3)}{2}$ ist, also der Anzahl der Punkte derselben Figur gleichkommt. Mithin ist die Figur zu sich selbst dual und überdies sind ihre Complementärräume dual. Wir können die Punkte der Figur mit den Symbolen 12, 13, u. s. w.; die Graden mit 123, 124, u. s. w. und die Räume S_{r-1} mit $1234\ldots r+1$ bezeichnen, so dass also der Raum $34\ldots$ $\ldots(r+3)$ dem Punkt 12 complementär ist. Wird der Punkt O mit 12

bezeichnet, so sind die Scheitel der beiden Pyramiden, deren Scheitel in derselben Linie mit O liegen

$$13, 14, \ldots, 1(r+3),$$
$$23, 24, \ldots, 2(r+3) \text{ u. s. w.}$$

Die Kanten der Pyramiden sind mithin

$$134, 135, \ldots, 145, 146, \text{ u. s. w.}$$
$$234, 235, \ldots, 245, 246, \text{ u. s. w.}$$

Die Durchschnittspunkte der sich entsprechenden Kanten

134, 234 oder auch 34

135, 235 „ „ 35

gehören dem Raum $345\ldots(r+2)(r+3)$ an, welcher dem Punkt 12 entspricht.

Die vollständige Figur zweier homologer Grundpyramiden von S_r kann auch als Projection einer Figur von $r+3$ beliebigen Räumen S_r von S_{r+1} angesehen werden. Ein Raum dieser Figur kann daher entweder mit dem schon angegebenen Symbol oder mit dem Symbol des Complementärraums bezeichnet werden.

Def. IV. Im Allgemeinen sagen wir von zwei Pyramiden mit mehr als $r+1$ Scheiteln in S_r, sie seien *homolog*, wenn nicht nur ihre Scheitel zu je zweien mit einem Punkt (*dem Centrum der Homologie*) in derselben Linie liegen, sondern wenn auch ihre Kanten, Ebenen u. s. w. sich in einem Raum S_{r-1} (*dem Raum der Homologie*) schneiden.

Des obigen Zusatzes wegen ist die zweite Bedingung für zwei Grundpyramiden nicht erforderlich.

Zus. II. Haben in S_r zwei Pyramiden $r-s$ Scheitel und liegen diese Scheitel zu je zweien mit einem Punkt in derselben Linie, so schneiden sich die Kanten und Seiten der Pyramiden in einem Raum S_{r-s-1}.

Satz II. Die vollständige Figur zweier homologer Grundpyramiden in einem Raum S_r zerfällt in $r+3$ Gruppen von zwei dualen Pyramiden von $r+2$ Scheiteln bezüglich von $r+2$ Seiten von $r-1$ Dimensionen S_{r-1}, welche keinen Raum gemein haben und die zusammengenommen die ursprüngliche Figur bilden

Wir wollen wieder zwei homologe Grundpyramiden in S_r betrachten, deren Centrum der Homologie 12 sei. Mit diesem Punkt und den Scheiteln einer der beiden Pyramiden z. B. 13, 14, …, $1(r+3)$ bilden wir eine Pyramide von $r+2$ Scheiteln nämlich 12, 13, …, $1(r+3)$ und betrachten auch die duale Pyramide $34\ldots(r+3)$, $245\ldots(r+3)$, …, $23\ldots(r+1)(r+2)$. Diese beiden Pyramiden haben keinen Raum gemein, weil alle Symbole der Räume der ersten die Ziffer 1 enthalten, während 1 in den Symbolen der zweiten Pyramide nicht vorkommt. Wir sehen aber auch, dass $(r+2)$ Scheitel (der ersten und die $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ Punkte der zweiten zusammen genau die $\frac{(r+2)(r+3)}{2}$ Punkte S_0 der vollständigen Figur der beiden ersten Pyramiden

geben. Von diesen Gruppen gibt es ebensoviele als Zahlen in den Symbolen dieser Figur enthalten sind nämlich $r + 3$.

Def. V. Es mögen die beiden dualen Pyramiden einer der $r + 3$ Gruppen, z. B.

$$12, 13, \ldots, 1(r+2), 1(r+3)$$

und

$$345 \ldots r+3, 245 \ldots r+3, \ldots, 234 \ldots (r+1)(r+3), 234 \ldots (r+1)(r+2)$$

gegeben sein und wir wollen die letztere betrachten. r von ihren Seiten von $r - 1$ Dimensionen schneiden sich in einem Punkt, z. B. die ersten $r - 1$ und die letzte haben den Punkt $(r+1)(r+2)$ gemein, welcher dem Durchschnittsraum S_{r-2} der übrigen Seiten nämlich $234 \ldots r(r+1)$ entspricht. Der Punkt $(r+1)(r+2)$ und dieser Raum S_{r-2} bestimmen einen Raum S_{r-1}, den wir *Diagonalraum der Pyramide* nennen. Wir haben also im Ganzen $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ Diagonalräume, welche die *Diagonalfigur* der Pyramide bilden. Ist $r = 2$, so gibt es nur drei Diagonalgrade.

Die zweite Pyramide kann durch das Symbol $234 \ldots r+3$ d. h. durch $r + 2$ Ziffern der Reihe $1, 2, 3, \ldots, r+3$ dargestellt werden.

Satz III. Alle Diagonalpyramiden von $r + 2$ Seiten S_{r-1} der $r + 3$ Gruppen der vollständigen Figur zweier homologer Grundpyramiden in S_r sind zu je zweien homolog bezüglich eines Punktes und eines Raumes derselben Figur als Centrum und Raum der Homologie.

Dasselbe gilt für die $r + 3$ übrigen Pyramiden von $r + 2$ Scheiteln, welche den ersteren dual sind.

Es seien zwei dieser Pyramiden z. B.

$$2345 \ldots (r+3), \quad 1345 \ldots (r+3)$$

gegeben.

Ihre Diagonalfiguren sind durch die folgenden Räume S_{r-1} bestimmt:

für die erste		für die zweite Pyramide	
23	$45 \ldots r+3$	13	$45 \ldots (r+3)$
24	$35 \ldots r+2$	14	$35 \ldots (r+3)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$2(r+3)$	$34 \ldots r+2$	$1(r+3)$	$34 \ldots (r+2)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$s(s+1)$	$23 \ldots (s-1)(s+2) \ldots (r+3)$	$s(s+1)$	$14 \ldots (s-1)(s+2) \ldots (r+3)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$s(r+3)$	$23 \ldots (s-1)(s+1) \ldots (r+2)$	$s(r+3)$	$13 \ldots (s-1)(s+1) \ldots (r+2)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$(r+2)(r+3)$	$234 \ldots r+1$	$(r+2)(r+3)$	$13 \ldots r+1$.

Aus dieser Uebersicht geht hervor, dass die beiden Diagonalpyramiden bezüglich des Punktes 12 als Centrum und des Raums $345 \ldots r+3$ als Raum der Homologie homolog sind. Denn alle Punkte dieser Pyramiden, deren Symbole weder die Ziffer 1 noch 2 enthalten, entsprechen sich selbst, weil sie in dem Raum $345 \ldots r+3$ liegen. Ein Punktepaar wie 13 und 23 liegt in einer durch den Punkt 12 gehenden Graden. Betrachtet man ein andres Punkte-

paar $1s$, $2s$, wobei $s = 4, 5, \ldots, (r+3)$, so sieht man, dass diese Punkte mit dem Punkt 12 in derselben Linie liegen und die Graden 13, $1s$; 23, $2s$ sich in dem Punkt $3s$ des Homologieraums schneiden.

Satz IV. Soll die Figur in S_r des Satzes I zu sich selbst dual sein, so muss $p = q + r - 2$ sein.

Die Anzahl der Punkte S_0 der Figur muss der Anzahl der Räume S_{s-1} gleich d. h. es muss

$$\binom{N}{n-r+1} = \binom{N}{n} \tag{1}$$

sein.

Man kann dieser Gleichung genügen, wenn man

$$N - n + r = n + 1$$

setzt, woraus sich

$$N = 2n - r + 1 \tag{2}$$

ergibt.

Es ist aber

$$n = q + r - 2, \quad N = p + q - 1,$$

daher

$$p = q + r - 2. \tag{3}$$

Und umgekehrt, wenn diese Beziehung besteht, so gilt die Gleichung (2) und auch (1).

Aus dem Vorstehenden ist leicht abzuleiten:

Zus. Eine solche zu sich selbst duale Figur erhält man durch den Schnitt des Raums S_r mit einer Pyramide von $N = 2n - r + 1$ Punkten des Raums S_n und durch die Projection der dualen Pyramide auf denselben Raum S_r in S_n.

2.

Anwendungen auf die Ebene und den Raum S_3.

§ 191. *Anwendungen auf die Ebene.*

Aus Satz I, § 190 folgt für $r = 2$ oder die Ebene

$$q = n, \quad p = N - n + 1.$$

a) Der einfachste Fall ist $q = 3$ und $p = 2$, es ist dann $N = 4$, d. h. man erhält in der Ebene ein Vierseit.

b) $q = 3$, $p = 3$, $N = 5$.

Man erhält in der Ebene die vollständige Figur zweier homologer Dreiecke, d. h. eine Figur von 10 Punkten, welche zu je dreien in 10 Graden liegen. Diese Figur zerfällt in fünf Gruppen von einem vollständigen Viereck und Vierseit, welche keinen Scheitel und keine Seite gemein haben und zusammen genommen die ganze Figur bilden. Man findet auch, dass zwei der fünf Vierecke oder Vierseite homolog sind. Das Centrum und die Axe der Homologie fallen mit einem entsprechenden Punkt und der entsprechenden Graden der Figur zusammen.[1])

1) In der Abhandlung über das Hexagramm *Pascal*'s (Atti della R. Acc. dei Lincei, 1877) haben wir nachgewiesen, dass die 60 Graden *Pascal*'s 10 solche Figuren bilden,

Diese Figur entsteht, wenn man ein vollständiges Fünfeck des Raums S_3 schneidet.

c) $q = 4$, $p = 3$, $N = 6$.

In diesem Fall erhält man 20 Punkte, die zu je vieren in 15 Graden liegen, welche zu je dreien durch 20 Punkte gehen. Die sich ergebende Figur zerfällt in 10 Paare complementärer Punkte z. B. 123, 456; u. s. w.[1])

d) $q = 4$, $p = 4$, $N = 7$.

Wir erhalten drei Vierecke:

124, 125, 126, 127; 134, 135, 136, 137; 234, 235, 236, 237,

deren Eckpunkte auf den Graden

1234, 1235, 1236, 1237

liegen, welche durch den Punkt 123 gehen.

Die Seiten der drei Vierecke sind

1245, 1246, 1247, 1256, 1257, 1267
1345, 1346, 1347, 1356, 1357, 1367
2345, 2346, 2347, 2356, 2357, 2367.

Die sich entsprechenden Seiten schneiden sich in den Punkten:

145, 146, 147, 156, 157, 167
245, 246, 247, 256, 257, 267
345, 346, 347, 356, 357, 367,

welche zu je dreien in den Graden

1456, 1457, 1467, 1567
2456, 2457, 2467, 2567
3456, 3457, 3467, 3567

liegen und diese Graden schneiden sich zu je dreien in den vier Punkten 456, 457, 467, 567 der Graden 4567.

Diese Grade entspricht daher dem Punkt 123.

Die Figur besteht also aus 35 Punkten, die zu je vieren in 35 Graden liegen, welche zu je vieren durch die 35 Punkte gehen.

e) Für die dualen Figuren in der Ebene muss

$$N = 2n - 1$$

sein; d. h.

$$p = n, \quad q = n.$$

§ 192. *Anwendungen auf den Raum* S_3.

Wir setzen nun $r = 3$; d. h. wir schneiden die Figur der N Punkte in S_n durch einen Raum S_3.

Man hat

$$q = n - 1, \quad p = N - n + 2.$$

deren Punkte *Kirkmann*'sche Punkte sind, und dass eine dieser Figuren zu sich selbst reciprok polar bezüglich eines Kegelschnittes π ist. Das Viereck und Vierseit einer der fünf angegebenen Gruppen sind polar reciprok bezüglich des Kegelschnittes π.

1) Sie ist der Figur der 10 Punktepaare *Steiner*'s in dem Hexagramm *Pascal*'s analog.



a) Es sei $q = 3$, $p = 4$, woraus $N = 6$, $n = 4$ folgt.

Man erhält in S_3 die Figur zweier homologer Tetraeder, nämlich 13, 14, 15, 16 und 23, 24, 25, 26, deren Scheitel zu je zweien in den vier Graden 123, 124, 125, 126 liegen, welche durch den Punkt 12 gehen.

Die sich entsprechenden Kanten und ebenen Seiten schneiden sich in Punkten und Graden einer Ebene. Die Figur besteht aus 15 Punkten, welche zu je dreien in 20 Graden und zu je sechsen in 15 zu je dreien durch die 20 Graden gehenden Ebenen liegen (Zus. Satz I, § 190). Durch jeden Punkt gehen vier Grade und in jeder Ebene liegt eine gleiche Anzahl. Dem Punkt 12 entspricht die Ebene 3456. Daraus folgt:

Die vollständige Figur zweier homologer Tetraeder in S_3 ist zu sich selbst dual. Sie zerfällt in sechs Gruppen von einem Pentagon und Pentaeder. Zwei beliebige der Pentagone und Pentaeder sind homolog. Das Homologiecentrum und die Homologieebene fallen in einen entsprechenden Punkt und die entsprechende Ebene der Figur.[1])

b) $q = 4$, $p = 5$, woraus $n = 5$, $N = 8$.

Man erhält eine Figur von 56 Punkten, welche zu je vieren auf 70 Graden liegen, die zu je fünfen durch die 56 Punkte gehen, d. h. also eine zu sich selbst duale Figur. Dem Punkt 123 entspricht die Ebene 45678. U. s. w.

3.

Allgemeine Configurationen einer endlichen Anzahl von Punkten oder Räumen.

§ 193. *Def. I.* Eine beliebige Gruppe von n Punkten oder Graden, Ebenen und Räumen in einem Raum S_m, welche nicht in einem Raum von niedrigeren Dimensionen enthalten ist, heisst *Configuration von* S_m.[2])

Def. II. Zwei Configurationen in zwei Räumen S_m und S'_m sind von derselben Art, wenn man die eine aus der andern mittelst einer endlichen Anzahl von successiven Projectionen und Schnitten erhalten kann.

Bem. I. Zieht man bei zwei Configurationen nur in Betracht, dass man sie auf diese Weise erhalten kann oder nicht, so können wir sagen, zwei Configurationen derselben Art seien gleich (Einl. Def. IV, § 9).

1) Die vollständige Figur zweier homologer Pyramiden ist polar reciprok zu sich selbst bezüglich einer Fläche zweiten Grades (siehe des Autors: Behandlung der projectiven Verhältnisse u. s. w., Math. Ann. Vol. XIX), bezüglich welcher zwei beliebige der den gegebenen Pyramiden dualen Pyramiden polar sind (Satz III, § 190). So sind, falls $r = 3$, die dualen Pentagone und Pentaeder der sechs Gruppen der vollständigen Figur zweier homologer Tetraeder in S_3 polar reciprok bezüglich einer Fläche zweiten Grades. Man findet diese Figur wieder in der vollständigen Figur von sechs linearen Complexen in Involution von *Klein* und der Fläche der Krümmungsmittelpunkte einer Fläche zweiten Grades (siehe des Autors „Sopra alcune notevoli configurazioni u. s. w.", Memoria II, Atti della R. Academia dei Lincei, 1881, S. 75 u. f.).

2) Die Lehre von den Configurationen einer endlichen Anzahl von Räumen im Allgemeinen beschäftigt sich nicht nur mit denjenigen, bei welchen z. B. die n Punkte einer Configuration zu je p in Graden oder Räumen liegen, welche zu je r durch die gegebenen n Punkte gehen, sondern behandelt auch diejenigen Configurationen, bei welchen die n Punkte in Curven und Flächen liegen. Wir fassen das Problem hier in diesem allgemeineren Sinn auf. Uebrigens ist die Geometrie (Def. III, § 2) nur die Wissenschaft von den Gruppen oder Configurationen von Punkten.

Um das folgende Theorem zu beweisen, stützen wir uns auf den Satz, dass man von zwei gegebenen Grundpyramiden P, P' von S_n die eine aus der andern durch Projection oder Schneiden derart ableiten kann, dass einem Raum S_r, welcher P in S_{n-r-1} schneidet oder P auf S_{n-r-1} projicirt, ein Raum S'_r entspricht, welcher P' in S'_{n-r-1} schneidet oder auf S'_{n-r-1} projicirt und dass die beiden Configurutionen in S_r, S'_r oder S_{n-r-1}, S'_{n-r-1} von derselben Art sind.[1])

Satz I. Jede Configuration von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten in einem Raum S_r kann man als Projection unendlich vieler Grundpyramiden von S_n oder als Schnitt unendlich vieler Grundpyramiden eines Raums von mehr Dimensionen, als S_r, erhalten. Eine solche Configuration kann man durch Projection und Schnitt aus unendlich vielen Grundpyramiden beliebig vieler Räume erhalten.

Umgekehrt lassen sich aus einer Grundpyramide von S_n durch Projection (oder Schnitt) alle Arten Configurationen von $(n+1)$ oder weniger als $n+1$ Punkten (oder auch Räumen S_{r-1}) eines Raums von niedrigeren Dimensionen S_r ableiten.

Es seien $n+1$ beliebige Punkte z. B. in einer Ebene S_2 gegeben, welche natürlich nicht in derselben Graden liegen und wir wollen sie von einem willkürlichen Raum S_{n-3} aus, welcher die Ebene nicht trifft, projiciren. Durch den Raum S_{n-3} gehen daher $n+1$ Räume S_{n-2}, welche aber nicht in einem Raum S_{n-1} liegen, weil nach unsrer Annahme S_{n-3} weder einen noch mehrere Punkte mit S_2 gemein hat. Wir können daher in den $n+1$ Räumen S_{n-2} ebensoviele Punkte so wählen, dass sie nicht in einem Raum von weniger Dimensionen als S_n liegen; sie bilden eine Grundpyramide. Mithin ist die Figur der $n+1$ in der Ebene gegebenen Punkte die Projection unendlich vieler Grundpyramiden von S_n.

Noch leichter ist der duale Satz einzusehen. Sind $n+1$ Grade in der Ebene gegeben, welche nicht durch nur einen Punkt gehen, so legen wir durch jede von ihnen einen Raum S_{n-1} in S_n; die $n+1$ so erhaltenen Räume S_{n-1} bestimmen eine Grundpyramide von S_n, von welcher die Figur der $n+1$ Graden nur ein Schnitt mit der Ebene S_2 ist. Es leuchtet ein, dass dieser Beweis auch für jede Configuration von $n+1$ Punkten oder von $n+1$ Räumen S_{r-1} in einem Raum S_r gilt, wenn nur $r < n$ und $r > 0$ ist. Man sieht, dass sich aus einer Grundpyramide von S_n durch Projection oder Schnitt nicht nur alle *Arten* von Configurationen von $n+1$ Punkten oder $n+1$ Räumen S_{r-1} von S_r, sondern auch alle Configurationen von s Punkten ableiten lassen, wobei $r < s < n+1$ ist. Denn wenn z. B. der Raum S_{n-r-1}, welcher die Grundpyramide auf S_r projicirt, durch $n-s-1$ ihrer Scheitel geht, so besteht die Projection offenbar nur aus s Punkten.

Bem. II. Das Studium der Configurationen einer endlichen Anzahl von Punkten und Graden in der Ebene, von Punkten, Graden und Ebenen in S_3 u. s. w. wird durch diesen Satz einfacher und anschaulicher.

Um alle Configurationen von $n+1$ Punkten der Ebene oder unsres Raums zu bestimmen, genügt es alle Lagen eines Raums S_{n-3} oder S_{n-4} bezüglich einer Grundpyramide von S_n

1) Siehe des Autors: Behandlung der project. Verhältnisse der Räume von mehreren Dimensionen. A. a. O.

aufzufinden. Projicirt man von diesen verschiedenen Lagen z. B. des Raums S_{n-3} aus auf eine Ebene S_2, welche S_{n-3} nicht trifft, so erhält man alle verlangten Configurationen.

Wir können sofort sagen, dass, wenn man aus den $n+1$ Punkten der Grundpyramide in S_n $n+1$ Punkte der Graden, Ebene oder des Raums S_3 erhalten will, die projicirenden Räume keinen Punkt mit den Kanten dieser Pyramide gemein haben dürfen. Hätte z. B. der auf die Ebene S_2 projicirende Raum S_{n-3} einen Punkt mit der Kante 12 gemein, so würde er mit dieser Kante einen Raum S_{n-2} bestimmen, welcher die Ebene S_2 in nur einem Punkte schneiden würde und man erhielte alsdann eine Configuration von n Punkten in ihm.

Wir bemerken, dass man sich das Auffinden der Lagen der projicirenden Räume bezüglich der Grundpyramide von S_n dadurch erleichtern kann, dass man statt direct z. B. von einem S_{n-3} aus auf eine Ebene zu projiciren, successive von einem Punkt auf die immer um eine Dimension niedriger werdenden Räume projicirt, bis man schliesslich zur Ebene kommt. Man erhält so dasselbe Resultat. Alle Projectionspunkte bestimmen den Raum S_{n-3}. Auf diese Art ändert sich das Problem und man hat nicht mehr die speciellen Lagen des Raums S_{n-3} bezüglich der Pyramide von S_n sondern die speciellen Lagen der Projectionscentren bezüglich der Pyramide und ihrer succesiven Projectionen zu bestimmen. Man hat dabei auch den Vortheil zugleich die besonderen Lagen aller der Räume kennen zu lernen, welche die Pyramide auf die Räume von niedrigeren Dimensionen als S_n und mithin auch auf S_2 projiciren.[1])

Beigabe.

Die ersten Principien der analytischen Geometrie von n Dimensionen.

§ 194. Wie man von der gewöhnlichen Elementargeometrie ausgehend die analytische Geometrie der Ebene und des Raums von drei Dimensionen entwickelt, auf gleiche Weise kann man auch bei der analytischen Geometrie des Raums von n Dimensionen verfahren. Wir geben hier nur die ersten Principien an.

Sind n unabhängige Grade in S_n gegeben, welche durch einen Punkt *(Anfang)* gehen, so bestimmen sie ein *Cartesianisches Coordinatenaxensystem*, welches rechtwinklig ist, wenn die Graden zu je zweien senkrecht aufeinander stehen. Dies letztere ist möglich (Satz VIII, § 168). Ein Punkt P_0 wird durch die n durch P_0 gehenden Segmente bestimmt, welche den Coordinatenaxen parallel sind und von dem Punkt P_0 an bis zu dem Durchschnittspunkt mit den Räumen von $n-1$ Dimensionen *(Coordinaten)* gerechnet werden, die durch die übrigen Axen bestimmt werden (Satz II, § 158).

Die Längen dieser Segmente heissen die *Coordinaten* des Punktes P_0 und werden mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet.

Mit Hülfe früherer Sätze findet man den Abstand zweier Punkte von den Coordinaten x_i und x_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in dem rechtwinkligen System leicht:

$$\delta = \sqrt{\Sigma (x_i - x_i')^2} \tag{1}$$

1) Wir haben diese Methode bei der Untersuchung einer ausgedehnten Classe von Configurationen in S_2 und S_3 in unsrer Abhandlung: Interprétations géom. de la théorie des substitutions de n lettres, Annali di Matematica, 1888, angewendet.

Wenn einer der Punkte in den Anfang fällt und man bezeichnet mit α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Winkel, welche ein Strahl und daher auch der von dem Anfang aus zu dem gegebenen parallel gezogene Strahl mit den Axen macht (Bem. II, § 169), so erhält man:

$$\sum \cos \alpha_i = 1. \tag{2}$$

Die Transformationsformeln zum Uebergang von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen System mit demselben Anfang und umgekehrt sind

$$x_i = \sum x_i' \cos \alpha_i. \tag{3}$$

Damit lassen sich leicht die Beziehungen zwischen zwei beliebigen Cartesianischen Systemen feststellen.

Wählt man einen Raum, welcher einem der Coordinatenräume parallel ist z. B. $(x_2 \ldots x_n)$ (Def. I, § 166), so genügen seine Punkte der Relation

$$x_1 = p \tag{4}$$

und umgekehrt stellt eine solche Relation (Gleichung) einen Raum dar, welcher dem genannten Coordinatenraum parallel ist.

Mittelst einer Transformation von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen System, dessen eine Axe auf einem gegebenen Raum S_{n-2} senkrecht steht, findet man bei Benutzung der Formeln (3) seine Gleichung bezüglich des schiefwinkligen Systems:

$$\sum x_i \cos \alpha_i - p = 0. \tag{5}$$

Es lässt sich mit den Transformationsformeln leicht beweisen, dass eine Gleichung ersten Grades zwischen den (variablen) Coordinaten einen Raum S_{n-1} darstellt.

Sind n unabhängige Räume gegeben, so bietet sich das Problem, die Coordinaten des Durchschnittspunkts der n Räume zu bestimmen. Sie sind die Auflösungen der n Lineargleichungen, welche die n gegebenen Räume darstellen.

Führt man das *Plücker*'sche System ein, so wird ein Raum durch n Coordinaten u_i bestimmt, d. h. durch die umgekehrten negativen Werthe der Segmente, welche der Raum S_{n-1} auf den Coordinatenaxen vom Anfang aus bestimmt. Ein Raum S_m in S_n kann durch $m+1$ Punkte oder $m+1$ Räume S_{n-1}, welche unabhängig sind, bestimmt sein (Zus. Satz III, § 157 u. Satz II, § 159) und wird analytisch in dem einen wie dem andern Fall durch $m+1$ Lineargleichungen dargestellt, je nachdem die Variabelen Coordinaten von Punkten oder von Räumen von $n-1$ Dimensionen sind. Eine Gleichung mit n Veränderlichen hat somit eine doppelte geometrische Bedeutung. Auf dieser Verschiedenheit beruht das Princip der Dualität.

Wählt man eine Grundpyramide, so verstehen wir unter den Coordinaten eines Punktes P_0, mit Bezug auf sie, $n+1$ Grössen (Längen) x_i derart, dass

$$\varrho x_i = \mu_i \cdot p_i, \tag{6}$$

worin μ_i willkürliche von Null verschiedene Constante und p_i die normalen Abstände des Punktes von den Seiten der Pyramide sind.

Ebenso genügen die Coordinaten eines Raums S_{n-1} (Bem. I, § 169) den Relationen

$$\sigma u_i = \lambda_i \cdot q_i, \tag{7}$$

worin λ_i beliebige von Null verschiedene Constante und q_i die normalen Abstände der Scheitel der Grundpyramide von dem gegebenen Raum sind.

Hat man die Transformationsformeln zwischen dem Cartesianischen System und dem letzteren aufgestellt und eine passende Auswahl der Constanten in (6) und (7) getroffen, so findet man die Bedingung, unter welcher ein Punkt x_i in einem Raum u_i liegt, nämlich

$$\sum u_i x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{8}$$

Sind $m+1$ unabhängige Punkte von den Coordinaten $x_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m+1)$ gegeben, so lassen sich die Coordinaten eines jeden Punktes des von ihnen bestimmten Raumes S_m in die Form bringen

$$\varrho x_i = \sum \lambda_{(k)} x_i^{(k)},$$

worin λ_k $m+1$ Parameter sind.

Hat man die Systeme festgestellt, auf welche man sich zu beziehen hat, so bestimmt man wie in der descriptiven Geometrie die Darstellungsmethoden[1]) und wendet im weiteren Verlauf bald das eine bald das andre Coordinatensystem an je nach den Fragen, welche man behandeln will. Wir bemerken noch, dass man das Cartesianische System aus dem letzten System erhält, wenn eine der Seiten von $n-1$ Dimensionen der Grundpyramide ins Unendlichgrosse fällt.

Diese kurze Uebersicht genügt, den vollständig geometrischen Charakter unsrer Räume erkennen zu lassen.[2])

§ 195. *Die absolute Projectivität.*

Wenn auf der absoluten Graden (Hyp. I, § 18) vier Punkte gegeben sind, deren Abstände von dem Anfang durch die Zahlen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ dargestellt werden, so versteht man unter dem anharmonischen Verhältniss der vier Punkte die Doppelfunction

$$\frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4} = \varDelta. \tag{1}$$

Ist $\varDelta$ und ξ_1, ξ_2, ξ_3 gegeben, so kann man ξ_4 mittelst der eine endliche Anzahl mal angewendeten Grundoperationen berechnen und erhält:

$$\xi_4 = \frac{\xi_3(\varDelta\xi_1 - \xi_2) + \xi_1\xi_2(1 - \varDelta)}{\xi_3(\varDelta - 1) + \xi_1 - \xi_2\varDelta}.$$

Für unsern Zweck genügt es diejenigen unendlich grossen und unendlich kleinen Zahlen zu betrachten, welche mit den endlichen Zahlen eine Gruppe bilden, die sich in dem Sinn des Satzes m, § 93 der Einleitung in sich selbst transformirt, wie wir bei den Segmenten in der Bem. I, § 16 vorausgesetzt haben. Uebrigens gelten dieselben Betrachtungen für die ganze von uns gefundene Zahlenclasse.

1) Siehe des Verfassers: Geom. descrittiva a quattro dimensioni Atti R. Istit. Veneto 1882.
2) Siehe die Vorrede und Note I des Anhangs.

Da nun die Grundoperationen eindeutig sind und bei der Aenderung ihrer Gegenstände sich auch ihre Resultate ändern, so variirt, wenn man ξ_3 variiren lässt, auch ξ_4 und ξ_4 kann eine endliche oder unendlich grosse oder unendlich kleine Zahl der obigen Gruppe sein.

Es ist mithin klar, dass wenn drei Paar Elemente zweier Reihen ξ_1, ξ_1'; ξ_2, ξ_2'; ξ_3, ξ_3' gegeben sind, einem Element ξ_4 ein bestimmtes Element ξ_4' derart entspricht, dass

$$(2) \qquad \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \cdot \frac{\xi_2 - \xi_4}{\xi_1 - \xi_4} = \frac{\xi_1' - \xi_3'}{\xi_2' - \xi_3'} \cdot \frac{\xi_1' - \xi_4'}{\xi_2' - \xi_4'}.$$

Die Gleichung für die projective Beziehung ist wie gewöhnlich

$$(3) \qquad \alpha\xi\xi' + \beta\xi + \gamma\xi' + \delta = 0,$$

worin α, β, γ, δ von ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_1', ξ_2', ξ_3' abhängen. Auch in diesem Fall ist, wie man leicht sieht, der projective Zusammenhang zwischen stetigen Reihen von Elementen auf der Graden stetig und reciprok. Denn man erhält aus (3):

$$\xi' = -\frac{\beta\xi + \delta}{\alpha\xi + \gamma}, \quad \xi_1' = -\frac{\beta(\xi + \varepsilon) + \delta}{\alpha(\xi + \varepsilon) + \gamma}.$$

Der Unterschied ist

$$-\frac{\beta\xi + \delta}{\alpha\xi + \gamma + \alpha\varepsilon} + \frac{\beta\varepsilon}{\alpha\xi + \gamma + \alpha\varepsilon} - \frac{\beta\xi + \delta}{\alpha\xi + \gamma},$$

welcher, wenn ε kleiner als jede Zahl der Gruppe wird, Null zur absoluten Grenze hat. Mithin entsprechen zwei unbegrenzt nahen Elementen ξ, ξ_1 zwei ebenfalls unbegrenzt nahe Elemente ξ', ξ_1'.

Daraus folgt:

Man kann den projectiven Zusammenhang zweier Punktreihen herstellen, ohne dass sie dem V^ten Axiom des Archimedes genügen.

Anhang.

Historisch-kritische Untersuchungen über die Principien der Geometrie.

Da in unsrer Wissenschaft mehr als in andern ein eingehendes Studium fremder Werke geboten ist, so haben wir es für zweckmässig gehalten unsre Bemerkungen über die Hauptarbeiten, welche sich mit den Fundamenten der Geometrie beschäftigen, besonders über diejenigen, welche in diesem Jahrhundert erschienen sind, hier zusammenzustellen. Wir vervollständigen damit die Vorrede und die zu dem Text gemachten Anmerkungen und machen den Leser mit den Ideen bekannt, die bisher über diese Argumente die herrschenden waren, zeigen, wie sich diese Ideen entwickelten, von welcher Wichtigkeit sie sind und welche Schwierigkeiten sich ihnen entgegenstellten. Eine solche Untersuchung ist wahrlich nicht leicht zu führen; denn es handelt sich nicht um eine einfache Recension eines einzelnen Werks, sondern um einen Vergleich vieler Arbeiten, welche manchmal auf sehr verschiedene Art angelegt sind. Dazu kommt, dass wir nicht selten Kritik üben müssen. Wir haben desshalb nicht die Absicht, eine vollständige historisch-kritische Untersuchung dieser Arbeiten anzustellen, sondern nur auf die Punkte hinzuweisen, welche die wichtigsten sind und zu weiteren wissenschaftlichen Erörterungen Veranlassung geben können. Es wäre namentlich für die angehenden Mathematiker wie im Allgemeinen für alle wichtigen Argumente der modernen Mathematik sehr zu wünschen, dass ein solches Buch geschrieben würde. Aus der gut gegebenen Geschichte eines Gegenstandes kann man seine spätere Entwicklung und seine Verbindung mit andern Theorien leichter erkennen.[1])

Es versteht sich von selbst, dass wir hier die allgemeinen Bemerkungen der Vorrede nicht wiederholen; nur möge sich der Leser dieselben gegenwärtig halten. Wir bitten schon jetzt zu entschuldigen, wenn wir vielleicht öfter von den Mängeln als den Vorzügen fremder Werke sprechen, auch wenn sie durch andre Verdienste Achtung und manchmal Bewunderung verdienen.

---

1) Daraus geht hervor, dass wir nicht in jeder Frage zweiten Ranges unser Urtheil haben abgeben wollen. Ueber die in den Jahren 1890, 1891 bis zum Erscheinen unsers Buches publicirten Arbeiten haben wir nicht immer so berichten können, wie wir es gewünscht hätten (siehe Anm. 2 auf S. V). Um unser Urtheil über die Schriften eines Autors kennen zu lernen, muss man auch nachlesen, was wir über andre Arbeiten gesagt haben, welche mit ihnen in irgend einer Beziehung derselben Gruppe angehören.

Eine unparteiische und aufmerksame Kritik ist in der Mathematik wie bei jeder andern wissenschaftlichen Speculation ein wirksames Instrument zur Erforschung der Wahrheit, denn das Erkennen der Fehler erschwert ihre Wiederholung und erleichtert ihre Vermeidung. Wir sind andrerseits vollständig von dem Werth überzeugt, welchen alle gewissenhaften Arbeiten über dieses schwierige Thema haben, auch wenn sie nicht immer die nöthige Strenge in den Schlüssen zeigen und in jeder Einzelheit den gewünschten Zweck erreichen, da ja die Mathematik und speciell die Geometrie auch in den Principien voranschreitet und sich allmählig vervollkommnet. *Crelle* sagt, dass das Feststellen der Principien der Geometrie nicht weniger Schwierigkeiten bereitet, als die Entwicklung der complicirtesten Theorien: „Diese sind in die Höhe gewendet, jene in die Tiefe, und Höhe und Tiefe sind gleichermassen unbegrenzt und dunkel.“[1]) Gewiss ist, dass die Schwierigkeiten, auf welche man dabei stösst, viel mehr Zeit und Beharrlichkeit in Anspruch nehmen als Untersuchungen höherer Art, bei welchen eine neue und fruchtbare Idee schnell zu sehr wichtigen Resultaten führen kann. Dagegen hat es wenig oder keinen Werth Ideen über die Fundamente vorzubringen, wenn man nicht zeigt, dass sie thatsächlich verwirklicht werden können. Auch ein altes Princip in eine neue Form zu bringen, so dass gewisse Beziehungen desselben zu andern wichtigen Theorien hervortreten, ist schon ein Fortschritt. Solche Arbeiten werden daher nicht nach den Mängeln beurtheilt, an denen sie vielleicht leiden, als hauptsächlich nach den Erfolgen und Verbesserungen, welche sie wirklich erreicht haben, und den Ideen, auf welche sie sich stützen. Und da ein Autor Nichts veröffentlichen sollte ohne die Ueberzeugung irgend einen Vortheil erlangt zu haben und es sich bei diesen Argumenten um grossentheils bekannte Eigenschaften handelt, so muss, wie uns scheint, der Autor seine Ueberzeugung vertreten, damit der Leser seine Resultate besser beurtheilen kann, ohne jedoch die Verdienste Andrer zu verkleinern.

Bei der Beurtheilung der Fehler muss man berücksichtigen, dass sie verschiedener Art und nicht immer gleich wichtig sind, dass es auch Fehler gibt, an welchen nicht die Flüchtigkeit des Denkers, sondern der geschichtliche Standpunkt der Wissenschaft die Schuld trägt und dass solche Irrthümer in dem Sinn nützlich waren und noch sind, dass sie die Andern auf die Spur der Wahrheit bringen. *Gauss* hat z. B. in Folge seiner Kritik einiger Beweise des Postulats V *Euclid*'s die Ansicht vertreten, ein Beweis dieses Postulats sei unmöglich.[2]) Selbstverständlich müssen besonders bei solchen Arbeiten Fehler vermieden werden; man muss aber zwischen Fehler und Fehler unterscheiden. Es lässt sich ferner nicht verkennen, dass man bei diesen Forschungen von Anfang an mehr auf die Fruchtbarkeit der neuen Ideen achtet und achten muss, als darauf das Gebiet ihrer Gültigkeit genau festzustellen; dies zeigt im Uebrigen die historische Entwicklung der Wissenschaft auf das Deutlichste. Es wäre mithin

1) Journal von *Crelle* Bd. 45. Zur Theorie der Ebene. Diese Abhandlung wurde an der Berliner Academie im Jahre 1834 gelesen.

2) Gött. Gelehrte Anzeigen. 1816.

ungerecht, wollte man denjenigen, welche das Gebiet mit fruchtbaren Ideen besäen, das später Andre von Unkraut reinigen, jedes Verdienst absprechen; wir möchten ihnen eher ein Hauptverdienst zugestehen, da noch keine Wissenschaft ohne neue Ideen Fortschritte gemacht hat. So sind, um ein Beispiel anzuführen, in den „Geometrischen Untersuchungen“ *Lobatschewsky*'s zwei nicht kleine Fehler: Er stützt sich erstens stillschweigend auf die unendlich grosse Grade, so dass man glauben könnte, ausser der *Euclid*'schen Geometrie existire nur sein System, und dann hat er die Frage der Unmöglichkeit, das Postulat V *Euclid*'s zu beweisen, nicht klar gestellt. So hat *Euclid* die Möglichkeit seines Postulats nicht nachgewiesen, wie sehr auch die Entwicklung seiner Geometrie sie bestätigt, und so zieht er, wie wir schon in der Vorrede erwähnten, aus seinen Sätzen Schlüsse, welche aus ihnen in der Form, in welcher die Sätze gegeben sind, nicht hervorgehen. Gewiss muss man Fehler auch der Form zu vermeiden suchen; es wäre aber lächerlich desshalb zu behaupten, *Euclid* und *Lobatschewsky* hätten in die Luft gebaut, und widersinnig den grossen Antrieb zu bestreiten, welche diese grundlegenden Arbeiten der Geometrie als Wissenschaft gegeben haben.

Wir haben dies besonders betonen wollen, weil es auch eine Kritik gibt, welche die Arbeiten Andrer nur desshalb vernichten zu können glaubt, weil sich irgend ein Fehler gleichgültig welcher Art in ihnen findet und welcher es genügt, dass ein Satz einen Ausnahmsfall zulässt, dass eine Theorie irgend eine fehlerhafte Consequenz enthält, um sie für falsch zu erklären ohne zu beachten, dass der Satz in den andern Fällen und die Theorie ohne diese Consequenz von der grössten Wichtigkeit für die Wissenschaft sein können. Eine solche Kritik kann, auch wenn sie in gutem Glauben geübt wird, auf die Studirenden, welche sich mit Eifer in dem friedlichen Streit der Gedanken versuchen, nur einen verderblichen Einfluss haben, weil sie dadurch an einen verhängnissvollen Skepticismus gegen sich und ihre Lehrer gewöhnt werden.

Ebensowenig ist eine Kritik von Nutzen, welche nur zu loben weiss oder sich durch übertriebenes Zartgefühl davon abhalten lässt auch die Fehler, welche Erwähnung verdienen, hervorzuheben. Auch können wir nicht billigen, wenn man um jeden Preis grossen Männern Verdienste zuschreiben will, welche Andern zukommen, und zu diesem Zweck jedem Satz und jedem ihrer Gedanken eine besondere Auslegung gibt. Auch wir wollen, dass man in der Geschichte der Wissenschaft den erwähnten Ideen Rechnung trägt; es wäre aber ungerecht eine Theorie einem Autor zuzuschreiben, nur weil sich zufällig irgend ein Gedanke daran oder ein specieller Fall bei ihm vorfindet. Man darf nicht vergessen, dass man von keiner Theorie sagen kann: Prolem sine matre creatam. Dies gilt von einer Kritik, welche z. B. bei der Besprechung *Euclid*'s die Irrthümer oder die vermeintlichen Irrthümer seiner Bücher ohne sicheren Beweis schlechten Uebersetzern oder unzuverlässigen Commentatoren zuschreiben will, nur um damit seinen Ruhm zu erhöhen. Der Ruhm *Euclid*'s wird nicht kleiner, auch wenn sich in seinen berühmten Elementen nicht wenige Fehler vorfinden. Man muss sich auch hüten, sein Urtheil durch ein missverstandenes

Nationalitätsgefühl beeinflussen zu lassen. Wenn man auch begreift, dass es für eine angenehme Pflichterfüllung gilt die Verdienste der eigenen Landsleute hervorzuheben, besonders wenn sie von den Fremden nicht anerkannt sind, so darf dieses Gefühl doch der Wahrheit keinen Eintrag thun. Die Unparteilichkeit muss jedem andern Gefühl und jeder persönlichen Rücksicht voranstehen. Die Kritik soll vornehm, heiter, gewissenhaft und wohlwollend sein, sie soll den Irrthum nur im Interesse der Wissenschaft bekämpfen, den Verdiensten, dem Werth und der Fruchtbarkeit der Ideen oder Erfolge Andrer Anerkennung zollen. Eine solche Kritik verdient, auch wenn sie sich in der Auslegung oder dem Urtheil irrt, Achtung und Ermuthigung; wer sie nicht vertragen kann, zeigt, dass ihm der höhere Sinn abgeht und er mehr sich selbst als der Wissenschaft zugethan ist.

Nach der ganzen Anlage dieser Abhandlung verbietet es sich von selbst die vielen kleinen und grossen Bücher zu besprechen, welche sich mit den geometrischen Axiomen vom philosophischen Standpunkt beschäftigen; auf gewisse mit leichtem Sinn und geringer oder keiner Kenntniss des Gegenstandes abgegebene Urtheile, die sich manchmal von dem philosophischen Gebiet aus in den Kreis der Mathematik vorwagen, antwortet unser Buch schon allein. Wir verweilen auch nicht bei den mathematischen Werken, welche die geometrischen Axiome zu allgemein und unbestimmt behandeln, als dass man ihnen grossen Werth in der Geschichte der wichtigen Frage beimessen könnte, wenn auch die einen oder die andern oft richtige und scharfsinnige Bemerkungen enthalten mögen und ihre Lectüre von Nutzen sein mag. Ebensowenig beschäftigen wir uns hier besonders mit den Elementarbüchern der Geometrie — von einigen besseren haben wir schon in der Vorrede und den Anmerkungen zum Text gesprochen — oder mit den Arbeiten, welche die Principien der geometrischen Methoden betreffen; dagegen haben wir mit solchen zu thun, welche die Principien der Geometrie an sich allein und nicht Elementarfragen und diese Principien nur nebenbei behandeln.

Wir halten im Folgenden uns nicht streng an eine vorbestimmte Ordnung, sondern richten uns nach dem einzelnen Fall; nur achten wir mehr auf eine Eintheilung der Arbeiten in Gruppen nach den in ihnen vorwiegenden Ideen als auf eine chronologische Aufeinanderfolge.

Bis zu dem Ende des vorigen Jahrhunderts ist niemals, wie es scheint, die Gültigkeit der Axiome *Euclid*'s in Zweifel gezogen worden und man kann sagen, dass niemals Jemand von den Ideen und der Methode des grossen Griechen bei der Behandlung der Elemente abgewichen ist. Die Versuche das Postulat über die Parallelen zu beweisen gehen auf entfernte Zeiten zurück. *Geminus*, *Proclus*, *Ptolomaeus*, der Araber *Nassaradin* und *Clavius* gehören sicher zu den ersten, die solche Versuche anstellten.[1]) Es ist kaum zu glauben, dass man bis zum

1) *M. Cantor:* Vorlesungen über die Gesch. d. Math. S. 358; *H. Hankel:* Zur Gesch. der Math. S. 272; *Clavius:* Euclidis Elementorum, Frankfurt, 1654, I, S. 29—30. Man macht

Anfang dieses Jahrhunderts das Bedürfniss einer Reform der Principien der Mathematik und Geometrie nicht gefühlt hat. *Archimedes* betrachtete die Grade als die kürzeste zwischen zwei Punkten liegende Linie. Diese Eigenschaft als Definition der Graden wird heutigen Tages mit Recht von vielen Mathematikern verworfen, weil sie einen analytischen sehr complicirten Begriff enthält.[1]) Der grosse Syrakuser hat aber diese Eigenschaft der Graden in einem Postulat gegeben, ohne damit die Grade selbst definiren zu wollen; gegen das Postulat lassen sich dann freilich ähnliche Einwände erheben. Diese Definition wurde später von dem berühmten *Legendre* verschlechtert, welcher die Grade als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten bezeichnete, da man unter Weg nicht die Linie sondern nur die Länge der Linie verstehen kann.[2])

Leibniz beschäftigte sich eingehend als Philosoph und Mathematiker auch mit unsrem Problem, suchte einige Axiome *Euclid*'s zu beweisen und schlug verschiedene Definitionen für die Grade und die Ebene vor.[3])

Er definirt z. B. die Ebene, nachdem er die Kugel definirt hat, als Ort der von zwei gegebenen Punkten A und B gleichweit abstehenden Punkte und die Grade als Ort der von drei Punkten A, B, C gleichweit abstehenden Punkte. Man sieht also, dass auch *Leibniz* die Idee hatte, die Ebene und die Grade mittelst der Kugel zu erzeugen.[4]) Er betrachtete die Grade auch als eine Linie, deren Punkte sich nicht bewegen, wenn man zwei ihrer Punkte festhält, eine Definition, die schon vor *Leibniz* bekannt war. Am häufigsten aber benutzt er die Definitionen, dass die Ebene die Fläche ist, welche den Raum in zwei congruente Theile zerlegt, die Grade dagegen die Linie, welche die Ebene in congruente Theile zerlegt.[5])

Unter congruenten Figuren versteht er diejenigen, welche gleich und ähnlich sind. Diese Figuren sind in unsrem Sinn identisch, haben aber nicht immer denselben Sinn, obwohl dann *Leibniz* bei ihrer Definition hinzufügt,

---

oft *Euclid* den Vorwurf, die Axiome über die Grössen mit den geometrischen Axiomen vermengt zu haben, und in der That gibt man in vielen Uebersetzungen dem Postulat über die Parallelen die Nummer XI, in andern die Nummer XII. In der griechischen Ausgabe, welche mit einer lateinischen Uebersetzung von *Heiberg* (a. a. O.) veröffentlicht wurde, heissen die ersten Axiome *gewöhnliche Begriffe*, während die Postulate, deren es im Ganzen fünf sind, von ihnen getrennt aufgeführt werden.

Unter den gewöhnlichen Begriffen befindet sich das Axiom VIII „Zwei Dinge, welche zusammenfallen, sind gleich.“ Man weiss wirklich nicht, welche Bedeutung *Euclid* diesem Axiom hat beilegen wollen, da er doch später von Prop. IV Buch I an von dem Princip der Bewegung starrer Körper Gebrauch macht. Der obige Vorwurf trifft dagegen zweifellos *Legendre*, welcher in seinen Eléments de géométrie die Axiome über die Grössen mit den geometrischen Axiomen durcheinander mengt.

1) De sphaera et cylindro. Siehe darüber: *Du Bois Reymond:* Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung. Math. Ann. XV. 1879.

2) *Hoüel* (Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie. Paris, 1882) bemerkt mit Recht, dass die Autoren, welche eine solche Definition der graden Linie geben, consequentermassen das Postulat III des Archimedes als Definition der Ebene geben müssten nämlich: Die ebene Fläche ist die kleinste von allen Flächen, welche durch denselben Umfang begrenzt werden.

3) *Leibniz*' math. Schriften, herausg. von *G. J. Gerhardt*, Berlin 1849, Bd. 5. — Characteristica geometrica. Analysis geometrica propria. III. De analysi situ IV. in Euclidis πρῶτα.

4) Siehe auch den Brief an *Huyghens* a. a. O. Bd. II, S. 20.

5) A. a. O. Bd II, S. 174 und der Brief an *V. Giordano* Bd. I, S. 196.

dass man sie an jedem Ort (selbstverständlich in dem Raum von drei Dimensionen) einander substituiren kann.[1]) Die Gleichheit bezieht er auf den Flächeninhalt oder das Volumen oder wie wir uns ausdrücken auf die intensive Grösse und die Aehnlichkeit auf die Gestalt.

V. Giordano bemerkt dazu mit Recht, dass die Linie, welche die Ebene in der erwähnten Art theilt, auch eine Curve sein kann.[2])

Leibniz gibt eine Kritik der Definitionen und Axiome *Euclid*'s, versucht aber vergeblich einige Axiome zu beweisen. Er glaubt z. B. das Postulat über die Parallelen zu beweisen und bringt einige nicht durchweg genügende Beweise von *Proclus*.

P. Saccheri, Professor an der Universität zu Pavia, hinterliess uns 1733 ein sehr wichtiges Buch über Versuche, welche er über diesen Gegenstand angestellt hatte.[3]) Durch Professor *Beltrami* wurde das Buch in weiteren Kreisen bekannt.[4]) *Saccheri* betrachtet in der Ebene ein Viereck $ABCD$ mit zwei rechten Winkeln bei A und B, dessen Winkel bei C und D gleich sind und rechte, stumpfe oder spitze Winkel sein können. Die aus diesen drei Fällen sich ergebenden Hypothesen nennt er die Hypothesen des rechten, stumpfen und spitzen Winkels und beweist, dass, wenn eine der drei Hypothesen in einem einzigen Fall richtig ist, sie für jeden andern Fall gilt (Prop. V, VI u. VII). Er beweist dann, dass in dem rechtwinkligen Dreieck die Summe der beiden nicht rechten Winkel ebensogross, kleiner oder grösser als ein Rechter ist, je nachdem die Hypothese des rechten, spitzen oder stumpfen Winkels zu Grunde gelegt wird (Prop. IX). Und ferner: Wenn in einem beliebigen Dreieck ABC die Summe der Winkel ebensogross, kleiner oder grösser als zwei Rechte ist, so gelten bezüglich die Hypothesen des rechten, spitzen und stumpfen Winkels (Prop. XV) und dies gilt mithin nach Prop. IX für jedes Dreieck. Hier beweist offenbar *P. Saccheri* das viel später von *Legendre* gegebene Theorem: Wenn in *einem* Dreieck die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt, so ist sie auch in jedem andern Dreieck so gross.

Aus diesem kurzen Hinweis geht offenbar hervor, dass *Saccheri* die Theorie der Parallelen in ihrer ganzen Allgemeinheit erkannt hat, während *Legendre*, *Lobatschewsky* und *G. Bolyai* a priori ohne es zu wissen die Hypothese des stumpfen Winkels oder die *Riemann*'sche Hypothese ausgeschlossen haben. *P. Saccheri* war jedoch ein Opfer des Vorurtheils seiner Zeit, welche nur die

---

1) A. a. O. Bd. V, S. 172.

2) A. a. O. Bd. I, S. 198. *Vitale da Bitonto* las Mathematik an der Universität zu Rom. In seinem *Archimedes* definirt er die Grade als: „eine Linie, deren Theile immer dieselbe Lage wie zuerst behalten, wenn die Linie um ihre unbeweglichen Endpunkte gedreht wird". Er hält trotzdem die Definition *Euclid*'s für vorzüglich, benutzt aber in seinem *Euclide restituto* (Rom, 1686) eine Definition, nach welcher die Grade die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten ist, als leichter für die Fassungsgabe der Unerfahrenen.

3) Euclides ab omni naevo vindicatus etc. Mediolani 1733.

4) Un precursore italiano di *Legendre* e di *Lobatschewsky*: Rend. dell' Acc. dei Lincei, marzo, 1889. Neuerdings hat sich auch *P. Mansion* mit diesem wichtigen Buch beschäftigt (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1891).

Euclid'sche Geometrie als möglich anerkannte, und zerstörte trotz einer scharfsinnigen Untersuchung, die um so wirksamer war, als sie mit der *Euclid*'schen Methode geführt wurde, mit eigenen Händen das von ihm aufgerichtete Gebäude, indem er sich bemühte den Nachweis der Falschheit seiner beiden neuen Hypothesen zu bringen.

Bei der ersten gelingt ihm dies eines Grundfehlers wegen leicht, der in seinen Betrachtungen über diese Hypothese enthalten ist und sich in Prop. III vorfindet, in welcher er beweist, dass wenn (AC) und (BD) auf der Graden AB in A und B senkrecht stehen und die Winkel bei C und D rechte, stumpfe oder spitze sind, (CD) ebensogross, kleiner oder grösser als (AB) ist. Bei dem Beweis des zweiten Falls, welcher der Hypothese des stumpfen Winkels entspricht, benutzt er Prop. XVI des ersten Buchs *Euclid*'s, dass ein Aussenwinkel des Dreiecks grösser als jeder der gegenüberliegenden Innenwinkel ist, welche grade die Hypothese des stumpfen Winkels ausschliesst. Bei dem Beweis der Falschheit dieser Hypothese (Prop. XIV) stützt er sich auf Prop. XVII des ersten Buchs *Euclid*'s, dass die Summe zweier Winkel eines Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist, welche von der oben erwähnten Prop. XVI abhängt. Er benutzt diese Prop. auch in den beiden andern Fällen, und nimmt damit seinen Ausführungen viel von ihrer Allgemeinheit, da diese Eigenschaft von der unendlich grossen Graden abhängt.

Die Folgerungen aber, dass, wenn in nur einem Fall die Hypothese des stumpfen Winkels richtig ist, sie in jedem Fall gilt, dass, wenn in einem Dreieck die Summe der Winkel grösser als zwei Rechte ist, sie es in allen andern ist, sind mit einigen leicht zu entfernenden Mängeln bewiesen. Um so mehr bleiben die Eigenschaften bewiesen, welche sich auf die beiden andern Hypothesen beziehen.

Der Verfasser hat von Anfang an das Axiom, dass eine Grade durch zwei ihrer Punkte bestimmt wird, keiner Prüfung unterzogen; indessen wenn damit die erste *Riemann*'sche Form ausgeschlossen wird, so bleibt doch die zweite möglich.

Der Beweis der Falschheit der Hypothese des spitzen Winkels gelingt *Saccheri* nicht so leicht wie bei dem stumpfen; bevor er aber zu diesem Beweis übergeht, stellt er Betrachtungen an, die einigen Ausführungen *Lobatschewsky*'s sehr ähnlich sind. Der Fehler dieses Beweises liegt, wie *Beltrami* bemerkt, hauptsächlich in Prop. XXXVII, in welcher *Saccheri* den falschen Satz zu beweisen sucht, dass die Curve CD, der Ort der Endpunkte der Lothe von gegebener Länge, welche bei der Hypothese des spitzen Winkels auf dem gradlinigen Segment (AB) errichtet werden, der gegenüberliegenden Basis (AB) gleich sei, ein Satz, welcher die Hypothese des rechten Winkels in sich enthält.

Aus diesem kurzen Bericht erhellt, dass, wenn *Saccheri* kein grosser Bahnbrecher in der Wissenschaft der Geometrie gewesen ist, er doch ein würdiger Vorläufer *Legendre*'s, *Lobatschewsky*'s und *Riemann*'s war.

Die Versuche, das Postulat V *Euclid*'s zu beweisen, dauerten fort; wir

bemerken unter andern die Arbeiten *Bertrand*'s von Genf und *Legendre*'s.[1]) Der letztere glaubte in seinen Éléments de géométrie, welche zuerst 1794 in Paris gedruckt wurden, von der dritten bis zur achten Ausgabe seines Buches die Theorie der Parallelen ohne irgend ein specielles Postulat auseinandergesetzt zu haben. Als er jedoch bemerkte, dass sein Beweis nicht ohne Fehler war, kehrte er in der neunten Ausgabe zu dem erwähnten Postulat zurück, in der zwölften aber und sonst behauptete er wieder von Neuem, er habe mittelst weiterer Betrachtungen den gewünschten Beweis geben können.[2])

Die freilich ergebnisslosen Bemühungen der Mathematiker besonders *Legendre*'s das *Euclid*'sche Postulat zu beweisen müssen ohne Zweifel die Aufmerksamkeit der Forscher auf dieses dornenvolle Argument gelenkt haben. Und in der That war *Gauss* der erste, welcher bei der Untersuchung einiger Beweise dieses Postulats die Ansicht aussprach, es sei überhaupt nicht zu beweisen. Er wiederholt diesen Gedanken auch in dem an *Bessel* gerichteten Brief vom 27. Januar 1829. Die Gestalt gewinnende Idee aber einer daraus folgenden Geometrie ohne das Postulat findet sich erst in den Briefen an *Schumacher* von 1831 bis 1846.[3]) Aus dem an *Bolyai* 1799 geschriebenen Brief, von dem *Schering* berichtet, geht nicht mit Sicherheit hervor, dass *Gauss* sich damals mit der nicht *Euclid*'schen Geometrie beschäftigt hat. Bis zum Beweis des Gegentheils können wir daher nicht behaupten, dass sich *Gauss* vor *Lobatschewsky* mit einer solchen Geometrie beschäftigt hat um so mehr als soviel wir wissen, keine andre Schrift des grossen Mathematikers nach seinem Tod über diesen Gegenstand veröffentlicht worden ist.[4]) Wir halten es daher für unsre Pflicht die Priorität in dieser Theorie mit dem Postulat über die beiden Parallelen dem russischen Mathematiker zuzuweisen, der diese Geometrie mit einer rein geometrischen Methode entwickelte, dabei jedoch, wie schon gesagt, die Hypothese der unendlichgrossen Graden wählte, aus welcher unter Ausschluss des Postulats *Euclid*'s über die Parallelen hervorgeht, dass man durch einen Punkt zwei Parallelen zu einer gegebenen

1) *Bertrand:* Développement nouveau de la partie élém. des math. Genf, 1778. Bd. II. 17—19.

2) Vorrede zur 12. Ausgabe. Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles. Mém. de l'Ac. Paris, 1833. Von den Elementen *Legendre*'s sagt, trotzdem sie nicht ohne Verdienst sind und neue wichtige Begriffe enthalten, *Hoüel* (a. a. O. S. 5): „*Legendre* durch das Beispiel seiner Landsleute fortgerissen hat die wahrhaft geometrischen Methoden der Alten nicht in ihrer vollen Reinheit zu bewahren gewusst und hat sie dadurch von Grund aus geändert, dass er das arithmetische Verfahren der modernen Analysis mit ihnen vermengte.“ Man kann noch hinzufügen, dass die Beweise nicht immer mit derselben Strenge wie bei *Euclid* geführt werden.

3) Siehe *Schering: Gauss*' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr, 1877. *Gauss* zum Gedächtniss von *Sartorius von Waltershausen*, Leipzig 1856.

4) Wir bemerken noch, dass *Wolfgang Bolyai* sehr befreundet mit *Gauss* war und sein Sohn *Johann* in dem berühmten Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens trotzdem nichts über die Priorität von *Gauss* in dieser Frage sagte. Wie die Beweise des Postulats über die Parallelen *Gauss* auf den Gedanken von der Unbeweisbarkeit des Postulats gebracht haben (Gött. Gel. Anz. 1816), so hat dieser Gedanke sehr wahrscheinlich *Lobatschewsky* und *Bolyai* dazu geführt, die Fundamente der Nicht-*Euclid*'schen Geometrie aufzustellen. Ein Postulat kann unabhängig von andern, geometrisch aber durch andre nicht zu ersetzen sein.

Graden ziehen kann.[1]) In seiner in *Crelle's* Journal abgedruckten Abhandlung kommt er zu dem Schluss, dass die imaginäre Geometrie auf einer allgemeineren Ebene als der Ebene der gewöhnlichen Geometrie gedacht ist, dass die gewöhnliche Geometrie ein specieller Fall der ersteren und ihre Differenzialgeometrie ist und dass die Werthe der Differenzialelemente der Curven, Flächen und Körpervolumina dieselben in der imaginären wie in der gewöhnlichen Geometrie sind. In den „geometrischen Untersuchungen" erhält er auch das Resultat, dass die Geometrie der sogenannten Grenzfläche identisch mit derjenigen der gewöhnlichen Ebene ist. Er fügt hinzu, dass es ausser den astronomischen Beobachtungen kein andres Mittel gibt, um über die Genauigkeit der gewöhnlichen Geometrie zu entscheiden, dass man den Unterschied zwischen der Summe der Winkel eines Dreiecks und zwei Rechten in grösseren Dreiecken suchen müsse und dass diese Summe in den grössten gemessenen astronomischen Dreiecken nicht einmal um den hundertsten Theil einer Secunde von zwei rechten Winkeln abweicht. Die Geometrie *Lobatschewsky's* würde daher, auch wenn sie in der äusseren Welt wahr wäre, nur bei astronomischen Beobachtungen Verwendung finden, während die *Euclid'*sche Geometrie für die gewöhnliche Praxis genügt und vorzuziehen ist.

J. Bolyai entwickelte 1832 denselben Gedanken.[2]) Es ist zu bemerken, dass er mit dem Namen: „scientia absolute vera" nicht ausdrücken will, dass die nicht *Euclid'*sche Geometrie absolut wahr sei, sondern unter diesem Namen diejenige versteht, welche beide Geometrien umfasst. Denn er sagt:

„Man hat also eine *ebene Trigonometrie a priori*, in welcher nur das System selbst *unbekannt* bleibt, und man kennt daher nur die *absoluten* Grössen der Ausdrücke nicht, ein *einziger* bekannter Fall würde jedoch offenbar das ganze System festlegen. Die sphärische Trigonometrie steht mithin absolut fest."

Sie kann nur wenigstens aus dem Grund nicht für unbedingt wahr gehalten werden, weil *Bolyai* die unendlich grosse Grade gelten lässt.

Zu den Arbeiten der beiden genannten Mathematiker gesellt sich *Battaglini's* „Sulla geometria immaginaria".[3]) Der berühmte Verfasser stellt auf

---

1) Die Untersuchungen *Lobatschewsky's* wurden in dem Kasan'schen Boten 1829 gedruckt, dann in den Memoiren der Universität Kasan von den Jahren 1836—37 unter dem Titel: *Neue Principien der Geometrie auf einer Theorie der Parallelen*, später in dem Journal von *Crelle* 1837 unter dem Titel: *Die imaginäre Geometrie* und in seinen in Berlin 1840 veröffentlichten: *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallelen*, und schliesslich in seiner 1855 zu Kasan gedruckten *Pangéometrie*, welche von *Battaglini* in seinem Journal und auch in Einzelausgabe (Neapel, 1814) in das Italienische und von *Hoüel* a. a. O. ins Französische übersetzt wurde.

2) Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens als Anhang zu des Vaters Abhandlung „Tentamen juventutem studiosam matheseos purae etc." Maros-Vásàrhely, 1832; italien. Uebersetzung von *Battaglini*, Neapel, 2. Ausg., 1875; französische von *F. Schmidt*: Mém. de la Soc. de Bordeaux, Bd. V und auch in Einzelausgabe, Paris, 1868. Siehe auch *Frischauf:* Elemente der abs. Geometrie nach *J. Bolyai* bearbeitet, Leipzig, 1872. Ueber die Arbeiten *W. Bolyai's* siehe die von *Schmidt* in der obigen Uebersetzung gegebenen Notizen.

Es ist uns unmöglich die Priorität *J. Bolyai's* bezüglich *Lobatschewsky's* in einigen speciellen Fragen festzustellen, da wir des letzteren in russischer Sprache in dem Kasan'schen Boten veröffentlichte Untersuchungen nicht kennen.

3) Rendiconti della R. Acc. di Napoli, Juni 1867.

analytischem Weg das Princip der neuen Theorie der Parallelen für die Ebene wie für den Raum fest und kommt auf verschiedene Art zu den Beziehungen zwischen den Theilen eines Dreiecks in dieser Geometrie. Er findet zuerst die Function, welche die Rotation um einen Punkt p in einer Ebene P ausdrückt, mittelst welcher man von einer gegebenen Graden $\mathfrak{Q}_0$ zu einer Graden $\mathfrak{Q}_z$ übergeht. Aehnlich ist es mit der Rotation einer Ebene des Raums und dem Gleiten eines Punktes auf der Graden. Er führt dann den Begriff der idealen Punkte einer Graden ein, welche auf ihr durch diejenigen Graden gegeben sind, die durch einen Punkt gehen und nicht in dem Winkel des Parallelismus bezüglich des gegebenen Punktes enthalten sind [1]) und gibt einige wichtige Eigenschaften derselben an.

Die Idee von *Leibniz*, die Ebene und die Grade mittelst der Kugel zu erzeugen wird von *W. Bolyai* in einer neuen Richtung in der Exposition der Principien der Geometrie entwickelt. [2]) Da wir seine Publicationen nicht im Original haben lesen können, so entnehmen wir einige Notizen dem citirten Werk *Hoüel's*.

„Wenn A und B, A' und B' zwei Systeme von Punkten sind, so kann man sich denken, dass jedes dieser Systeme einem beliebigen körperlichen System zugehöre. Wenn man eine dieser Figuren so auf die andre bringen kann, dass, wenn A auf A' gelegt wird, B mit B' zusammenfallen kann, so sagt man, ihre *Abstände* seien *gleich*.“

Darauf gibt er die Definition der Kugelfläche als der Fläche, deren Punkte *gleichen Abstand* vom Centrum haben. „Eine Kugelfläche trennt den Raum in zwei Theile, einen *inneren* und einen *äusseren*. Ein Punkt kann nicht von dem einen zu dem andern dieser Theile übergehen ohne die Kugelfläche zu treffen.“

„Eine Kugelfläche bewegt sich in sich selbst, wenn man sie um ihr Centrum rotiren lässt.“

„Zwei Kugelflächen mit verschiedenen Centren können nicht zusammenfallen. Mit einem gegebenen Centrum lässt sich immer eine Kugelfläche beschreiben, welche durch einen gegebenen Punkt geht.“

„Man kann von einem gegebenen Centrum aus eine Kugelfläche beschreiben, welche in ihrem Innern eine beliebige gegebene Figur von endlichen Dimensionen einschliesst.“

„Es seien zwei Kugelflächen S und S' mit den Centren O und O' derart gegeben, dass jede durch das Centrum der andern geht. Da ein Theil jeder dieser Kugelflächen im Innern der andern liegt, so haben sie nothwendiger Weise gemeinschaftliche Punkte. Wenn A einer dieser Punkte ist und man lässt die

---

1) Dieser Winkel ist die Hälfte des Winkels, den zwei von einem beliebigen Punkt des endlichen Gebiets der Ebene zu der gegebenen Graden parallel gezogenen Graden miteinander machen. Er hängt von dem Abstand des Punktes von der Graden ab.

2) A. a. O. und: Kurzer Grundriss eines Versuchs I. die Arithm. u. s. w. II. in der Geometrie die Begriffe der graden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen u. s. w. Maros Vásárhely, 1851.

Gesammtheit der beiden Kugeln um ihre beiden Centren rotiren, von denen vorausgesetzt wird, dass sie festliegen, so beschreibt A den Ort der den beiden Kugelflächen gemeinschaftlichen Punkte. Dieser Ort ist eine geschlossene Curve C, welche in sich selbst gleitet und *Kreis* genannt wird."

„Wenn die Figur derart rotirt, dass O nach O' kommt und O' nach O, so fällt S mit S' zusammen und S' mit S. Der Kreis C kommt daher wieder in seine erste Lage. Mithin kann der Kreis durch Rotation zur Deckung mit sich selbst gebracht werden."

„Wir beschreiben mit den Centren O und O' zwei andre Kugelflächen S_1, S_1', welche einander gleich sind und bezüglich die Kugelflächen S und S' einhüllen. Jedes der Centren O und O' liegt im Innern der beiden Kugelflächen, woraus man leicht schliesst, dass die beiden Kugeln, weil sie einen inneren Theil gemein haben, sich nothwendiger Weise schneiden müssen. Man sieht ebenso, dass ihr Schnitt ein neuer Kreis C_1 ist, welcher in sich selbst gleiten und durch Rotation zur Deckung mit sich selbst gebracht werden kann."

„Construirt man so zwei Reihen gleicher Kugelflächen, welche sich stetig bis in die Unendlichkeit ausdehnen, so wird der Ort der Kreise, in welchen sie sich zu je zweien schneiden, sich unbegrenzt ausdehnen und eine Fläche bilden, welche in sich selbst gleiten kann, wenn man sie um die Punkte O und O' rotiren lässt und welche durch Rotation zur Deckung mit sich selbst gebracht werden kann; diese Fläche nennen wir eine *Ebene*."

„Wenn man die Figur umdreht und O nach O' und O' nach O bringt, so lässt sich dies so ausführen, dass ein Punkt A des Kreises C in die Anfangs eingenommene Lage zurückkehrt. Auf der einen und der andern Seite von A legen sich die Punkte des Kreises zu je zweien die einen auf die andern und vertheilen sich so symmetrisch bezüglich A. Wenn man mit M und M' zwei beliebige dieser symmetrischen Punkte bezeichnet, so kann man sie als die gleichzeitigen Lagen zweier beweglicher Punkte betrachten, welche von A ausgehen und den Kreis in entgegengesetztem Sinn durchlaufen. Diese müssen sich nothwendiger Weise in einem Punkt B treffen, welcher mit A den Kreis in zwei Hälften AMB, $AM'B$ theilt, welche sich zur Deckung bringen lassen. Die Umdrehung der Figur kann als das Product einer halben Rotation um die beiden Punkte A und B angesehen werden, welche bei der Drehung unbeweglich bleiben."

„Bei der halben Rotation der Figur um A und B beschreibt jeder Punkt m der zu dem Kreis c gehörigen Ebene einen Halbkreis und begibt sich in einen Punkt m' des letzteren Kreises und so lange dieser Kreis sich nicht auf nur einen Punkt reducirt, kann er nicht in seine ursprüngliche Lage zurückkehren, ehe er die ganze Umdrehung vollendet hat."

„Nun gibt es in jedem Kreis c zwei Punkte, welche sich nach der ersten Rotation in ihrer ursprünglichen Lage befinden. Diese Punkte haben daher zwei Kreise Null beschreiben müssen, d. h. sie haben während der Rotation ihre Lage nicht verändert."

„Die Gesammtheit aller dieser Punkte bildet eine Linie, welche bei der Rotation um zwei ihrer Punkte unbeweglich bleibt. Diese Linie heisst *grade Linie.*“

Auf diese Art und stets mittelst der Bewegung gibt *Bolyai* die Eigenschaften, dass die Grade in sich selbst gleiten kann und dass zwei Grade zusammenfallen, wenn sie zwei Punkte gemein haben. Analog verfährt er bei den Eigenschaften der Ebene.

Obwohl diese Theorie *Bolyai*'s, wie *Hoüel* bemerkt, dunkle Punkte aufweist (und sie hat in der That so wie sie dargelegt ist viele Lücken), so haben wir doch diesen Auszug gebracht, weil dasselbe Thema später von einigen andern Autoren behandelt wird, welche die Arbeit *Bolyai's* nicht gekannt haben. Man sieht nicht selten bei diesen Forschungen, dass Autoren dieselben Ideen wie andre entwickeln, ohne die früheren Arbeiten zu kennen, ihre Fehler zu verbessern und ihre Lücken auszufüllen; manchmal fügen sie noch neue Fehler und neue Lücken hinzu.

Lobatschewsky erklärt in seiner Pangeometrie, er habe vorgezogen die Geometrie mit der Kugel und dem Kreis zu beginnen und definirt die Ebene genau so wie *Bolyai* und die Grade als geometrischen Ort der Durchschnitte zweier Reihen gleicher concentrischer Kreise, welche alle in einer Ebene liegen. Er fügt jedoch nichts Weiteres hinzu und wir wissen nicht, ob er in einer früheren Arbeit seine Methode bekannt gegeben hat.

Wir werden in der Folge von dieser Richtung sprechen und bemerken nur noch, dass die beiden genannten Autoren nicht von dem Begriff des Abstandes, sondern des Punktepaares ausgehen.

Der erste, welcher uns eine gründliche Erörterung der Principien der Geometrie gegeben hat, war *Riemann* in seiner Abhandlung: „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen“, welche er bei seiner Habilitation an der philosophischen Facultät der Universität zu Göttingen 1854 überreichte und welche nach seinem Tod 1867 veröffentlicht wurde.[1]) Diese Abhandlung hat nicht nur die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen und besonders auf diejenigen einer constanten Krümmung gelenkt, in welchen die dem gewöhnlichen Raum entsprechende Mannigfaltigkeit als specieller Fall enthalten ist, sondern hat auch auf die Möglichkeit eines andern Geometriesystems hingewiesen. In diesem ist die Grade endlich, d. h. man kann von einem Punkt keine Parallele zu einer gegebenen Graden ziehen; dabei bleiben aber die übrigen Axiome *Euclid*'s unverändert und setzt man sich mit der thatsächlichen Erfahrung nicht in Widerspruch.

Riemann ist in seiner Definition des Begriffs „Grösse“ dunkel. Er spricht von „*Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen*“ und dass das Messen „*ein Mittel erfordert die eine Grösse als Massstab auf die andre fortzutragen*“. Hier benutzt er, da er keine andre Erklärung gibt, den Begriff der Bewegung starrer Körper in rein abstracten Mannigfaltigkeiten. Er geht auch von der Idee des Stetigen

1) Abh. der Kön. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Bd. XIII, 1867. — *B. Riemann's* gesammelte Math. Werke; herausg. v. *H. Weber*, Leipzig, 1879.

und Unstetigen aus, ohne sie zu definiren (I, 1), setzt dann aber stillschweigend das Zahlencontinuum und die Stetigkeit der Functionen im Allgemeinen als bekannt voraus (II, 2). „*Die einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit*“ ist dadurch unterschieden, dass von einem Element (Punkt) aus ein stetiger Fortgang nach zwei Seiten möglich ist, vorwärts und rückwärts. Wie man sieht ist dies abstract genommen keine gut bestimmte Definition, weil weder *Seiten*, noch *vorwärts* noch *rückwärts* und ebensowenig *stetig* definirt werden.

Er spricht dann von einem „*veränderlichen Stück*“ einer Mannigfaltigkeit einer Dimension, ohne zu sagen, was er unter „*Stück*“ einer solchen Mannigfaltigkeit versteht (I, 3).

Hätte *Riemann* seine Begriffe besser bestimmen wollen, ehe er das Zahlencontinuum $(x_1 x_2, \ldots x_n)$ und die Stetigkeit der Functionen annimmt, welche er später zur Ermittlung der Massbeziehungen einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen benutzt, so hätte er unsrer Ansicht nach die sämmtlichen ersten Paragraphen durchaus umändern müssen.[1]) Er ist auch an vielen andern Stellen seiner Arbeit dunkel.

Nachdem er die Erzeugung einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen gegeben hat, sucht er zu beweisen, dass das Element der Mannigfaltigkeit durch n stetige unabhängige Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmt wird und dass umgekehrt n Grössen $x_1, \ldots, x_n$ ein einziges Element der Mannigfaltigkeit bestimmen. Er setzt auch stillschweigend voraus, dass der Zusammenhang zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit und dem Zahlencontinuum $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stetig sei, d. h. dass einer unendlich kleinen Aenderung des Elements eine unendlich kleine Aenderung des Continuums $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ entspricht und umgekehrt, wobei er unter unendlich klein das potentiale und nicht das actuelle unendlich Kleine versteht.

Dies ist im Grund die *erste* Hypothese, die *Riemann* einführt. Er erklärt ausführlich in Kapitel II, dass wesentliches Kennzeichen einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen die Bestimmung des Elements mittelst n Grössen (Coordinaten) sei. *G. Cantor* bemerkte dagegen, dass dies Kennzeichen nicht genügt, weil auch die Stetigkeit des Zusammenhangs zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit und den Werthesystemen des Continuums $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nöthig ist, weil man, falls diese Stetigkeit nicht gelten sollte, die Bestimmung der einzelnen Elemente der Mannigfaltigkeit auf eine einzige reelle und stetige Variable oder Coordinate reduciren könnte, derart, dass ohne diese Bedingung die Anzahl der unabhängigen rellen und stetigen Coordinaten, welche zur alleinigen und vollständigen Bestimmung der Elemente einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen dienen, auf eine willkürliche Anzahl von Veränderlichen zurückgeführt werden kann.[2]) *Cantor* (Gött. Nachr. 1879, S. 127) und *Lüroth* haben später strenge Beweise geliefert, dass diese Bedingung zur Bestimmung der Mannigfaltigkeit auch ausreichend ist.[3])

1) Siehe unsre Einleitung.
2) *Crelle*'s Journal. Bd. 84, 1878. Franz. Uebers. in den Acta Math. Bd. II.
3) Mit diesem Gegenstand haben sich auch *Jürgens, Thomae* und *Netto* beschäftigt.

Die *zweite* Hypothese *Riemann's* bezieht sich auf die Unabhängigkeit der Länge der Linien vom Ort; es ist mithin, wie er sagt, „*jede Linie durch jede messbar*".[1]) Bei der Bestimmung der Linie nach *Riemann* müssen die Coordinaten ihrer Punkte Functionen einer Variablen sein. Wenn wir ihn richtig verstehen, setzt er hier solche Functionen voraus, dass die von ihnen dargestellten Linien durch eine beliebige dieser Linien messbar seien. Die obige Hypothese bezieht sich daher nicht auf die Starrheit der Linie, sondern nur auf die Beibehaltung ihrer Länge.

Um diese Hypothese analytisch aufzustellen, nimmt er an, das Linienelement sei eine homogene Function ersten Grades in den dx_i, welche unverändert bleibt, wenn man das Vorzeichen aller dx_i ändert und deren Constanten stetige Functionen der x_i sind.

Die *dritte* Hypothese drückt aus, dass das Linienelement der Mannigfaltigkeit der Quadratwurzel aus einer ganzen homogenen und positiven Function zweiten Grades der Grössen dx gleich ist und dass in dieser Function die Coefficienten stetige Functionen der Grössen x sind.

Die *vierte* Hypothese lässt die *constante Krümmung* der Mannigfaltigkeit zu, welche der Eigenschaft der Möglichkeit des Aufeinanderlegens der Theile der Mannigfaltigkeit entspricht.

Diese Hypothesen sind wie man sieht geometrisch nichts weniger als einfach oder gar anschaulich. Die Methode ist indirect; denn wüsste man nicht, dass das Linienelement für den *Euclid*'schen Raum $ds = \sqrt{\Sigma dx^2}$ ist, so würde es Niemand in den Sinn kommen, diese Hypothese oder die Hypothese zu wählen, dass das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einem Differenzialausdruck vierten Grades ausgedrückt wird.[2])

Die Hypothese der constanten Krümmung reicht allein für die Geometrie nicht aus, da diese den Daten der Erfahrung entsprechen muss. *Gauss* hat nachgewiesen, dass die Krümmung einer Fläche sich nicht ändert, wenn sie ohne Bruch oder Auseinanderziehen gebogen wird oder wenn sie, wie man sagt, biegsam aber nicht ausdehnbar ist und daher die Massverhältnisse dieselben bleiben. Man muss jedoch beachten, dass bei dem Biegen einer Fläche auf eine andre von derselben Krümmung die erste die zweite mehreremal, z. B. eine endliche oder unendlich grosse Anzahl mal bedecken kann, wie es bei der Ebene und dem Cylinder der Fall ist. Die Geometrie der zweiten Fläche ist daher nur dann mit derjenigen der ersten identisch, wenn man die zweite als eine endliche oder unendlich grosse Anzahl verschiedener Flächen betrachtet, die eine einzige Fläche bilden; denn betrachtet man sie nur als eine einzige und einfache Fläche, so könnten die Eigenschaften der Lage auf derselben ver-

---

1) Er drückt sich so aus: Massbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Grössen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei; also *jede Linie durch jede messbar sei* (II, 1).

2) *Riemann* selbst sagt: „Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Coordinaten ausdrückt, $ds = \sqrt{\Sigma dx^2}$; der Raum ist also unter diesem einfachsten Fall enthalten."

schieden sein. Soll z. B. der Cylinder die ganze *Euclid*'sche Ebene darstellen, so muss man ihn so betrachten als ob es unendlich viele nicht zusammenfallende cylindrische Flächen wären, welche eine einzige Fläche bilden. Man überzeugt sich davon, wenn man die Ebene in ebensoviele gleiche ebene Streifen theilt und zuerst einen solchen Streifen und dann die übrigen um den Cylinder biegt. Die Geometrie des einfachen Cylinders entspricht aber durchaus nicht der Ebene und stimmt nicht mit den Ergebnissen der Erfahrung, insofern man in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes zwei geodätische Linien construiren kann z. B. eine Erzeugende und eine Schraubenlinie derart, dass sie in dieser Umgebung zwei Punkte gemein haben, während in dem Gebiet unsrer Beobachtungen zwei Grade der Ebene zwei Punkte nicht gemein haben können, ohne zusammenzufallen.

Die Unzulänglichkeit der constanten Krümmung für den gewöhnlichen Raum oder den Raum von n Dimensionen tritt noch deutlicher bei unserem allgemeinen Raum hervor. Denn in diesem Raum kann man den gegebenen Raum nicht mit einer Mannigfaltigkeit derselben Krümmung von Punkten von drei (oder n) Dimensionen vertauschen, weil durch zwei Punkte des allgemeinen Raums höchstens eine geodätische Linie nämlich die Grade geht.

Wir haben dies hier angeführt, damit man nicht glaubt, dass die Formen, welche die Ebene annimmt, wenn man sie auf verschiedene Art biegt, immer als *Euclid*'sche Ebenen betrachtet werden können, denen alle geometrische Eigenschaften der durch die Erfahrung gegebenen Ebene zukommen. Man kann nur sagen, dass die metrische Geometrie immer dieselbe bleibt. Die Ebene im allgemeinen Raum ist daher nur eine, obgleich es in ihm andre Flächen von zwei Dimensionen von constanter Krümmung gleich Null gibt. Wir bemerken noch, dass diese Frage für den allgemeinen Raum nicht existirt, weil er sich nicht biegen lässt insofern eine solche Operation eine weitere Dimension erfordert.

Die Hypothesen *Riemann*'s bestätigen nicht nur diejenige *Lobatschewsky*'s, sondern *Riemann* hat auch gezeigt, dass der Raum, auch wenn er unbegrenzt ist, endlich sein kann. Dieses ist unsers Erachtens das wichtigste geometrische Resultat der Abhandlung *Riemann*'s, obgleich man jetzt auf eine viel einfachere Art zu demselben gelangen kann.

Der erste aber, welcher den mathematischen Begriff der Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen entwickelt hat, war *H. Grassmann* in seiner schon citirten *Ausdehnungslehre*, welche zum ersten Mal 1844 veröffentlicht wurde. Die verwickelte und im Anfang oft unbestimmte Ausdrucksweise auch die neue symbolische Rechnungsweise, mit welcher er sich hauptsächlich beschäftigt, sind daran schuld, dass einige tiefe Ideen, welche sich bei ihm finden, nicht hinreichend anerkannt und später von Andern unter einer passenderen Form, die sich wenigstens für die Entwicklung dieser Ideen besser eignete, eingeführt worden sind. [1]) Auch *Grassmann* beschäftigte sich in Etwas mit den Prin-

1) Siehe die Note I über die Definitionen von Raum und Geometrie von n Dimensionen.

cipien der Geometrie; wir werden später auf seine darauf bezüglichen Ideen eingehen.

Zu der genannten Arbeit *Riemann*'s gesellt sich *Beltrami*'s Abhandlung „Sulla teoria degli spazî a curvatura costante“[1]), welche die erstere vervollständigt und klarer macht und ihrerseits wieder mit einer andern früheren[2]) und der berühmten Schrift desselben Autors zusammenhängt, welche wir auf dem Titelblatt unsres Buches citirt haben. In der zweiten kommt er zu dem sehr bemerkenswerthen Resultat, dass nur die Flächen, welche auf einer Ebene derart darstellbar sind, dass jedem Punkt ein Punkt und jeder geodätischen Linie eine grade Linie entspricht, Flächen sind, deren Krümmung überall constant ist. Wenn diese Krümmung Null ist, so unterscheidet sich das Gesetz des Zusammenhangs nicht von der gewöhnlichen Homographie; ist sie nicht Null, so lässt sich das Gesetz auf die Centralprojection auf die Kugel und ihre homographischen Transformationen zurückführen. Dieser Satz steht in engem Zusammenhang mit den Prinipien der ebenen Geometrie, wie *Klein* gezeigt hat.[3])

In dem Saggio sulla Geometria Non-Euclidea geht *Beltrami* von einer Formel aus, welche das Quadrat des Linienelements einer Fläche darstellt, deren Krümmung überall constant und negativ ist und welche er *pseudosphärische Fläche* nennt. Er kommt dabei zu dem Hauptergebniss, dass die Geometrie der pseudosphärischen einfach zusammenhängenden Flächen in dem *Euclid*'schen Raum mit der ebenen Geometrie *Lobatschewsky*'s identisch ist, indem er beweist, dass in einer solchen Geometrie zwei Punkte immer eine Grade bestimmen.[4])

Beltrami hat eine Methode angegeben, einen Theil der Pseudokugel oder besser einen Theil der Rotationsfläche, welche den Pseudokugeln zum Typus dient, annähernd zu construiren.[5])

In der ersten oben citirten Abhandlung dehnt er diese Resultate auf die analytischen Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen aus und legt dabei das Linienelement unter der Form

$$(1)\qquad ds = \frac{R\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}}{x}$$

zu Grund, in welcher die $n+1$ Variabelen $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ an die Beziehung

$$(2)\qquad x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$$

gebunden sind. Er beweist, dass die Mannigfaltigkeit in dem durch die Gleichung (2) mit Ausschluss von x bestimmten *Grenzraum* unter der Voraus-

1) Annali di Mat., Serie II, Bd. II, 1868; franz. Uebers. von *Hoüel* in den Annales de l'École normale sup., 1869.

2) Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengono rappresentate da linee rette. Ann. di Mat., Serie I, Bd. VII. 1866.

3) Ueber die sogenannte nicht-*Euclid*'sche Geometrie. Math. Ann. Bd. VI, S. 135.

4) Er stützt sich dabei auf die analoge Eigenschaft des *Euclid*'schen Systems. Wir haben diese Eigenschaft direct und auf rein geometrischem Weg bewiesen (siehe S. 252).

5) Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficî pseudosferiche. Giorn. di *Battaglini*, Bd. X, Apr. 1872. Eine solche Fläche behandelte 1873 auch *de Tilly*, Bulletin de l'Ac. royale de Belgique. Bd. XXXV.

setzung dass die x, R und a reell sind, von constanter Krümmung und einfach zusammenhängend ist und zeigt, dass in einer solchen Mannigfaltigkeit sich die Variabelen derart wählen lassen, dass die geodätischen Linien und die Transformationen, welche die Massverhältnisse unverändert lassen, durch lineare Gleichungen dargestellt werden. Er bringt dann diese Theorie mit der *Euclid*'schen und der nicht-*Euclid*'schen Geometrie in Beziehung.[1])

Lobatschewsky und *J. Bolyai* wurde vorgeworfen, sie hätten die Möglichkeit ihres Systems nicht bewiesen, obwohl sie die trigonometrischen Formeln dieses Systems aufstellten, welche eine Constante k enthalten und das *Euclid*'sche System geben, wenn k unendlich gross wird. Denselben Vorwurf kann man auch *Riemann* machen; denn in seiner Arbeit findet sich kein wirklicher wenigstens kein ausgeführter Beweis der logischen Möglichkeit einer Mannigfaltigkeit von constanter positiver oder negativer Krümmung oder einer Krümmung gleich Null, wenn auch nach dem, was wir in der Vorrede ausführten, kein Grund vorhanden ist daran zu zweifeln. Für die Geometrie von zwei Dimensionen gibt es einen experimentellen Beweis der Unmöglichkeit das Postulat *Euclid*'s mittelst seiner andern Postulate zu beweisen. Diesen Beweis liefert die Kugelfläche in dem Gebiet unsrer äusseren Beobachtungen und ebenso ein Theil der pseudosphärischen Fläche, auf welcher die Summe der Dreieckswinkel kleiner als zwei Rechte ist. In diesem Fall unterliegt es keinem Zweifel, dass sich die Eigenschaften der Fläche ändern, wenn man das Beobachtungsgebiet und damit die Fläche selbst ausdehnt; denn in den grössern Dreiecken wächst die Differenz von zwei Rechten immer mehr. Man hat dagegen keinen analogen Beweis für die Geometrie, welche für die richtigste gehalten wird. Denn die Ebene, die eine Fläche ist, welche unabhängig von den zu ihrer Bestimmung gegebenen Postulaten existirt, kann bei Vergrösserung des Beobachtungsgebiets sowohl der *Riemann*'schen wie der *Lobatschewsky*'schen Geometrie genügen, auch wenn gegenwärtig die Summe der Winkel in grössern Dreiecken mit sehr grosser Annäherung zwei Rechte beträgt.

In dem Raum von drei Dimensionen erhält man einen weitern Beweis zu Gunsten der Systeme *Lobatschewsky*'s und *Riemann*'s, wenn man eine (reelle oder imaginäre) Fläche zweiten Grades in dem Beobachtungsgebiet in Betracht zieht und auf sie die Definition des Abstandes und des Winkels von *Cayley* anwendet. Weil nun in dem *Lobatschewsky*'schen System die Geometrie auf der Grenzfläche der Geometrie der *Euclid*'schen Ebene identisch ist, so erhält man mithin auch einen Beweis der Möglichkeit des *Euclid*'schen Postulats in der ebenen Geometrie.

Da wir in der äusseren Umgebung mittelst der descriptiven Geometrie die Parallelprojection einer als absolut betrachteten Fläche zweiten Grades von

1) Nach *Riemann* und *Beltrami* haben noch viele andre Autoren speciell über die Theorie der Krümmung der Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen geschrieben; sie haben aber nicht die Principien der Geometrie als Zweck im Auge. Ich hebe daher nur das Theorem von *Brill* hervor, nach welchem der pseudosphärische Raum von drei Dimensionen nicht in dem *Euclid*'schen Raum von vier Dimensionen, dagegen in dem Raum von fünf Dimensionen existirt.

drei Dimensionen construiren können, deren scheinbarer Umfang in unserm Raum eine gewöhnliche Fläche zweiten Grades ist, so können wir auch in dieser Umgebung ein System *Lobatschewsky*'s von drei Dimensionen construiren, u. s. w. Die Möglichkeit der drei Hypothesen ist mithin experimentell bewiesen..

Wir haben im Text Erklärungen gegeben, um den Leser von der logischen Möglichkeit unsrer Hypothesen II, III, IV und V zu überzeugen; diese Möglichkeit beruht auf der Unabhängigkeit des unendlich grossen von dem endlichen Gebiet in dem von uns verstandenen Sinn und geht offenbar aus der Einfachheit dieser Hypothesen hervor. Durch die Möglichkeit dieser Hypothesen in Verbindung mit unsern Axiomen I—V, zu welchen auch das Axiom über die Parallelen gehört, wird auch die Unmöglichkeit das *Euclid*'sche Postulat mit rein logischen Gründen zu beweisen ausser Frage gestellt.[1])

Die Arbeiten der nicht-*Euclid*'schen Geometrie haben eine sehr lebhafte Polemik über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit das *Euclid*'sche Postulat zu beweisen veranlasst, wie nach der Ansicht *Kant*'s über die absolute Wahrheit aller geometrischer Axiome als Formen a priori der Raumanschauung zu erwarten war. Sicherlich kann die Discussion mit Philosophen, die in Dingen, über welche absolut keine Gewissheit zu erreichen ist, behaupten *so ist es* statt *vielleicht ist es so*, nur in leidenschaftlichen Streit ausarten, welcher zu keinem Resultat führt. Von Interesse ist es, dass diejenigen, welche ihren Gegnern den gesunden Menschenverstand absprechen, in der Regel Unrecht haben; solche Streitigkeiten sollten zwischen wissenschaftlich gebildeten Männern nicht möglich sein nicht nur ihrer Bildung wegen, sondern auch, weil sie durchaus zwecklos sind.[2])

---

1) Nach *Rausenberger* (die Elem. Geom. syst. u. kritisch behandelt. Leipzig, 1887 S. 54) ist es noch nicht ausgeschlossen, dass die nicht-*Euclid*'sche Geometrie nicht doch logisch unmöglich sein könne; er ist der Ansicht, dass der Beweis der Unmöglichkeit das *Euclid*'sche Postulat nachzuweisen sich vielleicht nie geben lasse.

Lindemann (Vorlesungen ü. Geometrie v. *Clebsch*, 2. Bd. Leipzig, 1891, S. 552—563) will beweisen, dass das obige Postulat keine logische Folge der übrigen Postulate *Euclid*'s sei und sagt zu diesem Zweck: Wenn die *Riemann*'sche und *Lobatschewsky*'sche Geometrie zu einem Widersinn führte, so müsste dies auch für die in der *Euclid*'schen Geometrie existirenden Flächen von constanter positiver oder negativer Krümmung gelten, das Postulat V *Euclid*'s wäre daher mit den andern Postulaten unvereinbar und mithin *jede geometrische Untersuchung im Allgemeinen unmöglich*.

Wie *Rausenberger* nicht Recht hat, so können uns auch die Gründe *Lindemann*'s nicht überzeugen.

2) Unter den Mathematikern, welche diese Geometrie verwerfen, heben wir einige berühmte Namen hervor. Vor Allen ist *G. Bertrand* zu nennen, der in den Comptes Rendus von 1869 einen Beweis des Postulats über die Parallelen vertheidigt, welcher von *Carton* geführt worden war und schon zwanzig Jahre vorher von dem Italiener *Minarelli* in Bd. VIII der Nouvelles Annales von *Terquem* veröffentlicht wurde. *Bertrand* charakterisirt eine solche Geometrie als debauche de logique. Der Beweis *Minarelli*'s gleicht, wie *Genocchi* (Bulletin de l'Ac. de Belgique, Bd. XXXVI, S. 193) sagt, demjenigen *Ivory*'s; seine Unhaltbarkeit wurde von *Legendre* nachgewiesen.

Bellavitis, der auch ein Gegner der nicht-*Euclid*'schen Geometrie ist, bemerkt in der XI. Rivista dell' Istituto Veneto (1872) sehr richtig, dass man in den Principien der Geometrie von Definition zu Definition fortschreiten muss ohne irgend Etwas von der Geometrie selbst zu verlangen. So glaubte *Genocchi* an einen möglichen Beweis des *Euclid*'schen Postulats trotz der Arbeiten von *Riemann, Beltrami, Klein, Helmholtz* und *de Tilly* a. a. O.: Sur un Mém. de *Daviet de Foncenex* et sur les géométries non Euclidiennes.

Eine andre Arbeit von hervorragender Bedeutung bei diesen allgemeinen Studien über die Principien der Geometrie wurde 1859 von *A. Cayley* veröffentlicht, einem der fruchtbarsten und originellsten neueren Mathematiker.[1]) Sie hat die Geometrie von einer und zwei Dimensionen zum Gegenstand und betrachtet sie als eine Interpretation der Theorie der binären und ternären Formen, welche derselbe Autor in früheren Abhandlungen entwickelte. Ihr Hauptzweck ist, die metrische Geometrie aus der projectiven Geometrie abzuleiten. Er nimmt daher grundsätzlich an, dass jeder Punkt der Graden oder der Ebene durch zwei oder drei homogene Coordinaten bestimmt werde und umgekehrt (unbeschadet der nöthigen Ausnahmen), ohne jedoch wie *Riemann* irgend einen geometrischen Grund für dieses verwickelte Axiom anzuführen. Dann setzt er auch als Axiom fest, eine lineare Gleichung stelle eine Grade in der Art vor, dass eine Grade durch drei homogene Coordinaten, welche grade die Coefficienten ihrer Gleichung sind, bestimmt wird. Mit diesen Eigenschaften allein entwickelt *Cayley* die Principien der projectiven Geometrie der Graden und der Ebene und erreicht ein glänzendes Resultat.

Nachdem er diese Sätze und besonders auch die Bedingung vorausgeschickt hat, unter welcher zwei Punktepaare harmonisch conjugirt sind, führt er den originellen Begriff des auf ein andres geometrisches Ding, das Absolute, bezogenen Abstandes ein. Bei der Graden ist das Absolute durch ein Punktepaar $A_1 A_2$ gegeben. Indem er ein andres Punktepaar PP' in Betracht zieht, welches er als in $A_1 A_2$ eingeschrieben ansieht, bestimmt er die Doppelpunkte der Involution $A_1 A_2$, PP'. Einen dieser Punkte nennt er das *Einschreibungscentrum*, den andern die *Einschreibungsaxe*. Das Paar PP' heisst point-pair circle oder circle (Kreis), das Einschreibungscentrum resp. Axe sind das *Centrum* und die *Axe* des „circle". Als Definition gibt er an, dass die beiden Punkte eines „circle" *gleichweit vom Centrum* abstehen.

Um den Massstab zu erhalten construirt er P'' derart, dass PP'' bezüglich P' als Centrum ein „circle" ist; d. h. P'' ist der P entsprechende Punkt in der Umhüllung, welche durch das Paar $A_1 A_2$ und den Doppelpunkt P' bestimmt wird. Der Punkt P' liegt innerhalb des Segments (PP''). Ebenso

Mem. della R. Acc. di Torino, 1877. Lettre à M. *Quetelet*. Bulletin de l'Ac. R. de Belgique Bd. XXXVI, 1873.

G. Bertrand und *Bellavitis* leugnen mit Recht, dass man die Geometrie nur auf Vernunftschlüssen aufbauen könne, weil man die Raumanschauung zu Hülfe nehmen muss; sie gehen aber zu weit, wenn sie wie die Kantianer die absolute Evidenz des *Euclid*'schen Postulats V aufrecht erhalten. Sie, wie auch andre Mathematiker, haben sich der Betrachtung verschlossen, dass, wenn wir auch aus der Erfahrung oder Anschauung, welche in einem beschränkten Gebiet des Raums ausgeübt wird, unsre Axiome entnehmen, doch in der Geometrie alle diejenigen abstracten Hypothesen möglich sind, welche der Raumanschauung nicht widersprechen. Sie haben daher, wie wir in der Vorrede ausführten, ebensowenig Recht, wie die Mathematiker, welche die geometrische Möglichkeit nur von dem abstracten oder analytischen Gesichtspunkt aus betrachten.

Unter den vielen Kritiken der Beweise des *Euclid*'schen Postulats ist diejenige *Lüroth*'s bekannt: Ueber *Bertrand*'s Beweis des Parallelenaxioms. Zeitsch. von Schlömilch. XXI. S. 294—297.

1) A sixth memoir upon quantics. Phil. Trans. of the Roy. Society of London. 1859; oder auch Collected papers, London, Bd. II, 1889.

wird P''' construirt, welches gleichen Abstand von P' und P'' hat; der Punkt $P^{(n)}$ nähert sich dann, wie man sieht, unbegrenzt dem Punkt A_2. Aehnlich ist es von der entgegengesetzten Seite.

Zwischen den Abständen beliebiger drei Punkte A, B, C lässt er die folgende Beziehung gelten, welche ebenfalls ein Axiom ist:

$$\text{Abst.}\,(AB) + \text{Abst.}\,(BC) = \text{Abst.}\,(AC).$$

Wenn die Gleichung des Absoluten durch eine Form zweiten Grades gegeben ist:

$$a_x^2 = (a_1x_1 + a_2x_2)^2 = 0, \ (a_{ik} = a_{ki} = a_i a_k = a_k a_i),$$

so erhält man aus der Relation der harmonischen Paare die Bedingung des gleichen Abstandes und man findet mithin mit Hülfe der obigen Beziehung den Ausdruck für den Abstand zweier Punkte z_i und y_i unter der Form

$$\arccos \frac{a_y a_z}{\sqrt{a_y^2 a_z^2}}.$$

In der Ebene hat man als Absolutes einen Kegelschnitt, welcher das Absolute auf jeder Graden bestimmt. Das Absolute in der Umgebung eines jeden Punktes ist dagegen durch die beiden Tangenten gegeben, welche sich von dem Punkt aus an die conische Linie ziehen lassen. Er nimmt den Quadrant also $\frac{\pi}{2}$ als Masseinheit in allen diesen Systemen an. Für diese Masseinheit sind die beiden Punkte auf einer Graden bezüglich des Absoluten harmonisch. So ist der Abstand zweier Punkte dem Abstand ihrer Polaren bezüglich des Absoluten gleich und umgekehrt und der Abstand eines Punktes von einer Graden wird mithin als das Complement des Abstandes der Polaren des Punktes von der gegebenen Graden definirt. Daraus folgt, dass der Abstand des Pols von seiner Polaren der Quadrant ist. Ein in das Absolute eingeschriebener Kegelschnitt, welcher nämlich das Absolute in zwei Punkten berührt, heisst *Kreis*. Sein Centrum ist der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten und seine Axe die Grade, welche die beiden Berührungspunkte verbindet. Alle Punkte des Kreises haben gleichen Abstand vom Centrum und alle Tangenten von der Axe und der erstere Abstand ist zu dem zweiten complementär. Der Ausdruck für den Abstand zweier beliebiger Punkte der Ebene hat eine ähnliche Form wie derjenige auf der Graden. Man findet leicht die Ausdrücke für den Abstand zweier Graden und eines Punktes von einer Graden.

Cayley betrachtet dann den Fall, dass das Absolute auf der Graden sich auf einen Punkt und in der Ebene auf zwei Punkte reducirt. Man erhält in diesem Fall den Ausdruck für den Abstand im *Euclid*'schen System, wenn man voraussetzt, das Absolute liege im Unendlichgrossen. Von einem solchen Gesichtspunkt aus sind die Masseigenschaften einer Figur nicht Eigenschaften der Figur an sich betrachtet, sondern in Verbindung mit einer andern Figur nämlich dem Absoluten. Bezüglich der Frage der Principien der Geometrie wird einerseits nicht dargethan, wie der Punkt in der Ebene durch drei homogene Coordinaten bestimmt wird und die einfachen Theile eines solchen Princips nicht

untersucht. Auf der andern Seite ist von geometrischem Gesichtspunkt die noch wichtigere und verwickeltere Frage über die Darstellung der Graden in der Ebene durch eine Lineargleichung und umgekehrt aufzuwerfen. Wir bemerken überdies, dass dagegen für uns der Abstand ein Ding ist, welches von der Figur an sich abhängt[1]) und dessen verschiedene analytische Ausdrücke von dem Axiom über die Parallelen abhängig sind. Diese Methode ist geometrisch geeigneter. Das Verfahren und die Ideen in dieser Arbeit *Cayley's* sind rein analytisch.[2])

Es ist sehr wahrscheinlich, dass *Cayley* zur Zeit, als er diese Abhandlung schrieb, die Arbeiten *Lobatschewsky's* und *J. Bolyai's* nicht kannte, weil es ihm leicht gefallen wäre, seine Untersuchungen mit der nicht-*Euclid*'schen Geometrie in Beziehung zu bringen.

Zu den vorstehenden Untersuchungen besonders in der Richtung *Cayley's* gesellen sich die Arbeiten *Klein's* über diese Geometrie[3]), welche zwar immer noch auf analytischem Standpunkt stehen, jedoch einen ausgeprägteren geometrischen Charakter haben und neue wichtige Ideen enthalten. Ihr Hauptzweck ist stets die Theorie über die Parallelen und die Beziehungen zwischen der projectiven und der metrischen Geometrie zu entwickeln. *Klein* geht in seiner ersten Abhandlung von der Darstellung der Punkte der Graden mittelst zweier homogener numerischer Grössen und von den Grundeigenschaften des Abstandes und der Beobachtung aus, dass das Gleiten in einer Graden und die Rotation eines Büschels einer linearen Transformation gleichkommen, welche die Form in sich selbst ändert. Er bestimmt den Ausdruck für den Abstand zweier Punkte als Logarithmus des Doppelverhältnisses der beiden Punkte zu denen des Absoluten, mit einer Constanten multiplicirt, welche bei *Cayley* $\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ ist.[4])

Analog verfährt er in der Ebene, indem er den absoluten Kegelschnitt *Cayley's* in Betracht zieht. Von hier an tritt *Klein* mit neuen und wichtigen Ideen auf und bestimmt jene ebenen Transformationen, welche den Bewegungen der Ebene entsprechen und gerade diejenigen sind, welche den absoluten Kegelschnitt in sich selbst verwandeln und eine *Gruppe* in dem Sinn bilden, dass man bei Anwendung von zwei Transformationen nach einander stets eine Transformation derselben Gruppe erhält. Diese Transformationen sind zweierlei Art, diejenigen der ersten Art bilden eine stetige Gruppe, die-

1) Siehe Einl. § 111 und Theil I, § 5 und die Note über die Bewegung.

2) Andre Arbeiten *Cayley's*, welche mit den obigen in enger Beziehung stehen, sind: The abstract Geometry (Phil. Trans. of the Roy. Society of London, 1870) und ein Aufsatz über die nicht-*Euclid*'sche Geometrie (Matth. Ann. Bd. V. 1871), in welchem er von dem Ausdruck für den Abstand und Winkel, den *Klein* in der hyperbolischen Geometrie gegeben, ausgehend die Formeln der Trigonometrie ableitet und dabei der grösseren Einfachheit wegen voraussetzt, das Absolute sei ein Kreis.

3) Math. Annalen, Bd. IV u. V.

4) Der Ausdruck für den Abstand zweier Punkte als Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses zweier Punkte und der beiden unendlich fernen Punkte der Graden in der von *Klein* gegebenen Form wurde auch von *Flie S. Marie* gefunden (Études analytiques sur la théorie des paralleles. 1871. S. 28 u. 48). Diese Form ist jedoch bei *Flie S. Marie* nur zufällig, während sie bei *Klein* der von jedem im Voraus festgesetzten Massbegriff unabhängige Grundbegriff ist.

jenigen der zweiten nicht; dann zeigt er, dass bei diesen Transformationen die Massverhältnisse sich nicht ändern.

Die Geometrie *Lobatschewsky*'s oder *Riemann*'s und *Euclid*'s entspricht den Fällen, in welchen das Absolute reell, imaginär oder in der Graden auf einen einzigen Punkt reducirt ist. Dies ist der Grund, wesshalb sie *Klein hyperbolische, elliptische (einfach und doppelt elliptische) und parabolische* Geometrie nennt. *Klein* hat zuerst den Unterschied dieser beiden Formen der *Riemann*'schen Geometrie hervorgehoben.[1])

Die parabolische Geometrie wird von *Klein* als Grenzfall der hyperbolischen betrachtet. Es reicht in diesem Fall nicht hin, die Bewegungen als solche Transformationen, oder besser eine Classe derselben, zu definiren, welche den absoluten Kegelschnitt unverändert lassen; denn ein Punktepaar (und ein solches ist das Absolute in der parabolischen Geometrie) transformirt sich in sich selbst mittelst eines viermal unendlich grossen Systems von Transformationen, während die den Bewegungen entsprechenden Transformationen in einer dreimal unendlich grossen Anzahl vorhanden sind. Man braucht zu diesem Zweck nur festzusetzen, dass der Kreis eine geschlossene Linie ist.

Eine andre sehr wichtige Idee *Klein*'s, welche sich aus den Entwicklungen *Cayley*'s ergibt, ist diejenige der Unabhängigkeit der projectiven Geometrie von dem Axiom über die Parallelen. *Klein* macht auch darauf aufmerksam, dass die projective Geometrie vor der Bestimmung des Masses sich entwickeln lässt oder mit andern Worten, dass das anharmonische Verhältniss diesen Begriff nicht enthält. Er widmet diesem Gegenstand in seiner ersten Schrift nur wenige und eher dunkle Worte, was ihm gewiss nicht zum Lob gereicht, da dieser Punkt das Fundament seiner Untersuchungen ist und daher vor allen Dingen hätte klar gestellt werden müssen. Das Bedürfniss grösserer Klarheit hat *Klein* selbst gefühlt, denn in seiner zweiten Abhandlung kommt er ausführlicher darauf zurück.

Er setzt als gegeben ein gegen das Unendlichgrosse begrenztes Gebiet in dem gewöhnlichen Raum mit folgenden Eigenschaften voraus:

1) Durch drei beliebige Punkte des gegebenen Raums geht eine und nur eine Fläche des Systems.

2) Die Durchschnittscurve, welche zwei Flächen des Systems gemein sein kann, gehört allen Flächen an, welche zwei Punkte der Curve enthalten.

Im Grund nimmt er hier an, dass *jedes* Paar Punkte eine Grade bestimme und dass *jede* Grade, welche zwei Punkte mit der Ebene gemein hat, ganz in

1) Man kann wirklich nicht behaupten, dass die doppelte Form dieser Geometrie *Riemann* entgangen sei, weil er die Form der Kugel als Beispiel gibt. Dagegen hat sie *Beltrami* übersehen. Eigentlich konnte sie vor den Untersuchungen *Klein*'s unbeachtet bleiben, insofern es sich nicht um ein Grundmerkmal handelt, welches die beiden Formen unterscheidet, während man sie andrerseits leicht auseinander ableiten kann. — Siehe Theil I, Seite 281. Auch nach dem Erscheinen der Abhandlungen *Klein*'s entging die erste Form z. B. *de Tilly*, *Frischauf* und *Poincaré*. Mit dieser Frage haben sich auch *Newcomb*: Elementary theorems relating to the Geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension. Journal von *Crelle*. Bd 83. 1877 und *Killing* a. a. O. beschäftigt.

ihr liege. Man muss beachten, dass der Autor hier einen besonderen geometrischen Zweck im Auge hat, dass nämlich für ein solches Flächen- und Curvensystem die projective Geometrie in demselben Sinn wie bei dem System von Graden und Ebenen eines begrenzten Raums von drei Dimensionen gilt oder auch dass sich ein Zusammenhang der Art aufstellen lässt, dass den Punkten des gegebenen Raums solche Zahlen entsprechen, dass die Flächen des Systems durch lineare Gleichungen dargestellt werden.

Wie man sieht, ist dieses wichtige Resultat gerade die Hypothese, von welcher *Cayley* ausgeht.

Man beachte, dass die beiden obigen Principien auch in unserm allgemeinen Raum bezüglich der Graden und Ebenen gelten und dass mit ihrer Hülfe sich beweisen lässt, dass, wenn drei Punkte ABC gegeben sind, der vierte harmonische Punkt D bestimmt und nur einmal vorhanden ist. Dagegen lässt sich das obige analytische Resultat nicht ableiten ohne den Raum von drei Dimensionen vorauszusetzen. Diese Eigenschaft ist daher stillschweigend in den genannten Principien enthalten.[1])

Um die projective Geometrie nach den Ideen *Staudt*'s, aufzubauen, führt *Klein* das Axiom der Stetigkeit ein und da die Projection zeigt, dass es eine constante Beziehung zwischen vier Elementen gibt, so lässt sich, wie er sagt, diese Beziehung als eine reelle Zahl betrachten. Man bezeichne drei Elemente A, B, C als Grundelemente und vertheile an die übrigen Elemente D nach einem willkürlichen Gesetz die reellen Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$; es entspricht dann jeder Gruppe $ABCD$ eine Zahl. Von den anharmonischen Verhältnissen geht man darauf zu den homogenen Coordinaten über, welche nichts Anderes als die bezüglichen Werthe der anharmonischen Verhältnisse sind. *Fiedler* hat zuerst diese Coordinaten behandelt und nachgewiesen, dass die Grade und die Ebene bezüglich in der Ebene und dem gewöhnlichen Raum durch eine Gleichung ersten Grades dargestellt werden.[2])

Die Art, auf welche *Klein* den Grundbegriff in seiner ersten Abhandlung erklärte, hat bei *Cayley*[3]) und Sir *R. Ball*[4]) Zweifel erregt, so dass *Klein* in einer neueren Schrift auf diesen Gegenstand zurückkommt[5]), dabei aber einen Weg ähnlich wie *De Paolis*[6]) einschlägt, über welchen sich ausführliche Entwicklungen in den Vorlesungen von *Clebsch-Lindemann* finden.

---

1) *Lindemann* (a. a. O.) gibt diese Principien unabhängig von der Begrenzung des Raums; er gibt sie aber für den Raum von drei Dimensionen, ohne ihn in den Principien selbst zu definiren. Man kann dem abhelfen, wenn man als drittes Princip hinzufügt: Haben zwei Ebenen einen Punkt gemein, so haben sie wenigstens noch einen andern Punkt gemein.

2) Die darstellende Geometrie. Leipzig. 1871. *Fiedler* selbst spricht, ehe er sich mit den projectiven Coordinaten zu beschäftigen anfängt, die Ansicht aus, die Elementargeometrie könne als ein specieller Fall der projectiven Geometrie betrachtet werden, wenn man die Massbegriffe und die Involutionstheorie einführt.

3) Collected Paper Notes and References.

4) On the theory of Content. Irish Ac. of Dublin. 1889.

5) Zur nicht-*Euclid*'schen Geometrie. Math. Ann. Bd. XXXVII. 1891.

6) Sui fondamenti della geom. proiettiva. Atti della R. Acc. dei Lincei. 1880—1881. Ausser dieser Abhandlung haben die Bemerkungen *Klein's* über die Construction der Projectionsformen die Veranlassung zu Aufsätzen von *Zeuthen* und *Lüroth* (Math. Ann. Bd. VII),

Klein zeigt auch in seiner ersten Abhandlung, wie man von den Begriffen *Cayley's* zu denen *Riemann's* und *Beltrami's* übergeht und beschäftigt sich in der zweiten auch mit den Zahlenmannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen.[1])

In der letzteren behandelt er das interessante Problem die verschiedenen *Euclid'*schen und nicht-*Euclid'*schen Formen von zwei und drei Dimensionen, besonders die *Euclid'*schen von zwei Dimensionen zu bestimmen.

Zu der Richtung, welche *Cayley, Battaglini* und *Klein* einschlugen, ist auch die schon erwähnte Abhandlung von Sir *R. Ball* zu rechnen, wenn er auch von etwas verschiedenen Principien ausgeht.

Er nennt „Content", was nach *Grassmann* ein „System dritter Stufe" ist. Die einzelnen Grössen des „Content" nennt er *Gegenstände.* Setzt man voraus, a_1, a_2, a_3, a_4 seien unabhängige Gegenstände, so wird jeder andre Gegenstand des „Content" durch das Symbol

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$$

ausgedrückt, worin x_1, x_2, x_3, x_4 beliebige Zahlengrössen sind. Die Ausdrücke von der Form

$$x_1 a_1 + x_2 a_2, \quad x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$$

stellen bezüglich ein *„range"* und ein *„extent"* vor. Er stellt fünf Axiome über die Function auf, welche er „intervene" zwischen zwei Gegenständen nennt und welche dem Abstand zweier Punkte des gewöhnlichen Raums entspricht; ferner fünf andre analoge Axiome über die *„departure"* zwischen zwei *„ranges"*, welche dem Winkel zweier Graden entspricht, und fügt dann ein elftes Axiom hinzu, welches festsetzt, dass, wenn zwei „ranges" eine „departure" Null haben, ihr gemeinschaftlicher Gegenstand im Unendlichgrossen liegt und umgekehrt.

Er bringt dann den „Content" in eindeutigen Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Raum, in welchem er den Punkt betrachtet, welcher ohne Weiteres durch vier homogene Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmt wird. Mit Hülfe der obigen Axiome findet er einen Ausdruck für den Abstand und den Winkel nach dem Begriff *Klein's*.[2]) In dieser Abhandlung, wie in andern, welche von den Anschauungen *Cayley's* ausgehen und sich auf die analytische Darstellung stützen, scheint uns nicht gut nachgewiesen zu sein, dass z. B. der Ort der unendlich fernen Punkte der Ebene nur desshalb, weil es in jeder Graden zwei unendlich ferne Punkte gibt, grade ein Kegelschnitt sein soll oder wenigstens als solcher betrachtet werden könne.[3])

Thomae (Geom. d. Lage), *Darboux* (Math. Ann. Bd. XVII), *Schur* (Math. Ann. Bd. XVII) und *Pasch* (a. a. O.) gegeben.

1) Siehe später.

2) Mit dieser Theorie und speciell der Theorie der Bewegung in dem elliptischen Raum beschäftigten sich andre englische Mathematiker, so derselbe *S. R. Ball* (Proc. of the Roy. Irish Ac. 1885—1886), *Clifford* a. a. O., *Buchheim*, London M. S. Proc. XV, 1883 u. XVI, 1884.

3) Wir haben gesehen, dass der Ort der unendlich fernen Punkte der Ebene in dem *Euclid'*schen System als eine Grade bezüglich der *Euclid'*schen Einheit betrachtet werden kann, und haben mittelst Hyp. VII (Theil I, §§ 49 u. 68) angenommen, dass er dies wirklich in absolutem Sinn sei. Damit hat sich auch *Pasch* (Neuere Geometrie, Leipzig. 1882) beschäftigt.

Die Resultate, zu denen *Cayley* und *Klein*, besonders der letztere, kommen, haben *Pasch* dazu gedient, die projective Geometrie unabhängig von dem Axiom über die Parallelen auf rein geometrische und elementare Art zu behandeln.[1])

Was die Methode von *Pasch* vor Allem auszeichnet, ist, dass er in der Geometrie nicht eine abstracte Wissenschaft sieht, deren Formen Typen sind, denen sich die reellen Gegenstände ausser uns annähern, sondern dass für ihn diese Formen die Gegenstände selbst sind. Ein Punkt ist daher für ihn ein kleiner Körper, welcher sich innerhalb der Grenzen der directen Beobachtung nicht weiter in Theile zerlegen lässt[2]), und analog die Linie und die Fläche. Die geometrischen Axiome müssen nur für die Gegenstände selbst des begrenzten Gebiets unsrer Beobachtungen gegeben werden und kein andres Axiom, keine andre Hypothese ist für die Gegenstände ausserhalb dieses Gebiets nöthig; diese Gegenstände werden vielmehr mit Benennungen mittelst gewisser geometrischer Dinge eingeführt, die mit den einzigen als wirklich existirend vorausgesetzten Dingen construirt werden. Desshalb theilt der Verfasser die geometrischen Dinge grundsätzlich in zwei Gebiete: die *eigentlichen* und die *uneigentlichen*. Das Gebiet der eigentlichen Dinge ist aber nicht nur nach dem unbegrenzt Grossen hin begrenzt, wie *Klein* in den oben angegebenen Sätzen annimmt, sondern auch nach dem unbegrenzt Kleinen hin. *Pasch* wollte also die Ergebnisse des reinen Empirismus auf die geometrischen Formen anwenden, hat dabei jedoch nicht bewiesen, dass die von *Euclid* und den andern Gelehrten der Geometrie befolgte Methode unmöglich sei.[3])

Wir können dieser Methode nicht nur aus den in der Vorrede und der Einleitung entwickelten Gründen[4]) sondern auch desshalb nicht zustimmen, weil der Verfasser bei dem besten Willen die mathematische Strenge in den Beweisen unabhängig von der Beobachtung zu bewahren (a. a. O. S. 43) doch in jedes Axiom und jeden Beweis die Unsicherheit und Ungenauigkeit dieser Beobachtung hineinbringt, so dass man sich von Anfang an an bei vielen Sätzen über das Gebiet ihrer Gültigkeit im Ungewissen befindet und sie für die uneigentlichen Dinge von Neuem beweisen muss. Dies macht die Methode natürlich verwickelt.[5]) Die Körperchen (Punkte) kann man auf verschiedene Art z. B. als gemeinsame Theile zweier cylindrischer oder parallelopipedischer äusserst dünner Stäbe erhalten; man weiss aber wirklich nicht, wie es möglich ist, die Punkte für identisch zu halten, während sie es doch in Wirklichkeit nicht sind. Nach dem, was *Pasch* über die Congruenz sagt, sind zwei Punkte identisch, weil man sie so aufeinander legen kann, dass der eine den andern berührt; zwei Körper können sich aber sehr wohl berühren und brauchen desshalb nicht

---

1) A. a. O.

2) Auch wir haben nicht nöthig in unsern Axiomen wie *Euclid* zu sagen, der Punkt habe keine Theile; dagegen haben wir in der Einleitung (Abschn. 1, Kap. IV) davon Gebrauch gemacht, um die Hypothesen über das Stetige zu erklären.

3) Siehe *Du Bois Reymond*, Allg. Th. u. s. w.

4) Einl. Abschn. I, Kap. IV.

5) Die Analogie zwischen den Classen der Punkte und Zahlen, auf welche *Pasch* (a. a. O. S. 40) zurückkommt, liegt etwas fern, weil jede Zahlenclasse logisch gut definirt ist, während dies von den eigentlichen Punkten nicht gilt wenigstens bei *Pasch* nicht.

gleich zu sein, auch wenn sie noch so klein sind. An einer andern Stelle sagt er, die projective Geometrie könne ohne die Congruenz nicht auskommen, wenn sie nicht das Axiom der Stetigkeit der Punktreihen voraussetze[1]); dieses Axiom sei aber bei der Methode des reinen Empirismus nicht zulässig. Um aber festzusetzen, wann zwei Figuren congruent sind, kommt *Pasch* auf die Bewegung ohne Deformation zurück d. h. stillschweigend in abstractem Sinn auf die Existenz stetiger Systeme unveränderlicher Figuren. Der Verfasser hätte also zeigen müssen, wie man ohne das in der Idee der Bewegung verborgene Merkmal der Stetigkeit in abstractem Sinn die Congruenz definiren kann. Er behauptet in der That mit Recht, dass der Beweis an sich von der Anschauung der Figur oder besser, wie er meint, von der blos wahrnehmbaren Darstellung der Figur unabhängig sein muss (a. a. O. S. 17 u. 99). Damit sich dies aber vollständig erreichen lasse, müssen, wie wir in der Vorrede verfochten haben, auch die Axiome, von der Anschauung abstrahirt, uns abstracte wohl definirte Eigenschaften geben. Dies ist aber mit den congruenten Figuren nicht der Fall, wenn man sie congruent nennt, falls man die eine auf die andre bringen kann, dabei aber nicht abstract angibt, was dieses Verbringen bedeutet.[2])

---

1) Projective Geometrie und analytische Darstellung. Math. Ann. Bd. XXX, S. 129.

2) Professor *Klein* gibt in seiner zuletzt erwähnten Abhandlung einige Urtheile über die geometrischen Axiome ab, die wir uns mit aller Achtung vor seiner Autorität auch in diesen Dingen zu erörtern erlauben.

Er ist mit den Anschauungen von *Pasch*, was den geometrischen Beweis betrifft, nicht einverstanden, während wir meinen diese Anschauungen müssten vielmehr auch auf die Axiome ausgedehnt werden; dabei stützen wir uns aber immer auf das constructive Verfahren der räumlichen Anschauung, was derjenige gewiss nicht thut, der früher oder später das analytische Formelwesen in mehr oder weniger anschaulicher Weise benutzt.

Klein sagt, um seine abweichende Ansicht zu motiviren, man berufe sich zu diesem Zweck auf das Verfahren der analytischen rein rechnerischen Geometrie, welche von den Figuren abstrahirt, die er aber nicht für eine eigentlich sogenannte Geometrie halten kann. Dies ist aber grade der Grund, wesshalb die Ausdehnungslehre *Grassmann*'s oder die Theorie der abstracten Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen eine eigentlich sogenannte Geometrie nicht ist.

„Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen", fährt er fort, „ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich." Und später: „Eine geometrische Betrachtung aber denke ich mir so, dass wir die Figur, um welche es sich handelt, als solche unablässig vor Augen behalten und uns dann in jedem Augenblicke, in welchem es sich um scharfe Beweisführung handelt, auf die Axiome beziehen."

Im Grunde sind wir mit dieser Methode vollständig einverstanden; *Klein* erklärt aber nicht, wie man sich die Figur bei den Rechnungen, die auch er anstellt, „unablässig vor Augen" halten kann. Auch wo er die gewöhnliche Ausdrucksweise ohne Symbole gebraucht, ist seine wahre Methode im Allgemeinen analytisch. Dagegen nähert sich *Klein* in seinen Schriften viel mehr der Anschauungsmethode wie andre Mathematiker, z. B. *Cayley*, welche die Geometrie auf analytische Art behandeln, und weiss häufigen Gebrauch von geometrischen Betrachtungen auch bei analytischen Untersuchungen zu machen.

Wenn wir ihn richtig verstehen, so können wir uns auch nicht mit demjenigen einverstanden erklären, was er über die geometrische Betrachtung sagt; denn für uns muss der Beweis, speciell der Grundsätze, stets streng sein; ist er es nicht, so ist er mehr oder weniger mangelhaft.

Bezüglich der Ansicht *Klein*'s, das Irrationale müsse arithmetisch begründet werden, können wir nur auf unsre Einleitung verweisen oder unter andrer Form auf unsre erwähnte Note über das gradlinige Continuum.

Dagegen stimmen wir vollständig mit *Klein* überein, wenn er sagt, die Axiome seien *die Forderung*, vermöge deren wir in die ungenaue Anschauung genaue Aussagen hineinlegen. Wir drücken uns aber anders aus und sagen, die Axiome seien das Resultat der Anschauung und der Abstraction zusammen, durch diese beiden würden die geometrischen Gegenstände

Es scheint uns auch, als ob er den Principien des reinen Empirismus nicht immer treu bliebe. Denn er sagt, zwei Figuren seien congruent, wenn sie sich so aufeinander legen lassen, dass ihre Punkte „aneinanderstossen". Er setzt mithin die Durchdringbarkeit der Körper voraus; dies ist aber sicherlich keine rein empirische Hypothese, da die Figuren die Körper selbst und keine nur in der Vorstellung vorhandenen Wesen sind. Es scheint uns ferner, als ob nicht immer, wie auf Seite 115—120, hinreichende Klarheit herrsche in der Weise, dass kein Zweifel bleibt, dass die Axiome II, IV und VIII über das Gebiet unsrer Beobachtungen hinausführen. Eine solche Klarheit würde den Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Punkten des endlichen Gebiets nicht nöthig machen und man würde das Princip entbehren können, dass die Axiome nur für die wahrnehmbaren Gegenstände aufgestellt werden sollen.[1])

Pasch gibt zweiundzwanzig Axiome für die projective Geometrie des gewöhnlichen Raums, nämlich acht für die Grade, wobei er von dem gradlinigen Segment ausgeht, vier für die Ebene und zehn über die congruenten Figuren, welche sämmtlich der *Euclid*'schen und den nicht-*Euclid*'schen Hypothesen gemein sind.

Er erklärt, er beschäftige sich nicht damit darzulegen, welche von diesen Hypothesen der Wirklichkeit entspreche, er befasst sich auch nicht mit der metrischen Geometrie; so fehlt in seinem Buch ein wesentlicher Theil der Grundzüge der Geometrie.

Er führt den Begriff *des mathematischen Punktes* ein, unter welchem er ein System von vier reellen Zahlen versteht, die nicht gleichzeitig Null werden (Seite 191) und man hätte denken sollen, er würde die empirische Methode benutzt haben, um zu dieser Definition zu kommen. Dagegen kommt er wieder auf den empirischen Begriff des Punktes zurück, indem er feststellt, dass die Uebertragung der Figur in Zahlen und die Rückkehr zu derselben von den

gebildet, die wir gewöhnlich nicht abstracte sondern Anschauungsgegenstände nennen, um der Anschauung den Vorrang zu geben.

1) Der Zusatz zu Axiom II über die Congruenz lautet: Wenn ein Segment (AB) gegeben ist, dessen Punkte A und B eigentliche sind, so gibt es in jeder der Verlängerungen von (AB) z. B. von A über B einen andern eigentlichen Punkt B' derart, dass $(AB) \equiv (BB')$. Axiom IV besagt:

„Wenn C_1 in dem Segment AB liegt und man verlängert AC_1 um das congruente Segment $C_1 C_2$ u. s. w., so kommt man zu einem Segment $C_n C_{n+1}$, welches den Punkt B enthält."

Dies ist, wie man sieht, das Axiom des Archimedes.

Ax. VIII setzt fest, dass, wenn man zu einer Figur einen eigentlichen Punkt hinzufügt, man dasselbe auch bei einer ihr congruenten Figur derart thun kann, dass die sich ergebenden Figuren ebenfalls congruent sind.

Es seien z. B. zwei congruente Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gegeben, deren Eckpunkt eigentliche Punkte jedoch derart sind, dass $A'B'C'$ auf der Grenzfläche des Gebiets unsrer Beobachtung liegen, für welches allein die Axiome gegeben sein müssen. Man habe ferner einen eigentlichen Punkt D ausserhalb der Ebene ABC; es kann dann sein, dass der Punkt D', welcher derart ist, dass die beiden Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ congruent sind, ein uneigentlicher Punkt ist oder nicht in dem genannten Gebiet liegt. Wenn *Pasch* glaubt, das Axiom gelte nur, wenn D' ein eigentlicher Punkt ist, so ist nicht einzusehen, warum er nach der Ausdehnung des Begriffs der Congruenz auf beliebige Punkte den Satz 4 auf Seite 115 bringt, nach welchem in beliebigen congruenten Figuren einem eigentlichen Punkt der einen ein eigentlicher Punkt der andern entspricht.

numerischen Resultaten nicht mit derselben Genauigkeit erfolgen kann (S. 200). Es ist dies übrigens bekannt und man hat soviele Erörterungen nicht nöthig, wenn man die Figur als wahrnehmbaren Gegenstand betrachtet.

Aber auch abgesehen von den empirischen Begriffen, ist der nur in der Vorstellung existirende geometrische Punkt durchaus kein Zahlensystem und dieser Idee wegen sind sicherlich alle jene Betrachtungen, die *Pasch* zuerst angestellt hat, nicht nöthig.[1]) Wenn man später die Analysis bei dem Studium der Geometrie benutzt und die sich so ergebende Wissenschaft *analytische Geometrie* nennt, welche von der eigentlichen Geometrie wohl zu unterscheiden ist, so verlässt man damit das Gebiet der directen Beobachtungen, um die Geometrie zu studiren und dies thut gerade auch die ideelle oder abstracte Geometrie.

Es ist ferner zu bemerken, dass *Pasch*, da er in der Geometrie Empirist ist, es auch in der Analysis sein müsste. Da gesteht er aber selbst, die Mathematik müsse, wolle sie sich nicht auf ein sehr kleines Feld beschränken, die irrationale Zahl oder das Zahlencontinuum acceptiren. Das Zahlencontinuum wird aber von dem Empiristen nicht anerkannt, denn bei ihm muss sich Alles auf wahrnehmbare Darstellungen zurückführen lassen. Die Irrationalzahl verlangt gerade einen unendlich grossen Process, den der Empirist nicht gelten lässt.[2]) Man wird sagen, die Analysis lasse sich auf rein rechnerischem Weg entwickeln, man müsste aber doch erst sehen, dass sich dies wirklich von empirischem Standpunkt aus durchführen lässt. Aber auch zugegeben, es sei diese Entwicklung möglich, wenn man die Irrationalzahl acceptirt, so bestätigt doch der Schluss, zu welchem er gelangt, die Existenzberechtigung der ideellen Geometrie, welche sich eben abstract mit der Geometrie deckt, die man durch Anwendung der Analysis ohne Einschränkung erhält.

Pasch schliesst durch seine Methode *a priori* (aber nicht *a posteriori*) die Geometrie von mehr als drei Dimensionen aus und gründet die geometrische Möglichkeit auf die directe ungesichtete Beobachtung allein, während wir diese Möglichkeit ebensowohl auf geistige Thatsachen basiren.[3])

Obgleich man sich mit der empirischen Methode von *Pasch* nicht einverstanden erklären kann, so muss man doch die Absicht, die Geometrie auf

---

1) Siehe Einl. Abschn. 1, Kap. V und Theil I, Emp. Bem. I.

2) In dem Buch: Einleitung in die Differenzial- u. Integral-Rechnung. 1882. S. 13 sagt *Pasch:* „Während die empirische Messung eine mit der Genauigkeitsgrenze sich ändernde Zahl ergibt, sucht die Mathematik allgemein giltige, von besonderen Beobachtungsverhältnissen unabhängige, Regeln auf, dabei kann sie aber der irrationalen Zahlen nicht entbehren, wenn sie sich nicht auf ein ganz enges Gebiet beschränken will."

Siehe *Du Bois Reymond:* Allg. Theorie u. s. w. z. B. S. 178 u. 205—206.

3) Wir haben schon gesagt, dass auch *Helmholtz,* obgleich er mehr als Andre die Richtung der Kantianer und den empirischen Ursprung der Geometrie vertreten hat, sich die geometrischen Formen nicht wie *Pasch* vorstellt. Wir möchten auch *Clifford* anführen, der ebenfalls auf experimentellem Weg zu dem Begriff des Punktes, wie er gewöhnlich aufgefasst wird, gelangt. Die Fläche, sagt er, ist nicht eine sehr dünne Schicht des Körpers, so wie die Linie nicht ein Theil der Fläche und der Punkt ein Theil der Linie ist (The common sense of the exact sciences). Das hinterlassene Werk des englischen Mathematikers macht zwar keinen Anspruch darauf, die Principien der Wissenschaft in logisch strenger Weise aufzustellen, wir glauben aber doch dessen Lectüre den Studirenden empfehlen zu können.

unbestreitbar wahre und miteinander vereinbare Grundlagen zu stellen und seine Methode loben, die den Zweck hat, die Axiome in einfache Theile zu zerlegen, wenn er freilich auch die Gründe nicht angibt, wesshalb er sie für unabhängig voneinander hält. Ferner sind in seinem Buch besonders die Kapitel über den projectiven Zusammenhang und die Darstellung der Punkte der Graden und der anharmonischen Verhältnisse durch Zahlen von Wichtigkeit; eine Theorie, mit welcher sich auch *De Paolis* beschäftigt hat.[1]) Das Buch von *Pasch* ist sowohl wegen der Strenge seiner Beweise als wegen der rein elementaren und geometrischen Methode, welche er anwendet, als ein wesentlicher Beitrag zur Förderung der Frage der Principien der projectiven Geometrie zu betrachten.

Ein neuer Weg wurde diesen Untersuchungen kurz nach *Riemann* von *H. v. Helmholtz*, einem der grössten Denker dieses Jahrhunderts, in seiner Abhandlung „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen", gewiesen.[2]) Von einem anschaulicheren Standpunkt als *Riemann* ausgehend, stellte er vier Axiome auf, welche für sämmtliche drei Systeme der Geometrie und für die Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, die er *Räume* nennt, gelten. Er entwickelt dann freilich seine Hypothesen in dem Raum von drei Dimensionen. Die erste Hypothese lautet:

„Der Raum von n Dimensionen ist eine $n$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, das heisst, das bestimmte Einzelne in ihm der Punkt, ist bestimmbar durch Abmessung irgend welcher, continuirlich und unabhängig voneinander veränderlicher Grössen (Coordinaten), deren Anzahl n ist. Jede Bewegung eines Punktes ist daher begleitet von einer continuirlichen Aenderung mindestens einer der Coordinaten. Sollten Ausnahmen vorkommen, wo entweder die Aenderung discontinuirlich wird, oder trotz der Bewegung gar keine Aenderung sämmtlicher Coordinaten stattfindet, so sind diese Ausnahmen doch beschränkt auf gewisse durch eine oder mehrere Gleichungen begrenzte Orte (also Punkte, Linien, Flächen u. s. w.), die zunächst von der Untersuchung ausgeschlossen sein mögen.

Zu bemerken ist, dass unter Continuität der Aenderung bei der Bewegung nicht nur gemeint ist, dass alle zwischen den Endwerthen der sich ändernden Grössen liegenden Zwischenwerthe durchlaufen werden, sondern auch dass die Differenzialquotienten existiren."

Dies ist die erste Hypothese von *Helmholtz*. Der Unterschied ist nur der, dass hier die Idee der Bewegung auftritt, wie man gleich besser sehen wird. *Helmholtz* gibt nicht die Erzeugung der Mannigfaltigkeit, sondern lässt sie ohne Weiteres von dem Zusammenhang mit dem Zahlencontinuum abhängen.

Die *zweite* Hypothese setzt die Existenz *fester und beweglicher Körper* voraus d. h. solcher Körper, welche während der Bewegung unverändert bleiben, wie es, sagt er, nöthig ist, um die Raumgrössen mittelst der Congruenz vergleichen zu können. Er gibt die folgende Definition eines festen Körpers:

1) Sui fondamenti u. s. w. a. a. O.
2) Gött. Nachr. 1868 oder Wissensch. Abh. Bd. II, S. 618.

„Zwischen den $2n$ Coordinaten eines jeden Punktpaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle congruente Punktpaare die gleiche ist.

Congruent sind solche Punktpaare, welche gleichzeitig oder nacheinander mit demselben Punktpaar des Raums zusammenfallen können."

Lie hat diese Hypothesen für den Raum von drei Dimensionen präciser formulirt. Die erste Hypothese sagt aus, dass Transformationen von der Form

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} x' &= f\,(x, y, z, a_1, a_2, \ldots) \\ y' &= \varphi\,(x, y, z, a_1, a_2, \ldots) \\ z' &= \psi\,(x, y, z, a_1, a_2, \ldots) \end{aligned}$$

möglich sind, worin $a_1\, a_2 \ldots$ Parameter, f, φ und ψ analytische Functionen sind, deren andre Eigenschaften durch die übrigen Axiome bestimmt werden.

Bezeichnet man mit $\omega\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ eine Invariante des Paares zweier Punkte $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, so bedeutet die zweite Hypothese, dass man für eine beliebige der Transformationen (A), welches auch das Paar verschiedener Punkte sein möge, die effective Gleichung erhält:

$$\text{(B)} \qquad \omega\,(x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2) = \omega\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2).$$ [1]

Unabhängig von der Idee der Bewegung lässt sich die zweite Hypothese von *Helmholtz* nach unsern Betrachtungen über die stetigen Systeme unveränderlicher Figuren auf die folgende reduciren: Ist ein System von Elementen (S) gegeben, von dessen Elementen ein jedes einem Liniencontinuum angehört, dem die Eigenschaft der ersten Hypothese zukommt, in der Art jedoch, dass zwischen diesen stetigen Liniensystemen ein eindeutiger Zusammenhang derselben Ordnung (auch bei der Annahme, dass eines oder mehrere dieser Continua sich auf ein einziges Element reduciren lässt) besteht, so gibt es zwischen den Paaren sich entsprechender Punkte dieselbe Function der Coordinaten, welche *Abstand* der Elemente des Paares heisst. In einem solchen Fall wird (S) *ein starrer Körper* und werden zwei Lagen von (S) *congruent* genannt.[2]

Die *dritte* Hypothese von *Helmholtz* setzt die volle Freiheit der Bewegung der starren Körper voraus, die darin besteht, dass man jeden Punkt an die Stelle eines jeden andern bringen kann oder ohne die Idee der Bewegung: dass zwei beliebige gegebene Punkte einer Linie mit den oben genannten Eigenschaften angehören, wobei man jedoch die Abstände berücksichtigt, welche ihn mit den übrigen Punkten des Körpers, dem er angehört, verbinden.

„Der erste Punkt eines in sich festen Systems ist also absolut beweglich. Wenn er festgestellt ist, besteht für den zweiten Punkt eine Gleichung und eine seiner Coordinaten wird Function der $n-1$ übrigen. Nachdem auch der zweite festgestellt ist, bestehen zwei Gleichungen für den dritten u. s. w. Im

1) Bemerkungen zu *v. Helmholtz* Arbeit über die Thatsachen u. s. w. Berichte der Ges. d. Wissensch. zu Leipzig. 1886. — Ueber die Grundlagen der Geometrie (ebenda Oct. 1890).

2) Siehe die Vorr. und die Note II am Schluss.

Ganzen sind also $\frac{n(n+1)}{2}$ Grössen zur Bestimmung der Lage eines in sich festen Systems erforderlich."

Nach *Lie* (a. a. O.) kommt diese Hypothese der folgenden gleich. Der Punkt x_1, y_1, z_1 kann in jeden beliebigen Punkt des Raums gebracht werden; ist er festgelegt, so kann jeder andre Punkt (*von allgemeiner Lage*) ∞^2 Lagen einnehmen, welche mittelst der durch die Gleichheit der Abstände des beweglichen Punktes von dem festen Punkt gegebenen Gleichung bestimmt werden. Sind die beiden Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ festgelegt, so nimmt ein dritter Punkt x_3, y_3, z_3 von allgemeiner Lage ∞^1 Lagen ein, die durch zwei analoge Gleichungen bestimmt sind. Wenn schliesslich drei Punkte $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ festgelegt werden, so wird (wenn sie nicht eine specielle Lage haben) den drei Gleichungen von der Form

$$\omega(x_i, y_i, z_i; x_4, y_4, z_4) = \omega(x_i, y_i, z_i; x'_4, y'_4, z'_4) \; (i = 1, 2, 3) \qquad (C)$$

nur durch die Coordinaten $x'_4 = x_4, y'_4 = y_4, z'_4 = z_4$ genügt.

Lie macht hier eine wichtige Bemerkung. *Helmholtz* hat *die allgemeine Lage* der beweglichen Punkte nicht erwähnt und *Lie* beweist, dass, wenn man sie nicht berücksichtigt, die Bewegungen des *Euclid*'schen Raums durch die drei ersten Axiome allein charakterisirt sind.

Die *vierte* Hypothese lautet: „Endlich müssen wir dem Raum noch eine Eigenschaft beilegen, die der Monodromie der Functionen einer complexen Grösse analog ist und die sich darin ausspricht, dass zwei congruente Körper auch noch congruent sind, nachdem der eine eine Umdrehung um irgend eine Rotationsaxe erlitten hat. *Drehung* ist analytisch dadurch charakterisirt, dass eine gewisse Anzahl von Punkten des bewegten Körpers, während der Bewegung unveränderte Coordinaten behalten, *Umkehr* der Bewegung dadurch dass früher durchlaufene continuirlich ineinander übergehende Werthcomplexe der Coordinaten rückwärts durchlaufen werden. Wir können die betreffende Thatsache so aussprechen: *Wenn ein fester Körper sich um $n - 1$ seiner Punkte dreht, und diese so gewählt sind, dass seine Stellung nur noch von einer unabhängig Veränderlichen abhängt, so führt die Drehung ohne Umkehr schliesslich in die Anfangslage zurück, von der sie ausgegangen ist.*"

Es könnte nach dem ersten Wortlaut dieser Hypothese und dem Titel, welchen ihr der Verfasser in einer früheren Schrift[1]) gegeben hat, scheinen, als ob die Bewegung eines starren Körpers z. B. um zwei feste Punkte in dem gewöhnlichen Raum nicht möglich wäre, während dies doch schon die vorhergehenden Hypothesen voraussetzen; denn wenn der Körper starr ist, so bleibt er nach Hypothese II und III bei der Bewegung immer sich selbst und einem beliebigen andern ihm congruenten Körper congruent. Aus der zweiten Abfassung der Hypothese, die oben cursiv gedruckt ist, ersieht man, dass

1) Diese Schrift ist ein Auszug aus der erwähnten Abhandlung, welche früher in den Verhandl. des naturw. med. Vereins zu Heidelberg, 1866 veröffentlicht wurde. *Helmholtz* nennt diese Hypothese: *Hypothese über die Unabhängigkeit der Form starrer Körper von der Rotation.*

Helmholtz ihr diesen Sinn nicht hat geben, sondern die Annahme hat machen wollen, dass der Körper, welcher unverändert bleibt, bei der Rotation ohne Inversion in die ursprünglich von ihm eingenommene Lage zurückkehrt.

An einer andern Stelle behauptet er die geometrische Möglichkeit, ohne die Hypothese IV auszukommen.[1])

„Es wäre eine Geometrie möglich, sagt er, wo es nicht so wäre. Am einfachsten ist dies für die Geometrie der Ebene einzusehen. Man denke sich, dass bei jeder Drehung jeder ebenen Figur ihre linearen Dimensionen dem Drehungswinkel proportional wüchsen, so würde nach einer ganzen Drehung um 360 Grad die Figur nicht mehr ihrem Anfangszustand congruent sein. Uebrigens würde ihr aber jede zweite Figur, die ihr in der Anfangslage congruent war, auch in der zweiten Lage congruent gemacht werden können, wenn auch die zweite Figur um 360 Grad gedreht wird. Es würde ein consequentes System der Geometrie auch unter dieser Annahme möglich sein, welches nicht unter die *Riemann*'sche Form fällt."

de Tilly hat zuerst (mit einigem Vorbehalt) die Behauptung aufgestellt, diese Hypothese gehe aus den früheren hervor. Nach *Lie* hat sich auch *Klein* mit dieser Frage beschäftigt.[2]) Für die Geometrie der Ebene allein ist dagegen das obige Axiom nöthig, wie *Helmholtz* selbst bewiesen hat.

Dies ist wahrscheinlich der Grund, wesshalb er es auch für den Raum für nothwendig gehalten hat. Nimmt man dann an, wie *Lie* bemerkt, man könne die Hypothesen von *Helmholtz* so verstehen, als ob der Begriff der allgemeinen Position in ihnen enthalten sei, alsdann ist das Axiom der Monodromie nöthig.

Am Schluss seiner Arbeit führt er auch eine andre Lösung für die ebene Geometrie an, welche sich mit seinen Axiomen vereinigen lässt, dass nämlich der Kreis reelle Asymptoten habe. Nach uns sind diese beiden Lösungen der ebenen Geometrie unstatthaft und müssen a priori verworfen werden, weil sie der Erfahrung widersprechen, wenn sie auch mathematisch möglich sein sollten.[3])

---

1) Populäre wissensch. Vorträge, Heft III, S. 41. Braunschweig, 1876.

2) *De Tilly:* Essai sur les principes fond. de la géométrie et de la mec. Bordeaux, 1879; *Lie* a. a. O.; *Klein:* Zur nicht-Eucl. u. s. w. a. a. O. S. 565. *Lie* sagt in den Leipz. Berichten, 1892, wir hätten seine Hauptresultate vollständig genau wiedergegeben und fügt dann hinzu: *de Tilly* hat etwas Derartiges nicht einmal behauptet (siehe auch die Theorie der Transf.-Gruppen Bd. 3, 1893). Wir haben S. V, 38 und 39 von *de Tilly*'s Buch noch einmal gelesen und können danach nur bei dem Gesagten bestehen bleiben. Dies hat freilich keine Bedeutung für den Text und nur wenig für den Anhang, da wir nach dem Obigen die Priorität *Lie*'s in Bezug auf den Beweis des Axioms der Monodromie anerkannt haben. Denn wir haben nicht gesagt, *de Tilly* habe den strengen Beweis für das, was er behauptet, beigebracht, vielmehr geht aus unsrer Kritik des *de Tilly*'schen Buchs, in welcher grossentheils auch die Kritik *Lie*'s enthalten ist, grade das Gegentheil hervor.

Bezüglich des Beweises von *Klein*, den *Lie* (a. a. O.) kritisirt, siehe *Klein* a. a. O. und seine Vorlesungen über höhere Geometrie. II. Theil, S. 239, 241—243. Wie aus der Anm. S. 631 und der 2. Anm. S. 672 hervorgeht, haben wir keine Zeit und auch keine Veranlassung gehabt vor dem Erscheinen des Originals dieses Beweises wegen einen Vergleich zwischen der Abhandlung *Klein*'s und denen *Lie*'s anzustellen (1894).

3) Siehe Vorrede.

Lie weist in dem erklärten Sinn nach, dass die Gruppen der Bewegungen des *Euclid*'schen und der nicht-*Euclid*'schen Systeme und verschiedene andre Gruppen möglich sind, unter welchen sich fünf befinden, in welchen es keine Freiheit der Bewegung für die Punkte einer willkürlichen kleinen Umgebung gibt. Hält man in diesen Gruppen einen Punkt fest, so bleibt eine gewisse durch ihn gehende Curve unbeweglich derart, dass jeder Punkt mit Ausnahme dieser Classe von Punkten ∞^2 Lagen einnimmt. Die sehr wichtige Absonderung dieser Gruppen folgt aus dem Begriff von allgemeiner Lage, welcher in Hypothese III gegeben wurde.

G. Cantor macht nicht nur die schon erwähnte Bemerkung sondern weist auch auf die Willkürlichkeit des Zusammenhangs zwischen den Punkten des gewöhnlichen Raums und den Werthen des Zahlencontinuums (x, y, z) hin. Denn, sagt er, es ist eine Hypothese, zu welcher man sich durch keinerlei Bedürfniss gezwungen sieht, dass jedem System rationaler oder irrationaler Werthe von x, y, z in Wirklichkeit ein Punkt des Raums entsprechen soll. Er zeigt dann, dass man sich unstetige Räume vorstellen kann, in welchen zwischen zwei Punkten N und N' eine unendlich grosse Anzahl stetiger Bewegungen möglich ist. Einen solchen Raum erhält man z. B. aus dem gewöhnlichen Raum, wenn man aus dem letzteren alle Punkte ausscheidet, deren Coordinaten algebraische Zahlen sind. Er schliesst daher, dass man aus der stetigen Bewegung allein durchaus nicht über die Stetigkeit des Raums im Ganzen und überall entscheiden kann und dass folglich das Studium der Mechanik in dem die erwähnten Eigenschaften besitzenden unstetigen Raum von Nutzen wäre, um möglicher Weise aus seiner Vergleichung mit der Wirklichkeit irgend eine Thatsache abzuleiten, welche die vollkommene Stetigkeit des Raums abhängig von der Erfahrung darthut.[1])

Die Hypothesen III und IV von *Helmholtz* sind gewiss anschaulicher, wie diejenigen *Riemann*'s; dasselbe lässt sich aber nicht von der ersten und zweiten sagen, abgesehen davon dass die Entwicklungsart rein analytisch und nichts weniger als elementar ist.

Der Verfasser zeigt ferner nicht, wie sich aus seinen Axiomen ohne andre Hypothesen die Grundeigenschaften der wesentlichen Dinge der Elementargeometrie ableiten lassen.

Nach den Hypothesen von *Helmholtz* sind die unendlich kleinen Bewegungen um einen als Anfang der Coordinaten gewählten Punkt durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\frac{dx}{d\eta} = a_0 x + b_0 y + c_0 z + \cdots$$

$$\frac{dy}{d\eta} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots$$

$$\frac{dz}{d\eta} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots$$

1) Math. Ann. Bd. XX, S. 119, oder auch Acta Mathem. Bd. 2. Siehe auch unsre Anm. zu Abschn. 1, Kap. IV unsrer Einleitung.

Lie macht *Helmholtz* den Vorwurf, bei seiner Entwicklung nicht berücksichtigt zu haben, dass die Coefficienten a_i, b_i, c_i gleichzeitig Null werden und dabei doch den Transformationsgleichungen der obigen Hypothesen genügen können. In diesem Fall würden alle dem Anfang unendlich nahen Punkte unbeweglich bleiben, wenn man von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung absieht. *Lie* findet in der That eine solche Gruppe, welche den Hypothesen von *Helmholtz* entspricht, jedoch muss man den in der dritten Hypothese gegebenen Begriff von allgemeiner Lage hinzunehmen, welcher sich in der Hypothese von *Helmholtz*, um die Wahrheit zu sagen, nicht vorfindet.

Helmholtz fügt zwei weitere Axiome hinzu:

V. Der Raum hat drei Dimensionen.

VI. Der Raum ist unendlich ausgedehnt.

Diese Axiome reichen, wie er selbst bemerkt, noch nicht aus, das *Euclid*'sche von dem *Lobatschewsky*'schen System zu trennen. Es ist hier eine gewisse Verwirrung bei den Bezeichnungen in Axiom V und den vorhergehenden Axiomen, in welchen unter Raum von n Dimensionen eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen verstanden wurde (Hyp. I), zu bemerken. Klarheit in der Erörterung der Grundbegriffe ist ein Haupterforderniss, welches uns in der Arbeit von *Helmholtz* zu fehlen scheint. Eine präcisere Auswahl der Benennungen hätte *Helmholtz* vielleicht die Angriffe einiger Philosophen erspart.[1])

Er hat auch in einem glänzenden Vortrag gesucht, die Idee der Möglichkeit dreier Geometriesysteme populär zu machen und sich dabei eleganter physischer Erwägungen und schon bekannter Untersuchungen, besonders der erwähnten Abhandlungen von *Beltrami* bedient. *Helmholtz* weist auch auf die Möglichkeit hin, dass das Princip nicht richtig sein kann, nach welchem ein Körper bei der Bewegung keine Deformation erleidet, ohne dass wir es bemerken oder in unsrer Sprache, nach welchem der leere Raum ein in der Position seiner Theile identisches System ist. Denn man kann sich vorstellen, dass der Raum diese Eigenschaft nicht besitzt und das genannte Princip nicht gilt. In diesem Fall wäre die Krümmung des Raums in jedem seiner Punkte nicht constant.[2])

Clifford sagt darüber: „Sollte es nun möglich sein, dass sich die Längen dadurch allein ändern, dass sie von einem Ort zum andern gebracht werden, ohne dass wir es merken? Wer ernstlich über diese Annahme nachdenken will, wird schliesslich zu der Ueberzeugung kommen, dass sie durchaus sinnlos ist.[3])

An einer andern Stelle sagt *Helmholtz*, die Axiome liessen sich auf die drei folgenden zurückführen:

1) Zwischen zwei Punkten ist nur *eine* kürzeste Linie möglich, welche Grade heisst.

---

1) Siehe am Ende die Note über die Definition des Raums und der Geometrie von mehr als drei Dimensionen.

2) Siehe auch *Erdmann* a. a. O. S. 59—60.

3) a. a. O.

2) Durch je drei Punkte geht eine Ebene. Eine Ebene ist eine Fläche, in die jede Grade ganz hineinfällt, wenn sie mit ihr zwei Punkte gemein hat.

3) Durch jeden Punkt ist nur eine Linie möglich, welche einer gegebenen graden Linie parallel ist. *Parallel* sind zwei Grade, welche in derselben Ebene liegen und sich in keiner endlichen Entfernung treffen.[1])

Wie man sieht adoptirt hier *Helmholtz* die erwähnten Principien *Klein's* mit Ausnahme einiger Unterschiede, welche sich nicht gut beurtheilen lassen, da er nicht alle Begriffe, welche diese Axiome enthalten, definirt hat.

Die Axiome in der Abhandlung von *Helmholtz* führen zu der Methode (oder einer ähnlichen) die Ebene und die Grade mittelst der Kugel zu construiren, was, wie wir gesehen haben, *W. Bolyai* und *Lobatschewsky* versucht haben.

Ein wichtiges Werk, welches die Axiome von *Helmholtz* mit der von *W. Bolyai* eingeschlagenen Richtung in Verbindung bringt, ist das schon erwähnte Buch von *de Tilly.*[2]) Die Methode, von welcher er ausgeht, ist stets analytisch, wenn er auch bei der Entwicklung synthetisch verfahren will.

Er gibt die ersten empirischen Begriffe von Fläche, Linie und Punkt und erklärt, wie man den Punkt durch drei unabhängige und auf stetige Art variable Grössen (Coordinaten) bestimmen kann, lässt aber die Hypothese gelten, dass um einen Punkt ein stetiges System geschlossener sich einander einhüllender Flächen ohne singuläre Punkte oder Linien construirt werden könne. Die Begriffe *de Tilly's* gründen sich ausser auf jene Eigenschaften, von denen er sonst Gebrauch macht, auf die drei Dimensionen des Raums, welche er nicht als Axiom gibt. Er definirt die Linie und die Fläche nicht abstract, doch sieht man aus der analytischen Methode, was sie sein sollen.

Auf die Begriffe folgt das erste aus zwei Theilen bestehende Axiom, welches er das Axiom des Abstandes nennt. Der Abstand wird als eine Grösse eingeführt „von welcher wir durch die Anschauung oder Erfahrung Kenntniss haben und welche sich mit den Grössen derselben Art, die zur nämlichen Zeit

1) Die Thatsachen u. s. w. a. a. O.

2) Der belgische Mathematiker hat sich zuerst in einer Abhandlung, welche er 1868 der belgischen Academie überreichte und die in den Mémoires couronnées von 1870 veröffentlicht wurde, mit der abstracten Mechanik befasst. Der erste Theil enthält eine summarische Darlegung der abstracten Geometrie, in welcher er sich auf mechanische Betrachtungen stützt und die kinematische ebene und sphärische Trigonometrie zuerst entwickelt; der zweite Theil gibt einige Ergänzungen zu der Geometrie immer vom mechanischen Gesichtspunkt aus; der dritte behandelt die Kinematik, der vierte die Statik und der fünfte endlich die Dynamik. Er kommt zu dem sehr wichtigen Resultat, dass sich in der theoretischen Mathematik nichts der Annahme widersetzt, die Summe der Winkel des gradlinigen Dreiecks sei kleiner als zwei rechte Winkel.

Wir können die in dieser interessanten und originellen Arbeit dargelegten Principien nicht besprechen, weil dies uns, auch wenn der Gegenstand mit dem unsrigen nahe verwandt ist, doch zu weit abführen würde.

Genocchi hat sich auch gleichzeitig mit *de Tilly* mit einigen Principien der abstracten Mechanik beschäftigt aber mehr zu dem Zweck einen Stützpunkt für die *Euclid*'sche Geometrie zu finden als zu dem erwähnten Schluss *de Tilly*'s zu kommen (Mem. della società dei XL a. a. O. u. s. w.).

Die nicht-*Euclid*'sche Geometrie behandelt *de Tilly* auch in dem Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique Serie 2, Bd. XXX, 1870 S. 28—37; Bd. XXXVI. S. 124; Serie 3, Bd. XIV 1887; Bull. de *Darboux* Bd. III. 1872 S. 131—138.

oder zu verschiedenen Zeiten betrachtet werden, vergleichen lässt." Er gibt jedoch nicht an, von welcher Art diese Grösse ist. Das Axiom lautet:

a) „Der Abstand variirt in dem Raum auf stetige Art, d. h. wenn man eine beliebige begrenzte Linie AB betrachtet, so variirt der Abstand der Punkte dieser Linie von einem ihrer beiden Enden, z. B. B auf stetige Art von AB bis Null. Wenn aber die Linie AB beliebig ist, so kann der fragliche Abstand Maxima und Minima haben ohne dass er aufhört stetig zu sein und da er der Null zustreben muss, so gibt es nothwendiger Weise in der Nachbarschaft des Punktes B eine Region $B'B$, in welcher sich der Abstand vom Punkt B stets vermindert, wenn man nach B hingeht und wächst, wenn man sich von B entfernt."

b) „Ist ein System von Punkten in endlicher oder unendlich grosser Anzahl $ABCD\ldots$ (in andern Worten eine beliebige Figur) und ein solcher Punkt B' gegeben, dass $AB' = AB$ ist, so existiren Punkte $C'D'\ldots$ derart, dass das System $A'B'C'D'\ldots$ dem ersteren absolut identisch ist; d. h. in diesen beiden Systemen sind die Abstände zwischen den Paaren der sich entsprechenden oder homologen Punkte sämmtlich zu je zweien gleich, wenn man unter homologen oder sich entsprechenden Punkten die mit demselben Buchstaben bezeichneten Punkte versteht."

Nachdem er die Idee der Bewegung eingeführt, gibt *de Tilly* dem zweiten Theil seines Axioms eine andre Form, nämlich:

„Ist ein System von Punkten in endlicher oder unendlich grosser Anzahl $ABCD\ldots$ (in andern Worten eine beliebige Figur) und ein solcher Punkt B' des Raums gegeben, dass $AB' = AB$ ist, so kann sich das gegebene System um den unbeweglich gehaltenen Punkt A so *bewegen*, dass dieses System *unverändert* bleibt und der Punkt B nach B' kommt, wenn man unter der Unveränderlichkeit eines Systems die Unveränderlichkeit aller Abstände zwischen den Punkten, welche es zusammensetzen, versteht."

Er fügt jedoch hinzu, diese zweite Form sei keine wörtliche Uebersetzung der ursprünglichen Fassung; denn dieses Axiom lasse nicht nur die Existenz zweier identischer Systeme $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ zu, sondern eine stetige Reihe von Systemen, welche sämmtlich identisch sind und von welchen jedes demjenigen, welchem es vorhergeht und demjenigen, auf welches es folgt, unendlich nahe liegt. Diese Eigenschaft ist aber, wie er sagt, eine Folge des in der ersten Form gegebenen Axioms; d. h. des Princips der Stetigkeit combinirt mit der Existenz des für eine beliebige Lage des Punktes B' zu $ABCD\ldots$ identischen Systems.

Vor Allem geht aus der ersten Form durchaus nicht die Stetigkeit des Raums, wie er sie annimmt, hervor, wie sich auch aus der letzten schon erwähnten Bemerkung *Cantor's* ergibt. Ueberdies zeigt *de Tilly* nicht, wie auf Grund des Axioms in der ersten Form die beiden Systeme $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ einem stetigen System ihnen identischer Systeme angehören, während offenbar die zweite Redaction des Axioms etwas weniger und etwas mehr als die erste voraussetzt. In der That können nach der von ihm gegebenen

Definition identischer Figuren die beiden Systeme $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'$ auch entgegengesetzten Sinn haben z. B. zwei Scheiteldreikante sein. Sind sie dies, so ist es nicht richtig, dass sie der Stetigkeit wegen in dem Raum von drei Dimensionen einer stetigen Reihe ihnen identischer Dreikante angehören. Bei der zweiten Redaction werden dagegen diese Systeme vorausgesetzt, dann sind aber die Figuren congruent d. h. identisch und von gleichem Sinn in S_3. Hat *de Tilly* bei der ersten Abfassung nur die congruenten Figuren allein gemeint, wie auch aus dem hervorzugehen scheint, was er auf S. 17 seines Buches über die Bewegung starrer Körper sagt, wo Identität und Congruenz dasselbe Ding sind, so ist seine Definition identischer Figuren zu allgemein gehalten, weil sie auch die symmetrischen Figuren in sich fasst. Er hätte also in der ersten Abfassung die Bedingung hinzufügen müssen, dass die beiden Systeme $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ einem stetigen System angehören und dann prüfen müssen, ob bei der Definition der Congruenz die von *Helmholtz* den bei der Bewegung beschriebenen Linien auferlegte Bedingung nöthig sei oder nicht. Mit dieser Frage haben auch wir uns beschäftigt. Aldann muss man, um die Identität zweier Figuren zu beweisen, nicht nur zeigen, dass die Abstände gleich sind, sondern dass auch die andre Bedingung erfüllt ist.[1]

Da *de Tilly* später beständig von der Anschauung der Bewegung ohne Deformation Gebrauch macht, so kann man auch nach der Art, wie er sie bei einigen Beweisen verwendet, nicht von ihm behaupten, er habe die Geometrie unabhängig von der Anschauung der Bewegung gemacht; eher ist bei dem Verfasser der abstracten Mechanik eine starke Neigung zu bemerken, die Geometrie mit mechanischen Betrachtungen zu behandeln.

Der Verfasser lässt in der Folge das Axiom gelten, dass der Abstand un endlich gross werden kann (welches der VI. Hypothese von *Helmholtz* entspricht) und gibt zuletzt das Postulat *Euclid*'s über die Parallelen. In den Begriffen *de Tilly*'s ist im Grunde die erste Hypothese von *Helmholtz* und in dem Axiom über den Abstand dessen zweite Hypothese enthalten mit dem Unterschied, dass *Helmholtz* den Abstand als eine Grösse oder eine Function der Coordinaten definirt. So ist auch in dem angeführten Axiom in der zweiten Fassung die Möglichkeit der Rotationsbewegung um einen festen Punkt enthalten; er setzt in demselben aber nicht voraus, dass jeder andre Punkt ∞^2 Lagen annehmen könne. Er beweist eine solche Eigenschaft nicht, während ohne sie die Kugel nicht möglich ist. Das Axiom *de Tilly*'s enthält aber eine weitere Bedingung, nämlich die Stetigkeit des Abstandes, wenn der Punkt sich in einer Linie bewegt.

de Tilly gibt zwei Sätze, welche seiner Untersuchung zu Grunde liegen, dass es nämlich in jeder Linie und jeder Fläche von einem Punkt aus eine endliche „région à croissance continue" in dem Sinn gebe, dass die Abstände eines Punktes A z. B. einer Linie von den andern Punkten der Linie sich in einem endlichen Zug stets bis zu einem von Null verschiedenen bestimmten

1) Siehe Vorr., S. 219—222 und die Note II am Schluss.

Werth δ vermehren. Da er die Definition der Linie und der Fläche nicht gibt und sich auf die analytische Methode stützt, so lassen die Beweise dieser Sätze unbefriedigt und hätten gewiss wenigstens eine genauere Entwicklung nöthig, um zu zeigen, dass sich keine andre Hypothese in ihnen verbirgt.[1]) Wir bemerken noch, dass er sich bei dem Beweis der Eigenschaften der Kugel des Axioms bedient, dass der Abstand zweier Punkte unendlich gross sein kann, während die Kugel davon unabhängig ist. Grade die Art, wie er von der Anschauung der Bewegung und von der Zeit Gebrauch macht, lässt oft auch den Leser über die Strenge des Beweises im Unklaren. So ist es z. B. mit dem Beweis auf S. 32, dass, wenn ein unveränderliches System sich um einen festen Punkt bewegt, ein beweglicher Punkt A nach B kommt und *in demselben Augenblick* B nach C u. s. w. und man so eine Linie erhält, die in sich selbst verläuft. Ebenso scheint uns der Beweis ungenügend, dass zwei Punkte AB eine grade Linie bestimmen, welcher nur daraus, dass Flächen existiren, die durch Linienzüge AMB die einen immer in den andern erzeugt werden, folgert, das von den Linien erzeugte Volumen habe eine Linie AB zur Grenze.

Gleich nach dem ersten Axiom stützt er sich darauf und beweist später am Ende des Buchs, dass der Abstand zweier Punkte drei verschiedene analytische Ausdrücke besitzen kann, welche den drei mehrerwähnten Geometriesystemen entsprechen.

Die Ebene wird nach *de Tilly* durch eine Grade erzeugt, welche auf einer andern Graden senkrecht steht, sie schneidet und um sie rotirt.[2]) Der Winkel ist nach ihm durch zwei Grade oder zwei von einem gemeinschaftlichen Punkt begrenzte Strahlen gegeben.

Wir haben schon in der Vorrede und der Einleitung die Gründe besprochen, wesshalb es nicht angemessen erscheint, der Geometrie den Begriff des Abstandes ohne den der Graden zu Grunde zu legen. Bis jetzt haben nicht einmal die Schriftsteller, welche unter diesem Begriff das Punktepaar und nicht eine Function der Coordinaten verstehen, welche letztere dann im Grunde die Länge des zwischen den beiden Punkten enthaltenen gradlinigen Segments ausdrückt, den Zahlenbegriff zu vermeiden gewusst. Denn sie haben, auch wenn sie ihn scheinbar vermieden, nicht auf rein geometrischem Weg festgestellt, wann ein Paar grösser oder kleiner als ein andres ist und ohne diese Feststellung lässt sich der innere und der äussere Theil der Kugel und die Stetigkeit dieser Theile nicht definiren.

1) Siehe auch *Killing:* Erweit. des Raumbegriffs, S. 3.

2) *Crelle* (a. a. O.) weist *Fourier* die Priorität dieser Definition der Ebene zu. In den erwähnten „Séances des écoles normales“ schlägt *Fourier*, wie *Leibniz* vor, die Grade als Ort der Punkte zu definiren, welche bezüglich gleichen Abstand von drei festen Punkten haben, und die Ebene als Ort der Punkte, welche bezüglich denselben Abstand von zwei festen Punkten haben. Diese Definitionen wurden jedoch von *Monge* nicht gebilligt. Er bemerkt in seiner Antwort an *Fourier:* „Die Betrachtungen, welche Du bei Deiner Definition benutzest, haben etwas Complicirteres als die grade Linie, welche Du definiren willst und setzen eine Vertrautheit mit der Geometrie voraus, welche man ohne den Begriff der graden Linie nicht erlangen kann.“ *Cassani* hat diese Definition, welche auch *Genocchi* (a. a. O.) benutzt, ins Einzelne ausgeführt und angenommen, das Dreieck von Punkten sei gleichseitig oder, wie er sagt, *regelmässig* (I nuovi fond. della geom, Giornale di *Battaglini*. Bd. XX).

Wir bemerken hier noch, dass die Arbeiten, deren Entwicklung von dem Begriff des Abstandes oder des Paares ausgeht, nicht nur direct in dem Raum von drei oder n Dimensionen operiren müssen, weil sich diese Methode in dem allgemeinen Raum oder unabhängig von den Dimensionen des Raums nicht anwenden lässt, sondern auch vorerst das Problem nicht untersuchen, ob eine Kugel ein Centrum oder mehrere Centren hat. Denn auch bei jedem hinreichend kleinen Radius r ist es möglich sich a priori vorzustellen, dass es mehr als ein Centrum gebe. In der That haben wir bei unsern Untersuchungen, bevor wir uns für das eine oder das andre der bekannten Systeme entschieden, voraussetzen müssen, es gebe Paare sehr nahe beieinander liegender Punkte, welche eine Grade nicht bestimmen. Erst später haben wir bewiesen, dass die Gruppe von Punkten, welche zu je zweien eine Grade nicht bestimmen, endlich ist und dann, dass es in der offenen Graden kein solches Punktepaar gibt und in der geschlossenen Graden nur die Gegenpunkte diese Eigenschaft haben können. Diese Untersuchung müsste bei der Kugel nach unserm Dafürhalten dem Studium des Schnittes zweier Kugeln vorausgehen. Ferner kann man die Autoren, welche wie *W. Bolyai* die rein geometrische Methode befolgen wollen, fragen, wie sie das Continuum des Raums, das sie nöthig haben, definiren.

Aus dem Buche *de Tilly's*, in welchem der Begriff des Abstandes als Grundbegriff und die Erzeugung der Graden und der Ebene mittelst der Kugel sich mit grösserer Sorgfalt und besserem Erfolg als bei den Andern behandelt findet, erkennt man am besten die Mängel und Schwierigkeiten dieser Methode. Was dann den Unterricht angeht, so erkennt der Verfasser selbst, wenn er seine Untersuchungen auf die Abhandlung der elementaren Geometrie von *Rouché* und *Comberousse* anwendet, ausdrücklich die Unmöglichkeit an seine Methode bei dem Beweis der Grundeigenschaften der Graden und der Ebene zu befolgen.

Wenn wir an dem Buch *de Tilly's* auch viel ausgesetzt haben, so verdient es doch ohne Zweifel bei der Betrachtung der Methoden der Principien der Geometrie die grösste Beachtung und unser Tadel schliesst nicht aus, dass man die Fehler unter Beibehaltung der Methode selbst ausmerzen kann.

Vor und nach *de Tilly* haben Viele versucht ohne das Axiom über die Ebene auszukommen und haben die Ebene entweder mittelst zweier Reihen congruenter concentrischer Kugeln oder mittelst der Rotation einer Graden construirt, welche senkrecht auf einer andern steht und sie in einem Punkt schneidet. Unter ihnen sind ausser den schon genannten *Deahna*, *Gerling*, *Erb*, *Crelle*, *Duhamel*, *Flie S. Marie*, *Cassani* und *Frischauf* bekannt.[1])

Diese Methode ist einerseits aus dem Irrthum entstanden, die grade Linie sei nicht zu definiren, während man glaubte die Kugel definiren zu können. Es ist nun unzweifelhaft, wie wir in der Einleitung gezeigt haben, dass man

---

1) *Deahna:* Diss. inaug. Marburg, 1837. *Gerling:* Journ. von *Crelle* Bd. 20, S. 332. *Erb:* Die Probleme der graden u. s. w. Heidelberg, 1846. *Crelle* a. a. O. *Duhamel:* Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 1866. *Flie S. Marie* a. a. O. *Cassani:* Geometria rigorosa. Venedig, 1872. Intorno alle ipotesi fondamentali della geom. Giorn. di *Battaglini* Bd. XI u. XX. *Frischauf:* Elemente der abs. Geometrie. Leipzig, 1876.

wenigstens von einer Grundform ausgehen muss, welche man nicht *construiren* kann, die sich jedoch mittelst der Eigenschaften, durch welche sie sich von den andern Formen unterscheidet, *definiren* lässt. Wir haben in der Einleitung auch gezeigt, dass es am angemessensten ist, das stetige in der Position seiner Theile identische System, welches durch die kleinste Anzahl Elemente bestimmt wird, als Grundform zu wählen, wenn dieses System wie in der Geometrie existirt. Bei der obigen Methode aber betrachtet man entweder den Abstand oder das Elementepaar als Grundform. Ueberdies hat die Kugel zu ihrer Construction gerade die Definition des Raums von drei oder n Dimensionen nöthig und diese Definition verursacht grössere Schwierigkeiten als diejenige der Graden.

Andrerseits ist die genannte Methode mit besserem Grund aus der schon erwähnten Bemerkung von *Gauss* über die Unvollkommenheit des Axioms über die Ebene entstanden. Diese Unvollkommenheit haben wir vollständig entfernt, ohne auf die Erzeugung der Ebene mittelst der Kugel oder der Rotationsbewegung einer Graden zurückzukommen. Wir haben den Beweis nur für das *Euclid*'sche System gegeben, wobei wir uns auf die Theorie der Parallelen stützten, bei dem *Riemann*'schen System dagegen benutzten wir die Hyp. VII. Wir glauben, dass ein Beweis unabhängig von dem Postulat über die Parallelen möglich ist und haben an einer andern Stelle die Gründe für unsern Glauben angegeben und zugleich den Weg gezeigt, auf welchem wir ein Gelingen für wahrscheinlich halten.[1])

Duhamel gibt in Bd. II seines erwähnten vortrefflichen Buches von dem Axiom über die Ebene einen mehr empirischen als geometrischen Beweis. Bemerkenswerth ist die elegante Art, wie er den Begriff der Länge der Linien einführt und die Consequenzen entwickelt.

Cassani hat das Verdienst, sich in Italien als einer der Ersten mit den Principien der Geometrie in der von *W. Bolyai* und *Helmholtz* inaugurirten Richtung beschäftigt zu haben. Freilich unterscheidet er im Anfang die Axiome nicht streng von den Definitionen. *Cassani* hat in seiner *Geometria rigorosa* die Nothwendigkeit erkannt, zu beweisen, dass sich zwei Kugeln nur in einer Kreislinie schneiden können und untersucht daher mit grösserer Sorgfalt als analoge Arbeiten andrer Autoren den Schnitt zweier Kugeln. Seine Beweise genügen jedoch nicht immer vollständig.

Das Buch von *Frischauf* ist bezüglich der Grundbegriffe mangelhaft; man kann daher nicht behaupten, er habe seinen Zweck die Dunkelheit der Elemente aufzuklären erreicht; denn seine Beweise zeigen von Anfang viele Lücken, die der Leser durch seine eigne Anschauung ausfüllen muss. Nachdem er aber die Grade und die Ebene erhalten hat, geht er auf eine einfache geometrische Art an die systematische Behandlung der elementaren Geometrie, speciell *Lobatschewsky*'s, und weist auf die Grundbegriffe der Arbeiten von *Riemann*, *Helmholtz* und *Beltrami* hin.

1) Siehe S. 417, 418.

Von geometrischem Geist durchweht sind die Axiome *Hoüel's* in seinem erwähnten Werkchen. Das erste setzt fest, dass die Lage einer Figur in dem Raum durch drei ihrer Punkte im Allgemeinen fixirt ist; das zweite behauptet die Existenz der graden Linie, welche durch zwei beliebige ihrer Punkte bestimmt wird und derart ist, dass jeder ihrer Theile mit jedem andern Theil genau zusammenfällt, wenn diese beiden Theile zwei Punkte gemein haben; das dritte bezieht sich auf die Existenz der Ebene, welche jede Grade, die zwei Punkte mit ihr gemein hat, enthält und von welcher jeder Theil genau auf die Oberfläche der Ebene selbst gelegt werden kann, entweder direct oder nachdem man ihn umgedreht hat, indem man ihn eine halbe Rotation um zwei seiner Punkte hat ausführen lassen; schliesslich sagt das vierte Axiom, dass man durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Graden ziehen kann. Liegt es nun an der Art, wie diese Axiome abgefasst sind oder an dem Inhalt, jedenfalls kann man nicht behaupten, dass sie der Strenge, auf welche der Verfasser Anspruch macht, genügen. Beachtenswerth sind die Bemerkungen, welche er über den Geometrieunterricht in den Schulen macht.

Einen weiteren wichtigen Antrieb haben diese Studien von allgemeinem Gesichtspunkt aus, wie wir schon bei der Besprechung der Arbeiten von *Helmholtz* erwähnten, dadurch erfahren, dass man die geometrische Theorie einer gegebenen Mannigfaltigkeit als die Theorie einer endlichen stetigen Gruppe von Transformationen betrachtete. Zuerst hat *Lie* diesen Begriff von Gruppe eingeführt und die fruchtbare Theorie dieser Gruppen gewinnt durch ihre verschiedenen Anwendungen Dank eben dem grundlegenden Werk *Lie's*[1]) täglich grössere Bedeutung. *Klein* jedoch hat fast zur selben Zeit zuerst diesen Begriff bei dem Studium der Geometrie in dem oben angegebenen Sinn eingeführt.[2]) Er nennt die Gruppe *Hauptgruppe*, welche die Eigenschaften eines geometrischen Dinges unverändert lässt. Diese Gruppe setzt sich in dem gewöhnlichen Raum aus den Transformationen in sechsmal unendlich grosser Anzahl zusammen, welche den Bewegungen entsprechen, aus den ähnlichen Transformationen in einfach unendlicher Anzahl und den Transformationen durch Symmetrie bezüglich einer Ebene. Aus diesem Grundbegriff leitet *Klein* die verschiedenen geometrischen Theorien ab, da jede von ihnen durch eine Gruppe charakterisirt wird, welche die Hauptgruppe enthält. So zeigt er z. B., dass die Gruppe der gewöhnlichen metrischen Geometrie in der Gruppe der linearen Transformationen, welche der projectiven Geometrie entspricht, enthalten ist

1) Theorie der Transformationen. Leipzig, 1888—1890. Diese Theorie ist aus derjenigen der Gruppen von Substitutionen von n Gegenständen entstanden, wobei es sich jedoch nur um discrete Gruppen handelt. Von Wichtigkeit ist dabei die Abhandlung *C. Jordan's* über die Gruppen der Bewegungen des Raums (Math. Ann. Serie II, Bd. II), welche jedoch bezüglich der allgemeinen Theorie einen mehr speciellen Charakter hat.

Die von *Lie* gegebene Definition von Gruppe von Transformationen im Allgemeinen (Verhandl. der Gesellsch. der Wissensch. zu Christiania, 1871) ist die folgende: Ist ein endliches oder unendlich grosses System von Transformationen zwischen x und x' gegeben, so heisst es eine Gruppe, wenn zwei nacheinander ausgeführte Transformationen des Systems eine andre Transformation liefern, welche demselben System angehört.

2) Vergleichende Betracht. u. s. w. a. a. O. und Math. Ann. VI.

und so bemerkt er einem Satz *Beltrami*'s entsprechend, dass auch die einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung entsprechende Gruppe bei passender Bestimmung der Coordinaten in der Gruppe der linearen Transformationen enthalten ist und dass mithin die Behandlung einer solchen Mannigfaltigkeit in der projectiven enthalten ist.

Lie bringt, wie wir zeigten, die Axiome von *Helmholtz* in eine präcisere Form und wendet dann seine Theorie an. Während *Klein* sich auf allgemeine Betrachtungen beschränkt, bestimmt *Lie* dagegen alle stetigen Gruppen von Transformationen, welche den Bewegungen des Raums entsprechen und den genannten Axiomen mit der erwähnten Modification genügen. Wir haben schon die wichtigen Erfolge der Arbeiten *Lie*'s, welche er in seiner ersten Schrift 1886[1]) mittheilte, erwähnt.[2]) Wir heben hier hervor, dass die Methode *Lie*'s rein analytisch ist und dass er, nachdem er die Gruppen von Transformationen gefunden, sich nicht damit beschäftigt aus ihnen die elementare Geometrie abzuleiten.

In dieser Richtung ist eine Arbeit des bedeutenden französischen Mathematikers *Poincaré* zu erwähnen.[3]) Er setzt die Algebra und Analysis als bekannt voraus und geht von den beiden Axiomen aus:

A. Die Ebene hat zwei Dimensionen.

B. Die Lage einer Figur in der Ebene wird durch drei Bedingungen bestimmt.

Durch Anwendung der Gruppentheorie führen diese beiden Axiome zu den Gruppen von Geometrien, welche *Poincaré quadratische* nennt, und zu andern Gruppen, welche sich von den ersteren mittelst des Axioms absondern:

C. Wenn eine ebene Figur ihre Ebene nicht verlässt und zwei ihrer Punkte unbeweglich bleiben, so bleibt die ganze Figur unbeweglich.

Zur Auswahl zwischen den quadratischen Geometrien gibt er das Axiom:

D. Der Abstand zweier Punkte kann nur dann Null sein, wenn die beiden Punkte zusammenfallen.

Oder:

E. Wenn zwei Grade sich schneiden, so kann die eine von ihnen um den Durchschnittspunkt derart rotiren, dass sie mit der andern zusammenfällt.

Um die sphärische Geometrie (jedoch nicht die zweite *Riemann*'sche Form) auszusondern, gibt er das Axiom:

F. Zwei Grade können sich nur in einem Punkt schneiden.

Und schliesslich, um das *Euclid*'sche System zu erhalten:

G. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist constant.

Aus diesem letzten Axiom gehen, wie er sagt, die Hypothesen D, E und F hervor.

---

1) Seit 1872 beschäftigte sich *Lie* speciell mit den stetigen und *Klein* mit den unstetigen Gruppen.

2) Wir bedauern, dass wir die citirte letzte Arbeit *Lie*'s zu spät kennen gelernt haben und desshalb ihren ersten Theil nicht haben benutzen können.

3) Sur les hypothes. fond. de la géometrie. Bull. de la S. M. de France, 1887. Siehe darüber auch die erwähnte frühere Arbeit von *Killing:* Erweiterung u. s. w. a. a. O.

Wie man sieht, behandelt er das Problem nur in der Ebene und man weiss nicht, ob die Axiome, welche er bei der Behandlung des Raums gegeben hätte, diese Axiome der Ebene sämmtlich oder zum Theil ausgeschlossen haben würden.

Poincaré hält Geometriesysteme für möglich, welche es nach uns nicht sind, so z. B. eine Ebene, in welcher eine um einen Punkt rotirende Grade nicht immer die Lage einer andern durch denselben Punkt gehenden Graden annehmen kann; wie schon *Klein* früher bemerkt hat, entspricht dies nicht der Erfahrung in unserm Beobachtungsgebiet.[1])

Der berühmte Autor versichert, *keines* der in den Abhandlungen der elementaren Geometrie gegebenen Axiome habe den Charakter eines Axioms; er hätte aber, wie uns scheint, wohl daran gethan, dies näher auszuführen; denn das Axiom, welches er zur Unterstützung seiner Behauptung anführt, „zwei Grössen, welche einer dritten gleich sind, sind einander gleich", wird schon seit langer Zeit nicht mehr als ein geometrisches Axiom anerkannt. Er benutzt ferner von Anfang an zur Feststellung seiner Axiome die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades, auf welchen er den Angaben *Klein*'s folgend die Begriffe des Abstands und des Winkels durch ein Verfahren festsetzt, welches auf reinem Uebereinkommen beruht.

Es wäre von Interesse, die elementare Geometrie auf diesen Axiomen (mit der nöthigen Aenderung für den gewöhnlichen Raum) aufgebaut zu sehen; man könnte dann beurtheilen, ob sie jenen Charakter geometrischer Axiome haben, den er z. B. allen Axiomen *Euclid*'s nicht zugesteht.

Wir wollen nun einige Bemerkungen über die Axiome *H. Grassman*'s und *V. Schlegel*'s machen.

Grassmann gibt in seiner *Ausdehnungslehre* von 1844 das folgende Axiom[2]):

„Der Raum ist an allen Orten und nach allen Richtungen gleichbeschaffen d. h. an allen Orten und nach allen Richtungen können gleiche Constructionen vollzogen werden."

Oder auch:

1) „Es ist eine Gleichheit denkbar bei Verschiedenheit des Ortes;

2) Es ist eine Gleichheit denkbar bei Verschiedenheit der Richtung und namentlich auch bei entgegengesetzter Richtung."

Indem er *gleiche* und *gleichläufige* Constructionen diejenigen nennt, welche sich auf dieselbe Art an verschiedenen Orten ergeben, *absolut gleiche* diejenigen, welche nur durch den Ort und die Richtung sich unterscheiden, und *gleiche und ungleichläufige* diejenigen, welche auf dieselbe Art an verschiedenen Orten und in verschiedener Richtung erzeugt werden, bringt *Grassmann* sein Axiom auch in die folgende Form:

1) „Was durch gleiche und gleichläufige Constructionen erfolgt, ist wieder gleich und gleichläufig.

1) Math. Ann. Bd. 4, S. 590. — Siehe auch unsre Vorrede.
2) Seite 35 u. ff.

2) Was durch entgegengesetzte Constructionen erfolgt, ist wieder entgegengesetzt.

3) Was durch absolut gleiche Constructionen (wenn auch an verschiedenen Orten und nach verschiedenen Anfangsrichtungen) erfolgt, ist wieder absolut gleich."

Die relative Beschränkung des Raums wird durch ein Axiom festgestellt, welches lautet:

„Der Raum ist ein System dritter Stufe."

Zur Erklärung dieser Axiome bezieht sich *Grassmann*, wie er selbst sagt, auf das, was er früher in der *Ausdehnungslehre* festgestellt hat. Er fügt dann hinzu:

„Dass dieselben ausreichen für die Geometrie, kann nur vollständig auseinander gelegt werden durch Entfaltung der Geometrie selbst aus diesem Keim heraus. ... Den Satz, dass zwischen zwei Punkten nur eine grade Linie möglich ist, oder, wie ihn *Euclid* ausdrückt, dass zwei grade Linien nicht einen Raum umschliessen können, hier als Grundsatz übergangen zu sehen mag auffallen — doch liegt derselbe in dem richtig aufgefassten ersten Grundsatze; nämlich sollten zwei grade Linien, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben, noch einen zweiten Punkt gemeinschaftlich haben, so würde der Raum an diesem zweiten Punkt anders beschaffen sein, als in dem andern, wenn die Linien nicht zugleich auch alle andern Punkte gemeinschaftlich hätten, also ganz ineinander fielen."

Offenbar ist dieser Beweis nicht stichhaltig; auch um zwei Gegenpunkte des sphärischen Systems zeigt der Raum das gleiche Verhalten und doch gehen unendlich viele Grade durch diese Punkte. Der Autor selbst zweifelt an seiner Genauigkeit.

Wir wollen keine Bemerkung darüber machen, dass diese Axiome so verwickelte Begriffe enthalten; das Schlimmste ist jedenfalls, dass diese Begriffe auf einfache Theile reducirt in den Prämissen der *Ausdehnungslehre* nicht streng definirt sind. Er geht vor Allem von dem Begriff des Stetigen und des Discreten aus und definirt sie in einer Form, die der Kritik weiten Spielraum lässt.[1])

---

1) *H. Grassmann* (Ausdehnungslehre 1844 oder 1878, S. 20 u. ff.) sagt: „Die reine Mathematik ist die Wissenschaft des *besonderen* Seins als eines durch das Denken *Gewordenen*" und später: „Jedes durch das Denken Gewordene kann auf zweifache Weise geworden sein entweder durch einen einfachen Act des *Erzeugens* oder durch einen zweifachen Act des *Setzens* und *Verknüpfens*. Das auf die erste Weise Gewordene ist die *stetige* Form oder die Grösse im engeren Sinn; das auf die letztere Weise Gewordene die *discrete* oder *Verknüpfungsform*." Er setzt den Begriff des *Stetigwerdens* voraus, definirt ihn aber nicht. Er sagt, der Act des Erzeugens könne als aus zwei Acten, dem des Setzens und des Verknüpfens bestehend angesehen werden und das, was im Moment des Setzens gesetzt sei, wäre schon mit dem, was geworden ist, verknüpft. Dies ist aber durchaus keine klare Definition des Acts des Erzeugens. Auch angenommen dieser Act habe einen genau bestimmten Sinn, wie z. B. der Act, *zuerst* ein Ding zu denken und *dann* ein andres Ding (auf welchen wir den Begriff von Reihen gegründet haben), so muss man doch mit irgend Etwas anfangen, um irgend Etwas zu erzeugen. Nun ist dieses irgend Etwas, bei dem man anfängt, entweder ein Theil des Stetigen oder nicht. Ist es dieser Theil nicht, so kann es allein das Stetige nicht erzeugen, weil die Elemente ohne Theile der Graden die Grade nicht bilden; es kann also zur Erzeugung des Stetigen nicht benutzt werden. Ist es aber ein Theil des Stetigen, so ist es in jedem Zustand, in welchem wir es betrachten, selbst ein Stetiges und man kommt auf eine petitio principii.

In § 14 sagt er:

„Das Ausdehnungsgebilde wird nur dann als ein einfaches erscheinen, wenn die Aenderungen, die das erzeugende Element erleidet, stets einander gleich gesetzt werden; so dass also, wenn durch eine Aenderung aus einem Element a ein andres b hervorgeht, welche beide jenem einfachen Ausdehnungsgebilde angehören, dann durch eine gleiche Aenderung aus b ein Element desselben Ausdehnungsgebildes c erzeugt wird und zwar wird diese Gleichheit auch dann stattfinden müssen, wenn a und b als stetig aneinander grenzende Elemente aufgefasst werden, da diese Gleichheit durchweg bei der stetigen Erzeugung stattfinden soll."

Und später:

„Die Gleichheit der Aenderungsweise wird hier durch Gleichheit der Richtung vertreten; als System erster Stufe stellt sich daher hier die unendliche gerade Linie dar, als einfache Ausdehnung die begrenzte gerade Linie."

Er nennt gleichgerichtete Grössen diejenigen, die durch Fortsetzung derselben Erzeugungsweise hervorgehen; solche sind sowohl die positiven wie die negativen Grössen; eine positive und eine negative Grösse nennt er dagegen entgegengesetzt gerichtet. Sowohl die gleich wie die entgegengesetzt gerichteten heissen „gleichartige" Grössen. In § 14 fährt er fort:

„Was dort (in der Ausdehnungslehre) gleichartig genannt wurde, erscheint hier (in der Geometrie) als parallel, und der Parallelismus bietet gleichfalls seine zwei Seiten dar, als Parallelismus in demselben und in entgegengesetztem Sinn."

Er schlägt überdies vor, sie durch die beiden Worte *gleichläufig* und *ungleichläufig*, die er in der dritten Form des Axioms benutzte, zu unterscheiden.

Offenbar spielt hier *Grassmann* auf den Parallelismus *Euclid*'s an, wie das Beispiel beweist, welches er in § 23 gibt. Ausserdem enthält das obige Axiom in der dritten Form, wie dieses Beispiel beweist, als speciellen Fall denjenigen, in welchem in zwei Dreiecken, welche zwei Paar Seiten parallel und gleich haben, auch die übrigen Seiten parallel sind.

Wir bemerken, dass man dem einfachen System erster Art in der Geometrie nicht nur die Grade sondern alle homogenen Linien und homogenen Systeme einer Dimension entsprechen lassen kann und ferner, dass *Grassmann* der Geometrie den Begriff der Richtung, welcher dem Begriff der Aenderungsweise entspricht, zu Grunde legt.

Auf S. 22 sagt *Grassmann* weiter: „Das, was neu entsteht, entsteht eben nur an dem schon Gewordenen, ist also ein Moment des Werdens selbst, was hier in seinem weiteren Verlauf als Wachsen erscheint." Man kann aber annehmen, man erhielte die ganze Form aus einem ihrer bereits erhaltenen Theile und dieser Theil ist gewiss nicht unbegrenzt klein, wie er mit dem Wort *Moment* sagen zu wollen scheint. Will man von dem Begriff des Moments, dem Zeitaugenblick entsprechend, ausgehen, so muss man ihn bezüglich eines schon gegebenen und construirten Theils betrachten. Wie will man eine willkürlich kleine Grösse definiren, ohne sie mit schon gegebenen Grössen zu vergleichen? Wird auf diese Art nicht implicite das Stetige als gegeben angenommen, ohne es überhaupt zu definiren? Die Definition des Stetigen mittelst der Bewegung eines Punktes hat dieselben Mängel ganz abgesehen davon, dass der Punkt ohne Theile das Stetige nicht erzeugt (§ 55 d. Einl.). Die Sprache der Bewegung lässt sich auch auf ein discretes System anwenden (§ 67 d. Einl.). Es ist also klar, dass die Stetigkeit der Bewegung abstract genommen (siehe die Vorr.) die Existenz des Stetigen zur Voraussetzung hat.

Aus dem Begriff der Aenderungsweise sucht er die Grundeigenschaft der Ebene abzuleiten (§§ 18 u. 21) und wird hier um so unverständlicher, als eine Definition des Stetigen fehlt; ein solcher Beweis lässt sich aber mittelst unsers Proportionalitätszusammenhangs streng bindend machen. *Grassmann* erzeugt die Ebene mittelst zweier Reihen paralleler Graden, welche in Folge einer Eigenschaft, die unmittelbar aus dem oben erwähnten Axiom folgt, sich gegenseitig schneiden. Eine gewisse Analogie besteht zwischen dem Begriff in dem Beweis *Grassmann*'s und dem unsrigen; aber wir setzen das genannte Axiom und den Grundsatz über das Dreieck nicht voraus[1]), leiten denselben vielmehr aus dem Axiom über die Parallelen und den andern Axiomen ab; wir erzeugen auch nicht die Ebene wie *Grassmann* und beweisen auch nicht die genannte Eigenschaft der Ebene mittelst derselben Begriffe.

Zu seiner Rechtfertigung müssen wir jedoch angeben, dass er nicht das Problem der Fundamente der Geometrie hat entwickeln wollen und in diesem Fall sicherlich seine Axiome besser definirt hätte; es würde ihm aber, wie wir glauben, schwer gefallen sein ein streng gefügtes System auf Grund des Begriffs der Richtung statt desjenigen der Graden aufzubauen.

Auch das Buch *System der Raumlehre*[2]) von *V. Schlegel*, welches die Vorzüge der *Ausdehnungslehre* beständig ins Licht zu setzen sucht, scheint uns nicht glücklicher zu sein. Wir bemerken vor Allem, dass die Axiome von den Sätzen nicht streng geschieden sind, ein solcher Unterschied aber in einer Abhandlung, welche die Principien der Geometrie mit Strenge behandeln will, nöthig ist (Vorr. S. X und XII). Da auch *Schlegel* wie *Grassmann* von dem Begriff der Richtung ausgeht, so halten wir für angemessen die Principien dieses Buchs einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen, weil es sich, wie man sieht, um eine neue Richtung dieser Studien handelt.

Auf Seite 3 gibt *Schlegel* die folgende Definition von *Richtung:* „Es gibt eine unbeschränkte Menge von Bewegungen, zwischen denen ein Punkt im Anfang seiner Aenderung die Wahl hat. Das unterscheidende Merkmal einer solchen Anfangsbewegung heisst *Richtung*“, genau nach dem Begriff *Grassmann*'s.

Auf Seite 4 fügt er hinzu:

„Ein bestimmter bewegter Punkt ist gleichbedeutend mit einer Reihe beliebiger fester Punkte.“

Man weiss nicht, was feste Punkte, Aenderung, Reihe ist, ob die letztere stetig ist oder nicht und wie in einem solchen Fall die Stetigkeit definirt wird. Lässt man also den Begriff der Bewegung bei Seite, welchen er später vermeiden zu wollen scheint, so bedeutet die Definition der Richtung, dass zwei consecutive Punkte der Reihe eine *Richtung* bestimmen.

Schlegel fährt auf Seite 3 fort:

„Fährt der Punkt in der einmal gewählten Anfangsbewegung fort, so heisst seine Gesammtbewegung *einfach*. Das Merkmal einer einfachen Bewegung ist also ebenfalls ihre Richtung.“

1) Siehe S. 323.
2) Leipzig, 1872.

Offenbar ist hierin der Begriff der graden Linie verborgen, ohne welche wir nicht verstehen können, wie ein Punkt die Bewegung in der Anfangsrichtung fortsetzen kann. Denn sieht man von der Bewegung ab, welche bei der Erörterung der Principien oft irre führt, so bedeutet dies, dass zwei gegebene Richtungen AA', $A'A''$ gleich sind, wenn sie in grader Linie liegen. *Schlegel* aber benutzt nach dem Vorbild *Grassmann's* den Begriff der Richtung, um die Grade zu definiren. Er sagt auf Seite 6:

„Wenn ein Punkt seine Lage durch einfache Bewegung ändert, so heisst das von ihm erzeugte Gebilde (sein Weg) eine Grade (grade Linie). Die Eigenschaften einer Graden sind bestimmt

1) durch die Lage eines sie erzeugenden Punktes,

2) durch die beständige *Richtung* der Bewegung dieses Punktes.

Die Merkmale einer Graden sind hiernach Lage und Richtung. Jeder Punkt auf derselben Graden kann als erzeugender angenommen werden. Jeder dieser Punkte theilt *daher* die Grade in zwei Theile und kann sich in zwei entgegengesetzten Richtungen auf ihr bewegen.“

Aber auch auf der Kugel kann sich ein Punkt in zwei entgegengesetzten Richtungen in dem Hauptkreis bewegen und zwei unendlich nahe Punkte bestimmen einen dieser Hauptkreise und doch zerlegt ein Punkt die Kreislinie nicht in zwei Theile. Das *daher* ist also nicht statthaft.

„Jede Grade repräsentirt demnach zwei entgegengesetzte Richtungen und eine bestimmte Classe von Lagen (von Punkten nämlich). Durch *einen* beliebigen Punkt auf ihr ist die Lage einer Graden, durch einen zweiten auch ihre Richtung bestimmt, da dieser zweite als eine spätere Lage des ersten bewegten, betrachtet werden kann, also auch die Richtung der Bewegung bezeichnet.“

Er versucht abzuleiten, dass bei der Bewegung eines Segments auf einer Graden, wenn (AB), (A_1B_1) zwei der Lagen des Segments sind, $(AA_1) \equiv (BB_1)$ ist; diese Eigenschaft wird aber nicht im Allgemeinen bewiesen; denn dafür ist das Commutationsgesetz nöthig. Auch bei *Grassmann* fehlt für die incommensurabelen Segmente ein strenger Beweis dieser Eigenschaft. Aus seinen Prämissen geht auch nicht hervor, dass $(AB) \equiv (BA)$ ist.

Auf Seite 18 schreibt *Schlegel*, bevor er von der Ebene spricht: „Hat eine Grade ihre Lage geändert, so darf kein Punkt zugleich auf der ersten und zweiten Graden liegen, sonst könnte dieser Punkt beide Graden erzeugen; d. h. sie hätten dieselbe Lage“, während in dem *Euclid*'schen System zwei Grade, die gleiche Richtung haben, in unserm Sinn einen reellen Punkt im Unendlichgrossen gemein haben und ebenso als verschiedene Lagen derselben Graden betrachtet werden können. Hier wird also stillschweigend das thatsächliche Unendlichgrosse ausgeschlossen.

Schlegel nennt den Positionswechsel einer Graden *Schiebung*.

„Wie die Lage einer Graden durch einen beliebigen Punkt auf ihr vollkommen bestimmt ist, so auch ihre Lagenänderung durch diejenige eines beliebigen Punktes auf ihr. Die Bewegung der Graden nennen wir einfach, wenn

diejenige jedes beliebigen Punktes auf ihr eine einfache ist, d. h. wenn jeder beliebige Punkt auf ihr eine beliebige Grade beschreibt.

Wenn eine Grade ihre Lage durch einfache Bewegung ändert, so heisst das von ihr erzeugte Gebilde eine Ebene (ebene Fläche).“

Nach dieser Definition kann jedoch das erzeugte Ding auch z. B. ein einfaches Hyperboloid sein.

„Die Eigenschaften einer Ebene sind bestimmt

1) durch Lage und Richtung einer sie erzeugenden Graden,

2) durch Lage und Richtung einer zweiten Graden, die von einem der ersten angehörigen Punkte beschrieben wird; oder da man beide Grade durch *dieselbe Lage* bestimmen kann:

1) durch Lage und Richtung einer sie erzeugenden Graden,

2) durch die Lage eines beliebigen festen, ausserhalb dieser Graden in der Ebene liegenden Punktes;

oder, wenn man die in 1) genannte Grade durch zwei Punkte ersetzt,

1) durch die Lage dreier nicht in derselben Graden liegender Punkte.

Die Merkmale eine Ebene sind hiernach vorläufig:

Eine Lage und zwei Richtungen; oder zwei Lagen und eine Richtung, oder drei Lagen.“

Auch hier ist unverständlich, wie man aus der ersten Definition die letzte entnehmen kann.

Nachdem der Verfasser so die Grundeigenschaften der Graden und der Ebene aufgestellt hat, wendet er die Rechnung *Grassmann*'s an.

Man kann daher nicht sagen, dass *Schlegel* das Ziel, das er sich auf Seite XII bezüglich der Fundamente der Geometrie gesteckt hat, auch wirklich erreichte. Wir halten es für besser, wenn man schwierige Fragen präcis aufstellt und dann sie zu lösen versucht, statt sie in einer mehr oder weniger verwickelten Form zu verbergen. Um seinen zweiten Zweck zu erreichen, die Mathematiker zum Studium der *Ausdehnungslehre* anzuregen, hätte *Schlegel* unsrer Ansicht nach besser gethan, die Principien der *Euclid*'schen Geometrie so wie sie bekannt sind anzunehmen. Was die Bedeutung anlangt, welche die geometrische Analysis *Grassmann*'s gehabt hat, heute noch hat oder möglicher Weise haben wird, so können wir uns damit hier nicht abgeben. Auf die geringe Beachtung, welche *Grassmann* trotz seines einschneidenden Werks und seiner übrigen mathematischen Untersuchungen zu seinen Lebzeiten fand, folgte in Deutschland selbst eine wohlverdiente Reaction, die diesen Mann, welcher als Professor an einem Gymnasium starb, der Vergessenheit entriss. Wir aber wagen es nicht uns auch für diese Analysis zu begeistern, vielleicht weil wir sie nicht hinreichend beherrschen; wir bewundern aber den hohen Werth der Ideen, welche hier und da in dem Werk eingestreut sind. Seine glühendsten Anhänger, unter welchen sich auch berühmte Namen finden, haben noch nicht durch Thatsachen nachgewiesen, dass die *Grassmann*'sche Methode bei der wissenschaftlichen Untersuchung den Vorzug vor der synthetischen und analytischen Methode verdient, welche heute das Feld beherrschen. Von grossem Interesse wäre eine historisch-

kritische Untersuchung dieser Analysis in Verbindung mit den Methoden von *Möbius*, *Bellavitis* und *Hamilton*, die alle Vortheile, welche diese Methode erreicht hat und welche man sich noch von ihr versprechen kann, nachweisen würde. Aus den in der Vorrede erwähnten Gründen sind wir jedoch bei dem Elementarunterricht entschiedene Gegner eines jeden Formalismus und Mechanismus, welcher systematisch substituirt und geeignet ist, eine der schönsten Fähigkeiten des Geistes, die Raumanschauung, deren Beihülfe bei dem wissenschaftlichen Studium der Elemente in dem von uns erklärten Sinn verstanden wird, zu vermindern wenn nicht gar zu vernichten.

Eine neue Richtung bei dem Studium der drei mehrgenannten Geometriesysteme schlug *Flie S. Marie* in seinem erwähnten Buch ein. Er geht von der Erwägung aus, dass in dem unbegrenzt Kleinen die *Euclid*'sche Geometrie unabhängig von dem Axiom über die Parallelen gilt, wie schon *Lobatschewsky* bemerkte, und erhält durch Integration die *Euclid*'sche und die nicht-*Euclid*'sche Geometrie, jedoch unter der Voraussetzung, dass die Grade unendlich gross sei. Dieser Richtung schloss sich auch *Killing* an, welcher in seinem Buch: „Ueber die nicht-*Euclid*'schen Raumformen" kritischer und geometrischer verfuhr und ohne die genannte Bedingung auskam. Wir hatten schon Gelegenheit von diesem interessanten Buch zu sprechen. Auch die Räume von mehr als drei Dimensionen werden darin zum grossen Theil auf analytische Art behandelt.

In einer früheren Abhandlung[1]) hatte *Killing* bewiesen, dass, wenn man das Axiom über die unendlich grosse Grade und dasjenige über die Parallelen ausschliesst, die *Euclid*'sche und die bekannten nicht-*Euclid*'schen Formen für das thatsächliche Gebiet die einzig möglichen sind.

Bei dieser Methode wird jedoch vorausgesetzt, dass die Bewegung eines Theils des Raums eine Bewegung des ganzen Raums in sich selbst bestimme; *Klein* dagegen lässt in seiner zuletzt erwähnten Schrift die entgegengesetzte Hypothese gelten, wie sie sich auf der von *Clifford* gefundenen Fläche des elliptischen Raums bewährt. Wir bemerken dazu, dass alle Axiome, welche Eigenschaften enthalten, die ausserhalb des Gebiets der Beobachtung oder Anschauung liegen, einer ähnlichen Erörterung wie das Postulat über die Parallelen unterzogen werden können und unter Umständen Gelegenheit zu weiteren wichtigen Untersuchungen geben.

Descartes[2]) und *Leibniz*[3]) hatten zuerst die Idee, alle Begriffe mittelst eines Systems von Zeichen darzustellen, sie aus einer gegebenen Anzahl solcher Zeichen abzuleiten und durch ihre Combination und gewisse Regeln nicht nur schon bekannte Wahrheiten sondern auch andre neue zu ermitteln. *Leibniz* versuchte sie auch auf die Geometrie anzuwenden.

Mit dieser Idee ist die Rechnung der deductiven Logik eng verknüpft, deren Principien zuerst in einer Zusammenstellung der ganzen Lehre von dem Eng-

1) Die Rechnung in den nicht-*Euclid*'schen Raumformen. Journ. von *Crelle*. Bd. 89.
2) Epistolae I, 111. Amsterdam, 1682.
3) A. a. O.

länder *G. Boole* formulirt wurden und über welche *E. Schröder*[1]) das neueste und vollständigste Werk geliefert hat. Hauptzweck dieser Rechnung ist bei der Erörterung der Principien der Logik die Unzuträglichkeiten zu vermeiden, welche aus der gewöhnlichen Sprache hervorgehen, bei welcher oft verschiedene logische Processe mit demselben, gleiche dagegen mit verschiedenen Worten bezeichnet werden. Die Begriffe und die Operationen werden daher mit Symbolen bezeichnet, welche nur eine Bedeutung haben dürfen und mittelst bestimmter Regeln werden aus den angenommenen Principien, die auf die möglichst kleine Anzahl reducirt werden, andre logische Wahrheiten abgeleitet. Diese Theorie kann, wie *Schröder* bemerkt, nicht als abgeschlossen gelten, weil die Logik der Beziehungen, welche die schwierigste ist, sich noch in dem Anfangsstadium der Entwicklung befindet.

Gegen das theoretische Interesse an einer solchen Doctrin bei dem Studium der Logik lässt sich nach unsrer Ansicht Nichts einwenden, wohl aber muss man Einspruch erheben, wenn ihre Bedeutung bei der praktischen Uebung der Logik oder als Ersatz für die gewöhnliche Sprache übertrieben wird. Unsere gewöhnliche Sprache wird übrigens mehr oder weniger reichlich gebraucht, um die Bedeutung dieser Zeichen zu erklären und festzusetzen und ist auf der andern Seite das vollständigste und natürlichste Zeichensystem, durch welches wir unsere Gedanken ausdrücken können. Als Mathematiker freuen wir uns über die Versuche, welche darauf abzielen, das mathematische Verfahren auf die Logik und die andern Wissenschaften anzuwenden; *Leonardo da Vinci* selbst hat mit jenem Seherblick, der ihn zu einem der grössten, wenn nicht dem grössten Genie der Renaissanceperiode gemacht hat, erkannt, dass die Wissenschaften um so wahrer sind, je mehr sie sich nach den Methoden der Mathematik gestalten.[2]) Wir können uns jedoch nicht auf Einzelnheiten einlassen und auch nicht zeigen, von welchen Principien die deductive Logik ausgeht, um den logischen Calcül aufzustellen; es würde uns dies zu weit von unserm Gegenstand abführen. Wir müssen aber bemerken, dass die Möglichkeit verschiedener logischer Calcüls je nach den Principien und Operationen, die zu Grunde gelegt werden, nicht ausgeschlossen ist. Wir haben uns z. B. in Kap. I der Einl. mit den gewöhnlichen Begriffen beschäftigt, ohne eigentlich Logik treiben zu wollen; zweifellos aber ist, dass bei der Ordnung unsrer Ideen, welche wir natürlich für die beste zur Erreichung unsrer Ziele halten, der wirkliche logische Calcül uns keine Dienste hätte leisten können. Es ist überdies nicht ausgeschlossen, dass man auch mit der gewöhnlichen Sprache bei gehöriger Aufmerksamkeit zu einer klaren Darlegung derjenigen Sätze und Operationen der Logik, welche zur Aufstellung der Grundbegriffe der Mathematik nöthig sind, nicht gelangen kann. Wir können diesen Calcül nur insoweit prüfen, als er auf das Studium der Principien der Mathematik und besonders der Geometrie speciell von *Peano*[3]) angewendet wurde. Wir müssen nun sofort unsre Ueberzeugung dahin aussprechen, dass, auch wenn es

1) Vorlesungen über die Algebra der Logik. Leipzig, 1890.
2) Trattato della pittura. 1890.
3) A. a. O. I principii della geometria logicamente esposti. Torino, 1889.

eine vollständige Sprache logischer Zeichen gäbe, um alle bekannten Wahrheiten der mathematischen Wissenschaften in der für am besten gehaltenen Ordnung auszudrücken und auch neue Wahrheiten auf einfache Art wiederzugeben, doch immer ein grosser Unterschied zwischen dem logischen Interesse dieses Zeichensystems und dem mathematischen Interesse bestehen würde. Wir kennen auch keine hinreichenden wissenschaftlichen Gründe, warum man ein solches Zeichensystem nicht nur bei höheren Untersuchungen, bei welchen sich auch schon in der Geometrie die Worte auf sehr wenige besonders bei dem Gebrauch der Zahlenrechnung reduciren, sondern auch bei den Fragen der Principien systematisch der gewöhnlichen Sprache substituiren müsste. Die Frage, ob ein Wort verschiedene logische Bedeutungen hat, z. B. *ist*, *oder*, *und* u. s. w. ist für die Mathematik oft eine reine Formfrage. Im Gegentheil, in der Mathematik muss man nicht selten abgekürzte Redensarten gebrauchen, die, wenn man nur auf die Bedeutung der einzelnen Worte sieht, verschieden ausgelegt werden können, z. B. *ein beliebiger*, *der Beweis dem vorigen analog*, u. s. w., wenn man nicht ohne Noth pedantisch werden will. Für den Mathematiker genügt es, wenn aus dem Wortlaut des Satzes durchaus klar der Sinn hervorgeht, welchen der Verfasser den Worten hat beilegen wollen, ohne dass es nöthig wäre, dass der Sinn streng durch die einzelnen Worte bestimmt ist, wenn eine mathematische Nothwendigkeit dazu nicht vorliegt. Ohne Zweifel muss die Form möglichst exact sein und wir würden niemals billigen, dass man z. B. sagt „zwei und drei sind fünf"; man darf aber nicht derart übertreiben, dass man dadurch wichtigere Dinge aus dem Auge verliert.[1]) Noch Niemand hat nachgewiesen, dass es Mathematiksätze gebe, welche man nicht genau mit der gewöhnlichen Sprache ausdrücken könne; jedenfalls brauchte man doch nur die logischen Zeichen durch die Worte zu ersetzen, durch welche die Bedeutung der Zeichen festgesetzt wird, oder die Sprache selbst zu vervollständigen; auf der andern Seite ist es doch mindestens zweifelhaft, ob man alle mathematischen Beziehungen durch die bekannten logischen Zeichen ausdrücken kann.

Man muss beachten, dass in den Wissenschaften die Sprache nur ein Mittel nicht der Zweck ist und dass das schwierigste und auch wichtigste wissenschaftliche Problem gerade darin besteht, die Hypothesen, auf welche man bauen will, aufzustellen und von ihnen zu neuen Wahrheiten überzugehen. Bei dieser Entwicklung leistet die gewöhnliche Sprache bessere Dienste, weil sie sich besser zum Ausdrücken der wissenschaftlichen Ideen und zur Verbindung der Principien der verschiedenen Wissenschaften untereinander eignet. Der Gedanke darf durch das Mittel, dessen er sich bedient, nicht gehindert werden, während bei dem

1) Der einzige Vorwurf, der *Pasch* von *Peano* gemacht wird, bezieht sich mehr auf die Form als den Inhalt und besteht darin, dass *Pasch* sagt „Zwei Punkte bestimmen ein gradliniges Segment", während er hätte sagen sollen „Zwei verschiedene Punkte bestimmen u. s. w." Es geht aber aus dem Text klar hervor, dass *Pasch* gerade dies hat ausdrücken wollen. *Peano* beachtet nicht, dass zwei Punkte im Allgemeinen in der Geometrie nicht zusammenfallen, wie es mit zwei gleichen Zahlen in der Arithmetik der Fall ist. Reinen Formfragen gehören auch die Uebersetzungen in logische Zeichen an, welche *Peano* von den Sätzen einiger Bücher der Elemente *Euclid*'s gemacht hat, die sich besonders zu einer solchen Uebertragung eignen.

thatsächlichen Stand der Anwendungen des logischen Calcüls der Gedanke den Zeichen zu Liebe genöthigt wird, eher den einen als den andern Weg einzuschlagen. Der Wortschwall ohne Sinn entsteht nicht aus der Unvollkommenheit der Sprache sondern dem Mangel an Gedanken. Aber auch wenn das System logischer Zeichen vollständig wäre, so würde es doch, wenn man nicht seine Nothwendigkeit oder grosse Nützlichkeit nachweist, in der Art ungeeignet sein, als es der Schwierigkeit bei der Handhabung der neuen Sprache wegen viel weniger zu dem Studium der Wissenschaft anregt. Wir würden die Anwendung des Zeichensystems auf die Behandlung der mathematischen Probleme verstehen, wenn es wie das Zahlensystem dazu diente durch bestimmte und fruchtbare Regeln von gegebenen Wahrheiten aus zu andern neuen und wichtigen Wahrheiten zu gelangen. Ueberdies lassen sich mit ihm wenigstens heute noch nicht die Fehler mit zweifelloser Sicherheit vermeiden, welche aus dem Gebrauch der Augenscheinlichkeit bei den Beweisen entstehen können.[1])

Wir leugnen nicht, dass man, wenn es möglich ist diese Zeichen zu benutzen und man eine gewisse Geschicklichkeit in ihrer Handhabung erreicht hat, mit grösserer Sicherheit die einfachen Theile gegebener Beweise und gegebener Eigenschaften erforschen könne; wir wollen auch zugestehen, dass die deductive Logik bei weiterer Entwicklung sich zu der Behandlung gewisser Theile der Principienfragen besser als die gewöhnliche Sprache eigne, vielleicht selbst eine Art officieller Sprache zur Exposition der mathematischen Untersuchungen abgeben könne. Zu dem letzteren Zweck wäre es vor Allem nöthig, dass die in dieser Logik thätigen Autoren kein böses Beispiel geben und nicht verschiedene Symbole zur Bezeichnung derselben Begriffe wählen; sonst wird man zum Studium der verschiedenen Werke künftig immer ein besondres Wörterbuch haben müssen. Wir bemerken aber, dass der Gedanke, die mathematischen Sätze in einfache Theile zu zerlegen und sie auf die möglichst geringste Anzahl von Postulaten zurückzuführen, nicht der deductiven Logik eigenthümlich ist, denn dies haben auch andre in gewöhnlicher Sprache ausgeführt, wie z. B. *Dedekind* in seinen Principien der Arithmetik. Unser vorliegendes Buch und unsre erwähnte Abhandlung über das Stetige sind gerade nach diesem Verfahren abgefasst.

Die vorstehenden Bemerkungen werden durch die Prüfung der erwähnten Arbeiten *Peano*'s bestätigt, in welchen diese Methode, die man *Signicismus* nennen kann, zum äussersten Ausdruck kommt. In seinem Werk über Geometrie folgt er bezüglich des Inhalts den Gedanken von *Pasch;* er behandelt aber nur diejenigen Sätze, welche in dem erwähnten Buch von *Pasch* der Theorie der Congruenz vorausgehen, obwohl es nach der Vorrede und selbst dem Titel scheinen könnte, als müsse er sich mit allen Principien der Elementargeometrie beschäftigen. Wir sagen dies nicht, weil man nur einen Theil der Sätze nicht mit Vortheil behandeln könne, sondern weil man guten Grund zu der Annahme hat, *Peano* selbst, der Meister in der Handhabung des logischen Calcüls,

---

1) Siehe *Peano*, op. II. S. 29—30.

welcher ihm neue und interessante Resultate verdankt, habe die Zeichensprache auf die übrigen Sätze noch nicht anwenden können und weil es sehr zweifelhaft ist, ob man nicht, wenn man alle Sätze und die aus ihnen resultirenden Eigenschaften behandeln will, die Zeichen selbst ändern und die Sätze in verschiedener Ordnung bringen muss, um Complicationen in dem logischen Calcül zu vermeiden. Dass der Gedanke der Sclave des Zeichens ist, das sieht man wenigstens zur Zeit noch aus der Abhandlung über Geometrie, in welcher von Anfang an den Zeichen zu Liebe z. B. das sphärische System ausgeschlossen wird. Demselben Grund ist vielleicht auch zuzuschreiben, dass er dem gewöhnlichen Gebrauch zuwider von den Punkten, welche das gradlinige Segment bilden, die Endpunkte ausschliesst.

Ferner bezeichnet *Peano* in seiner Abhandlung über Arithmetik die Einheit mit dem Symbol 1 und mit demselben Symbol auch in der Geometrie den Punkt. Wenn diese Methode zur Geltung kommt, so kann man leicht wieder in den Fehler verfallen, den man unsrer gewöhnlichen Sprache vorwirft, dass nämlich ein Wort verschiedene logische Begriffe bezeichnet; hier ist die Sache um so bedenklicher, weil es sich um mathematische Begriffe handelt.

Wir wollen uns mit den Aenderungen, die *Peano* an den Axiomen von *Pasch* vorgenommen hat, nicht im Einzelnen beschäftigen. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch zwischen den Methoden der beiden Autoren, insofern *Peano* der Gültigkeit seiner Axiome keine empirische Beschränkung auferlegt. Damit erreicht er unsrer Ansicht nach einen bemerkenswerthen Erfolg, wenn er auch die Gründe nicht angibt, warum er die Axiome für untereinander vereinbar hält.

Bezüglich der Methode könnten wir einige Bemerkungen über gewisse Axiome *Peano*'s speciell die ersten machen, wie auch über die Gewohnheit Definitionen vorauszuschicken und Sätze abzuleiten, welche von später gegebenen Axiomen abhängen, doch kann sich der Leser, der diese Arbeit aufmerksam verfolgt, sie selber machen.[1]) Mit der Abhandlung über die Principien der Arithmetik, welche wir im Text citirt haben und die uns am gelungensten zu sein scheint, können wir uns hier nicht abgeben. Er sagt anderswo[2]), dass das Wort *viel* später als das Wort *Zahl* in den Wortschatz der Kinder aufgenommen wird und mithin die Idee der Zahl einfacher als diejenige der Vielheit ist. Wir haben beobachtet, dass die Kinder sehr schnell die Idee von *einem* und *mehreren* (vielen) Gegenständen gewinnen, woraus der Begriff der Vielheit entsteht, welcher dem der Zahl vorausgeht; dass sie sehr schnell *zuerst* von *nachher* unterscheiden und die Bedeutung von *gleich* und *verschieden* sowie der Trennungspräposition *oder* kennen lernen. Gewiss ist freilich, dass wir unsre Principien in Folge einer Betrachtung unsrer geistigen Operationen geben, welche die Kinder nicht anstellen.

An den Arbeiten *Peano*'s ist jedoch der kritische Geist, wenn er sich in

1) Siehe z. B. die Propositionen § 2 und den Satz 2, § 5 und was wir von *Euclid* auf S. XXIV sagten.
2) Rivista matematica. April-Mai 1891.

angemessenen Grenzen bewegt, und die Absicht zu loben, eine möglichst grosse bindende Strenge in den Erörterungen zu erreichen. Wir warten, bis er bei seiner Geschicklichkeit in dem logischen Calcül so wichtige Resultate erzielt, dass das Aufgeben der gewöhnlichen Sprache gerechtfertigt erscheint, welche bis jetzt noch wissenschaftlich wie beim Unterricht grosse Vortheile vor dem System der bisher bekannten logischen Zeichen voraus hat.

Note I.

Ueber die Definitionen von Raum und Geometrie von n Dimensionen und das Princip des Projicirens und Schneidens.

Wir halten es für angemessen zu zeigen, wie sich der Begriff der Geometrie von mehr als drei Dimensionen entwickelt hat, damit man mit Hülfe unsrer Vorrede und des Textes beurtheilen kann, welche Stelle unsre Arbeiten und diejenigen, welche derselben Richtung folgen, bei diesen Untersuchungen einnehmen, um so mehr weil der Charakter dieser Arbeiten und der von ihnen erreichten Erfolge nicht immer richtig verstanden worden ist.

Wir beginnen vor Allem mit den Definitionen. Es ist schwer ausfindig zu machen, wer zuerst die Idee eines Raums von drei Dimensionen, welcher in einem Raum von vier Dimensionen enthalten ist, gehabt hat. Nach der Vorrede scheint es *Kant* gewesen zu sein.[1]) So wird in einer Schrift über den barycentrischen Calcül von *Möbius* darauf hingewiesen, dass man um zwei symmetrische Figuren des gewöhnlichen Raums aufeinanderzulegen einen Raum von vier Dimensionen nöthig haben würde; er fügt aber hinzu, dass ein solcher Raum nicht gedacht werden könne.[2])

Die metaphysische Hypothese der materiellen Existenz des Raums von vier Dimensionen ausser uns und unabhängig von uns ist ausdrücklich in dem erwähnten Werk von *Zöllner* enthalten, welcher mit ihr, wie wir bemerkt haben, gewisse spiritistische Experimente erklären will. Hier befinden wir uns aber noch nicht in der Geometrie; denn dieser unbestimmten Idee eines materiell in einem andern enthaltenen Raums fehlt eine klare und rein geometrische Definition dieses Raums, die den geometrischen Deductionen zur Grundlage dienen könnte. Ueberdies hat, wie wir in der Vorrede ausführten, der Raum von mehr als drei Dimensionen nicht nöthig irgend etwas Entsprechendes in der äusseren Welt zu besitzen.

Die *erste* allgemeine Definition der Mannigfaltigkeiten von Elementen von mehr als drei Dimensionen hat wie schon erwähnt *H. Grassmann* in seiner *Ausdehnungslehre* gegeben. Er sagt:

---

1) Wie *R. Zimmermann* in seiner Schrift: Henry More und die vierte Dimension des Raumes. Sitz.-Ber. der phil.-hist. Classe der Königl. Ac. Wien, 1881 berichtet, hat zwar der englische Philosoph *More* aus dem 17. Jahrhundert der Geisterwelt vier Dimensionen zuertheilt, aber niemals von einem Raum von vier Dimensionen gesprochen.

2) Baryc. Calcül. Leipzig, 1827. Oder Math. Werke. Bd. 1.

„Unter einem Ausdehnungsgebilde erster Stufe verstehen wir die Gesammtheit der Elemente, in die ein erzeugendes Element bei stetiger Aenderung übergeht.“

Wie wir auf Seite 674 ausgeführt haben, wurden die in dieser Definition enthaltenen Begriffe vorher von *Grassmann* nicht bestimmt. Offenbar aber hat er zuerst den Zahlenbegriff ausschliessen wollen.

Er gibt die Definition des *einfachen Ausdehnungsgebildes* folgendermassen:

„Das einfache Ausdehnungsgebilde ist ein solches, das durch stetige Fortsetzung derselben Grundänderung hervorgeht.“

Wir haben schon gesagt, wie unbestimmt dieser Begriff *derselben Grundänderung* ist. Und dann: „Die Gesammtheit aller Elemente, welche durch Fortsetzung derselben und der entgegengesetzten Grundänderung erzeugbar sind, nennen wir ein System (oder ein Gebiet) erster Stufe.“

Dadurch dass er das System erster Art einer Grundänderung unterwirft, erhält er das System zweiter Art u. s. w.

Die übrigen Betrachtungen *Grassmann*'s über diese Systeme entsprechen abgesehen von der Anzahl der Dimensionen dem gewöhnlichen *Euclid*'schen System. Für ihn hat daher die Geometrie stets drei Dimensionen und in der *Ausdehnungslehre* hat das Element keine Bedeutung und keinen reellen Inhalt.

Unsre Einleitung zeigt, wie verwickelt gerade da die von *Grassmann* in seinen Definitionen verwendeten Begriffe sind, wo er sich nicht auf das Zahlencontinuum stützen will. Dem rein abstracten Charakter dieser Definitionen schliessen sich unsre Definitionen des Systems einer Dimension, des homogenen und in der Position seiner Theile identischen Systems und des Systems von mehreren Dimensionen an. Wir schicken jedoch nicht, wie *Grassmann*, den allgemeinen Begriff eines stetigen Systems einer Dimension voraus und geben ihn auch nicht in der Einleitung. Das Gebiet unsrer abstracten Formen ist allgemeiner als dasjenige der *Ausdehnungslehre.*

So viel wir wissen, hat zuerst *Cayley* den Ausdruck *Geometrie von n Dimensionen* gebraucht aber ohne die Definition oder Erklärung dieses Namens zn geben.[1]) In einer späteren Schrift benutzt er den Begriff der analytischen Mannigfaltigkeiten von mehr als drei Dimensionen um einen Satz des gewöhnlichen Raums abzuleiten.[2])

Noch ausgeprägter findet man den Gebrauch der geometrischen Sprache

1) Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions. Camb. and Dublin Math. Journ. Bd. IV. 1845. S. 119—127. — Oder: Collected Papers. Bd. I. S. 55. Er behandelt hier einige Eigenschaften von Determinanten mit n Variabelen.

2) Sur quelques théorèmes de la géométrie de position: Journ. v. *Crelle.* 1846. Oder: Collected Papers. Bd. I. S. 317—321. In dieser Abhandlung gibt er zuerst einen Satz über ebene Figuren, wobei er auf den gewöhnlichen Raum zurückkommt und fügt dann hinzu: „Der Satz kann als ein analytisches Factum betrachtet werden, welches auch dann Geltung hat, wenn man vier Coordinaten statt drei in Betracht zieht. Man hat hier eine geometrische Auslegung, welche sich auf die Punkte des Raums anwenden lässt. Man kann in der That *ohne auf irgend einen metaphysischen Begriff bezüglich der Möglichkeit des Raums von vier Dimensionen zurückzukommen folgendermassen schliessen* u. s. w.“ Wir haben noch später Gelegenheit uns mit dieser Abhandlung zu beschäftigen.

bei den analytischen Mannigfaltigkeiten von mehr als drei Dimensionen in den Definitionen *Cauchy*'s[1]), welche sich so zusammenfassen lassen.

Ist eine Zahlenmannigfaltigkeit von n unabhängigen Variabelen x_1, x_2, ..., x_n gegeben, so heisst jedes System von Werthen $(x_1 \ldots x_n)$ *analytischer Punkt.* Jede Gleichung oder mehrere Systeme von Gleichungen mit diesen Variabelen stellen einen *analytischen Ort* dar. *Die analytische Grade* ist ein System von analytischen Punkten, deren verschiedene Coordinaten mittelst linearer Functionen einer der Coordinaten ausgedrückt werden. Schliesslich ist *der Abstand zweier analytischer Punkte* die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den diesen beiden Punkten zugehörigen Coordinaten.

Dieser, wie man sieht, rein analytischen Definition schliessen sich die Definitionen von *Salmon, Beltrami, Kronecker, Betti, Jordan, Lie, Klein; Halphen, Darboux* u. s. w. an.[2]) Es ist jedoch zu beachten, dass diese Autoren einen freieren Gebrauch von der geometrischen Sprache machen, auch wenn sie nicht immer dieselben Namen benutzen, um dieselben analytischen Dinge zu bezeichnen. Wir bemerken ferner, dass in dem grössten Theil ihrer Arbeiten die Definitionen unabhängig von dem Postulat über die Parallelen sind und dass sie nicht stets von denselben Postulaten ausgehen aber den durchaus analytischen Charakter immer beibehalten.

Eine *zweite* Definition von Raum und Geometrie von mehreren Dimensionen, welche mit der Definition der Systeme höherer Art von *Grassmann* in Verbindung steht, hat *Riemann* gegeben. Sie wurde mit einigen Aenderungen auch von *Helmholtz, Cayley* u. s. w. adoptirt.[3])

„Ist eine Mannigfaltigkeit gegeben, in welcher das Element von beliebiger Beschaffenheit durch n variabele unabhängige Grössen bestimmt wird und umgekehrt (mit der nöthigen von *Cantor* angegebenen Einschränkung), so sagt man, diese Mannigfaltigkeit habe n Dimensionen.“

„Wenn diese Mannigfaltigkeit den Gesetzen des gewöhnlichen Raums unabhängig von den Dimensionen unterworfen wird, so heisst sie auch *Raum* und ihr Element *Punkt.*“

Wie man sieht, ist der einzige Unterschied zwischen dieser und der ersten Definition, dass die Mannigfaltigkeit nicht die Zahlenmannigfaltigkeit ist, durch welche sie bestimmt wird, ihre Existenz jedoch von der letzteren abhängt, welche auch eine Mannigfaltigkeit ist. Der Standpunkt unsrer Definition der Systeme von einer oder mehreren Dimensionen in unsrer Einleitung ist allgemeiner, denn aus dieser Definition leiten wir auch die Zahlenmannigfaltigkeiten ab.

1) Mémoire sur les lieux géométriques: Comptes Rend. 1847.

2) *Salmon*, Higher Algebra. 1866. *Beltrami*, a. a. O. *Kronecker*, Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabelen. Mon. Ber. d. Ac. z. Berlin. 1869. *Betti*, Sopra gli spazî di un numero qualunque di dimensioni. Ann. der Math. 1871. *Lie*, Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen u. s. w. Gött. Nachr. 1871 u. s. w. *Jordan*, Essai sur la géométrie à n dimensions. Comptes Rend. 1872. *Klein*, a. a. O. *Halphen*, Recherches de géométrie à n dimensions (Bull. S. M. de France. 1875).

3) *Helmholtz*, a. a. O. *Cayley*, A memoir on abstract geometry a. a. O.

Es fehlt nicht an Autoren, welche dazu neigen, die Theorie jeder analytischen Mannigfaltigkeit Geometrie zu nennen, während doch die Raumanschauung eine wesentliche Bedingung der Geometrie ist. Dieselben oder andre Schriftsteller wenden auch statt *Raum* das Wort Mannigfaltigkeit an, welches geeigneter war, weil zuerst der geometrische Gegenstand fehlte.[1]) Wie man sieht, handelt es sich bei allen diesen Definitionen um den Namen und nicht um den geometrischen Gegenstand.

Durchaus verschieden von den früheren ist dagegen unsre Definition von S_n, nämlich:

„Ist der Raum S_3 und ein Punkt *ausserhalb* desselben gegeben, so construiren wir den Raum S_4 und analog den Raum S_n, indem wir ihn den Axiomen des allgemeinen Raums unterwerfen."

Es wird gut sein hinzuzufügen, dass für uns der Raum S_3 nicht die äussere Welt ist, sondern die Vorstellung, welche wir uns von ihr mittelst der Anschauung in Verbindung mit der Abstraction bilden. Der Punkt ausserhalb S_3 wird nicht durch die Anschauung sondern eine mögliche geistige Handlung gegeben und den Punkt an sich schauen wir wie jeden Punkt des gewöhnlichen Raums an. Es ist auch möglich für den Punkt ausserhalb S_3 in Verbindung mit den Punkten von S_3 dieselben Axiome wie für die Punkte von S_3 gelten zu lassen, wenn man das Axiom über die drei Dimensionen (S. 688) ausnimmt.

Fasst man die Geometrie von mehr als drei Dimensionen auf diese Art auf, so ist sie ebenso wie die gewöhnliche wesentlich von der Wissenschaft der abstracten Mannigfaltigkeiten verschieden. Für *Grassmann* hat die Geometrie immer drei Dimensionen. Man kann daher nicht sagen, die Ausdehnungslehre und noch weniger die analytische Geometrie von n Dimensionen und die reine Geometrie der Räume von mehr als drei Dimensionen seien ein und dasselbe, wie einige Autoren noch behaupten oder glauben lassen. Es ist dies ebensowenig der Fall, wie die Ebene *Lobatschewsky*'s oder *Riemann*'s die Pseudokugel oder die Kugel ist u. s. w. Die *Lobatschewsky*'sche und *Riemann*'sche Ebene oder die *Euclid*'sche können bei weiteren Wahrnehmungen möglicher Weise aus der

---

1) *Beltrami* hat stets die Geometrie in ihren richtigen Grenzen zu halten gewusst. Er hat z. B. nie behauptet, die pseudosphärische Fläche sei die Ebene *Lobatschewsky*'s, sondern sie sei eine Darstellung derselben; so sagt er auch in seiner „Teoria generale u. s. w." bei der Erklärung der von ihm gebrauchten geometrischen Ausdrücke, der Leser habe volle Freiheit, ihnen nur eine rein analytische Bedeutung beizulegen.

Klein sagt, nachdem er die Definition der Zahlenmannigfaltigkeit von n Dimensionen (Math. Ann. Bd. 6) gegeben hat: „Für $n = 3$ können die Elemente (und dieses ist der Grundbegriff der analytischen Geometrie) durch die Punkte des Raums dargestellt werden und die Mannigfaltigkeit kann als ein Punkteaggregat betrachtet werden. Wir wollen uns hier und in der Folge dieser leichten und anschaulichen Auslegung bedienen, um aus ihr die Vorstellungen zu bilden, welche in den allgemeinen Begriff der Mannigfaltigkeit gebracht werden müssen." Das heisst er unterwirft wie die früheren Autoren die Mannigfaltigkeit den Gesetzen des gewöhnlichen Raums. In dieser Definition nähert er sich mehr der Ansicht *Grassmann*'s eine solche Mannigfaltigkeit nicht Raum zu nennen; er gebraucht jedoch dieses Wort und andre geometrische Benennungen in andern Studien über diese Mannigfaltigkeit (siehe seine Abh.: Liniengeometrie und metrische Geometrie: Math. Ann. Bd. V).

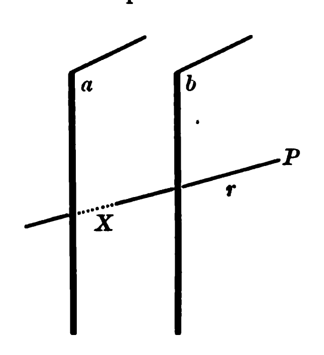
Zahl der geometrischen Gegenstände ausscheiden, während dies bei dem Raum von mehr als drei Dimensionen niemals geschehen kann. Es handelt sich ferner hier um ein Resultat, welches sich mit der Methode nicht ändert; denn es bezieht sich, wie gesagt, auf das Wesen des geometrischen Gegenstandes. Bezüglich der Sätze über diesen Gegenstand kann man selbstverständlich entweder die Anschauungsmethode oder die analytische oder auch irgend eine andre abstracte Methode anwenden, wie bei der gewöhnlichen Geometrie.

Wir haben die Ebene, die Räume S_3, S_4, ..., S_n in dem allgemeinen Raum erzeugt, dessen Begriff wir bereits, wie schon gesagt, auf der ersten Seite unsrer ersten 1881 in den Math. Ann. veröffentlichten Arbeit entwickelten. Hier ist der Punkt kein Zahlensystem und auch kein Gegenstand von beliebiger Beschaffenheit, sondern *der Punkt so wie wir ihn uns im gewöhnlichen Raum vorstellen* und die aus Punkten zusammengesetzten Gegenstände, sind Gegenstände (Figuren), auf welche wir beständig die Raumanschauung mit der Abstraction verbunden mithin die synthetische Methode anwenden.[1]) Wenn

---

1) Aus Kap. I des ersten Theils, in welchem wir direct in dem allgemeinen Raum operiren, und aus dem zweiten Theil geht hervor, erstens wie wir die räumliche Anschauung benutzen, ferner dass kein Zweifel an der Ausschliessung der analytischen Begriffe, welche den andern Definitionen zu Grunde liegen, besteht und dass die Figuren von mehreren Dimensionen von den abstracten Formen der Einleitung verschieden sind. Da aber in Zweifel gezogen wurde, ob man die Anschauung bei solchen Untersuchungen verwenden könne und ob sie nicht zu weit führe, so bestehen wir von Neuem auf diesem Punkt und zeigen, wie wir thatsächlich von der Raumanschauung Gebrauch machen; denn auch hier handelt es sich zum grossen Theil um die Gewohnheit.

Betrachten wir z. B. den Theil des Anschauungsraums (Theil I, Emp. Bem. I), welcher von zwei parallelen Ebenen a und b eingeschlossen ist und nehmen wir an, er stelle den ganzen Raum von drei Dimensionen dar. P sei ein Punkt ausserhalb dieses Raums, jedoch in dem Anschauungsraum selbst enthalten. Ziehen wir durch P eine Grade r, so hat sie in unserm Raum unendlich viele Punkte mit dem Theil (ab) gemein, welche zwischen den Durchschnittspunkten A und B mit a und b enthalten sind. Nun legen wir einen einzigen Punkt X, den die Grade mit dem Raum (ab) gemein hat, fest und lassen jedem andern Punkt X von r eine andre auf r gelegte Grade derart entsprechen, dass jede durch P gehende Grade unendlich viele Grade darstellt, von denen eine jede nur einen Punkt mit dem Raum (ab) gemein hat. Alle so in Betracht gezogenen einfachen Graden bestimmen um P eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen bezüglich des Punktes als Element, welche eine *Darstellung* des Raums von vier Dimensionen in dem gewöhnlichen Raum ist. Führt man eine beliebige Construction in dieser Darstellung aus, so ist sie das Bild einer mit den entsprechenden Elementen des Raums von vier Dimensionen ausgeführten Construction. Dieser Raum ist aber *nicht* seine Darstellung in S_3, wie man glauben könnte; denn da wir uns denken, der ursprüngliche Punkt (P) liege *ausserhalb* S_3 (in welchem Fall wir uns den ganzen gewöhnlichen Raum auf Grund des Princips a, § 37 der Einl. denken), wie P ausserhalb (ab) liegt, so hat jede durch (P) gehende Grade in der That nur einen Punkt mit S_3 gemein; das heisst die unendlich vielen Graden, welche mit PX zusammenfallen, sind die Bilder der Graden der Ebene $(P)PX$ und diese Ebene schauen wir an, wie jede gewöhnliche Ebene. Die übrigen Durchschnittspunkte der Graden PX mit (ab) sind nur *scheinbar*, wie es bei der Darstellung des Raums von drei Dimensionen in der Ebene der Fall ist. Um die Darstellung anschaulicher zu machen, kann man das Segment (PX) ausziehen und den übrigen Theil von X an in der Richtung PX punktiren. Die Illusion ist freilich nicht vollständig wie bei der ebenen Darstellung, weil wir die Grade PX derart anschauen sollen, als ob sie nur einen Punkt mit (ab) gemein hätte; dieses ist aber unmöglich, da wir nur von dem Raum von drei Dimensionen eine vollständige Anschauung haben. Wie aber diese Illusion für die Construction der ebenen Darstellung einer Figur von drei Dimensionen nicht



man jede geometrische Betrachtung in dem Sinn interpretiren muss, dass man bei ihr stets die Figur vor Augen hat, so erhält man durch unsre Definition aber nicht durch die früheren ein solches Resultat.

Man kann Mannigfaltigkeiten von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabelen betrachten ohne sich zu widersprechen; der rein logische Beweis dafür findet sich, ohne dass es nöthig wäre z. B. auf irgend ein schon bekanntes System zurückzukommen, in demselben Satz der Einleitung, auf welchen wir unsre Definition des allgemeinen Raums gründeten. Und weil nach der Beilage über die Principien der analytischen Geometrie unsre Definition eines Raums S_n sich mit den früheren deckt, so werden in den Augen derjenigen, welche die ersteren Definitionen und ihre Consequenzen für unangreifbar halten und nicht gewohnt sind die Raumanschauung auf diese Untersuchungen anzuwenden, unsre Principien und Ableitungen vollständig bestätigt.

In der Vorrede haben wir auch ausgeführt, warum man bei den höheren Untersuchungen unter Geometrie von mehreren Dimensionen auch die Theorie von Systemen nicht linearer Continuen verstehen kann.

Was die Behandlungsart, d. h. die synthetische Methode anlangt, so darf man wohl sagen, dass sie vor unsern Arbeiten niemals allgemein und systematisch angewendet worden ist.[1]) Der grösste Unterschied zwischen unsern und

nöthig ist, so ist sie es auch nicht für die Darstellung der Figuren von vier oder mehr als vier Dimensionen in dem gewöhnlichen Raum. Gewöhnt man sich daher *mittelst der Abstraction* an die Vorstellung, dass die Grade PX nur einen Punkt mit dem Raum S_4 gemein habe, indem man geistig von den andern gemeinschaftlichen Punkten abstrahirt oder auch dass der Punkt (P) ausserhalb *jeder* Ebene und mithin jeder Graden des Raums S_3 liege, wovon man bezüglich des Punktes und der Ebene eine vollständige Anschauung hat, von welcher man in Verbindung mit dieser Abstraction beständig Gebrauch macht, so *scheint* es fast so, als ob man die Anschauung selbst hätte, während es nur das Resultat dieser Abstraction in Verbindung mit der Raumanschauung ist. Eine solche Darstellung erhält man mittelst des Verfahrens der descriptiven Geometrie von mehr als drei Dimensionen.

1) Die Abhandlung des Prof. *Stringham* über die verschiedenen Typen regelmässiger Körper des Raums von vier Dimensionen (American J. III. 1880) scheint mehr nach synthetischer als analytischer Art geschrieben zu sein; es handelt sich aber im Grund mehr um eine combinatorische Methode.

In unsrer Abhandlung über die descriptive Geometrie von vier Dimensionen haben wir die allgemeinen Methoden angegeben, um nicht nur die Projectionen dieser Körper sondern auch jeden Problems des Raums von vier Dimensionen zu construiren. Von diesen Methoden haben wir in unsrer Schrift „Di una nuova costruzione delle superficie del 4 ordine dotate di conica doppia“ (R. Istituto Veneto, 1884) eine kurze Anwendung gemacht. Diese Schrift steht mit der wichtigen Abhandlung: Etudes de diff. surfaces du 4 ordre u. s. w. Math. Ann. XXIV. 1884 des Professor *Segre* in Zusammenhang, welcher andre bemerkenswerthe Untersuchungen über diese Gegenstände gemacht hat. Wir erwähnen noch, dass unser ausgezeichneter Lehrer, Professor *Fiedler*, auf Grund der Principien unsrer in den Math. Ann. veröffentlichten Abhandlung in seinen Vorlesungen von 1882 die descriptive Geometrie von vier Dimensionen behandelt hat (Zur Geschichte und Theorie der element. Abbildungsmethoden — Vierteljahrsschrift der Zürch. Natur. Ges. 1882).

Die Anschaulichkeit ist noch auffallender bei der von *Rudel* in seiner Abhandlung: Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Progr. d K. Gewerbeschule in Bamberg. 1887. S. 15—25 angewandten Methode. In dieser Schrift sind die Ideen zweier kurzen früheren Abhandlungen, welche in den Bayer. Blättern vom selben Jahr abgedruckt sind, enthalten. Der Verfasser geht ohne Weiteres von dem Postulat aus, dass zwei Räume von drei Dimensionen sich in einer Ebene in dem Raum von vier Dimensionen schneiden, den er *das All* nennt. Er sucht die Grundformen I., II., und III. Art auf, aber ohne sich mit ihren Beziehungen zu beschäftigen, und schliesst die kurze Schrift mit den Worten: „*Staudt* hat offenbar ein System geschaffen, das nicht nur die Geometrie des Imaginären in sich aufzunehmen und vollendet zu gestalten vermochte, das sogar vollständig

früheren Arbeiten besteht aber, abgesehen von vielen Fragen der Geometrie von mehr als drei Dimensionen, in der systematischen Anwendung des Princips des Projicirens und Schneidens, über dessen Möglichkeit und Vortheile ebenso wie über seine Anwendungen auf den gewöhnlichen Raum und die Ebene kein Zweifel möglich ist.[1])

Wie wir in der Anm. auf Seite XXXIII bemerkten, kann man den Regeln der descriptiven Geometrie von mehr als drei Dimensionen folgend ohne das Postulat über die Räume von mehr als drei Dimensionen zu benutzen nur mit Hülfe von Definitionen von Namen in S_3 eine Mannigfaltigkeit Σ_4 von Punkten construiren (welche die Centralprojection von S_4 auf S_3 ist) und von welcher ein Raum Σ_3 durch zwei parallele Ebenen dargestellt wird, während der Projectionsraum S_3 ebenfalls der Mannigfaltigkeit Σ_4 angehört. Es ist mithin klar, dass der Satz: „Es existirt ein Punkt ausserhalb des Raums von drei Dimensionen" nicht nur mit den Postulaten der gewöhnlichen Geometrie (natürlich mit Ausschluss der Geometrie von drei Dimensionen) im Einklang steht, sondern dass auch die aus ihm in S_3 sich ergebenden Consequenzen, auch wenn der Satz als Postulat gegeben wird, ausser den Postulaten der gewöhnlichen Geometrie, kein andres specielles Postulat nöthig machen, wenn man diese Consequenzen mit ihnen allein beweisen will.

Es gibt Arbeiten, die den unsrigen vorausgingen, in welchen diese Methode auf irgend einen besonderen Fall angewendet wurde; die Gesetze aber, welche dieses Princip bei dem allgemeinen Studium der geometrischen Dinge hervorruft, die Idee mit diesem Princip die Dinge der Ebene und des Raums zu erforschen und dabei auf einfachere normale Dinge eines höheren Raums zurückzukommen, finden sich nur bei uns und vielen Andern, welche später dieselbe Richtung verfolgten.[2]) Natürlich ist die Bedeutung der Geometrie der Räume von mehr

---

geeignet erscheint von einem ihm ebenbürtigen Geist unzweifelhaft einst zu einer Geometrie beliebig hoher Dimensionen ausgebaut zu werden."

Andre Arbeiten vor unsern beiden ersten, in welchen diese Geometrie auf synthetische Art behandelt würde, kennen wir nicht.

1) Gegen den erwähnten Artikel *Segre's*, welcher in der Rivista di Matematica, deren Director *Peano* ist, abgedruckt war, glaubte der letztere eine Polemik eröffnen zu müssen (Fasc. 4—5. S. 66—69 und Fasc. 6, 7. S. 154—159), welche sich zum Theil gegen die Räume von mehr als drei Dimensionen in dem von uns verstandenen Sinn und speciell gegen den Gebrauch der Methode des Projicirens und Schneidens nicht nur von jenen Räumen aus auf den gewöhnlichen Raum sondern auch von dem gewöhnlichen Raum auf die Ebene richtet. *Peano* hat der Form und dem Inhalt nach Unrecht; es würde auch nicht schwer sein ihm zu antworten; da er aber den Mathematikern, welche nicht so denken, wie er, den gesunden Menschenverstand abspricht (a. a. O. S. 157), so macht er jede würdige und freundschaftliche Erörterung damit unmöglich. Nach unsrer Ueberzeugung sind die Fragen über die Principien der Mathematik und speciell der Geometrie an sich schon schwierig genug und ist es nicht nöthig durch leidenschaftliche und unduldsame Polemik neue Schwierigkeiten andrer Natur hinzuzufügen.

2) *Cayley* betrachtet in der zweiten oben erwähnten Abhandlung eine gewisse Anzahl Punkte in dem Raum von n Dimensionen und erhält dadurch, dass er ihre Figur mit dem gewöhnlichen Raum schneidet, eine Figur, welche zu den von uns homolog genannten Figuren gehört; er gibt aber in diesem speciellen Fall nicht einmal den Beweis für die Umkehrung der Eigenschaft. *Halphen* findet in seinen Recherches de Géométrie à n dimensions (a. a. O.) durch eine besondere Projection die kleinste Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten einer Curve der Ordnung n in dem gewöhnlichen Raum. Einen andern interessanten Fall bringt *Darboux* (Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques: Comptes

als drei Dimensionen, wie schon gesagt, nicht von ihren Anwendungen auf den gewöhnlichen Raum allein abhängig.

Wir haben hier nicht eine Abhandlung über alle Arbeiten, welche sich mit der Geometrie von mehr als drei Dimensionen beschäftigen, schreiben wollen; von ihnen haben wir früher wenigstens bezüglich der Principien gesprochen.[1] In den letzten Jahren haben diese Theorien in geometrischer Richtung namentlich in Italien tüchtige Vertreter gefunden. Man muss auch nicht glauben, wie wir schon erwähnten, diese Arbeiten beschäftigten sich nur mit Dingen von mehr als drei Dimensionen; man findet häufig auch wichtige Untersuchungen über die Dinge des gewöhnlichen Raums und der Ebene.

Die in den beiden ersten Definitionen gebrauchte Ausdrucksweise hat eine lebhafte Polemik hervorgerufen. Jetzt ist diese Sprache auch geometrisch vollständig gerechtfertigt.[2]

Rend. 1869). Aus einem dreifachen System orthogonaler Flächen erhält er mittelst einer stereographischen Projection ein System von ebenen orthogonalen Curven. Er sagt: „Wenn man die analytischen Operationen untersucht, mit deren Hülfe man zu einem System von drei Variabelen übergeht, so bemerkt man, dass diese Operationen einen genau definirten Sinn behalten und auch dann noch möglich sind, wenn man statt eines Systems von orthogonalen Flächen von drei Variabelen x, y, z ein orthogonales System von n Variabelen anwendet. Es wäre leicht mit aller Schärfe zu beweisen, dass sie zu einem System von $n-1$ Variabelen führen. *Diese analytischen Operationen könnten indess geometrisch wenigstens auf einfache Art nur unter Voraussetzung der Kenntniss eines Raums von mehr als drei Dimensionen interpretirt werden.* Wie dies auch sei, wenn man ein orthogonales System von vier Variabelen kennt, so lässt sich, wie man sieht, ein System von drei Variabelen ableiten u. s. w."

Mittelst unsrer Definition und unsern Constructionen findet also, wie man sieht, dieses Theorem die einfache Interpretation, von welcher *Darboux* spricht. Andre Schriftsteller haben vor unsrer ersten Arbeit in einer andern Richtung die Geometrie von mehr als drei Dimensionen benutzt, z. B. *Klein* in dem erwähnten Studium der Geometrie der Graden in dem gewöhnlichen Raum (Math. Ann. a. a. O. Bd. 5). Wir erkennen an, dass *Clifford* sich in seiner wichtigen *Classification of loci* (Phil. Trans. of the London M. S. 1879), mit der rationalen Curve der Ordnung n und mit Curven vom Geschlecht p des Raums von n Dimensionen beschäftigte und dabei einige wichtige Sätze über diese Curven gab. Jedoch ist der Charakter der beiden Arbeiten verschieden und *Clifford* beschäftigt sich nicht mit dem Princip der Projection und weist auch nicht auf die Sätze hin, welche wir aus diesem Princip hergeleitet haben. Die Eigenschaften sind projectiver Natur, man kann aber nicht behaupten, dass man in dieser oder andern Arbeiten durch die Methode des Projicirens und Schneidens, von welcher die projective Geometrie ihren Namen herleitet, zu ihnen gelangt oder dass in dieser Arbeit von dem Begriff von normalen Curven und Flächen die Rede ist.

1) In dieser Hinsicht wie auch bezüglich der nicht-*Euclid*'schen Geometrie kann man das von *Halsted* (American Journ. Bd. I u. II bis 1879) veröffentlichte Verzeichniss der Abhandlungen zu Rath ziehen oder auch das von *Schlegel* 1866 in der Schrift: „Ueber Entwicklung und Stand der n. dim. Geometrie mit besondrer Berücksichtigung der vier Dimensionalen. K. Leop. Carol. Deutsche Ak. d. Wissensch. Halle" veröffentlichte Verzeichniss Wir müssen jedoch bemerken, dass der Verf. den Charakter und die Stelle, welche die Arbeiten der Italiener einnehmen, nicht hinreichend gewürdigt hat. Einige von ihnen sind auch in dem Verzeichniss vergessen worden. Dagegen hebt er die Vorzüge des Princips des Projicirens hervor.

In dem ersten Verzeichniss findet man auch Arbeiten von philosophischem Gepräge, die man unsrer Ansicht nach von den mathematischen Arbeiten hätte trennen müssen. Man kann auch noch die Monographie *G. Loria*'s zu Rath ziehen (Il passato e il presente delle ricerche geometriche. Genova. 1886, von *Schütte* ins Deutsche übersetzt mit einer Vorrede von *R. Sturm*. Leipzig. 1888, und ins Polnische von *Dickstein*). Bezüglich der in den letzten Jahren über diese Untersuchungen veröffentlichten Arbeiten siehe auch die „Fortschritte der Mathematik. Berlin."

2) Wir wollen einige Proben dieser Polemik geben, damit sich der Leser eine Vorstellung davon machen kann.

. . . gewiss ist logische Spielerei ein System von vier oder fünf Dimensionen noch Raum zu nennen. Gegen alle solche Versuche muss man sich wahren; sie sind Grimassen

Note II.

Ueber die Bewegung ohne Deformation.[1])

Aus dem Text geht klar hervor, dass wir das Princip der Bewegung starrer Körper nicht für die Entwicklung sondern nur für die praktischen Anwendungen der Geometrie nöthig gehabt haben und dass eine solche Verwendung des Princips die Theorie der Gleichheit der Figuren nicht complicirt sondern vereinfacht. In dem Text haben wir ferner gesehen, wie man das Princip der Bewegung starrer Körper oder der Bewegung ohne Deformation abstract definiren und die ersten Consequenzen, welche gerade für die praktischen Constructionen nöthig sind, daraus ziehen kann.

In der Anmerkung auf Seite 259 haben wir aber auch darauf hingewiesen, dass sich im Grunde das Princip der Bewegung ohne Deformation auf den Begriff der Gleichheit gründet, wenn man die Bedeutung dieser Ausdrücke erklären will.

In der Vorrede haben wir eine Art von Anklage gegen dieses in den

---

der Wissenschaft, die durch völlig nutzlose Paradoxien das gewöhnliche Bewusstsein einschüchtern und über sein gutes Recht in der Begrenzung der Begriffe täuschen (*Lotze*, Logik. S. 217). *Bellavitis* erklärt in dem zweiten Theil von N. XII seiner Rivista del R. Istituto Veneto, er sei so blind, dass er die Räume von vier, fünf, u. s. w. n Dimensionen nicht sehe. In der Rivista X (1871) sagt er in einer Kritik der erwähnten Abhandlung von *Betti:* „Die Analogie kann uns verleiten, die Räume von vier Dimensionen, auf welche sich eine Function $f(x, y, z, t)$ bezieht, zu betrachten, wenn nur nicht jeder reelle Typus für unser Nachdenken fehlte."

Wir sagen vielmehr, der auf rein geometrische Art construirte Gegenstand fehlte, auf welchen die Function $f(x, y, z, t)$ hätte angewendet werden können, wenn man den Gegenstand als nicht im Anschauungsraum selbst enthalten ansah.

„Es werden in philosophischen Schriften geradezu haarsträubende Dinge von der sogenannten Metamathematik erzählt" (*E. Erdmann,* a. a. O.).

„Es ist sicher, dass die Sorglosigkeit, mit welcher die Mathematiker bei der Eingrenzung des Gebiets ihrer Forschungen verfahren, die erste Ursache zu ähnlichen Missverständnissen gewesen ist" (*Masci,* Le forme dell' intuizione. Chieti. 1880).

Die Verwirrung entstand dadurch, dass der eigentlich sogenannten Geometrie von mehr als drei Dimensionen ihre natürliche Basis fehlte, nämlich die Construction ihrer Dinge, auf welche sich die analytische Methode, wenn nöthig, stützen muss, wie *Descartes* auf die gewöhnliche Geometrie seine grosse Erfindung anwandte.

„Für mich sind die Fragen bezüglich der Räume von einer beliebigen Anzahl von Dimensionen nur analytischer Natur . . . Ich bestreite nicht die Nützlichkeit dieses neuen der Analysis geöffneten Wegs, nur hätte man Unrecht, wollte man zu der Annahme verleiten, als glaube man an die Wirklichkeit der geometrischen Bedeutung der gebrauchten Namen. Man beraubt so die Geometrie ihres grössten Vorzugs und der ihr eigenthümlichen Schönheit, nämlich der Fähigkeit, eine wahrnehmbare Darstellung der Resultate der Analysis zu geben und ersetzt diese Fähigkeit durch den entgegengesetzten Mangel. Denn die Resultate, welche in der analytischen Form nichts Anstössiges haben, bieten dem Geist keinen Halt mehr oder erscheinen widersinnig, wenn man sie durch eine geometrische Nomenclatur ausdrückt und Punkte, Linien und Räume annimmt, die keine wirkliche Existenz haben und deren Annahme dem gesunden Menschenverstand widerstrebt oder über unsre Fassungsgabe hinausgeht" (*Genocchi,* Mem. dell' Acc. di Torino, a. a. O.).

Killing nähert sich in seinem citirten Buch theilweise unsrer Methode, behandelt einige Argumente, die wir in unsrer ersten Abhandlung entwickelten, in einer Note am Ende sagt er jedoch, man habe seiner Ansicht nach mit der synthetischen Methode das richtige Mass überschritten. Er sagt freilich nicht, wer es überschritten hat und auf welche Weise, jedenfalls kann sich diese Note bezüglich der Methode nicht auf unsre Arbeiten beziehen.

1) Diese Note setzt die Kenntniss der Vorrede und der Sätze des Textes, soweit beide diesen Gegenstand betreffen, voraus.

Elementarbüchern gemeinhin angenommene Axiom erhoben, welche in zwei Theile, einen mathematischen und einen mehr psychologischen als mathematischen Theil zerfällt. Offenbar hat diese Frage mit dem Text selbst nichts zu thun.

Das Princip der Bewegung ohne Deformation kommt nach unsrer Bedingung VI über die geometrischen Axiome darauf hinaus, in abstractem Sinn, wie man auch analytisch sieht, Systeme gleicher Figuren in dem gewöhnlichen Raum oder einem andern Raum anzunehmen, während die Gleichheit zweier Figuren an sich, wie diejenige zweier beliebiger Dinge von den stetigen Systemen und den Dimensionen des speciellen Raums, welcher sie enthält, unabhängig ist. Und diese Systeme werden nicht nur z. B. für die Grade, sondern für jede gegebene Figur vorausgesetzt, während wir die Eigenschaften der Systeme unveränderlicher Figuren in einem gegebenen Raum, welche wie wir gesehen haben dem genannten Princip zur Basis dienen, erst behandelt haben, nachdem wir die Grundeigenschaften der Graden, der Ebene, des Raums von drei oder n Dimensionen kennen gelernt hatten.

Die Raumanschauung kann überdies als unabhängig von der Anschauung der Bewegung angesehen werden, auch wenn diese dazu dient jene zu bilden. Denn wenn wir die Gegenstände, welche uns umgeben, ansehen, ohne dass einer von ihnen sich bewegt oder unser Auge sich bewegt oder ohne dass wir wenigstens ihre Bewegung bemerken, so erhalten wir gleichermassen die Anschauung des leeren Raums, welcher uns umgibt. Und da die Geometrie sich mit dem leeren Raum, welcher unbeweglich ist, beschäftigt, so wäre es merkwürdig, wenn man bei der Definition und dem Beweis der Eigenschaften des unbeweglichen Raums auf die reelle Bewegung der Körper zurückkommen müsste. Wenn der Raum, in welchem die Bewegung vor sich geht, nicht die Eigenschaft hätte, wie wir sagen, identisch in der Position seiner Theile zu sein, so könnte die Bewegung ohne Deformation nicht stattfinden, während man sich denken kann, dass diese Bewegung nicht stattfindet und der Raum doch die genannte Eigenschaft besitzt.

Wie ferner aus der ins Einzelne gehenden Zergliederung hervorgeht, die wir mit dem Princip der Identität und seinen Consequenzen für die abstracten und mithin auch concreten Formen in der Einleitung vorgenommen haben, entspringt die Vorstellung der Identität zweier Dinge und mithin auch zweier Figuren, der *Vergleichung,* welche unser Geist zwischen ihnen anstellt. Nun ist diese Vorstellung der Idee der Bewegung eines Körpers fremd, nicht aber der Idee der Bewegung ohne Deformation, weil ein Körper bei der Bewegung sich nicht nur deformiren kann, sondern, wie wir wissen, stets deformirt, sei es auch ohne dass wir es wahrnehmen können. Das *Urtheil,* welches wir abgeben, der Körper in der Lage A sei dem oder einem Körper in der Lage B identisch, stützt sich daher auf das Princip der Identität. In diesem Sinn sind unsre Axiome III und IV gegeben. Erklärt man die Bewegung ohne Deformation auf diese Art, und wir wissen von keiner andern und können uns auch keine andre vorstellen, so liegt eine petitio principii in dem Satz, zwei Körper seien

gleich, wenn man sie durch eine Bewegung ohne Deformation zur Deckung bringen könne. Jedenfalls ist es nicht erlaubt, wie in den meisten Elementarbüchern, zu behaupten, zwei Figuren, welche sich auf diese Weise nicht aufeinander legen lassen, seien nicht gleich. Auf diese Art schränkt man den Begriff der Gleichheit dadurch ein, dass man ihn von den Dimensionen des Raums, in welchem die Figuren enthalten sind, abhängen lässt[1], während man die Figuren auch bei dem obigen Princip zur Deckung bringen kann, wenn man einen Raum von einer Dimension mehr zu Hülfe nimmt. Da wir die Grundlagen der Geometrie direct in dem allgemeinen Raum begründet haben und die Gleichheit der Figuren daher in diesem Raum stattfindet, so springt die obige Einschränkung um so mehr in die Augen. Ueberdies müssen aus der Construction des Raums z. B. von vier Dimensionen sich alle seine Eigenschaften und daher auch diejenigen, welche sich auf die Gleichheit seiner Figuren beziehen, ohne jedes der Construction selbst fremde Princip ableiten lassen. In der That haben wir die Möglichkeit und die Nothwendigkeit erkannt bei der Betrachtung der Räume höherer Dimensionen, für welche uns eine wahrnehmbare vollständige Vorstellung fehlt, das Princip der Bewegung von den Principien der theoretischen Geometrie auszuschliessen.

Während man, wie ferner zu beachten ist, mittelst des Princips der Bewegung ohne Deformation allein behaupten kann, zwei an sich betrachtete Dreiecke seien gleich, wenn ihre Bestimmungselemente gleich sind, gilt dieses nicht von zwei irgendwo im gewöhnlichen Raum liegenden Dreikanten; denn sie können ihre sämmtlichen Bestimmungselemente gleich haben, ohne dass man sie aufeinander legen kann. Zu beachten ist auch, dass wir unter den Bestimmungselementen auch die Ordnung, in welcher die Theile der Figuren gesetzt sind, in Betracht ziehen, welche jedoch mit dem Sinn der Figur bezüglich des gewöhnlichen Raums nicht zu verwechseln ist. Die Richtung oder der Sinn ist ein Merkmal, welches der Figur an sich nicht angehört, sondern ihr nur dann zukommt, wenn man sie als in dem Raum S_3 (oder S_n) enthalten ansieht, wie der Sinn, welchen ein Dreieck in seiner Ebene hat, kein Merkmal des Dreiecks an sich ist. In dem allgemeinen Raum gibt es keinen Unterschied der Richtungen und daher auch keinen Unterschied zwischen congruenten und symmetrischen Figuren.[2])

1) Siehe Einl. Bem. I, § 112. Wie wir im Text ausführten, sind viele Verfasser von Elementarbüchern der Ansicht, zwei Scheiteldreikante seien nicht gleich, während es doch üblich ist z. B. die rechte und die linke Hand für gleich zu halten und das Bild eines Gegenstandes in einem Spiegel dem Gegenstand selbst geometrisch gleich ist.

Auf der andern Seite ist diese Definition auch nicht erfahrungsgemäss, weil man praktisch zwei Körper nicht ineinander drückt, um zu sehen, ob sie gleich sind und auch bei grossen ebenen Flächen oder solchen, die nicht transportabel sind, nicht so verfährt.

2) Nach *Helmholtz* hat, wie wir in der Vorrede erwähnten, die Geometrie die Starrheit und eine gewisse Bewegungsfreiheit der Körper nöthig. Aus seinen Aeusserungen (a. a. O. S. 621) geht hervor, dass es ausgeschlossen ist, dass er die Nothwendigkeit dieser Begriffe nur auf die praktischen Anwendungen bezieht. Dieser Unterschied zwischen der theoretischen Geometrie und ihren praktischen Anwendungen ist, so viel wir wissen, vor uns noch von Niemand gemacht worden.

Hoüel (a. a. O. S. 70) behauptet, eine Begriffsverwirrung trage die Schuld daran, dass einige Mathematiker die Betrachtung der Bewegung aus den Elementen der Geometrie

Note III.

Ueber die Definitionen von Winkel zweier Strahlen oder zweier Graden, welche einen Punkt gemein haben.

Die Definition des Winkels hat den Autoren, welche über die Elemente schrieben, mit am meisten zu denken gegeben und unsrer Ueberzeugung nach

---

verbannen wollen. Uebrigens tritt, wie er sagt, die Bewegung unbewusst und gegen ihren Willen bei allen Autoren auf und es ist schwierig einen einzigen Beweis eines Grundsatzes der Geometrie zu finden, in welchem sich nicht die Idee der Bewegung verbirgt. Auch wir haben von der Einleitung (§ 67) an die Sprache der Bewegung der grösseren Bequemlichkeit wegen benutzt, jedoch immer mit den gehörigen Vorsichtsmassregeln und der Erklärung, was wir mit ihr sagen wollten. *Hoüel* hat in der That nicht angegeben, wer diese Mathematiker sind, die sich vorgenommen haben, das Princip der Bewegung von den Elementen der Geometrie auszuschliessen und denen dies nicht gelungen ist. Man schreibt diese Absicht den Alten zu; wir haben aber keinen unter ihnen finden können, der ausdrücklich dieses Princip von den Elementen hätte ausschliessen wollen.

B. Erdmann (a. a. O.) und *Lindemann* (a. a. O. S. 556) versichern, *Legendre* und *Bolyai* hätten diesen Versuch gemacht. Sie geben jedoch die betreffenden Stellen nicht an, an welchen diese Absicht ausgesprochen wird; für uns steht das Gegentheil fest, weil *Legendre* ausdrücklich das Princip der Bewegung in dem Axiom V seiner Eléments einschliesst und es benutzt, wie auch *Johann* und *Wolfgang Bolyai* in den Büchern, die wir kennen, davon Gebrauch machen.

B. Erdmann (a. a. O. S. 148) ist der Ansicht, ohne sie zu beweisen, dass die mathematische Untersuchung der Beziehungen der Congruenz die Nothwendigkeit des Begriffs der Bewegung gezeigt habe. Er beruft sich dabei auf *Helmholtz* und *Hoüel*, welche ihrerseits diese Nothwendigkeit nicht bewiesen haben. Die rationalen Philosophen bestreiten dagegen im Allgemeinen diese Nothwendigkeit und haben *geometrisch* Recht. Sie sind freilich nie durch geometrische Entwicklungen zu diesem Schluss gekommen. Wir dagegen behaupten nicht, dass sie *philosophisch* im Recht sind, da der Ausschluss der Bewegung aus der theoretischen Geometrie Nichts gegen ihren empirischen Ursprung beweist.

Obgleich *Euclid* stillschweigend das Princip der Bewegung ohne Deformation benutzt, so hat er doch das Bestreben, wo er kann, ohne es auszukommen. Er beweist z. B. ohne dieses Princip, dass zwei Dreiecke, welche eine Seite und die zwei anliegenden Winkel gleich haben, einander gleich sind und gibt die Construction zweier gleicher Dreikante, welche sowohl für zwei congruente als für symmetrische Dreikante gilt (*Ed. Heiberg*). *Euclid* sagt wohlgemerkt nicht, wenn zwei Figuren in dem gewöhnlichen Raum sich nicht aufeinander legen liessen, so wären sie nicht gleich; es ist nur zu bemerken, dass er nicht klar ausgedrückt hat, was er unter gleichen Figuren versteht, da das Ax. VIII: Dinge, welche zusammenfallen, sind gleich, eine klare Vorstellung von dem, was *Euclid* hat sagen wollen, nicht gibt. *Lindemann* (a. a. O. S. 556) legt dieses Axiom in dem Sinn des Princips des Aufeinanderlegens aus; es kann jedoch und muss nach unsrer Ansicht anders ausgelegt werden, da es sich um *beliebige Dinge* und *gewöhnliche Begriffe* handelt.

Jedenfalls ist aus den erwähnten Gründen die Behauptung gewagt, *Euclid* und *Helmholtz* seien in dieser Beziehung einer Meinung gewesen, da vielmehr aus dem Obigen das Gegentheil hervorgeht, wenn auch *Euclid* in der ebenen Geometrie und mehr noch in der Geometrie des Raums das Princip des Aufeinanderlegens in dem gewöhnlich verstandenen Sinn angewendet hat.

Legendre macht ausdrücklich von dem Princip der Bewegung Gebrauch; er unterscheidet aber zwischen der Gleichheit durch Symmetrie und derjenigen durch Congruenz, wenn er zu den beiden Dreikanten kommt, welche dieselben Elemente haben aber nicht aufeinandergelegt werden können. Aber auch ihm lassen sich dieselben Bemerkungen machen; denn er setzt nicht genau fest, wann zwei Dreikante durch Congruenz oder durch Symmetrie gleich sind. Dass man einfach, wie er, sagt, die Seiten seien *auf dieselbe Art angeordnet* oder, wie Andre sagen, *ähnlich gelegen*, bedeutet Nichts und sein Beweis, dass zwei Dreikante, wenn sie so genannt werden, zusammenfallen, ist nicht bindend. Mit andern Worten, er definirt *die Richtungen oder den Sinn* der Figuren im Raum nicht genau.

Andre Autoren unterscheiden diese doppelte Gleichheit; z. B. *Möbius* (Baryc. Calcül. Leipzig, 1827. S. 182), ebenso *Beltrami* (Teor. gen. u. s. w. S. 238). Besonders bei *Beltrami* fällt

genügt keine dieser Definitionen vollständig. Neuerdings ist dieser Gegenstand in der Zeitschrift für math. Unterricht von *Hoffmann* erörtert worden (1889 bis 1890). Die hauptsächlichen geometrischen Definitionen dieses Dings sind die folgenden:

1) Der ebene Winkel ist die Neigung zweier Linien in der Ebene, welche sich schneiden und nicht in derselben Graden liegen. Der Winkel heisst gradlinig, wenn die Linien Grade sind *(Euclid).*

Durch den ersten Theil werden zwei Strahlen, welche in grader Linie liegen, ausgeschlossen, während z. B. zwei Bogen derselben Kreislinie mit einem

---

seine Neigung, die Bewegung starrer Körper aus der Geometrie auszuschliessen, auf. Diese Tendenz bemerkten wir auch in dem Buch *de Tilly*'s, während er später, wie wir sahen, ausgedehnten Gebrauch von ihr macht. Wir finden dies auch in den Axiomen *Grassmann*'s; er hat aber nicht nur die Begriffe, welche ihm zur Erzeugung der stetigen abstracten Formen dienen, nicht hinreichend definirt, sondern auch den Begriff der Gleichheit nicht derart entwickelt, um ihn bei den geometrischen Untersuchungen nutzbar zu machen; auch seine Axiome sind nicht genug entwickelt. Man kann daher nicht wissen, was seine Ideen in dieser Beziehung gewesen sind. Wie wir schon anderswo sagten, sind unbestimmte Vorstellungen in solchen Fragen wenig oder nichts werth, wenn man nicht zeigt, dass sie thatsächlich verwirklicht werden können. Diese Tendenz fällt noch mehr in den Arbeiten *Klein*'s und *Lie*'s in die Augen, wenn sie freilich auch nie die Absicht dargethan haben, die Bewegung aus den Elementen der Geometrie auszuschliessen; höchstens *Klein* sagt in seiner letzten Abhandlung, welche gleichzeitig mit der unsrigen über das gradlinige Continuum (siehe Vorr. S. 1) veröffentlicht wurde, man könne *anfangen,* die Geometrie mittelst der *optischen* statt der *mechanischen* Eigenschaften zu behandeln. *Lindemann,* welcher, wie wir sagten, in seinem neuen Buch principiell der Richtung *Klein*'s folgt, scheint vielmehr die Bewegung für nothwendig zu halten, wie sie es auch in der That bei den praktischen Constructionen ist. Macht man daher diesen Unterschied nicht, so haben die Verfechter dieser Ansicht wohl dem Princip nach Recht aber nicht in dem Sinn, wie er gewöhnlich aufgefasst wird. Die Gründe, warum wir finden, die genannten Autoren hätten die Tendenz die Bewegung auszuschliessen, sind die folgenden. Die Betrachtungen, welche sie über die Bewegung anstellen um die Transformationen festzustellen, welche z. B. den Kegelschnitt im Unendlichgrossen der Ebene in sich selbst verändern und welche die Function des Abstandes zwischen zwei Punkten unverändert lassen, sind streng genommen nicht nöthig. Lässt man freilich diese Betrachtungen weg, so verfällt man auch bei der Behandlung der Principien auf die wunderlichsten Kunstgriffe. Ferner ist zu bedauern, dass sie den Begriff der Gleichheit, wenn nicht zuerst bei den Figuren, doch später bei der Erörterung und den Formeln, von welchen die Entwicklung ihrer Arbeiten abhängt, gebrauchen, während die analytischen Begriffe doch nur aushülfsweise, nicht aber für die eigentliche Geometrie nöthig sind. Ueberdies beziehen sich die analytischen Betrachtungen bis heute noch auf einen Raum S_n aber nicht auf den allgemeinen Raum. Aber auch für den in dem allgemeinen Raum enthaltenen Raum S_n liefert uns diese Methode nicht die absolute Gleichheit der Figuren, weil man bei der Faltung einer Figur des Raums von n Dimensionen ohne Verzerrung oder Bruch die Linien gleicher Länge nicht mehr für gleich ansehen kann, auch wenn ihre Länge constant bleibt. Diese Definitionen haben, wie aus § 123 der Einleitung hervorgeht, die Massverhältnisse der Figuren im Auge; dazu kommt, dass man so viele unnöthige Begriffe benutzt um die auch von dem Absoluten *Cayley*'s abhängig gemachte Gleichheit zweier an sich betrachteten Figuren zu definiren. Im Uebrigen finden wir bei *Helmholtz* selbst eine Stütze für unsre Anschauungen. Er sagt (Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Prof. *Land;* Wiss. Abh. Bd. II. S. 648 und in seiner citirten Rede S. 66):

„Physisch gleichwerthig nenne ich Raumgrössen, in denen unter *gleichen* Bedingungen und in *gleichen* Zeitabschnitten die *gleichen* physikalischen Vorgänge bestehen und ablaufen können. Der unter geeigneten Vorsichtsmassregeln am häufigsten zur Bestimmung physisch gleichwerthiger Raumgrössen gebrauchte Process ist die Uebertragung starrer Körper, wie die Zirkel und Massstäbe, von einem Ort zum andern."

Daraus folgt, dass die Definition der physischen Gleichheit zweier Raumgrössen nicht aus dem Princip der Bewegung starrer Körper hervorgeht, sondern dass das letztere ein *Mittel* zur praktischen und daher annähernden Bestimmung gleicher Grössen ist.

gemeinschaftlichen Ende nicht ausgeschlossen sind. Ueberdies weiss man nicht, was die Neigung ist.

2) Wenn zwei Linien AB, AC sich schneiden, so heisst die mehr oder weniger grosse Quantität, um welche diese Linien bezüglich ihrer Lage voneinander abstehen, Winkel u. s. w. *(Legendre).*

Die Definition *Schlegel's* (a. a. O.) ist dem Begriff nach ähnlich; nach ihm ist der Winkel der Unterschied der Richtung zweier Graden.

3) Von Vielen wird der Winkel als Grösse oder Mass der Rotation eines Schenkels um den andern in der Ebene definirt (z. B. *Sannia* und *D'Ovidio* a. a. O.). Dabei wird aber von der Ebene Gebrauch gemacht und man weiss überdies nicht, was in abstractem Sinn die Rotation oder ihre Grösse sein soll. Diese Definition entspricht jedoch besser als die übrigen, die bekannt sind, der Vorstellung von einem Winkel; die Grösse der Rotation ersetzt die intensive Grösse des Winkelsectors nach unsrer Definition.

4) Andre sagen, der Winkel sei die von zwei Graden oder Strahlen, welche einen Punkt gemein haben, gebildete Figur (*Hoüel, Cassani, de Tilly,* u. s. w.). Nach dieser Definition würden alle Winkel gleich sein, weil sie von zwei Graden, die sich in einem Punkt schneiden und gleich sind, gebildet werden. Offenbar genügen die Strahlen nicht, wenn man nicht erklärt, welche Figur sie bestimmen oder welche andre Elemente hinzutreten um sie zu bestimmen. Nach unsern Definitionen bestimmen zwei Strahlen, welche sich schneiden, zuerst das gradlinige Paar (S. 257), den Winkelsector und den Winkel in dem Büschel (S. 317, 318) und die analogen Dinge in der Ebene (S. 327).

5) Schliesslich definirt man den Winkel als den Theil der Ebene, welcher durch zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen eingeschlossen ist (*Bertrand* von Genf, *Crelle, Baltzer, De Paolis, Lindemann* a. a. O. S. 544), während der Winkel im gewöhnlichen Sinn eine Grösse von einer Dimension ist und nicht von zweien, wie ein Theil der Ebene.[1])

Note IV.

Bemerkungen über einige Beweise gegen das actual Unendlichgrosse und Unendlichkleine.

In einer Zuschrift an *Schumacher*[2]) protestirt *Gauss* gegen den Gebrauch der bestimmten unendlich grossen Quantität und ist der Ansicht, dies sei in der Mathematik niemals erlaubt. Das Unendliche ist, nach *Gauss*, nur eine „Façon de parler“, indem man eigentlich nur von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist.

Durchaus gerechtfertigt ist die Bemerkung, welche *Gauss* gegen den Beweis von *Schumacher* macht, welcher mittelst der bestimmten unendlichen Grösse

1) Siehe die Anm. zur Vorrede S. XXIX.
2) Vom 12. Juli 1831.

ohne Zuhülfenahme des Postulats über die Parallelen darthun will, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt; denn *Schumacher* benutzt die unendliche Grösse nicht richtig. *Gauss* hat auch Recht, wenn er sagt, das Unendlichgrosse und Unendlichkleine seien rein potentiell, so lange man in dem endlichen Gebiet allein bleibt; wir haben in diesem Fall im Text die Worte unbegrenzt gross und unbegrenzt klein gebraucht.[1]) Wir müssen aber trotz der hohen Achtung, die wir vor der Autorität des grössten deutschen Mathematikers hegen, sagen, dass dies kein Beweis gegen das actuale Unendlichgrosse ist.

Bolzano[2]), welcher trotz vieler fehlerhafter Raisonnements in seinem kleinen Werk, wie *G. Cantor* bemerkt, das Verdienst hat, die Möglichkeit des actualen Unendlichgrossen erkannt zu haben, macht vor dem unendlich grossen auf beiden Seiten begrenzten gradlinigen Segment Halt und bestreitet es.

Hierher gehört auch der Beweis gegen das Unendliche des Professors *Guteberlet* in einem an *G. Cantor*[3]) gerichteten Brief, welcher sich auf das Folgende reducirt: Wenn ein begrenztes unendlich grosses gradliniges Segment (AB) gegeben ist, so schneide man von A aus ein endliches Stück (AX) ab; lässt man dann das Segment (XB) von X nach A hin sich bewegen, bis X nach A gelangt, so tritt der Punkt B aus dem Unendlichgrossen heraus (!) und das Segment (XB) wird endlich; mithin ist $(AX) + (XB)$ endlich. Wie bei unserm unendlich grossen Segment (AB) existirt ein Punkt X' im Unendlichgrossen derart, dass $(X'B) \equiv (AX)$ ist, und da das Commutationsgesetz gilt, so ist $(AX') \equiv (XB)$.

Der eilige Leser möge sich ferner hüten, unsre Unendlichgrossen mit denjenigen *Fontenelle*'s, früheren Secretärs der Akademie von Frankreich, in seinen Éléments de la géométrie de l'infini (Paris, 1727) zu verwechseln, denn auch er gebraucht, wie es heute in anderm Sinn geschieht, die Benennungen unendlich gross und unendlich klein von verschiedenen Ordnungen und wendet wie wir häufig das Zeichen ∞ an.

Wir brauchen hier die verschiedenen offenbaren Widersprüche dieses Autors nicht anzugeben, wir beziehen uns auf die gewichtigen Gründe, mittelst deren einige Mathematiker das System *Fontenelle*'s zerstört haben.[4])

Es wäre oft bei dieser wie bei andern ähnlichen Fragen von Interesse, die Kritiker selbst zu kritisiren, denn wenn gewisse Autoren Vorurtheile gehabt haben, so sind ihre Kritiker nicht frei davon geblieben. Wir können z. B. *Achard* und *Gerdil* in dem von ihnen versuchten Beweis gegen die actuale unendlich grosse Zahl nicht folgen; man muss dagegen anerkennen, dass sich

1) Siehe die Anm. auf S. 142.
2) Paradoxien des Unendlichen. Leipzig. 1847.
3) Zeitschrift für Phil. von *Fichte*. Bd. 91. Fasc. I, S. 99 oder auch: Zur Lehre vom Transfiniten. Halle. 1890.
4) *Maclaurin*, Treatise of Fluxions. 1742. Einl. S. XLI—XLV. Kard. *Gerdil*'s Opere edite e inedite. Rom. 1806. Bd. IV, S. 261 u. Bd. V, S. 1. Die in Bd. V abgedruckte Abhandlung „De l'infini absolu considéré dans la grandeur" wurde zuerst in den Miscellanea Taurinensia der Jahre 1760, 1761 veröffentlicht. *Achard*, Réflexion sur l'infini mathématique. Königl. Ak. zu Berlin. 1745.

bei *Fontenelle* (a. a. O. S. 30) und specieller bei *Gerdil* die Vorstellung der unendlich grossen Zahl ω *Cantor's* vorfindet. *Gerdil* sagt in der That auf S. 268, Bd. IV, a. a. O.:

„Die natürliche Reihe der Zahlen ist potentiell unendlich gross insofern man sich denkt, dass es keine angebbare Zahl in dieser Reihe gibt, zu welcher man nicht andre immer durch eine unbegrenzte Addition von Einheit zu Einheit hinzufügen kann. Diese Möglichkeit beständig ohne irgend ein Ende ein Glied zu einem andern hinzuzufügen bildet das Unendlichgrosse potentiell. Das potentiell Unendlichgrosse wird nun das actuell Unendlichgrosse nur dann, wenn dasjenige, welches man sich bei dem potentiell Unendlichgrossen als in der Bildung begriffen denkt, als bereits geschehen und vollendet gedacht wird. Die thatsächliche Unendlichkeit ist so zu sagen die Ausführung oder Vollbringung der Möglichkeit, welche das potentiell Unendlichgrosse bildet. Die potentiell unendlich grosse natürliche Reihe kann daher nur dadurch actuell unendlich gross werden, dass man sich diese Möglichkeit der Addition von Zahl zu Zahl vollständig ausgeführt denkt.“

Es ist dies die Idee *G. Cantor's*, wenn er sagt:

„So widerspruchsvoll es daher wäre, von einer grössten Zahl der Classe (*I*) zu reden, hat es doch andrerseits nichts Anstössiges sich eine *neue* Zahl, wir wollen sie ω nennen, zu denken, welche der Ausdruck dafür sein soll, dass der ganze Inbegriff (*I*) in seiner natürlichen Succession dem Gesetze nach gegeben sei.“[1]) (Siehe unsre Anm. auf S. 118.)

Gerdil fährt dann fort:

„Und da keine Zahl möglich ist, welche in der natürlichen Reihe nicht vorkäme *(hier liegt der Irrthum)* und es keine Zahl gibt, welche ihr nicht hinzugefügt werden könnte, so ist es, damit diese Reihe thatsächlich unendlich gross werden kann, auch nöthig, dass keine Zahl möglich sei, welche man sich nicht thatsächlich hinzugefügt denkt. Diese Reihe kann daher nicht in der That unendlich gross sein, weil sie nicht alle möglichen Zahlen oder die ganze Möglichkeit der Zahlen enthält.“

Hätte dabei *Gerdil* nicht im Voraus an einen später zu gebenden Beweis gegen die Ewigkeit des Weltalls gedacht, so hätte er leicht die Zahl ω *Cantor's* finden können, wie dies wohl auch einem unparteiischem Kritiker bei der Prüfung dieses Gedankengangs möglich gewesen wäre.

Der Abbé *Moigno* bringt in seiner „Impossibilité du nombre actuellement infini. La science dans ses rapports avec la foi (Paris, 1884)“ mathematisch nichts Neues gegen die actual unendlich grosse Zahl vor.

Von einer andern Art sind die Unendlichkleinen von *J. Bernoulli*[2]), *l'Hospital*[3]), *Poisson*[4]). *Bernoulli* schreibt an *Leibniz:*

„Dico . . . infinita et infinite-parva non posse demonstrari existere, sed

---

1) Z. B. Acta math. Bd. 2, S. 385.
2) Leibnitii et Iohannis Bernoulli commercium philos. et mathem. 1745. Bd. I, S. 370—440.
3) Analyse des infiniments petits, 2. Ausg. Paris. 1716.
4) Traité de mécanique, 2. Ausg. 1833.

etiam non posse demonstrari non existere: probabile tamen esse existere. Si omnes termini hujus progressionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. actu existunt, ergo existit infinitesimus" (a. a. O. S. 402).

Und später bei der Betrachtung der genannten Reihe:

„Si decem sunt termini existit utique decimus, si centum sunt termini existit utique centesimus, ..., ergo si numero infinito sunt termini, existit infinitesimus."

Offenbar *definirt Bernoulli nicht* das Unendlichkleine, aber er *glaubt* an seine Existenz; er beweist es auch nicht durch die genannte Reihe; es folgt in der That nicht, dass durch eine unendlich grosse Reihe endlicher Glieder das Unendlichkleine bestimmt sei und es wäre ein Widerspruch, wenn man annehmen wollte, es existire in der Reihe selbst.

So glaubt auch der Idealist *Du Bois Reymond*'s an das Unendlichkleine, definirt es aber nicht. Er sagt (a. a. O. S. 71, 72):

„Der Satz, dass die Anzahl der Theilpunkte auf der Einheitsstrecke eine unendlich grosse sei, erzeugt mit logischer Nothwendigkeit den *Glauben* an das Unendlichkleine."

Unter Unendlichgrossem versteht er jede in der Darstellung unbegrenzte Gruppe von Elementen, welche unabhängig von der Existenz denkender Wesen betrachtet über dasjenige, was mittelst fester Maasse messbar ist, hinausgeht (S. 70).

Die Theilungspunkte der Einheit, welche man durch die Theilung in eine ganze *endliche* Anzahl n gleicher Theile erhält, sind in unendlich grosser Zahl vorhanden und ihre Classe ist von der ersten Potenz, wie *G. Cantor* gezeigt hat, und doch ist jedes Segment, welches zwei gegebene von diesen Punkten vereinigt, immer endlich.

Aber auch alle Beweise gegen den Glauben *Bernoulli*'s entbehren der Grundlage, weil man zuerst nicht nur *eine*, sondern *alle* Definitionen geben muss, welche mit diesem Glauben an das actuale Unendlichkleine (dargestellt durch ein begrenztes gradliniges Segment) vereinbar sind. Dieses ist aber nicht geschehen. Wir haben z. B. gezeigt, dass unser Unendlichkleines durch die transfiniten Zahlen *Cantor*'s nicht ausgedrückt werden kann.

Es steht fest, dass man ohne die Definition einer Vorstellung, welche verschiedene Deutungen zulässt, leicht in Widersprüche verfällt.

Wir müssen jedoch hinzufügen, dass sich nach unsrer Meinung Nichts gegen die Möglichkeit des Unendlichkleinen von *Du Bois Reymond* und *Stolz* einwenden lässt.

Der Marquis *de l'Hospital* gibt in seiner *Analyse* keine Definition des Unendlichkleinen; er nimmt aber als Postulat wie der Idealist *Du Bois Reymond*'s als Definition an, dass „zwei endliche Grössen, welche um ein Unendlichkleines differiren, gleich sind", während wir diese Eigenschaft durch unsre Unendlichkleinen bewiesen haben. Gelegentlich dieses Satzes möchten wir behaupten, dass sowohl diejenigen, welche an das Unendlichkleine *glauben*, als ihre Kritiker,

nicht genau zwischen der relativen und absoluten Gleichheit unterschieden haben; dieser Begriff wird schon auf den ersten Seiten unsres Textes entwickelt.

Poisson gibt schliesslich folgende Definition (a. a. O. S. 16):

„Ein Unendlichkleines ist eine Grösse, welche kleiner ist, als jede von der Natur selbst gegebene Grösse."

Dieser Satz enthält offenbar einen Widerspruch in seinen Worten.

P. Mansion bestreitet in seinem Esquisse de l'histoire du calcul infinitesimal das actual Unendlichkleine, welches er pseudo-infiniment petit nennt; er stützt sich aber auf die Definition *Poisson*'s. Nach dem, was wir oben sagten, ist es nicht Recht diese Definition *Poisson*'s *Bernoulli* zuzuschreiben, wie es *Mansion* thut; jedenfalls müsste man dies erst nachweisen (a. a. O. S. 30).

G. Cantor[1]) gibt einen Satz über die Unmöglichkeit der Existenz der linearen unendlich kleinen actualen Grösse, *deren Bild ein begrenztes continuirliches gradliniges Segment ist,* indem er den Beweis auf seine transfiniten Zahlen gründet. Er behält diesen Satz als im Allgemeinen richtig bei und beweist das Axiom V des *Archimedes* für die gradlinigen Segmente (Anm. zu § 81), welches nach unsrer Def. II, § 82 und Satz b, § 81 bedeutet, dass sie endlich oder von derselben Art sind (Def. I, § 86). Obgleich er den Beweis nicht vollständig gibt, so geht er doch, wie es scheint, von dem Begriff aus, dass jede lineare Grösse, welche unendlich gross ist, durch eine seiner transfiniten Zahlen darstellbar sein *muss.* Wie er sagt, liesse sich mithin durch gewisse Sätze über diese Zahlen beweisen, dass, wenn eine unendlich kleine Grösse ζ existirte, die Grösse $\zeta\nu$ — unter ν eine beliebige seiner transfiniten Zahlen verstanden — stets kleiner als jede endliche Grösse bleibe und dass desshalb ζ nicht endlich werden kann, ν mag eine Zahl sein, welche es will. Diesen Beweis wendet er auf die Grade an. Nun hat aber die Grade in dem Gebiet der wahrnehmbaren linearen Einheit alle Eigenschaften des homogenen Systems, ja gerade das intuitive gradlinige Continuum (§ 55) hat uns den Weg gezeigt zur Aufstellung der Definition des homogenen Systems (§ 68) und des in der Position seiner Theile identischen Systems (§ 70), unabhängig jedoch von dem Begriff der Scala (Def. I, § 80).

Lässt man nun das actuale Unendlichgrosse auf der Graden zu, so bietet sich als erste Hypothese, dass sie ihre Homogenität auch im Unendlichgrossen bewahrt und dass mithin ihre im Unendlichgrossen liegenden Punkte — unabhängig, wie gesagt, von dem Begriff des Endlichen und Unendlichgrossen, der aus dem Begriff der Scala folgt — der Definition des homogenen Systems unterworfen sind. Für diesen Fall haben wir oben bewiesen (b und f), dass ihre im Unendlichgrossen liegenden Punkte sich nicht durch die transfiniten Zahlen *Cantor*'s darstellen lassen, sondern durch unsre unendlich grossen Zahlen dargestellt werden müssen. *Cantor* hält dagegen aus den oben entwickelten

1) Zeitschr. für Phil. 91. Heft I, S. 112 oder auch „Zur Lehre vom Transfiniten". Halle. 1890.

Gründen die Hypothese, dass die im Unendlichgrossen liegenden Punkte der Graden durch die Zahlen ω, $\omega + 1$, u. s. w. dargestellt werden, für nothwendig, wenn man das actuale Unendlichgrosse zulässt.[1]) Bei dieser Hypothese behält die Grade in den im Unendlichgrossen liegenden Punkten nicht ihre Homogenität und in der Umgebung dieser Punkte gelten mithin die aus der Erfahrung abgeleiteten Eigenschaften nicht mehr.

Cantor sagt a. a. O.: „Nun ist der Gedankengang jener Autoren (*O. Stolz* und *Du Bois-Reymond*), dass wenn man dieses vermeintliche „Axiom“ (das des *Archimedes*) fallen liesse, daraus ein Recht auf actual unendlich kleine Grössen, welche dort „Momente“ genannt werden, hervorgehen würde. Aber aus dem oben von mir angeführten Satz folgt, wenn er auf *gradlinige stetige Strecken* angewandt wird, unmittelbar die Nothwendigkeit der *Euclid*'schen Annahme (*Euclid* Buch V, Def. 4).“

O. Stolz hat dagegen bewiesen, dass für seine unendlich kleinen Grössen oder für die unendlich grossen und unendlich kleinen Grössen *Du Bois-Reymond*'s der obige Satz *Cantor*'s nicht gilt. *Stolz* fügt aber hinzu, er habe mit der Definition des Continuums, die derjenigen *Dedekind*'s analog ist, bewiesen, dass alle gradlinigen Segmente die obige Eigenschaft des *Archimedes* besässen.[2]) Wenn dann *Cantor*, wie es scheint, meint, die linearen Grössen, welche er in Betracht zieht, seien stetig und „liessen sich unter dem Bild begrenzter gradliniger stetiger Strecken vorstellen“, so wiederholen wir die Bemerkung, die wir vor Kurzem in einer Abhandlung gemacht haben (Il continuo rettilineo e l' assioma V d' Archimede. Atti della R. Acc. dei Lincei 1890), dass nämlich in den von Andern gegebenen Definitionen des gewöhnlichen Continuums implicite das obige Axiom enthalten ist. In diesem Fall ist es daher, wie wir später sehen werden, nicht nöthig die transfiniten Zahlen zu Hülfe zu nehmen, um die Unmöglichkeit der Existenz der unendlich kleinen Grösse zu beweisen, weil sie a priori, wie es z. B. bei der Definition des Continuums durch *Cantor* der Fall ist, ausgeschlossen ist.[3])

Auch *Cantor* hat unendlich grosse Zahlen in Betracht gezogen, die derart sind, dass, wenn α eine dieser Zahlen ist, $\alpha + 1 = \alpha$ ist und die er „Cardinalzahlen“ nennt (siehe die 2. Anm. zu § 48). Er definirt sie jedoch unabhängig von der Ordnung, in welcher die Elemente gezählt werden, während diese Eigenschaft für uns die Folge der Eigenschaft der Segmente oder der Gruppen ist, aus welchen unsre Zahlen entstehen. Unsre Zahlen sind daher, wie man in der Einleitung schon gesehen hat, von den Cardinalzahlen oder Potenzen (Mächtigkeiten) *Cantor*'s verschieden.

Vivanti hat in der Rivista di matematica vom Juni 1890, als dieser An-

---

1) Siehe auch Zeitschr. für Phil. I, a. a. O. Heft I, wo er die Gründe des Professors *Gutberlet* gegen das begrenzte Unendlichgrosse widerlegt, und unsre Anm. 2 zu § 82 und die Vorrede.

2) Math. Ann. Bd. XXXI, S. 608 und ebendas. Bd. XXII und Vorles. ü. allg. Arithm. Bd. I, S. 69—83.

3) Siehe auch *Stolz*, Math. Ann. XXII, Anm., S. 508.

hang gedruckt werden sollte, einen Artikel gegen das actual Unendlichkleine veröffentlicht. Auch wir waren in Folge einiger Mittheilungen, die wir dem Director der Rivista über den obigen Beweis *Cantor*'s gemacht hatten, im verflossenen Januar eingeladen worden, denselben Gegenstand zu behandeln. Wir waren durch die Herausgabe dieses Buches zu sehr in Anspruch genommen, um dieser freundlichen Aufforderung nachkommen zu können; auf der andern Seite wird der Gegenstand in diesem Buch ausführlich behandelt. *Vivanti* haben wir im letzten December, da wir wussten, dass er sich mit den Arbeiten *Cantor*'s beschäftigt hatte, einige Bemerkungen über diesen Beweis geschickt und bei ihm angefragt, ob er ihn vielleicht vollständig kenne. Er antwortete, er habe nie zuvor Gelegenheit gehabt sich mit ihm zu beschäftigen; dies geht auch aus der Mittheilung hervor, welche *Vivanti* dem Circolo matematico von Palermo im Juni 1890 als Erwiderung auf einige Bemerkungen des Professors *Giudice* machte.

Indem *Vivanti* von dem Beweis *G. Cantor*'s spricht, sagt er, *ohne vorher definirt zu haben, was das gradlinige Segment ist, alle* gradlinigen Segmente zerfielen in zwei Classen; diejenigen der ersten Classe seien durch zwei Punkte A und B, die andern durch nur einen Punkt begrenzt. Die ersten nennt er *endlich*, die letzteren *unendlich gross* (a. a. O. S. 137).

Mittelst eines Sternchens am Schluss dieser Definition verweist er auf die Definitionen endlicher und unendlich grosser Gruppen von Elementen, welche *Cantor* und *Dedekind* gegeben haben, gibt aber nicht an, wie sie hier bei der Definition des endlichen Segments angewendet werden sollen, da das gewöhnliche stetige gradlinige Segment eine Gruppe unendlich vieler Elemente ist, welche, wie *Cantor* gezeigt hat, von einer höheren als der ersten Potenz ist. Es wäre auch möglich, dass *Vivanti*, da er das Segment nicht genau definirt hat, etwas Andres meint.

Jedenfalls geht aus der Definition hervor, dass ein beliebiges Segment der Graden entweder *endlich* oder *unendlich gross* ist; eine dritte Hypothese wird durch die Definition selbst ausgeschlossen. Er stellt sich dann die Frage:

„Existirt ein Segment derart, dass es eine beliebig grosse endliche Anzahl mal wiederholt, niemals ein angegebenes endliches Segment erschöpft?"

Dieses Segment ist nach der Definition, welche er vorher gibt (S. 137), *actual unendlich klein*, d. h. eine beliebige endliche Anzahl mal wiederholt bildet es niemals eine beliebige endliche Grösse und, weil es sich hier um Segmente handelt, ein beliebiges endliches Segment. Nun ist es aber nach der oben erwähnten Definition entweder *endlich* oder *unendlich gross.* Hier wenigstens tritt eine grosse und offenbare Verwirrung der Benennungen auf, weil auch im gewöhnlichen Sinn unendlich klein weder endlich noch unendlich gross bezüglich eines bestimmten endlichen Segments ist; es sei denn das Unendlichkleine werde in dem Sinn von unbegrenzt klein genommen, was in diesem Fall ausgeschlossen ist.

Wir nennen die begrenzten Segmente der Grundform *absolut endlich* (Einl. S. 127, 128). Diese können aber derart sein, dass das eine unendlich gross

bezüglich des andern ist, während wir mit dem Wort *endlich* allein, wie dies auch gewöhnlich so verstanden wird, meinen, sie seien das eine bezüglich des andern endlich oder genügten dem Axiom V des *Archimedes*.

Der Schluss, zu welchem *Vivanti* kommt, dass „das actual Unendlichkleine als extensive d h. mittelst eines Segments darstellbare Grösse nicht existirt", ist im Allgemeinen nicht richtig; er leitet dies aus der Definition des gewöhnlichen Continuums ab, wie übrigens auch *Stolz* gethan hat[1]), d. h. nur insoweit die begrenzten gradlinigen Segmente dem genannten Axiom genügen. Wollte *Vivanti* die allgemeine Gültigkeit seines Schlusses nachweisen in der Art, wie die Sätze I—V unsrer Abhandlung: Il continuo rettilineo e il assioma V d' Archimede für die Grade gelten, so hätte er beweisen müssen, dass das Multiplicationssymbol η unsres Satzes V eine endliche Zahl ist. Er hätte sich so auch davon überzeugen können, wie nützlich für dieses gradlinige Continuum und mithin auch für das gewöhnliche Continuum des Axioms des *Archimedes* die Trennung dieses Princips von den übrigen ist. Er hat dies aber nicht gethan und konnte es nicht thun, wie die Zahlen zweiten Grades *Bettazzi*'s (a. a. O.) zeigen.

Was nun die Ansicht *Vivanti*'s angeht, es liege kein Grund vor unsre in der erwähnten Abhandlung gegebene Definition des gewöhnlichen Continuums der Definition von *Stolz* (welche mit einigen Verbesserungen *Bettazzi* angenommen hat) vorzuziehen, so haben wir schon in der Vorrede hinreichend die Gründe besprochen, wesshalb gerade die unsrige vorzuziehen ist. Und was seine Ansicht angeht, die Definition sei desshalb nicht vorzuziehen, weil das Axiom des *Archimedes* nicht an sich einleuchtend sei, so können wir uns nur auf die sämmtlichen Elementarbücher der Geometrie berufen, in welchen mit ausdrücklicher Erwähnung oder ohne eine solche vor der Definition des Continuums dieses Axiom benutzt wird.[2])

Pasch selbst, welcher, wie wir ausführten, bei der Aufstellung der Sätze der Geometrie dem reinen Empirismus folgte, gibt auch dieses Axiom. Wenn es sich um geometrische Evidenz handelt, scheint uns die Geschichte der beste Richter zu sein.

Vivanti führt zur Unterstützung seiner Behauptung, dem Axiom des *Archimedes* fehle die Evidenz, an, die Existenz des actual Unendlichkleinen sei stets von Mathematikern und Philosophen vorausgesetzt worden. Dies beweist aber nichts, weil das Axiom sich auf die Segmente bezieht, welche wir ausser uns beobachten, während wir das unendlich kleine Segment, auch wenn es *effectiv* in der äusseren Welt existirte (was wir nicht nöthig haben vorauszusetzen), doch niemals zugleich mit den endlichen Segmenten sehen würden. Die Annahme aber solcher Elemente, wie wir sie eingeführt haben, führt weder mit den Axiomen der Geometrie, mit Ausnahme desjenigen des *Archimedes*, noch mit der Anschauung in Widerspruch, denn mit Bezug auf die endliche Einheit

1) Math. Ann. Bd. XXXI, S. 606.
2) Siehe z. B. *De Paolis:* Elementi di Geometria.

sind die unendlich kleinen Segmente Null und die unendlich grossen einander gleich. Diese unendlich grossen und unendlich kleinen Segmente (man darf sie nicht mit denjenigen *Du Bois-Reymond's* verwechseln, für welche nicht immer wie für die unsrigen die Regeln der Grundoperationen der gewöhnlichen Arithmetik gelten) werden auch nicht mittelst der Anschauung bestimmt, sondern durch einen möglichen geistigen Act und gerade Dieses verbürgt ihre geometrische Möglichkeit.

Killing[1]) glaubt die obige Eigenschaft zu beweisen, indem er von dem Satz ausgeht, dass zwei gradlinige Segmente entweder sich zur Deckung bringen lassen oder dass das erste einem Theil des zweiten oder das zweite einem Theil des ersten congruent sei, und hinzufügt, diese drei Fälle schlössen sich gegenseitig aus. Er sagt: Wenn von A aus die Punkte B und C in derselben Richtung liegen und C gehört nicht dem Segment (AB) an, so gibt es immer ein vielfaches Segment (AD) von (AB), welches den Punkt C enthält; und umgekehrt: wenn das Segment (AC) gegeben ist, so kann man es in eine endliche Anzahl gleicher Theile derart zerlegen, dass wenigstens einer der Theilungspunkte zwischen A und B fällt. Wenn, sagt er, die erste Eigenschaft nicht besteht, so muss es einen solchen Punkt R geben, dass kein endliches Vielfache von (AB) das Segment (AR) überragt, *während man zu jedem zwischen A und R gelegenen Punkt gelangt.* Man nehme nun in (AR) ein Segment $(SR) \equiv (AB)$; wie man dann nach der Voraussetzung mittelst der Addition des Segments (AB) zu sich selbst zu jedem zwischen S und R gelegenen Punkt gelangt, so würde dasselbe Verfahren über das Element R hinausführen. Die Hypothese einer Grenze ist mithin nicht gestattet.

Bei diesem Beweis setzt *Killing* voraus und beweist es nicht, dass, wenn der Punkt R existirt, man durch die Addition von (AB) zu sich selbst *nothwendigerweise* zu jedem zwischen A und R gelegenen Punkt gelangen müsse und dass R dieselben Eigenschaften wie die andern Punkte besitzt. Und diese in dem Beweis *Killing's* enthaltene Hypothese, welche die unendlich kleinen Segmente ausschliesst, ist im Grund die Eigenschaft, die er beweisen will.

Sind die rationalen z. B. nur die positiven Zahlen, die, wie man weiss, diesem Axiom genügen, gegeben, so lässt man sie den Segmenten eines homogenen Systems von einem gegebenen Element als Anfang an in einer gegebenen Richtung des Systems und in Bezug auf eine Einheit (AA_1) entsprechen (Def. I, § 80). Ist dann weiter die Definition der endlichen, unendlich kleinen und unendlich grossen Segmente gegeben (Def. II, § 82 oder auch durch die Bedingungen der Sätze b und c, § 81), so beweist man, dass jedes endliche Segment, welches kleiner als jedes gegebene rationale Segment ist, in Bezug darauf der Bedingung des Satzes c', § 81 genügt.[2]) Alsdann beweist man, dass es immer ein rationales Segment gibt, welches kleiner als jedes endliche gegebene Segment ist,

1) Ueber die nichteuclidischen Raumformen. S. 46—47. Leipzig. 1885.
2) Siehe auch die citirte Schrift des Verf. Il continuo rettilineo u. s. w. Satz m, S. 13.

indem man sich auf den Beweis des Satzes d, § 99 (oder in der citirten Schrift e, S. 18) stützt, welcher unabhängig von der Hypothese VI (oder in der citirten Schrift von dem Princ. IV) ist und indem man die Theilbarkeit der rationalen Segmente in eine beliebige gegebene ganze Zahl n gleicher Theile voraussetzt. Wenn man nun einen *Schnitt* $(A_1 A_2)$ durch die rationalen Zahlen (Segmente) derart macht, dass A_1 keine Maximal- und A_2 keine Minimalrationalzahl hat, so sieht man aus einem ähnlichen Beweis wie bei Satz b, § 97, dass der Unterschied zwischen den beiden Zahlen a_1, a_2 von A_1, A_2 nicht immer grösser als eine gegebene endliche Zahl (Segment) sein kann. Ist mithin $(A_1 A_2)$ durch die beiden Zahlen α und α' bestimmt, so müsste die Differenz α, α' (oder das durch die beiden Enden der Segmente α und α' gegebene Segment) unendlich klein sein. Umgekehrt sieht man, dass wenn in dem homogenen System ein unendlich kleines Segment (Zahl) ε existirt und α ein zwischen den Segmenten von A_1 und A_2 liegendes Segment ist, auch das Segment $\alpha + \varepsilon$ diese Eigenschaft besitzt (b', § 69). Wenn man daher, wie *Dedekind* (a. a. O. S. 21), festsetzt, dass der *Schnitt* $(A_1 A_2)$ unter den obigen Bedingungen nur eine einzige irrationale Zahl α bestimmen soll, so schliesst man die unendlich kleine Zahl oder das unendlich kleine Segment aus, d. h. man lässt das Axiom V des *Archimedes* für alle reellen Zahlen gelten.

Betrachtet man dagegen das Postulat *Dedekind*'s unter der Form, die er ihm auf S. 18 seiner citirten Abhandlung gibt, nach welcher die Punkte eines gradlinigen Segments (AB) in zwei Gruppen (X) und (X') derart zerlegt werden, dass für jedes Paar von Elementen X und X' immer $(AX) < (AX')$ ist, so gibt es nur einen einzigen Punkt Y zweier Segmente (AY) und (YB) derart, dass (AY) alle Punkte X und (YB) alle Punkte X' enthält und dass mithin Y einer der beiden Gruppen (X) und (X') angehört. Das Postulat schliesst auch in diesem Fall das Unendlichkleine und Unendlichgrosse direct aus (Def. I, § 68 und Def. II, § 82). Es reicht in der That aus, dass es einen Punkt Y gibt, damit es nur einen einzigen gebe.[1])

Denn wenn ein unendlich kleines Segment (AA') existirt, was man in dem homogenen System auch ohne das obige Postulat annehmen kann, und (AB) ein endliches Segment ist, so ist stets $(AB) > (AA')n$, welches auch die ganze Zahl n der Reihe (I) sein mag (§ 46 und c, § 81). Wenn man nun die in dem Segment (AB) enthaltenen Elemente in zwei Gruppen theilt, so dass jedes Element der ersten Gruppe in den durch $(AA')n$ gegebenen Segmenten [d. h. in dem Gebiet der Scala der Einheit (AA')] liegt, während alle andern Elemente von (AB) der zweiten Gruppe angehören, so hat, wie man sieht, die zweite Gruppe kein erstes (b', § 69) und die erste Gruppe kein letztes Element und mithin kann es kein einziges Element geben, das der Def. I, § 68 genügt und durch die beiden Gruppen bestimmt wird. Durch das obige Postulat wird also, wenn (AA') existirt, das Segment (AB) ausgeschlossen und umgekehrt oder im ersten Fall wird das begrenzte unendlich grosse Segment, dessen Enden der

1) Siehe auch *De Paolis*, Teoria dei gruppi u. s. w., S. 12.

Def. I, § 68 genügen, und im zweiten Fall das Unendlichkleine ausgeschlossen. Das heisst also, man lässt in jedem Fall die Bedingung des Satzes b, § 81 oder das Axiom des *Archimedes* gelten.

Den von *Stolz* und *Bettazzi* gegebenen Beweis kann man unnöthig machen, wenn man der Definition der Stetigkeit folgend zeigt, die Definition enthalte entweder selbst in verschiedener *Form* das genannte Axiom oder das Axiom sei die *unmittelbare* Folge der Definition.

Denn: Wenn eine Classe von Grössen die Gruppe P_1 von Grössen nB und die Gruppe P_2 von Grössen $A - mB$ enthält, wie gross auch m und n seien (unter m und n ganze endliche Zahlen verstanden) und wenn $(A - mB) - nB$ grösser als die Grösse B bleibt, so sagt in einem solchen Fall *Bettazzi* (S. 30) *direct*, in der Classe sei ein *Sprung* (nach *Stolz* „eine Lücke").

Nach *Bettazzi* (S. 40) ist „eine Classe *zusammenhängend*, wenn sie niemals Gruppen $(P_1 P_2)$ besitzt, welche entweder zu Aufeinanderfolgen oder *Sprüngen* führen"; d. h. die erwähnte Gruppe von Grössen ist ausgeschlossen oder es ist ausgeschlossen, dass $A - pB$ $(p = m + n)$ grösser als B sei oder, wenn man wieder eine andre Form anwendet um denselben Sinn auszudrücken, es ist die dem Axiom des *Archimedes* entgegengesetzte Eigenschaft ausgeschlossen oder dieses Axiom selbst wird für gültig erklärt. Eine Classe ist ferner nach *Bettazzi* *stetig*, wenn sie *zusammenhängend* und geschlossen ist, d. h. wenn sie dem Axiom des *Archimedes* genügt und geschlossen ist. Der Beweis dieses Axioms von *Stolz* nun stützt sich, nachdem andre Eigenschaften des Continuums bewiesen sind, wie derjenige *Bettazzi*'s auf das Fehlen von Sprüngen.

In diesem Sinn sind die wenigen Worte zu verstehen, welche wir im Anfang unsrer Abhandlung „il continuo u. s. w." gesagt haben und die wir nicht weiter erklärten, weil wir die Veröffentlichung der uns von Professor *Stolz* im Juni 1890 freundlichst mitgetheilten Bemerkungen, in welchen die Correctur seines Princips IV enthalten war, abwarten wollten. Wir heben noch hervor, um nicht missverstanden zu werden, dass wir in dieser Abhandlung nicht der in diesem Buch benutzten Methode haben folgen wollen: denn sie ist der Auszug aus einer dem Professor *Stolz* übersandten Schrift, in welcher wir uns des bessern Verständnisses und der Kürze wegen an die Methode in seinen „Vorlesungen" gehalten haben.

Diese Frage ist überhaupt nur dann von Wichtigkeit, wenn die Sätze über das Continuum unabhängig von dem Axiom des *Archimedes* gegeben werden. Gerade Dieses haben wir in der genannten Abhandlung und diesem Buch gethan, so dass wir eine absolute Geometrie abhandeln, in welcher es begrenzte gradlinige Segmente gibt, die diesem Axiom nicht genügen.

Verzeichniss der Namen der citirten Schriftsteller.[1])

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

1) Siehe die Anm. auf Seite 631.

Drach, Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte.
Fiedler, die darstellende Geometrie.
—— Cyklographie.
Hofmann, die Konstruktionen doppelt berührender Kegelschnitte.
Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen.
—— einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie.
Klekler, die Methoden der darstellenden Geometrie.
Prix, Elemente der darstellenden Geometrie.
Reusch, die stereographische Projektion.
Schell, allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung.
Scherling, Grundzüge der axonom. und schiefen Parallel-Projektion.
Sturm, Elemente der darstellenden Geometrie.
Weiler, neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonom.
Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie.

4. Neuere synthetische (projektive) Geometrie.

(Geometrie der Lage, Kollineation und Homographie.)

Bobek, Einleitung in die projektivische Geometrie, bearb. nach Küpper.
Disteli, die Steinerschen Schliefsungsprobleme.
Dronke, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise.
Durège, die ebenen Kurven dritter Ordnung.
Eberhard, die Grundgebilde der ebenen Geometrie.
—— zur Morphologie der Polyeder.
Fiedler, Cyklographie.
Fuhrmann, W., Einleitung in die neuere Geometrie.
Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie.
Hankel, Vorlesungen über die Elemente der projektivischen Geometrie.
Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie, 2. Teil.
Müller, H., Leitfaden der ebenen Geometrie, 1. Teil 2. Heft und 2. Teil.
—— Leitfaden der Stereometrie.
Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie.
Reye, synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme.
Schell, allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung.
Schroeter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung u. Raumkurven 3. Ordnung.
—— Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung.
—— Grundzüge einer rein geometr. Theorie der Raumkurven 4. O. 1. Sp.
Steiner's Vorlesungen über synthet. Geom., bearb. v. Geiser u. Schroeter.
Sturm, synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung.
—— die Gebilde 1. u. 2. Grades der Liniengeometrie in synthet. Behandlung.
Treutlein und Henrici, siehe: Henrici und Treutlein.
Weyer, Einführung in die neuere konstruierende Geometrie.
Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde.
—— Geometrie der räumlichen Erzeugnisse 1—2deutiger Gebilde.
Wiener, stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche 3. O.
Witzschel, Grundlinien der neueren Geometrie.

5. Topologie oder Gestaltenlehre.

(Anwendung auf Krystallographie.)

Dingeldey, topologische Studien u. s. w.
Eberhard, zur Morphologie der Polyeder.
Minkowski, Geometrie der Zahlen.
Schoenflies, Krystallsysteme und Krystallstruktur.
Sohncke, Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur.

6. Abzählende Geometrie.

Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie.

7. Geometrie der Bewegung.

(Kinematik.)

Abdank-Abakanowicz, die Integraphen. Deutsch von Bitterli.
Dingeldey, Erzeugung von Kurven 4. O. durch Bewegungsmechanismen.
Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Band.
Schoenflies, Geometrie der Bewegung.
Somoff, theoretische Mechanik, deutsch von Ziwet, I. Bd.







